

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

Mémoire présenté pour obtenir le

DIPLÔME DE RECHERCHE TECHNOLOGIQUE

Spécialité : **Mathématiques appliquées et industrielles**

préparé au Laboratoire de Développements et Applications à l'échelle Locale du CEA-Grenoble

par

M. STÉPHANE VEYS

Extension dans TRIO_U de la méthode des éléments joints aux problèmes thermohydrauliques et à différentes discrétisations.

Commission d'examen :

M. Christophe PRUD'HOMME	Université Joseph Fourier	Encadrant
M ^{lle} Isabelle CHARPENTIER	Université de Metz	Rapporteur
M. Philippe ÉMONOT	CEA-Grenoble	Rapporteur
M. Éric BLAYO	Université Joseph Fourier	Examineur
M. Thomas FORTIN	CEA-Grenoble	Encadrant

Table des matières

Nomenclature	7
Introduction	9
1 Point de départ	11
1.1 Présentation de TRIO_U	11
1.1.1 Rapide présentation	11
1.1.2 Méthodes numériques utilisées	12
1.1.3 Résolution de problèmes par TRIO_U	12
1.2 Présentation des travaux d'Éli Laucoin	16
1.2.1 Aspect géométrique	16
1.2.2 Aspect numérique	17
1.2.3 Aspect parallèle	25
I Applications numériques	27
2 Architecture logicielle	29
2.1 Ajout de nouveaux sous-modules	29
2.2 Modifications du sous-module FRAMEWORK	29
2.3 Modifications du sous-module MORTAR	32
2.4 Modifications du sous-module GEOMETRY	33
3 Résolution de problèmes thermohydrauliques	35
3.1 Partie théorique	35
3.1.1 Ajout du terme de convection dans les équations	35
3.1.2 Assemblage du système linéaire	37
3.1.3 Terme de convection explicité	37
3.2 Résultats numériques	38
3.2.1 Sans avoir recours aux éléments joints	38
3.2.2 Utilisation des éléments joints	44
3.2.3 Raffinement automatique	48
4 Intégration de la discrétisation VDF	53
4.1 Discrétisation VDF sans mortier	53
4.2 Discrétisation VDF avec mortier	56
4.3 Difficultés liées à la discrétisation VDF	58

II	Aspects théoriques	61
5	Unicité et existence des solutions (VEF)	63
5.1	Système linéaire global	63
5.2	Conditions d'existence et d'unicité global	63
5.3	Première caractérisation de D_h et V_h	65
5.3.1	Détermination de D_h	65
5.3.2	Construction d'une base de D_h	66
5.3.3	Détermination de V_h	68
5.3.4	Base de V_h	70
5.4	Seconde caractérisation de D_h et V_h	72
5.4.1	Détermination de D_h	72
5.4.2	Base de D_h	73
5.4.3	Détermination de V_h	73
5.4.4	Base de V_h	74
5.5	Démonstration des conditions inf-sup	75
5.5.1	Condition inf-sup sur $b_h(.,.)$	75
5.5.2	Condition inf-sup sur $c_h(.,.)$	76
5.5.3	Condition inf-sup sur $a_h(.,.)$	77
6	Unicité et existence des solutions (VDF)	79
6.1	Continuité faible du champ de vitesse	79
6.1.1	Définitions et notations	79
6.1.2	Condition inf-sup liée à $b_h(.,.)$	80
6.2	Continuité faible de la composante normale du champ de vitesse	83
6.2.1	Définitions et notations	83
6.2.2	Condition inf-sup liée à $b_h(.,.)$	83
6.2.3	Condition inf-sup liée à $c_h(.,.)$	84
7	Opérateurs d'interpolation et d'extrapolation	85
7.1	Opérateur d'interpolation mis en place par Éli Laucoin	85
7.1.1	Construction de l'opérateur de l'opérateur d'interpolation	86
7.2	Construction du nouvel opérateur d'interpolation	88
7.2.1	Principes de base	88
7.2.2	Construction de l'opérateur	90
7.2.3	Application aux simplexes	93
7.2.4	Application aux quadrangles et hexaèdres	94
7.3	Apport du nouvel opérateur d'interpolation	96
7.4	Résultats numériques	97
7.4.1	2D	97
7.4.2	3D	99
7.5	Opérateur d'extrapolation mis en place par Éli Laucoin	100
7.6	Construction du nouvel opérateur d'extrapolation	103
7.6.1	Définition de π_h sur les triangles	104
7.6.2	Définition de π_h sur les tétraèdres	105
7.6.3	Définition de π_h sur les parallélogrammes	108
7.6.4	Définition de π_h sur les parallélépipèdes	110

8	Étude de la positivité du schéma numérique de convection amont	113
8.1	Schéma numérique de convection	113
8.2	Matrice de masse M	114
8.2.1	Première caractérisation de V_h	114
8.2.2	Seconde caractérisation de V_h	116
9	Prise en compte des conditions limites sur les bords de type Mortar	119
9.1	Équation hydraulique	119
9.2	Équation thermique	122
10	Problème lié à l'implémentation du \mathbb{Q}_{NC}^1	125
10.1	Présentation du problème	125
10.2	Structure mise en place par Éli Laucoin	127
10.3	Points bloquants rencontrés	127
A	Méthodes numériques utilisées	129
A.1	Discrétisation VEF	130
A.2	Discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1	130
A.3	Élément fini de Raviart-Thomas	132
A.4	Équivalence VDF - Raviart-Thomas	133
A.4.1	Hypothèses de base	133
A.4.2	Équations pour le VDF	134
A.4.3	Équations pour l'élément fini de Raviart-Thomas	137
	Conclusion et perspectives	141

Nomenclature

Introduisons les notations qui seront utilisées dans ce mémoire de DRT.

n : Dimension de l'espace. Nous avons $n = 2$ en 2D et $n = 3$ en 3D.

N : Nombre de problèmes locaux.

Ω : Ouvert borné de \mathbb{R}^n . Par soucis de simplicité, mais sans aucune restriction théorique, nous supposons tout au long de ce mémoire que Ω est un domaine polygonal.

$\{\Omega_i\}_{i=1..N}$: Famille de N sous-domaines de Ω , formant un recouvrement de ce dernier.

$\partial\Omega$: frontière de Ω .

Γ : Sous-ensemble de Ω .

Γ_{ij} : Frontière de type Mortar, séparant deux sous-domaines Ω_i et Ω_j .

T, u, p, \dots : grandeurs scalaires.

$\mathbf{T}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \dots$: grandeurs vectorielles.

$L^q(\Omega)$ ou L^q : Espace des fonctions scalaires dont le module élevé à la puissance q est intégrable sur Ω avec q étant un entier compris entre 1 et l'infini. Nous pouvons écrire :

$$L^q(\Omega) = \{u \text{ tel que } \int_{\Omega} u^q < \infty\}.$$

$H^m(\Omega)$ ou H^m : Espace des fonctions scalaires de carré intégrable sur Ω et dont les dérivées, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre m sont de carré intégrable sur Ω , avec m étant un entier naturel compris entre 0 et l'infini. Nous pouvons écrire :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ; \partial_{\alpha} u \in L^2(\Omega) ; \forall \alpha \leq |\alpha| \leq m\}.$$

$H_0^m(\Omega)$ ou H_0^m : Sous-espace vectoriel de H^m , dont les éléments admettent une trace nulle sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω .

$\mathbf{L}^q, \mathbf{H}^m, \mathbf{H}_0^m, \dots$: Espaces de fonctions vectorielles dont les composantes appartiennent respectivement à L^q, H^m, H_0^m, \dots

$\mathcal{T}_h(\Omega)$: Triangulation, que nous supposons conforme, du domaine Ω .

$(\mathcal{T}_h)_{i=1..J}(\Omega)$: Hiérarchie de triangulation sur le domaine Ω .

K : Élément géométrique du maillage.

$|K|$: Surface (resp. volume) de la maille K .

$\mathcal{N}^I(\Omega_i)$: Ensemble des barycentres des arêtes (resp. faces) des éléments de $\mathcal{T}_h(\Omega_i)$, intérieurs à Ω_i .

$\mathcal{N}^\partial(\Omega_i)$: Ensemble des barycentres des arêtes (resp. faces) des éléments de $\mathcal{T}_h(\Omega_i)$, situées sur $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$.

T_h, u_h, p_h, \dots : Grandeurs scalaires discrètes définies sur un domaine Ω à partir d'une triangulation $\mathcal{T}_h(\Omega)$.

$\mathbf{T}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h, \dots$: grandeurs vectorielles discrètes définies sur un domaine Ω à partir d'une triangulation $\mathcal{T}_h(\Omega)$.

$T_h^i, u_h^i, p_h^i, \dots$: Grandeurs scalaires discrètes définies sur un sous-domaine Ω_i .

$\mathbf{T}_h^i, \mathbf{u}_h^i, \mathbf{p}_h^i, \dots$: Grandeurs vectorielles discrètes définies sur un sous-domaine Ω_i .

$(\cdot, \cdot)_{L^2(X)}$: Produit scalaire usuel de $L^2(X)$; X étant un sous-ensemble donné de Ω . Par exemple, si nous prenons $X = \Gamma_{ij}$ nous avons la relation

$$(u, v)_{L^2(\Gamma_{ij})} = \int_{\Gamma_{ij}} u v$$

$(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(X)}$: Version vectorielle de $(\cdot, \cdot)_{L^2(X)}$; si nous prenons $X = \Gamma_{ij}$ alors nous avons la relation

$$(u, v)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{ij})} = \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Introduction

Aujourd'hui, la recherche industrielle a besoin de modéliser des phénomènes de plus en plus complexes. Cela aboutit à des simulations numériques extrêmement coûteuses en terme de temps de calcul et d'espace mémoire. En effet, il n'est pas rare d'être amené à réaliser des simulations numériques présentant plusieurs dizaines, voire centaines de millions d'inconnues, pour des calculs pouvant durer plusieurs semaines.

Pour ce faire, le recours au calcul massivement parallèle est devenu une nécessité.

Bien que le calcul parallèle permette de lever la barrière technologique imposée par les capacités des machines conventionnelles, il reste toujours pertinent de chercher à minimiser le coût des simulations numériques.

La mise en place de méthodes dites adaptatives permet d'optimiser le temps de calcul, tout en assurant la qualité des solutions calculées. Le principe de ces méthodes consiste à modifier dynamiquement la discrétisation du problème de façon à accentuer l'effort de précision sur les régions déterminées par un indicateur d'erreur. Un exemple d'indicateur d'erreur peut être le calcul de l'écart entre la solution calculée et la solution exacte du problème.

Ainsi, nous cherchons à réaliser une simulation présentant le nombre minimal de degrés de liberté qui permette de calculer une bonne solution approchée.

La méthode des éléments joints est une méthode numérique permettant de gérer les non-conformités du maillage dûs à la méthode AMR proposée dans [22].

On se propose de présenter en quelques mots et plus précisément le but de la méthode des éléments joints, ou encore appelée méthode mortar.

Considérons un domaine d'étude Ω sur lequel le problème est défini. Admettons que nous ayons une famille de sous-domaines, notée $(\Omega_i)_i$, formant une partition de Ω et où il n'y a aucune zone de recouvrement entre les différents sous-domaines. Supposons également que chaque sous-domaine possède son propre maillage et que l'union des maillages forme un maillage non-conforme du domaine Ω .

La méthode des éléments joints, permet de faire dialoguer entre eux les différents sous-domaines de Ω . Cette méthode rend possible le raffinement (resp. déraffinement) de maillage qui peut engendrer des non conformités.

De plus, dans l'optique de réduire au maximum le nombre de degrés de liberté, sous la contrainte de garantir la qualité de la solution, une piste peut être d'avoir un maillage constitué à la fois de triangles et de quadrangles, ou de tétraèdres et d'hexaèdres. Un maillage présentant cette particularité aura des zones non-conformes (d'où l'utilisation de la méthode des éléments joints) et présentant l'avantage d'être plus adapté pour la simulation numérique d'un écoulement ayant une direction privilégiée.

Un travail de thèse a permis de mettre la méthode des éléments joints, pour la discrétisation VEF (utilisation de l'élément fini de Crouzeix-Raviart), dans le module AMR de la plate-forme TRIO_U; plate-forme développée au Service de Simulation Thermohydraulique de la Direction de l'Énergie Nucléaire du CEA depuis 1993.

L'objectif est de reprendre le travail effectué par Éli Laucoin lors de sa thèse ([22]) et d'étendre les possibilités du module AMR afin qu'il puisse résoudre des problèmes possédant plusieurs équations couplées, offrir à l'utilisateur d'autres discrétisations que le VEF , ou bien avoir un maillage, comme nous l'avons évoqué précédemment, composé de simplexes et d'hexaèdres.

La structure de ce mémoire se décompose en deux grandes parties. Une première partie qui est portée sur les applications numériques et une seconde partie axée sur les aspects théoriques. Détaillons le contenu de ces deux grandes parties.

Avant la première partie se trouve un chapitre qui présente les travaux de la thèse d'Éli Laucoin. Dans ce chapitre est introduit le formalisme de la méthode des éléments joints mis en place dans [22].

La première partie commence par un chapitre présentant les diverses modifications apportées à l'architecture du module AMR au cours de ce DRT.

Dans le deuxième chapitre commence par expliquer de manière théorique comment sont traités les problèmes thermohydrauliques en utilisant la méthode des éléments joints, puis il présente les résultats numériques obtenus.

Dans le troisième chapitre nous présentons des problèmes résolus en utilisant une autre discrétisation que le VEF (à savoir, le VDF) puis nous ferons un point sur les difficultés techniques liées à cette discrétisation.

La deuxième partie quant à elle commence par deux chapitres portant sur l'étude des conditions inf-sup afin de nous assurer que les problèmes que nous résolvons via la méthode des éléments joints.

Le sixième chapitre est consacré à la mise en place d'un opérateur d'interpolation, utilisé pour définir la solution sur des mailles plus grossières (resp. plus fines) lorsque le maillage est modifié. Nous construisons cet opérateur avec la volonté, qu'une fois appliqué à un champ vectoriel, il conserve la nullité de la divergence de ce dernier, ce qui permet d'économiser une étape de projection souvent coûteuse. Nous y étudierons également la mise en place d'un opérateur d'extrapolation permettant de faire l'opération inverse.

Dans le septième chapitre nous verrons comment la méthode des éléments joints peut influencer sur la positivité d'un schéma numérique de convection.

Le huitième chapitre met en lumière la nécessité de prendre en compte de manière adéquate les conditions limites appliquées sur les frontières de type mortar (frontières séparant différents sous-domaines), et propose une solution pour régler les problèmes rencontrés.

Enfin le neuvième chapitre exposera les raisons pour lesquelles nous n'avons pas pu introduire la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 dans le module AMR.

En annexe sont présentées les différentes discrétisations utilisées par TRIO_U, ainsi qu'une partie montrant que la discrétisation VDF peut être interprétée comme étant la discrétisation associée à l'élément fini de Raviart-Thomas.

Chapitre 1

Point de départ

Le travail qui a été fait au cours de ce DRT est dans la continuité de la thèse d'Éli Laucoin, portant sur la méthode des éléments joints, intitulée : *Développement du parallélisme des méthodes numériques adaptatives pour un code industriel de simulation en mécanique des fluides* (se reporter à [22]).

Cette thèse, ainsi que ce travail de DRT, s'appuient sur la plate-forme logicielle TRIO_U.

Dans un premier temps nous allons donner une brève description de TRIO_U, puis nous présenterons rapidement les travaux d'Éli Laucoin.

1.1 Présentation de TRIO_U

On se propose de faire une brève présentation de la plate-forme logicielle TRIO_U, puis de survoler les différentes méthodes numériques proposée par TRIO_U et enfin nous verrons comment, à l'aide d'une de ces méthodes numériques, TRIO_U résoud un problème de type Laplace ou Stokes.

1.1.1 Rapide présentation

TRIO_U ([10], [11], [18]) est une plate-forme de simulation numérique en thermohydraulique dont le principal champ d'applications est l'industrie nucléaire, et plus particulièrement la simulation d'écoulements complexes qui se développent dans le coeur des centrales nucléaires civiles. TRIO_U présente donc un certain nombre d'outils physico-numériques permettant de prendre en compte de façon précise la physique de ces écoulements : modèles de turbulence, suivi d'interface pour la simulation d'écoulements polyphasiques, ect. C'est pourquoi TRIO_U est soumis à un impératif de fiabilité extrêmement exigeant.

Pour garantir la qualité de la solution calculée, TRIO_U à recours à des discrétisations fines, faisant intervenir plusieurs centaines de millions d'éléments. Pour pouvoir supporter de telles situations, cette plate-forme a été conçue, dès l'origine, dans le but d'exploiter la puissance d'une machine massivement parallèle à mémoire distribuée.

1.1.2 Méthodes numériques utilisées

Nous allons citer ici les différentes méthodes numériques utilisées par TRIO_U. Notons que l'annexe A offre plus de détails sur ces dernières.

TRIO_U propose essentiellement deux méthodes numériques :

- la méthode des Volumes-Différences Finies (VDF) ;
- la méthode des Volumes-Éléments Finis (VEF).

Toutes deux appartiennent à la famille des méthodes de volumes finis, mais elles se distinguent par la notion d'approximation sous-jacente.

La méthode VDF repose sur le formalisme des différences finies, où l'on remplace les dérivées partielles par des différences finies en utilisant des formules de Taylor, alors que la méthode VEF repose sur le formalisme des éléments finis, à savoir une approximation variationnelle du problème.

La différence la plus notable est que la méthode VDF suppose que le maillage soit une grille cartésienne, ce qui n'est pas le cas de la méthode VEF.

Les bases de la méthode VEF de TRIO_U sont présentées en détail dans les travaux de la thèse de P.Émonot [16]. Il s'agit en quelque sorte d'une réinterprétation de la discrétisation par éléments finis, dans un cadre de volumes finis. L'idée est d'associer à chaque degré de liberté un *volume de contrôle*, et de réinterpréter les intégrations par parties de la méthode des éléments finis comme l'écriture de lois de conservation sur ces volumes de contrôle. Les intérêts de coupler une approche volumes finis et une approche éléments finis sont multiples :

- l'approche volumes finis est particulièrement bien adaptée aux lois de conservations utilisées en thermohydraulique (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) ;
- l'approche élément finis fournit un cadre mathématique cohérent et parfaitement établi ;

Nous présenterons chacune des discrétisations proposées par TRIO_U. Puis nous verrons qu'il est possible de voir la méthode VDF comme une méthode éléments finis, ce qui permet d'utiliser la méthode des éléments joints sur la discrétisation de type VDF.

Plus de détails sur ces méthodes sont disponibles dans l'annexe A ainsi que dans [19] et [18].

Maintenant que nous avons fait le tour des méthodes numériques utilisées par TRIO_U, nous allons voir comment sont résolus les problèmes de type Laplace et Stokes.

1.1.3 Résolution de problèmes par TRIO_U

Les travaux de thèse d'Éli Laucoin portent sur la mise en oeuvre de la méthode des éléments joints, pour la résolution de problèmes de type Laplace et Stokes. Il nous paraît donc intéressant d'étudier la manière dont TRIO_U résout ces types de problèmes, sans l'utilisation de la méthode des éléments joints. En choisissant la méthode des Volumes-Éléments Finis (VEF) comme méthode numérique, nous allons voir comment TRIO_U résout un problème de type Laplace, puis nous étudierons la résolution d'un problème de type Stokes.

Problème de type Laplace

Le problème de Laplace, muni des conditions aux limites de Dirichlet homogènes s'écrit sous la forme suivante :

Problème 1 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et f une fonction de $L^2(\Omega)$. On cherche une fonction T telle que :

$$\begin{aligned} -\Delta T &= f \quad \text{dans } \Omega \\ T &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Une formulation variationnelle de ce problème est donnée par :

Problème 2 Trouver $T \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, on ait :

$$a(T, v) = l(v)$$

avec

$$a(T, v) = \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega} f v$$

Ce problème est bien posé au sens de J.Hadamard. En effet, l'inégalité de Poincaré permet d'établir la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur $H_0^1(\Omega)$, et le théorème de Lax-Milgram permet alors de conclure à l'existence d'une unique solution dépendant continûment de f .

Cherchons à résoudre ce problème en utilisant la même discrétisation que la méthode VEF, à savoir l'élément fini de Crouzeix-Raviart : \mathbb{P}_{NC}^1 . Soit \mathcal{T}_h une triangulation conforme de Ω . Notons $\mathcal{N}^I(\mathcal{T}_h)$ et $\mathcal{N}^\partial(\mathcal{T}_h)$ l'ensemble des barycentres des arêtes (resp. faces) des éléments de \mathcal{T}_h respectivement intérieurs à Ω et sur le bord de Ω . Nous pouvons alors introduire l'espace discret :

$$\begin{aligned} X_h &= \{T \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, T|_K \in \mathbb{P}^1(K); \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^I(\mathcal{T}_h), T \text{ continue en } \mathbf{x}; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^\partial(\mathcal{T}_h), T(\mathbf{x}) = 0\} \end{aligned}$$

ainsi que la forme bilinéaire discrète :

$$\begin{aligned} a_h : X_h \times X_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ (T_h, v_h) &\rightarrow a_h(T_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla T_h \cdot \nabla v_h \end{aligned} \quad (1.1)$$

et la forme linéaire discrète :

$$\begin{aligned} l_h : X_h \times X_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_h &\rightarrow l_h(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h \end{aligned} \quad (1.2)$$

Notre problème discret s'écrit alors :

Problème 3 Trouver $T_h \in X_h$ telle que $\forall v_h \in X_h$, on ait :

$$a_h(T_h, v_h) = l_h(v_h)$$

Bien que le problème 3 soit une approximation non-conforme du problème continu 2, du fait l'espace X_h ne soit pas inclus dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, il reste un problème bien posé au sens de J.Hadamard, dont la solution est une approximation de celle du problème continu.

Problème de type Stokes

Intéressons-nous à présent à un problème de type Stokes. Le problème de Stokes, muni des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, s'écrit sous la forme suivante :

Problème 4 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et \mathbf{f} une fonction de $L^2(\Omega)^n$. Nous cherchons un couple de fonctions (\mathbf{u}, p) à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R} , tels que :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Une formulation variationnelle de ce problème est donnée par :

Problème 5 Trouver $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ tel que $\forall (\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$, on ait :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) &= l(\mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned}$$

où $L_0^2(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ à valeur moyenne nulle sur Ω et où l'on a posé :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \quad ; \quad b(\mathbf{u}, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \quad ; \quad l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

Le caractère bien posé du problème 5 peut être établi grâce à deux résultats fondamentaux :

- la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$;
- la surjectivité de l'opérateur $\nabla \cdot : H_0^1(\Omega)^n \rightarrow L_0^2(\Omega)$.

Ce second résultat à été établi par M. Bogovski ([7]) et permet d'établir l'existence d'une constante réelle β strictement positive telle que :

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)^n} \|q\|_{L_0^2(\Omega)}} \geq \beta$$

Étudions maintenant l'expression du problème approché que l'on obtient en discrétisant le problème 5 à l'aide de la méthode VEF de TRIO_U. Soit \mathcal{T}_h une triangulation conforme de Ω . Introduisons l'espace des vitesses discrètes :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n ; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{u}|_K \in \mathbb{P}^1 ; \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^I(\mathcal{T}_h), \mathbf{u} \text{ continue en } \mathbf{x} ; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^\partial(\mathcal{T}_h), \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \} \end{aligned}$$

Cet espace n'étant pas inclus dans $H_0^1(\Omega)^n$, nous ne pouvons pas utiliser un produit scalaire induit. Nous introduisons donc le produit scalaire et sa norme induite, définis sur \mathbf{X}_h par :

$$(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{X}_h} = (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h$$

$$\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous définissons alors la forme bilinéaire discrète :

$$\begin{aligned} a_h : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &\rightarrow a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h = (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sur l'ensemble $(\mathbf{X}_h \cap H_0^1(\Omega)^n) \times (\mathbf{X}_h \cap H_0^1(\Omega)^n)$, cette forme bilinéaire est consistante avec la forme continue $a(\cdot, \cdot)$. Elle est également uniformément continue sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ (voir [20]). Définissons également la forme linéaire suivante :

$$\begin{aligned} l_h : \mathbf{X}_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v}_h &\rightarrow l_h(\mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pour définir l'espace des pressions discrètes, nous introduisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} Z_h^0 &= \{q \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q|_K \in \mathbb{P}^0(K)\} \\ Z_h^1 &= \{q \in C^0(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q|_K \in \mathbb{P}^1(K)\} \end{aligned}$$

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} X_h^0 &= Z_h^0 \\ X_h^1 &= Z_h^0 + Z_h^1 \end{aligned}$$

Nous remarquons alors que toute fonction q_h appartenant à X_h^1 peut s'écrire de la manière suivante :

$$q_h = q_h^0 + q_h^1 \text{ avec } q_h^0 \in X_h^0 \text{ et } q_h^1 \in X_h^1$$

La version standard de la méthode *VEF* repose sur la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{aligned} b_h^0 : \mathbf{X}_h \times X_h^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_h, q_h) &\rightarrow b_h^0(\mathbf{u}_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \end{aligned} \quad (1.5)$$

Alors que la version étendue de la méthode *VEF*, quant à elle, repose sur la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} b_h^1 : \mathbf{X}_h \times X_h^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_h, q_h) &\rightarrow b_h^1(\mathbf{u}_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (q_h^1 + q_h^0) \nabla \cdot \mathbf{u}_h + \sum_{F \in \mathcal{T}_h} \int_F \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_F \rrbracket q_h^1 d\sigma \end{aligned} \quad (1.6)$$

où F , \mathbf{n}_F et $\llbracket \cdot \rrbracket$ désignent respectivement une face du maillage associée à \mathcal{T}_h , la normale unitaire à cette face et le saut d'une fonction à travers cette face (avec le signe approprié). Ces formes bilinéaires sont consistantes avec la forme bilinéaire continue $b(\cdot, \cdot)$, respectivement sur $(\mathbf{X}_h \cap H_0^1(\Omega)^n) \times X_h^0$ et sur $(\mathbf{X}_h \cap H_0^1(\Omega)^n) \times X_h^1$. S. Heib a pu montrer qu'elles vérifient chacune une condition de Babuška-Brezzi discrète (pour cela, voir [20]). Par conséquent les problèmes discrets 6 et 7 sont bien posés au sens de J.Hadamard, et leurs solutions constituent chacune une approximation de la solution du problème continu 5.

Problème 6 Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times X_h^0$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times X_h^0$, on ait :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b_h^0(\mathbf{v}_h, p_h) &= l(\mathbf{v}_h) \\ b_h^0(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \end{aligned}$$

Problème 7 Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times X_h^1$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times X_h^1$, on ait :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b_h^1(\mathbf{v}_h, p_h) &= l(\mathbf{v}_h) \\ b_h^1(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \end{aligned}$$

Nous venons de présenter, brièvement, la plate-forme TRIO_U. Intéressons-nous à présent aux travaux réalisés par Éli Laucoin durant sa thèse.

1.2 Présentation des travaux d'Éli Laucoin

Dans sa thèse, Éli Laucoin a abordé 3 grands aspects des méthodes adaptatives :

- aspect géométrique ;
- aspect numérique ;
- aspect parallèle.

Dans ce chapitre nous allons rappeler les notions et résultats développés dans [22] dans le cadre de l'utilisation d'une discrétisation de type *VEF* (Volumes - Éléments Finis). Pour plus d'informations sur la discrétisation *VEF*, se reporter à l'annexe A

1.2.1 Aspect géométrique

Du point de vue géométrique, différentes méthodes d'adaptation de maillage sont présentées dans [22]. A été retenu le choix de la *h-méthode multi-niveaux*, approche hybride entre une *h-méthode* et une méthode *multi-niveaux*. Ainsi l'algorithme d'adaptation de maillage, permettant aussi bien le raffinement que le déraffinement, se base sur la construction d'une hiérarchie de triangulation $(\mathcal{T}_h)_i$. La triangulation de départ (la plus grossière) se trouve au niveau 0 de la hiérarchie, notée $(\mathcal{T}_h)_0$. Les éléments fils d'un élément situé au niveau i sont les éléments du niveau $i + 1$ générés par son découpage.

Le choix de la *h-méthode multi-niveaux* a été établi sur la base des critères suivants :

- qualité et non-dégénérescence des éléments des maillages générés ;
- optimalité de la complexité algorithmique ;
- simplicité de l'implémentation.

En utilisant cette méthode d'adaptation de maillage, des non conformités apparaissent. On rappelle qu'un maillage est dit conforme si l'intersection de deux de ses mailles est soit vide, soit égale à une arête (2D) ou à une face (3D). La figure 1.1 illustre ce qu'est un maillage conforme et un maillage non conforme. Les non-conformités du maillage sont traités au niveau de la méthode numérique (paragraphe suivant).

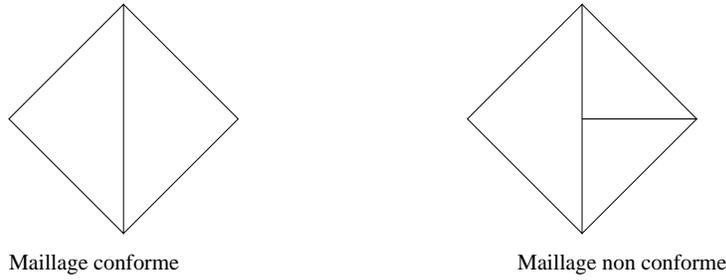


FIG. 1.1: Illustration d'un maillage conforme et d'un maillage non conforme.

1.2.2 Aspect numérique

Le choix de la *h-méthode multi-niveaux* comme méthode d'adaptation de maillage entraîne l'apparition de non-conformités. La méthode numérique doit donc prendre en compte ces non-conformités, et c'est pour cette raison qu'É.Laucoin s'est tourné vers les méthodes des éléments joints (encore appelée méthode de Mortar).

L'approche mise en place est similaire à celle proposée par C. Bernardi, Y. Maday et F. Hecht ([4] et [5]). Elle consiste à adopter une méthode de décomposition de domaine fondée sur la notion de niveau de raffinement. Le principe de cette technique revient à isoler dans un même sous-domaine les éléments du maillage qui résultent du même nombre d'étapes de raffinement des éléments d'un maillage initial conforme. Ainsi chacun des sous-domaines correspond à un maillage conforme, et les non-conformités se trouvent cantonnées aux interfaces entre les sous-domaines.

Après une présentation du formalisme de L.Marcinkowski utilisé dans ses travaux sur l'élaboration d'une méthode d'éléments joints pour l'élément de Crouzeix-Raviart, É.Laucoin met en évidence que ce formalisme correspond à une approche primale d'une méthode des éléments joints. Avec une telle approche, les contraintes de raccordement de l'inconnue entre deux sous-domaines apparaissent explicitement dans la définition de l'espace dans lequel nous cherchons l'inconnue.

Cependant ce n'est pas une approche primale qu'a utilisé É.Laucoin dans [22], mais une approche duale qui, comme nous le verrons plus tard, donne lieu à des simplifications suivant le type d'éléments finis que nous utilisons. Remarquons qu'avec une approche duale, les contraintes de raccordements n'apparaîtront plus dans la définition de l'espace dans lequel nous cherchons l'inconnue, mais sous forme faible via des multiplicateurs de Lagrange.

Avant de présenter le système linéaire mis en place dans [22], nous allons rappeler les différents espaces nécessaires au cadre mathématique, ainsi que différents opérateurs. **Remarque :** Nous présenterons seulement les espaces de fonctions vectorielles (en écrivant le nom de ces espaces en gras), car il est trivial de passer d'une définition vectorielle à une définition scalaire de ces espaces.

Soit Ω un domaine polygonal convexe et $(\Omega_i)_i$ une partition de Ω tel que, pour $i \neq j$, $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset$ et $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \Gamma_{ij}$.

Soit $\mathcal{T}_h(\Omega_i)$ la triangulation définie sur le sous-domaine Ω_i .

Introduisons, pour chaque sous-domaines Ω_i , l'espace de discrétisation associé à l'élément fini

de Crouzeix-Raviart, noté $\mathbf{W}_h(\Omega_i)$, dans le cas où nous traitons un problème portant des conditions limites de type Dirichlet homogène :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_h(\Omega_i) = & \{ \mathbf{u}_h^i \in L^2(\Omega_i)^n; \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i), \mathbf{u}_h^i|_K \in \mathbb{P}^1(K); \\ & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^I(\mathcal{T}_h(\Omega_i)), \mathbf{u}_h^i \text{ continue en } \mathbf{x}; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^\partial(\mathcal{T}_h(\Omega_i)), \mathbf{u}_h^i(\mathbf{x}) = 0 \} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Rappelons que les notations \mathcal{N}^∂ et \mathcal{N}^I sont décrites dans la nomenclature. Pour plus de détails sur l'élément fini de Crouzeix-Raviart, se reporter à l'annexe A.

À présent, définissons les normes et semi-normes brisées suivantes :

$$\|\mathbf{u}_h^i\|_{\mathbf{W}_h(\Omega_i)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \|\mathbf{u}_h^i\|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad |\mathbf{u}_h^i|_{\mathbf{W}_h(\Omega_i)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} |\mathbf{u}_h^i|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous pouvons maintenant définir un espace discret global par :

$$\mathbf{W}_h = \prod_{i=1}^N \mathbf{W}_h(\Omega_i) = \{ \mathbf{u}_h = (\mathbf{u}_h^i)_{i=1..N}, \mathbf{u}_h^i \in \mathbf{W}_h(\Omega_i) \}$$

muni de la norme et de la semi-norme suivantes :

$$\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{W}_h} = \left(\sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}_h^i\|_{\mathbf{W}_h(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad |\mathbf{u}_h|_{\mathbf{W}_h} = \left(\sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_h^i|_{\mathbf{W}_h(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définissons maintenant l'espace des pressions discrètes. Introduisons pour chaque sous-domaines (Ω_i) les espaces suivants :

$$\begin{aligned} Z_h^0(\Omega_i) &= \{ q \in L^2(\Omega_i), \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i), q|_K \in \mathbb{P}^0(K) \} \\ Z_h^1(\Omega_i) &= \{ q \in \mathcal{C}^0(\Omega_i), \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i), q|_K \in \mathbb{P}^1(K) \} \\ X_h^1(\Omega_i) &= (Z_h^0(\Omega_i) + Z_h^1(\Omega_i)) \end{aligned}$$

Posons alors :

$$\begin{aligned} X_h^0 &= \left(\prod_{i=1}^N Z_h^0(\Omega_i) \right) \cap L_0^2(\Omega) = \{ q_h^0 = (q_{h,i}^0)_{i=1..N}, q_{h,i}^0 \in Z_h^0(\Omega_i) \} \\ X_h^1 &= \left(\prod_{i=1}^N X_h^1(\Omega_i) \right) \cap L_0^2(\Omega) = \{ q_h^1 = (q_{h,i}^1)_{i=1..N}, q_{h,i}^1 \in X_h^1(\Omega_i) \} \end{aligned}$$

Remarquons que dans TRIO_U, la version standard de la méthode *VEF* ainsi que la méthode *VDF* utilisent comme espace de discrétisation de la pression, l'espace X_h^0 . En revanche la version étendue de la méthode *VEF* utilise comme espace de discrétisation de la pression, l'espace X_h^1 . Considérons à présent les interfaces Γ_{ij} entre les sous-domaines. Les triangulations des sous-domaines induisent sur chacune de ces interfaces deux triangulations indépendantes, notées $\mathcal{T}_h^i(\Gamma_{ij})$ et $\mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij})$. Définissons :

$$\eta = \min(i, j) \quad \xi = \max(i, j)$$

et choisissons comme discrétisation maître (resp. esclave) de Γ_{ij} celle induite par la triangulation de Ω_η (resp. Ω_ξ). Grâce à ce choix, nous pouvons introduire les espaces de fonctions tests suivants : $\mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij})$ qui est l'ensemble des fonctions vectorielles à carré sommable, dont chaque composante est constante sur une face quelconque de la frontière mortar Γ_{ij} , appartenant au sous-domaine Ω_i . $\mathbf{M}_h^j(\Gamma_{ij})$ qui est l'ensemble des fonctions vectorielles à carré sommable, dont chaque composante est constante sur une face quelconque de la frontière mortar Γ_{ij} , appartenant au sous-domaine Ω_j . $\mathbf{M}_h(\Gamma_{ij})$ qui est l'ensemble des fonctions vectorielles à carré sommable, dont chaque composante est constante sur une face de la frontière mortar Γ_{ij} , définie comme étant une face maître. Nous pouvons donc écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij}) &= \{\mathbf{u} \in (L^2(\Gamma_{ij}))^n, \forall K \in \mathcal{T}_h^i(\Gamma_{ij}), \mathbf{u} \in (\mathbb{P}^0(K))^n\} \\ \mathbf{M}_h^j(\Gamma_{ij}) &= \{\mathbf{u} \in (L^2(\Gamma_{ij}))^n, \forall K \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), \mathbf{u} \in (\mathbb{P}^0(K))^n\} \\ \mathbf{M}_h(\Gamma_{ij}) &= \mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij}) \cup \mathbf{M}_h^j(\Gamma_{ij})\end{aligned}$$

Notons γ_{ij}^i et γ_{ij}^j les opérateurs de trace sur Γ_{ij} définis respectivement sur $\mathbf{W}_h(\Omega_i)$ et $\mathbf{W}_h(\Omega_j)$, tous deux à valeurs dans $L^2(\Gamma_{ij})^n$.

Introduisons également les opérateurs de projection, notés π_{ij}^i et π_{ij}^j , au sens de $(L^2(\Gamma_{ij}))^n$, sur $\mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij})$ et $\mathbf{M}_h^j(\Gamma_{ij})$ définis par :

$$\begin{aligned}\pi_{ij}^i : (L^2(\Gamma_{ij}))^n &\rightarrow \mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij}) & \text{et} & \quad \pi_{ij}^j : (L^2(\Gamma_{ij}))^n &\rightarrow \mathbf{M}_h^j(\Gamma_{ij}) \\ \mathbf{u} &\rightarrow \pi_{ij}^i(\mathbf{u}) & & \quad \mathbf{u} &\rightarrow \pi_{ij}^j(\mathbf{u})\end{aligned}$$

vérifiant, pour k valant i ou j :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (L^2(\Gamma_{ij}))^n \times \mathbf{M}_h^k(\Gamma_{ij}), \quad (\pi_{ij}^k(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_{ij})} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_{ij})}$$

À chacune des interfaces Γ_i , introduisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_h^i &= \prod_{\substack{j \neq i \\ N}} \mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij}) = \{\boldsymbol{\mu}_h^i = (\boldsymbol{\mu}_h^{ij})_{j \neq i}, \forall j, \boldsymbol{\mu}_h^{ij} \in \mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij})\} \\ \mathbf{L}_h &= \prod_{i=1}^N \mathbf{L}_h^i = \{\boldsymbol{\mu}_h = (\boldsymbol{\mu}_h^i)_{1 \leq i \leq N}, \forall i, \boldsymbol{\mu}_h^i \in \mathbf{L}_h^i\} \\ \mathbf{M}_h &= \prod_{i=1}^N \left(\prod_{\substack{j > i \\ N}} \mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij}) \right) = \{\mathbf{u}_\Gamma = (\mathbf{u}_{\Gamma_{ij}})_{1 \leq i < j \leq N}, \forall i < j, \mathbf{u}_{\Gamma_{ij}} \in \mathbf{M}_h^i(\Gamma_{ij})\}\end{aligned}$$

Rappelons que la méthode des éléments joints permet de résoudre un problème sur un domaine d'étude Ω constitué de plusieurs sous-domaines Ω_i avec $1 \leq i \leq N$, (chaque sous-domaine possédant sa propre triangulation), tout en garantissant la continuité faible de l'inconnue entre les différents sous-domaines. Nous distinguerons le cas où l'inconnue du problème sera un champ scalaire du cas où elle sera un champ vectoriel.

Maintenant que nous avons défini les différents espaces et opérateurs dont nous aurons besoin, toujours dans le but de résumer le travail présenté dans [22], nous allons construire le système linéaire utilisé pour résoudre un problème avec la méthode des éléments joints. Considérons le problème suivant :

Problème 8 Trouver (w^1) tel que $\forall w^2$ on ait :

$$a(w^1, w^2) = l(w^2)$$

Dans le cas d'un problème de diffusion thermique, nous noterons

$$w^1 \equiv T \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad w^2 \equiv v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.8)$$

Où T est un champ scalaire solution (la température par exemple)

$$a(w^1, w^2) = a(T, v) = \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \quad (1.9)$$

$$l(w^2) = l(v) = \int_{\Omega} f v \quad (1.10)$$

Où f est une fonction appartenant à $L^2(\Omega)$.

Et dans le cas d'un problème de type Stokes, nous avons

$$w^1 \equiv (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \quad \text{et} \quad w^2 \equiv (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \quad (1.11)$$

et

$$a(w^1, w^2) = a((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.12)$$

$$l(w^2) = l(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.13)$$

Où \mathbf{f} est une fonction appartenant à $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Intéressons-nous à la formulation d'un problème discret, associé au problème 8, et qui permet d'assurer la continuité faible de la solution entre les différents sous-domaines de Ω .

Dans un premier temps nous présenterons les versions discrètes de $a(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot, \cdot)$ suivant que l'on traite un problème de diffusion ou Stokes, puis nous étudierons comment assurer la continuité, faiblement, de la solution entre les sous-domaines.

Problème de diffusion thermique.

Dans le cas d'un problème de diffusion thermique, nous avons :

$$w_h^1 = T_h \in W_h \quad \text{et} \quad w_h^2 = v_h \in W_h \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} a_h : W_h \times W_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ (T_h, v_h) &\rightarrow a_h(T_h, v_h) = \sum_{i=1}^N a_h^i(T_h^i, v_h^i) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K \nabla T_h^i \cdot \nabla v_h^i \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} l_h : W_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_h &\rightarrow l_h(v_h) = \sum_{i=1}^N l_h^i(v_h^i) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K v_h^i f \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

La continuité faible de la solution entre les différents sous-domaines est assurée par les formes bilinéaires $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ que nous allons présenter.

Si nous étudions un problème de diffusion alors :

$$b_h : L_h \times W_h \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mu_h, v_h) \rightarrow b_h(\mu_h, v_h) = \sum_{i=1}^N b_h^i(\mu_h^i, v_h^i) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} (\mu_h^{ij}, \pi_{ij}^i(\gamma_{ij}^i(v_h^i)))_{L^2(\Gamma_{ij})} \right)$$

et

$$c_h : L_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mu_h, v_\Gamma) \rightarrow c_h(\mu_h, v_\Gamma) = \sum_{i=1}^N c_h^i(\mu_h^i, v_\Gamma) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} (\mu_h^{ij}, \pi_{ij}^i(v_{\Gamma_{ij}}))_{L^2(\Gamma_{ij})} \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[(\mu_h^{ij}, \pi_{ij}^i(v_{\Gamma_{ij}}))_{L^2(\Gamma_{ij})} + (\mu_h^{ji}, \pi_{ij}^j(v_{\Gamma_{ji}}))_{L^2(\Gamma_{ji})} \right]$$

À présent, étudions ce que nous avons dans le cas d'un problème de Stokes.

Problème de Stokes.

Dans le cas d'un problème de Stokes, en utilisant la version *VEF* standard, nous avons :

$$w_h^1 = (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{W}_h \times X_h^0 \quad \text{et} \quad w_h^2 = (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{W}_h \times X_h^0 \quad (1.17)$$

$$a_h : (\mathbf{W}_h, X_h^0) \times (\mathbf{W}_h, X_h^0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \rightarrow a_h((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \sum_{i=1}^N a_h^i((\mathbf{u}_h^i, p_h^i), (\mathbf{v}_h^i, q_h^i))$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K \nabla \mathbf{u}_h^i : \nabla \mathbf{v}_h^i - p \nabla \cdot \mathbf{v}_h^i + q_{h,i}^0 \nabla \cdot \mathbf{u}_h^i \right) \quad (1.18)$$

Si nous voulons utiliser la version étendue de la méthode *VEF* alors nous avons :

$$w_h^1 = (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{W}_h \times X_h^1 \quad \text{et} \quad w_h^2 = (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{W}_h \times X_h^1 \quad (1.19)$$

$$a_h : (\mathbf{W}_h, X_h^1) \times (\mathbf{W}_h, X_h^1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \rightarrow a_h((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \sum_{i=1}^N a_h^i((\mathbf{u}_h^i, p_h^i), (\mathbf{v}_h^i, q_h^i))$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K \nabla \mathbf{u}_h^i : \nabla \mathbf{v}_h^i - p \nabla \cdot \mathbf{v}_h^i + (q_{h,i}^0 + q_{h,i}^1) \nabla \cdot \mathbf{u}_h^i \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left(\sum_{F \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_F [[\mathbf{u}_h^i \cdot \mathbf{n}_F]] q_{h,i}^1 d\sigma \right) \quad (1.20)$$

$$l_h : \mathbf{W}_h \times X_h^0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{v}_h, q_h) \rightarrow l_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{i=1}^N l_h^i(\mathbf{v}_h^i, q_h^i)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h^i \right) \quad (1.21)$$

En ce qui concerne les formes bilinéaires $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ nous avons :

$$b_h : \mathbf{L}_h \times (\mathbf{W}_h \times X_h^1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\boldsymbol{\mu}_h, (\mathbf{v}_h, q_h)) \rightarrow b_h(\boldsymbol{\mu}_h, (\mathbf{v}_h, q_h)) = \sum_{i=1}^N b_h^i(\boldsymbol{\mu}_h^i, (\mathbf{v}_h^i, q_h^i)) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} (\boldsymbol{\mu}_h^{ij}, \pi_{ij}^i(\gamma_{ij}^i(\mathbf{v}_h^i, q_h^i))) \right)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{ij})}$$

et

$$c_h : \mathbf{L}_h \times \mathbf{M}_h \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_\Gamma) &\rightarrow c_h(\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_\Gamma) = \sum_{i=1}^N c_h^i(\boldsymbol{\mu}_h^i, \mathbf{v}_\Gamma) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} (\boldsymbol{\mu}_h^{ij}, \pi_{ij}^i(\mathbf{v}_{\Gamma_{ij}})) \right)_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{ij})} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[(\boldsymbol{\mu}_h^{ij}, \pi_{ij}^i(\mathbf{v}_{\Gamma_{ij}}))_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{ij})} + (\boldsymbol{\mu}_h^{ji}, \pi_{ij}^j(\mathbf{v}_{\Gamma_{ji}}))_{\mathbf{L}^2(\Gamma_{ji})} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, la formulation discrète du problème 8 qui permet d'assurer la continuité faible de la solution entre différents sous-domaines s'écrit de la manière suivante :

Problème 9 Trouver $w_h^1, \lambda_h, w_\Gamma^1$ tel que $\forall (w_h^2, \mu_h, w_\Gamma^2)$ on ait :

$$\begin{cases} a_h(w_h^1, w_h^2) + b_h(\lambda_h, w_h^2) = l_h(w_h^2) \\ b_h(\mu_h, w_h^1) - c_h(\mu_h, w_\Gamma^1) = 0 \\ -c_h(\lambda_h, w_\Gamma^2) = 0 \end{cases}$$

Suivant le type de problème traité (diffusion pure ou Stokes), les variables w_h^1 et w_h^2 vérifient les relations 1.14 ou 1.17. Le multiplicateur de Lagrange λ quant à lui appartient à l'espace L_h (resp. \mathbf{L}_h) dans le cas où le problème traité est un problème de diffusion pure (resp. Stokes). Enfin, w_Γ appartient à l'espace M_h (resp. \mathbf{M}_h) dans le cas où le problème traité est un problème de diffusion (resp. Stokes).

En notant A, B et C les matrices associées aux formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$, $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$, le système linéaire associé au problème 9 prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} A & B^T & 0 \\ B & 0 & -C^T \\ 0 & -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^1 \\ \lambda \\ W_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Maintenant, nous allons voir comment simplifier le système linéaire 1.22. Mais avant cela, commençons par expliciter la forme matricielle de notre problème discret, en tenant compte des propriétés de l'élément fini de Crouzeix-Raviart, ainsi que de la forme particulière des non-conformités générées par l'algorithme d'adaptation de maillage.

Propriété 1 *Considérons une non-conformité faisant intervenir une face grossière F et n faces fines $(f_i)_{i=1..n}$. Notons r_F et r_{f_i} les niveaux de raffinement des sous-domaines auxquels appartiennent respectivement F et chacune des f_i . Par définition, on a $r_F < r_{f_i}$, pour tout i . Notons S_F et S_{f_i} les surfaces respectives de la face F et de chacune des faces f_i . Enfin, posons $\alpha = 2$ en dimension 2 et $\alpha = 3$ en dimension 3. Avec ces notations nous avons toujours :*

$$\frac{S_{f_i}}{S_F} = \alpha^{r_F - r_{f_i}} \quad (< 1) \quad (1.26)$$

De plus, comme les faces fines forment un recouvrement de la face grossière, on a toujours l'égalité :

$$\sum_{i=1}^N \alpha^{r_F - r_{f_i}} = 1 \quad (1.27)$$

Cette propriété permet d'explicitier les coefficients des matrices D_Γ^k .

Par soucis de simplicité, nous choisissons de trier les sous-domaines par ordre décroissant de niveau de raffinement. Ainsi, pour chaque interface, nous choisissons implicitement la discrétisation la plus fine comme étant la discrétisation maître.

En notant (θ_i) et (ϕ_j) les fonctions de base respectives des espaces L_h^k et M_h , nous avons :

$$(C_\Gamma^k)_{ij} = c_h^k(\theta_i, \phi_j) \quad (1.28)$$

Notons F_i et F_j les supports respectifs des fonctions θ_i et ϕ_j . Il vient :

$$(C_\Gamma^k)_{ij} = \frac{1}{\text{meas } F_i} \int_{F_i \cap F_j} 1 = \frac{\text{meas}(F_i \cap F_j)}{\text{meas } F_i} \quad (1.29)$$

Ainsi nous pouvons distinguer trois cas de figures :

– $F_i \cap F_j = \emptyset$. Dans ce cas :

$$(C_\Gamma^k)_{ij} = 0 \quad (1.30)$$

– $F_i \cap F_j = F_i$. Nous nous trouvons dans ce cas lorsque la face du sous-domaine Ω_k est une face fine du point de vue de la non-conformité. Nous avons alors :

$$(C_\Gamma^k)_{ij} = 1 \quad (1.31)$$

– $F_i \cap F_j = F_j \subsetneq F_i$. Nous nous trouvons dans cette configuration lorsque la face du sous-domaine Ω_k est une face grossière du point de vue de la non-conformité. Il vient alors :

$$(C_\Gamma^k)_{ij} = \alpha^{r_{F_i} - r_{F_j}} \quad (1.32)$$

Notons que la formulation variationnelle 9 peut être perçue comme la résolution couplée de N problèmes munis de conditions aux limites de type Dirichlet sur les interfaces séparant les sous-domaines. Par conséquent les problèmes sont bien posés au sens de J.Hadamard.

Nous venons de rappeler l'essentiel des résultats, concernant les aspects numériques, exposés par Éli Laucoin dans sa thèse ([22]). Appliquer la méthode des éléments joints à un problème de diffusion pure ou de type Stokes revient à la construction du système linéaire 1.24.

Remarquons que seule la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ dépend de la nature du problème (diffusion ou Stokes).

1.2.3 Aspect parallèle

Du point de vue du **parallélisme**, É.Laucoin a commencé par présenter une démarche générale pour la conception d'algorithmes parallèles. Cette démarche comporte quatre étapes majeures :

- le partitionnement, où le problème est découpé en tâches élémentaires ;
- la structuration des communications, où l'on spécifie les échanges d'information entre tâches élémentaires nécessaires à l'exécution de l'algorithme ;
- l'agglomération, qui consiste à regrouper les tâches élémentaires en macro-tâches de façon à minimiser les communications ;
- le placement, qui affecte chaque macro-tâche à une unité de calcul de façon à équilibrer la charge.

Puis, après avoir mis en évidence les différentes formes de parallélisme présentes dans les algorithmes d'adaptation de maillage et de résolution numérique, E.Laucoin présente les concepts sur lesquels reposent :

- la parallélisation de la phase d'adaptation du maillage ;
- la parallélisation de la phase de résolution numérique.

Pour la parallélisation de la phase d'adaptation du maillage, il a été choisi de distribuer de façon équilibrée les éléments du maillage initial à l'aide d'un algorithme d'équilibrage statique, et de ne pas introduire de redistribution des tâches qui leur sont associées. Ainsi chaque processeur se voit confier la gestion du raffinement des éléments qui lui ont été attribués à l'initialisation du calcul

La parallélisation de la phase de résolution nécessite l'introduction de la notion de géométrie *hiérarchique* et de géométrie *applatie*. La première est une vision de la géométrie du maillage utilisé par les algorithmes d'adaptation, alors que la seconde est la vision de la géométrie utilisée par les algorithmes de résolution numérique. Ces deux visions sont représentées par la figure 1.2. Le partitionnement du problème se fait selon un parallélisme structural en définissant une tâche

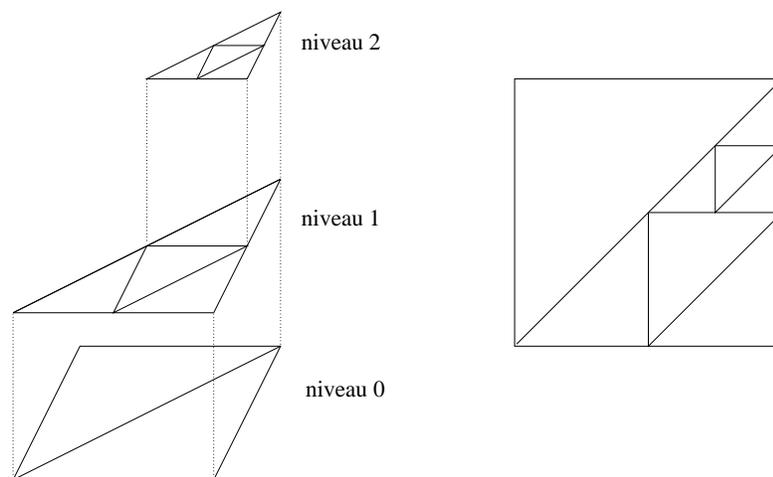


FIG. 1.2: Géométrie hiérarchique (à gauche) et géométrie applatie (à droite) d'un maillage.

élémentaire pour chaque élément de la géométrie applatie. Sont regroupés sur chaque processeur, les éléments qui lui ont été affectés selon leur niveau de raffinement. De cette façon, chaque

processeur se voit affecter plusieurs sous-domaines, mais le nombre total d'éléments affectés à chaque processeur est alors bien équilibré, et ce, indépendamment de la forme du maillage. Suivent ensuite des heuristiques de partitionnement de graphe ainsi qu'un ensemble de développements à apporter à la plate-forme TRIO_U.

Conclusion de ce chapitre :

Nous venons de présenter les travaux réalisés par Éli Laucoin durant sa thèse. Ces derniers portent sur la mise en oeuvre de la méthode des éléments joints pour la résolution de problèmes de type Laplace ou Stokes en utilisant la méthode VEF de TRIO_U. Ils constituent le point de départ du DRT.

Lors de ce DRT, nous avons élargi les possibilités du module AMR. La prise en compte du terme de convection, ainsi que la possibilité de coupler deux équations ont été ajoutées au module AMR. Il est donc désormais possible de résoudre un problème de type Navier-Stokes ou un problème thermohydraulique. Dans les chapitres suivants, nous montrerons les différentes modifications apportées au code du module AMR, puis nous exhiberons les résultats obtenus après la résolution de problèmes thermohydrauliques à l'aide de la méthode VEF de TRIO_U. Les résultats issus de l'utilisation de la méthode VDF seront également présents, mais ils ne porteront que sur la résolution de problèmes de type Darcy (nous verrons pourquoi ultérieurement).

Dans une deuxième partie, plus théorique, nous étudierons les conditions sous lesquelles le problème que nous résolvons dans le cadre de l'utilisation de la méthode des éléments joints est bien posé. Nous verrons également comment construire des opérateurs qui, étant donné un champ vectoriel à divergence nulle, permettront d'interpoler et d'extrapoler ce champ tout en conservant la nullité de sa divergence. Nous nous poserons également la question de savoir quel est l'impact du choix de la discrétisation maître (resp. esclave), dans le cadre de l'utilisation de la méthode des éléments joints, sur la positivité du schéma numérique de convection amont et enfin nous énoncerons les problèmes rencontrés lors de l'ajout de l'utilisation de l'élément fini \mathbb{Q}_{NC}^1 dans le module AMR.

Première partie
Applications numériques

Chapitre 2

Architecture logicielle

Nous présentons dans ce chapitre seulement l'évolution de l'architecture logicielle du module AMR de TRIO_U. Pour avoir une vue d'ensemble de l'architecture de TRIO_U et de son module AMR, le lecteur pourra se reporter à [22].

2.1 Ajout de nouveaux sous-modules

Aux cinq sous-modules existants (FRAMEWORK, GEOMETRY, MORTAR, LAPLACE, STOKES), se sont ajoutés au cours du DRT deux autres sous-modules :

- NAVIERSTOKES ;
- CONV_DIFF_TH.

Ces sous-modules ont été mis en place en vue de permettre l'implémentation d'une spécialisation des classes de base du module Framework pour la résolution d'un problème faisant intervenir de la convection.

Le sous-module NAVIERSTOKES a pour vocation d'être utilisé pour résoudre un problème de type Navier-Stokes, c'est-à-dire un problème ayant comme inconnue :

- le champ de vitesse (champ vectoriel) ;
- la pression (champ scalaire).

Quant au sous-module CONV_DIFF_TH, il permet de résoudre un problème de type Thermo-Hydraulique, c'est-à-dire un problème faisant intervenir deux équations et comportant trois inconnues :

- le champ de vitesse (champ vectoriel) ;
- la pression (champ scalaire) ;
- la température (champ scalaire).

Dans ce type de problème, peut être convecté aussi bien le champ de vitesse que la température. L'objectif principal de ces deux sous-modules est de fournir une interface utilisateur claire pour la spécification du problème à résoudre et de spécialiser le comportement de certaines parties des algorithmes implémentés dans le module FRAMEWORK.

2.2 Modifications du sous-module FRAMEWORK

Le sous-module FRAMEWORK s'articule autour de cinq hiérarchies de classes :

- les AMR_PROBLEMS ;

- les AMR_TIMESTEPPERS ;
- les AMR_FIELDS ;
- les AMR_ERROR_ESTIMATORS ;
- les AMR_LOCAL_PROBLEMS.

La classe de base de la hiérarchie des AMR_PROBLEMS, à savoir AMR_PROBLEM_BASE, représente l'abstraction d'un problème à résoudre en utilisant une approche adaptative.

La classe AMR_CONSTRAINED_PROBLEM_BASE qui en hérite correspond à la spécialisation de la classe AMR_PROBLEM_BASE lorsque le problème à résoudre correspond à une recherche de point-selle, comme c'est le cas pour le problème de Stokes ou Navier-Stokes.

Nous avons rajouté la classe AMR_MIXED_PROBLEM_BASE qui a été conçue pour pouvoir résoudre un problème de type Thermo-Hydraulique. Cette classe dérive de AMR_CONSTRAINED_PROBLEM_BASE afin d'éviter de dupliquer des méthodes déjà existantes.

La figure 2.1 illustre la hiérarchie des AMR_PROBLEMS La classe AMR_PROBLEM_BASE pos-

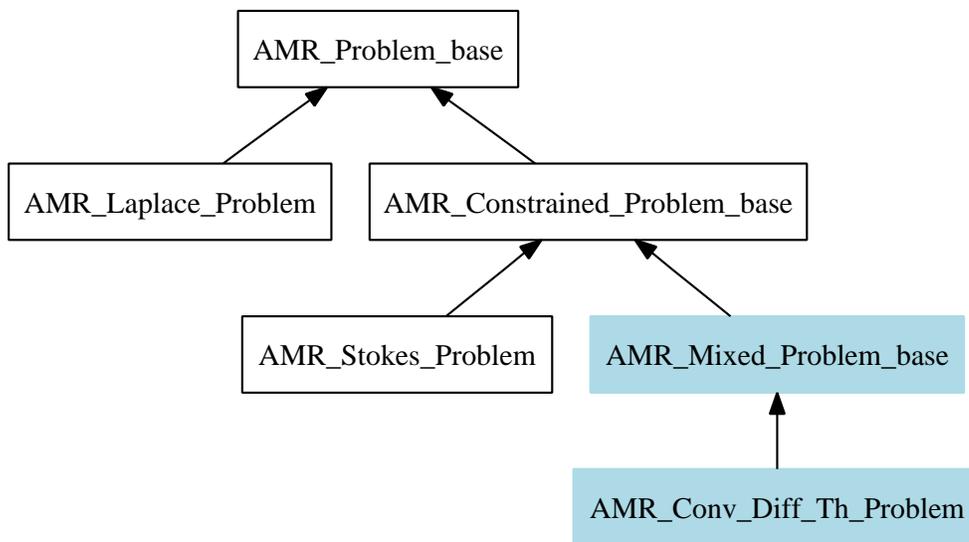


FIG. 2.1: Hiérarchie des AMR_PROBLEMS. Les classes ajoutées lors de ce DRT apparaissent en couleur.

sède une référence vers un AMR_ERROR_ESTIMATORS. Le rôle des classes de la hiérarchie des AMR_ERROR_ESTIMATORS consiste à évaluer l'erreur numérique après la résolution du problème sur une géométrie donnée.

La classe AMR_ANALYTIC_ERROR_ESTIMATOR permet de calculer exactement l'erreur numérique en norme L^2 à l'aide d'une formule de quadrature exacte pour des polynômes allant jusqu'au degré 5. Le code développé par Éli Laucoin permettait d'utiliser cette formule de quadrature uniquement sur des simplexes. En effet, les classes FIFTH_ORDER_2D_QUADRATURE et FIFTH_ORDER_3D_QUADRATURE permettent de calculer les coordonnées des points de quadrature (points où sera évaluée la fonction à intégrer) sur le simplexe, ainsi que les poids associés à ces points. Nous avons donc rajouté la classe Q1NC_VDF_QUADRATURE qui contient une méthode virtuelle permettant de calculer les coordonnées des points de Gauss ainsi que les poids associés à ces points, sur les mailles utilisées par les discrétisations de type Q_{1NC}^1 et VDF.

La classe VDF_2D_QUADRATURE, que nous avons ajouté, hérite de la classe Q1NC_VDF_

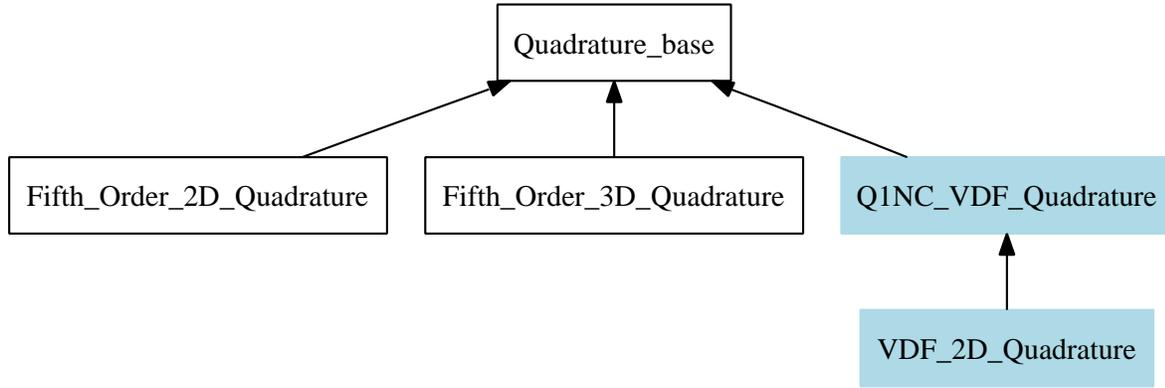


FIG. 2.2: Hiérarchie des quadratures. Les classes ajoutées lors de ce DRT apparaissent en couleur.

QUADRATURE et permet de calculer les coordonnées des points de Gauss sur un rectangle quelconque. Ainsi il est possible d'intégrer de manière exacte des polynômes allant jusqu'au degré 5 sur des mailles utilisées par la discrétisation VDF. Notons que l'ajout d'une classe VDF_3D_QUADRATURE est ainsi facilité

Remarquons aussi qu'il est possible de rajouter les classes Q1NC_2D_QUADRATURE et Q1NC_3D_QUADRATURE, qui hériteront également de la classe Q1NC_VDF_QUADRATURE et offriront la possibilité de calculer les coordonnées des points de Gauss sur un quadrangle ou un hexaèdre quelconque. Ainsi, avec le même nombre de points de Gauss que dans le cas VDF, il est possible d'intégrer de manière exacte des polynômes allant jusqu'au degré 4 sur des mailles utilisées par la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 . Notons que sur la maille de référence il est possible d'intégrer de manière exacte des polynôme de degré 5, mais le jacobien de l'application permettant de passer de la maille de référence à une maille quelconque n'est pas constant. Or, en notant \mathcal{G} cette application, \hat{f} une fonction définie sur la maille de référence \hat{K} . K et f sont définis par les relations :

$$\begin{aligned} K &= \mathcal{G}(\hat{K}) \\ f &= \hat{f} \circ \mathcal{G}^{-1} \end{aligned}$$

d'après la relation suivante 2.1

$$\int_K f = \int_{\hat{K}} \hat{f} |det G| \quad (2.1)$$

Nous constatons que si le jacobien de \mathcal{G} est un polynôme de degré un (ce qui est le cas) lorsque nous utiliserons des mailles autres que rectangles ou pavés, alors nous perdons un ordre d'intégration.

La classe AMR_NON_CONFORMITY_ERROR_ESTIMATOR fournit une estimation de l'erreur sans connaître la solution analytique du problème. Cette estimation permettra ensuite de raffiner, déraffiner, ou laisser tel quel, certaines parties du maillage du domaine d'étude. Cette estimation de l'erreur se fait en étudiant l'écart entre la discrétisation conforme et la discrétisation non conforme de l'inconnue. Par conséquent nous avons besoin de projeter le champ *inconnue* (exprimé aux faces du maillage) sur les sommets du maillage.

Jusqu'à présent, cette projection n'existait que dans le cas d'une discrétisation type \mathbb{P}_{NC}^1 , il faut donc l'étendre aux deux autres types de discrétisations : \mathbb{Q}_{NC}^1 et VDF.

Les deux classes `AMR_ANALYTIC_ERROR_ESTIMATOR` et `AMR_NON_CONFORMITY_ERROR_ESTIMATOR` peuvent désormais stocker l'erreur portant sur la température, mais également celle portant sur le champ de vitesse. Ceci est important car dans le cas où l'on souhaite résoudre, à l'aide d'un algorithme itératif, un problème Thermo-Hydraulique, alors il y aura deux erreurs calculées (l'une concernant la température et l'autre concernant le champ de vitesse). Pour l'instant, pour savoir quelles opérations effectuer sur le maillage, nous prenons l'erreur maximale entre les deux erreurs.

2.3 Modifications du sous-module MORTAR

Le sous-module MORTAR implémente la méthode des éléments joints. Il s'agit de résoudre des systèmes linéaires établis en 1.24

Commençons par étudier la nouvelle hiérarchie des `MORTAR_PROBLEMS`. La classe `MORTAR_PROBLEM` représente un problème à résoudre, composé d'une liste de problèmes locaux donnés par les `LOCAL_PROBLEM_BASE` auxquels il est associé.

Le `MORTAR_CONSTRAINED_PROBLEM` spécialise la classe `MORTAR_PROBLEM` pour pouvoir traiter convenablement le cas d'un problème de recherche de point-selle. Pour cela il est associé aux `LOCAL_CONSTRAINED_PROBLEM_BASE`.

La classe `MORTAR_MIXED_PROBLEM` que nous avons rajouté dérive de `MORTAR_CONSTRAINED_PROBLEM` et permet de résoudre des problèmes faisant intervenir deux équations, comme c'est le cas pour les problèmes Thermo-Hydrauliques. La figure 2.3 illustre la hiérarchie des `MORTAR_PROBLEMS`

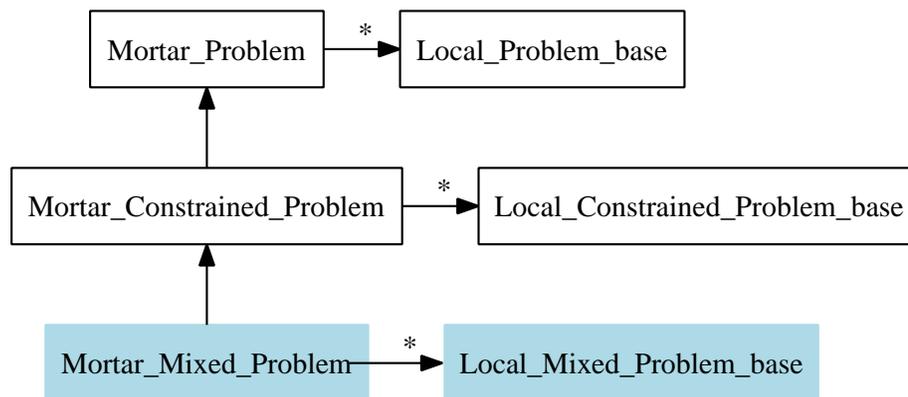


FIG. 2.3: Hiérarchie des `MORTAR_PROBLEMS`. Les classes ajoutées lors de ce DRT apparaissent en couleur.

Afin que la classe `MORTAR_MIXED_PROBLEM` puisse résoudre un problème comportant deux équations, une modification majeure a été apportée sur la classe `MORTAR_CONSTRAINED_PROBLEM`, à savoir la création d'un attribut de type `MORTAR_ALLOCATOR` et d'un autre de type `MORTAR_EXCHANGER`. Ainsi, la classe `MORTAR_MIXED_PROBLEM` possède deux attributs de type `MORTAR_ALLOCATOR` et deux autres attributs de type `MORTAR_EXCHANGER` (issus soit de `MORTAR_PROBLEM`, soit de `MORTAR_CONSTRAINED_PROBLEM`). Rappelons qu'un `MORTAR_`

ALLOCATOR contient des informations sur les conditions aux limites posées. En sachant qu'il y a une série de conditions limites par équation, il était impensable de résoudre un problème comportant deux équations avec un seul MORTAR_ALLOCATOR.

2.4 Modifications du sous-module GEOMETRY

Le sous-module GEOMETRY est dédié principalement aux classes permettant de faire du maillage adaptatif.

Concentrons-nous sur la hiérarchie des AMR_REFERENCE_CELLS présentée par la figure 2.4.

Durant sa thèse, Éli Laucoin avait axé ses travaux uniquement sur la méthode VEF de TRIO_U.

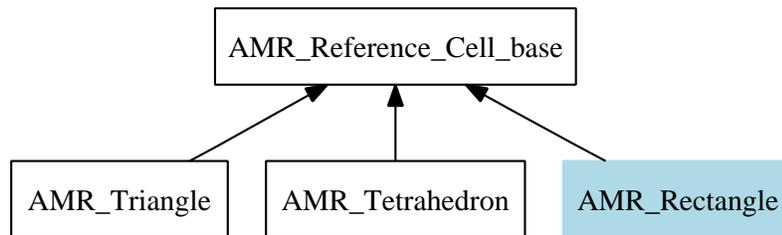


FIG. 2.4: Hiérarchie des AMR_REFERENCE_CELLS. La classe ajoutée lors de ce DRT apparaît en couleur.

Ainsi, les maillages dont il se servait étaient toujours formés de simplexes. Lors de ce DRT nous avons étendu aux rectangles la liste des mailles de référence disponibles.

Les objets de cette hiérarchie fournissent les informations nécessaires à la numérotation locales des sommets, arêtes et faces des différents éléments du maillage. En ce qui concerne les éléments rectangulaires, cette convention est présentée par la figure 2.5.

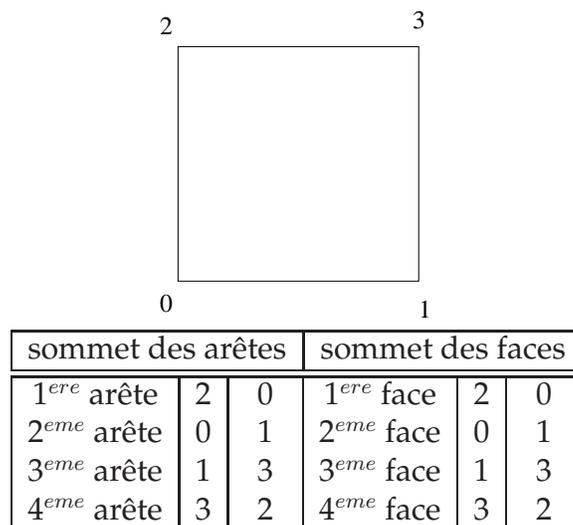


FIG. 2.5: Convention de numérotation pour les mailles rectangulaires.

Ces objets possèdent une méthode, nommée *refine()*, permettant de raffiner un ensemble d'éléments donné. Pour cela, elle admet comme arguments un tableau de sommets, un autre d'éléments et un dernier d'incidence. Le tableau des sommets contient les coordonnées des sommets à raffiner. Le tableau d'éléments contient l'énumération des indices des sommets de chaque élément et enfin le tableau d'incidence contient l'énumération des éléments incidents à chaque élément. En sortie de la fonction *refine()* les trois tableaux ont été redimensionnés et modifiés de la manière suivante :

- le tableau des sommets s'est vu rajouter les sommets correspondants aux milieux des arêtes des mailles initiales, ainsi que les isobarycentres de chaque maille initiale ;
- le tableau d'éléments contient les éléments raffinés générés par la subdivision des éléments initiaux ;
- le tableau d'incidence contient l'incidence des éléments raffinés.

Remarquons que la méthode de raffinement n'est peut être pas la mieux adaptée pour raffiner un quadrangle ou un hexaèdre tout à fait quelconque. L'utilisation de cette méthode de raffinement sur de telles mailles mérite, selon nous, réflexion afin de s'assurer de ne pas se retrouver avec des mailles trop déformées.

Conclusion de ce chapitre :

De nombreuses modifications ont été apportées au module AMR en vue d'ajouter de nouveaux modules.

Il existe maintenant une architecture permettant de résoudre un problème thermohydraulique, c'est-à-dire un problème faisant intervenir deux équations de manière couplées, alors que jusqu'à présent, le module AMR ne permettait pas de traiter un problème ne possédant qu'une seule équation.

Un autre ajout majeure est la prise en compte de la discrétisation VDF . La résolution des problèmes n'est plus limitée à l'utilisation de la discrétisation VEF mais nous pouvons utiliser la discrétisation VDF . Pour cela il a fallu modifier le sous-module GEOMETRY pour que le module AMR puisse travailler sur des mailles rectangulaires. Cette modification implique d'autres modifications, comme la formule de quadrature utilisée pour le calcul de l'erreur.

Chapitre 3

Résolution de problèmes thermohydrauliques

Jusqu' à maintenant, le module AMR développé par Éli Laucoin permettait de résoudre les problèmes de type :

- Laplace;
- Stokes.

Ces problèmes ne font appel à la résolution que d'une seule équation comportant une ou deux inconnues (champ de température, ou bien champs de vitesse et de pression).

Un problème thermohydraulique quant à lui comporte deux équations : une équation thermique et une équation hydraulique. Nous cherchons donc trois inconnues. Notons également que deux autres différences majeures entre un problème de Laplace ou de Stokes, et un problème de thermohydraulique, sont :

- la présence dans les équations d'un terme de convection ;
- le fait que les équations portant sur la thermique et l'hydraulique sont couplées.

En reprenant le formalisme, ainsi que les espaces, introduits dans le chapitre 1.2, nous allons étudier comment appliquer la méthode des éléments joints à la résolution de problèmes thermohydrauliques.

Ce chapitre comporte deux grandes parties. Une première partie théorique et une seconde portée sur les résultats numériques.

3.1 Partie théorique

Nous allons étudier comment est pris en compte l'ajout du terme de convection dans les équations, puis nous verrons l'impacte que cela a sur le système linéaire à résoudre, et enfin nous évoquerons les raisons qui nous ont poussées à expliciter le terme de convection.

3.1.1 Ajout du terme de convection dans les équations

Considérons le problème suivant

Problème 10 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Notons β le champ de vitesse transportant.

Trouver w^1 tel que $\forall w^2$, on ait :

$$a(w^1, w^2, \beta) = l(w^2)$$

Dans tout ce qui suit on désignera par f une fonction de $L^2(\Omega)$.

Dans le cas où nous traitons une équation thermique (scalaire) nous avons :

$$w^1 = T \in H_0^1(\Omega); \quad \text{et} \quad w^2 = v \in H_0^1(\Omega)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} a(w^1, w^2, \beta) &= a(T, v, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla \mathbf{v} + (\beta \cdot \nabla T) v \\ l(w^2) &= l(v) = \int_{\Omega} f v \end{aligned} \quad (3.1)$$

Si nous traitons une équation hydraulique, alors nous avons :

$$\begin{aligned} w^1 &= (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega); \quad \text{et} \quad w^2 = (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \\ a(w^1, w^2, \beta) &= a((\mathbf{u}, \mathbf{v}), \beta) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u} + (\beta \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ l(w^2) &= l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Maintenant, définissons $a_h(w_h^1, w_h^2, \beta_h)$ et $l_h(w_h^2)$ qui sont les pendants discrets de $a(w^1, w^2, \beta)$ et $l(w^2)$.

Mais avant rappelons notations suivantes : Soit $(\Omega_i)_i$ un recouvrement de Ω tel que $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset$ et $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \Gamma_{ij}$.

Dans le cas où nous traitons une équation thermique nous avons :

$$\begin{aligned} a_h : W_h \times W_h \times \mathbf{W}_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ (T_h, v_h, \beta_h) &\rightarrow a_h(T_h, v_h, \beta_h) = \sum_{i=1}^N a_h^i(T_h^i, v_h^i, \beta_h^i) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K \nabla T_h^i \cdot \nabla v_h^i + (\beta_h^i \cdot \nabla T_h^i) v_h^i \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} l_h : W_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_h) &\rightarrow l_h(v_h) = \sum_{i=1}^N l_h^i(v_h^i) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K f \cdot v_h^i \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans le cas où nous traitons une équation hydraulique, nous avons :

$$\begin{aligned} a_h : (\mathbf{W}_h \times X_h^0) \times \mathbf{W}_h \times \mathbf{W}_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v}_h, \beta_h) &\rightarrow a_h((\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{v}_h, \beta_h) = \sum_{i=1}^N a_h^i((\mathbf{u}_h^i, p_h^i), \mathbf{v}_h^i, \beta_h^i) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K \nabla \mathbf{u}_h^i : \nabla \mathbf{v}_h^i - p_h^i \nabla \cdot \mathbf{v}_h^i + q_h^i \nabla \cdot \mathbf{u}_h^i + (\beta_h^i \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^i \cdot \mathbf{v}_h^i \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

et

$$l_h : \mathbf{W}_h \times X_h^0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{v}_h, q_h) \rightarrow l_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{i=1}^N l_h^i(\mathbf{v}_h^i, q_h^i) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega_i)} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h^i \right) \quad (3.6)$$

En suivant la méthodologie développée dans le chapitre 1.2, le problème mortar discret que l'on va résoudre est le suivant :

Problème 11 Trouver $(w^1, \lambda_h, w_\Gamma)$ tel que $\forall (v_h, \mu_h, v_\Gamma)$ on ait

$$\begin{aligned} a_h(w_h^1, w_h^2, \beta_h) + b_h(\lambda_h, v_h) &= l_h(w_h^2) \\ b_h(\mu_h, w_h^1) - c_h(\mu_h, w_\Gamma^1) &= 0 \\ -c_h(\lambda_h, w_\Gamma^2) &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où nous traitons une équation thermique, nous avons :

$$\begin{aligned} (w_h^1, \lambda_h, w_\Gamma) &= (T_h, \lambda_h, T_\Gamma) \in W_h \times L_h \times M_h \\ (w_h^2, \mu_h, w_\Gamma) &= (v_h, \mu_h, v_\Gamma) \in W_h \times L_h \times M_h \end{aligned}$$

Dans le cas où nous traitons une équation hydraulique, nous avons :

$$\begin{aligned} (w_h^1, \lambda_h, w_\Gamma) &= ((\mathbf{u}_h, p_h), \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u}_\Gamma) \in (\mathbf{W}_h \times X_h^1) \times \mathbf{L}_h \times \mathbf{M}_h \\ (w_h^2, \mu_h, w_\Gamma) &= ((\mathbf{v}_h, q_h), \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{v}_\Gamma) \in (\mathbf{W}_h \times X_h^1) \times \mathbf{L}_h \times \mathbf{M}_h \end{aligned}$$

3.1.2 Assemblage du système linéaire

En notant A , B et C les matrices associées respectivement à $a_h(\cdot, \cdot, \cdot)$, $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ alors le système linéaire associé au problème 11 prend la forme :

$$\begin{bmatrix} A & B^T & 0 \\ B & 0 & -C^T \\ 0 & -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^1 \\ \lambda \\ W_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Dans le cas de l'utilisation des discrétisations VEF , \mathbb{Q}_{NC}^1 ou VDF , décrites dans l'annexe A alors les simplifications présentées dans le chapitre 1.2 partie 1.2.2 sont toujours valables de part la construction des fonctions de base des différents éléments finis. Il en est de même en ce qui concerne le calcul des coefficients des matrices de couplage.

3.1.3 Terme de convection explicite

Si nous implicitons les termes de convection et de diffusion, comme cela est suggéré plus haut, alors la matrice n'est pas symétrique. En effet, bien que la matrice associée à l'opérateur de diffusion soit symétrique, ce n'est pas le cas pour celle associée à l'opérateur de convection. En conséquence, l'utilisation d'un algorithme tel que le gradient conjugué est à banir. Il faut donc développer un solveur qui utilise un algorithme tel que Gmres par exemple. Cependant il faut faire

attention car l'algorithme devra tenir compte du fait que le système global à résoudre provient d'un problème posé sur un domaine pouvant contenir des sous-domaines ayant des discrétisations, ou des niveaux de raffinement, différents. Par conséquent il est construit en prenant en compte les matrices de couplages, notées C_{Γ}^i et C_{Γ}^{iT} .

Multiplier un vecteur par la matrice globale est réalisé de la manière suivante :

- conversion du vecteur global en vecteurs locaux, en appliquant les transposées des matrices de couplage ;
- multiplication des vecteurs locaux par les matrices locales ;
- assemblage des résultats locaux pour générer le résultat global en appliquant les matrices de couplage.

Illustrons ces propos dans le cas d'un problème de Laplace, découpé en deux sous-problèmes. En posant $E_{\Gamma\Gamma} = C_{\Gamma}^1 A_{\Gamma\Gamma}^1 C_{\Gamma}^{1T} + C_{\Gamma}^2 A_{\Gamma\Gamma}^2 C_{\Gamma}^{2T}$ alors nous avons la relation :

$$\begin{bmatrix} A_{II}^1 & 0 & A_{IT}^{1T} C_{\Gamma}^{1T} \\ 0 & A_{II}^2 & A_{IT}^{2T} C_{\Gamma}^{2T} \\ C_{\Gamma}^1 A_{IT}^1 & C_{\Gamma}^2 A_{IT}^2 & E_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{\Gamma}^1 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{\Gamma}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{II}^1 & A_{IT}^{1T} \\ A_{IT}^1 & A_{\Gamma\Gamma}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\Gamma}^{1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_{\Gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{\Gamma}^2 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{\Gamma}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{II}^2 & A_{IT}^{2T} \\ A_{IT}^2 & A_{\Gamma\Gamma}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\Gamma}^{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Le développement d'un solveur faisant appelle à une méthode Gmres (ou une autre méthode), doit tenir compte de la relation 3.8.

En revanche, si nous explicitons le terme de convection, alors aucun développement supplémentaire n'est nécessaire. Ainsi, dans le cas instationnaire et en faisant abstraction des conditions limites, l'équation principale du problème 10, avec un schéma en temps de type Euler explicite, s'écrit :

$$\frac{T^{n+1}}{dt} - \Delta T^{n+1} = f^n + \mathbf{u}^n \nabla \cdot T^n + \frac{T^n}{dt} \quad (3.9)$$

La matrice de masse locale étant symétrique , la matrice globale reste symétrique. Dans la suite de ce mémoire, le terme de convection sera toujours explicité.

3.2 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons le résultat de la résolution de problèmes de type Navier-Stokes ou des problèmes thermohydrauliques.

En premier lieu nous résoudrons des problèmes qui ne nécessitent pas l'utilisation de la méthode des éléments joints, puis nous modifierons la géométrie du problème afin de faire intervenir cette méthode. Notons que lorsqu'on utilise la méthode des éléments joints, nous résolvons un système linéaire semblable à 3.7.

3.2.1 Sans avoir recours aux éléments joints

Nous allons présenter quelques résultats issus de résolution de problèmes sur un domaine ne comportant aucun sous-domaine raffiné. La méthode des éléments joints n'est pas donc pas utilisée dans ce cas là.

Nous voulons ainsi montrer la bonne résolution, avec le module AMR, d'une équation possédant un terme de convection.

Les résultats qui suivent ont été obtenus à partir d'une discrétisation de type VEF et sont issus de problèmes en 2D.

Problèmes de type Navier-Stokes

Résolvons un problème comportant une équation de type Navier-Stokes. Afin de vérifier le bon fonctionnement du terme de convection, nous négligerons le terme de diffusion.

Prenons comme domaine d'étude Ω le carré unité. Soit le problème suivant :

Problème 12 *Cercher le couple (\mathbf{u}, p) vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (x ; y)^t & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = (x ; -y)^t & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = (x ; -y)^t & \text{dans } \Omega \text{ à l'instant initial} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

La solution du problème 3.10 est donnée par :

$$\mathbf{u} = (u_1 ; u_2) = (x ; -y)^t \quad \text{et} \quad p = 0 \quad (3.11)$$

La figure 3.1 montre le maillage utilisé. La figure 3.2 regroupe les deux composantes du champ de

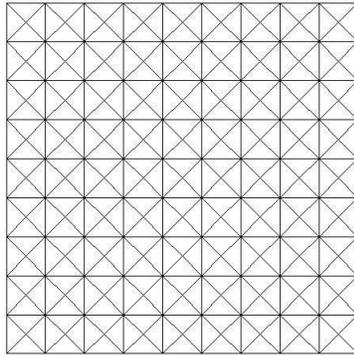


FIG. 3.1: Maillage du domaine Ω pour la résolution de 3.10.

vitesse obtenues en utilisant l'opérateur de convection nommé EF qui est un opérateur centré, et en utilisant la version standard de la méthode VEF. L'erreur commise est de l'ordre de 10^{-17} , ce qui correspond à la précision machine. Notons que l'opérateur de convection utilisant un schéma de convection centré n'est pas stable, c'est pour cette raison que nous avons initialisé le champ de vitesse à la solution analytique.

Si nous résolvons de nouveau le problème 3.10, en utilisant toujours la version standard de la méthode VEF , mais cette fois utilisons l'opérateur de convection nommé EF_Stab , alors nous

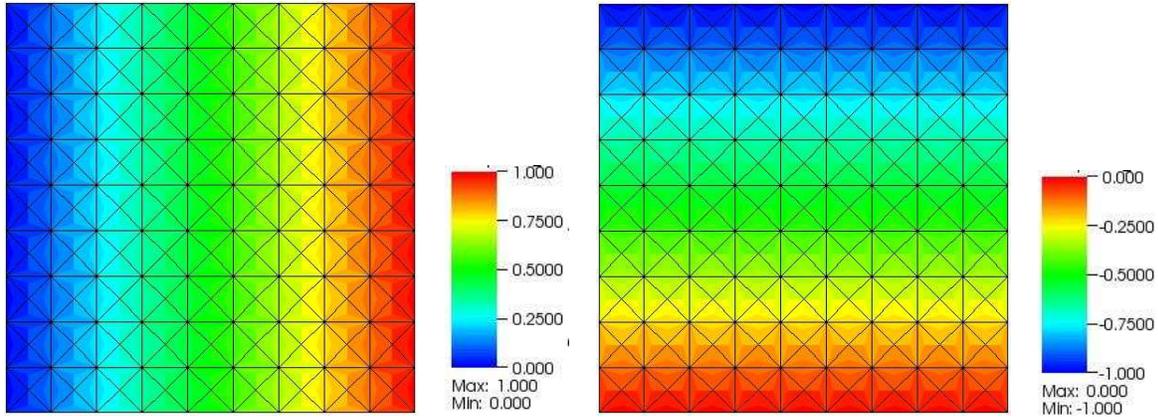


FIG. 3.2: Résolution du problème 3.10. Composantes u_1 (gauche) et u_2 (droite) composante du champ de vitesse. Utilisation de l'opérateur de convection EF ainsi que de la version standard de la méthode VEF .

n'obtiendrons pas une erreur de l'ordre de 10^{-17} car cette opérateur commet des erreurs d'intégration numérique. L'opérateur de convection EF_Stab utilise un schéma centré avec un limiteur de pente pour le stabiliser. Dans ce qui suit, l'opérateur de convection utilisé sera l'opérateur EF_Stab.

Gardons le même domaine d'étude Ω , mais maillons-le comme illustré par la figure 3.3. Soit le problème suivant :

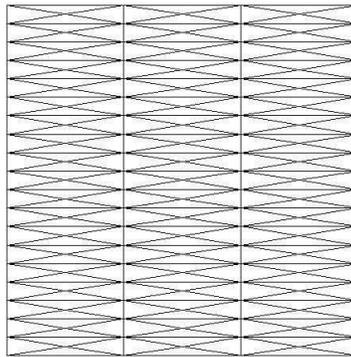


FIG. 3.3: Maillage du domaine Ω pour la résolution de 13.

Problème 13 Trouver le couple (\mathbf{u}, p) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (-1 ; 0)^t & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = (y^2 ; 0)^t & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = (0 ; 0)^t & \text{dans } \Omega \text{ à l'instant initial} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La solution du problème 13 est donnée par

$$\mathbf{u} = (u_1 ; u_2)^t = (y^2 ; 0)^t \quad \text{et} \quad p = x \quad (3.13)$$

Notons que la pression n'est définie qu'à une constante près. La figure 3.4 montre la composante u_1 du champ de vitesse, ainsi que la pression, après la résolution du problème 13.

Concernant la composante u_1 du champ de vitesse, le résultat est bien celui attendu, en revanche

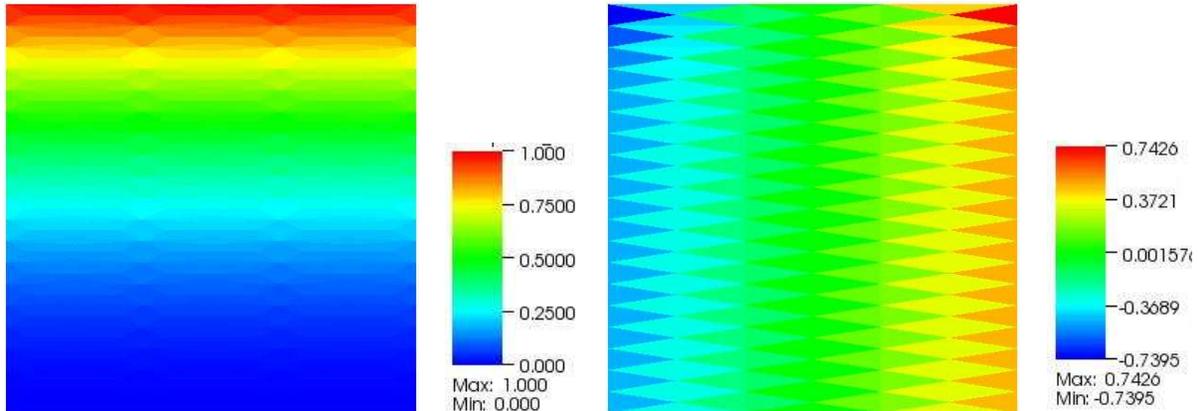


FIG. 3.4: Résolution du problème 13. Composantes u_1 du champ de vitesse (gauche) et pression (droite). Utilisation de la version étendue de la méthode VEF .

nous remarquons que, bien que globalement satisfaisant, la pression a un comportement étrange dans les coins supérieurs gauches et droits. Nous verrons par la suite que ce comportement étrange s'accroît avec l'utilisation de la méthode des éléments joints.

Remarque 3.2.1 *Le même calcul effectué avec TRIO_U, en dehors du module AMR, présente le même comportement étrange aux mêmes endroits.*

Problème de convection thermique

Étudions un problème de convection thermique. Prenons comme domaine d'étude (noté Ω) le carré unité.

Nous nous proposons de convecter un front de température. Considérons un champ de vitesse \mathbf{u} de $1m.s^{-1}$, uniforme et constant au cours du temps. Posons : $\mathbf{u} = (1, 0)^t$ Considérons le problème suivant :

Problème 14 *Chercher T vérifiant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = 0 & \text{dans } \Omega \\ T = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.4 < x < 0.6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Les conditions limites sont conditions de périodicité suivant les deux directions spatiales. Autrement dit, tous les bords du domaine Ω ont une condition de périodicité.

Dans TRIO_U, il existe une notion de *maillage dual* qui permet d'exhiber les *volumes de contrôles* utilisés. Un *volume de contrôle* est obtenu en reliant les sommets au centre de gravité de la maille. Notons que lors de la visualisation des résultats, dans le cadre d'une discrétisation de type *VEF*, l'inconnue calculée au milieu d'une face va donner sa valeur au *volume de contrôle* associé à cette face.

La figure 3.5 illustre la condition initiale du problème 14 avec une exhibition du maillage dual.

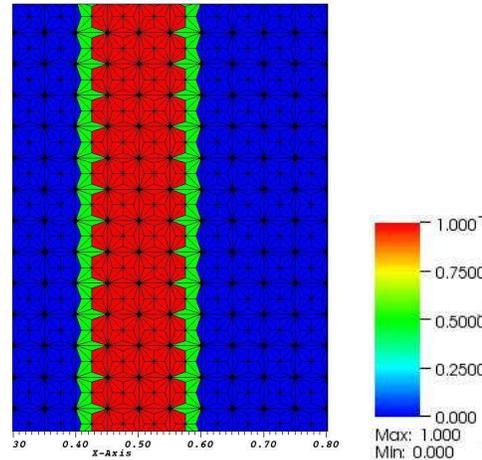


FIG. 3.5: Illustration de la condition initiale et du maillage dual de Ω .

À présent, étudions l'évolution de ce *front* au cours du temps. Dans un premier temps, à l'instant initial, puis à l'instant $t = 0.1$.

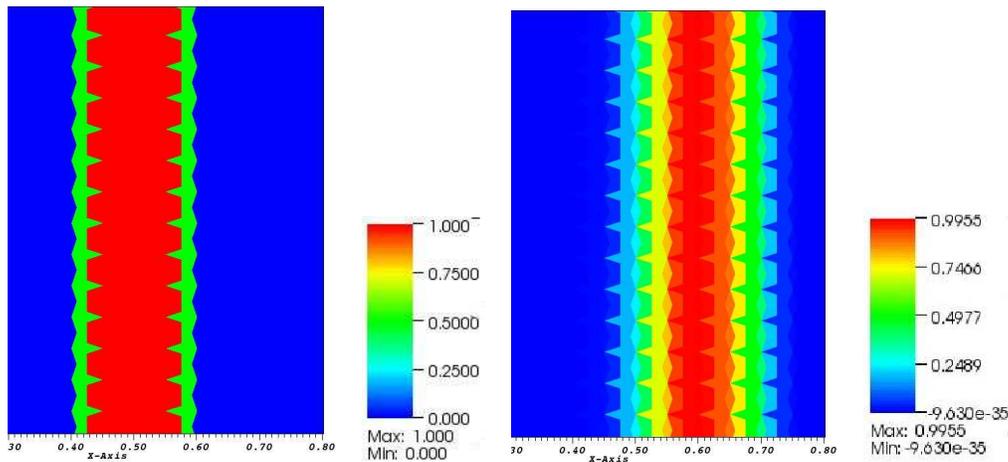


FIG. 3.6: Évolution du *front* de température. D'abord à l'instant initial (gauche) puis à l'instant $t = 0.1$ s (droite).

En regardant la figure 3.6 nous constatons que le *front* de température s'est déplacé de $0.1 m$, ce qui correspond bien au résultat attendu compte tenu du temps et de la vitesse de convection. Cela montre que l'opérateur de convection a été correctement pris en compte dans le code.

Problème thermohydraulique

Intéressons-nous à présent à la résolution d'un problème thermohydraulique, c'est-à-dire un problème couplant une équation thermique avec une équation hydraulique. Prenons comme domaine d'étude Ω le carré unité maillé comme l'illustre la figure 3.7.

Soit $\Gamma_G, \Gamma_B, \Gamma_D$ et Γ_H les bords situés respectivement en $x = 0, y = 0, x = 1$ et $y = 1$. Notons g le

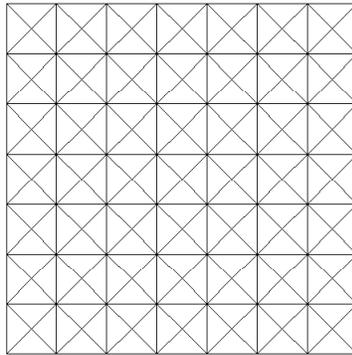


FIG. 3.7: Maillage du domaine Ω pour la résolution de 3.10.

champ gravitationnel, fixé à $-9.81 m.s^{-2}$. Soit \mathbf{n} le vecteur unitaire normal extérieur au domaine Ω . Introduisons également le coefficient de dilatation thermique, noté β , que l'on fixera à $1K^{-1}$. Posons comme température de référence : $T_0 = 1K$

Considérons le problème suivant :

Problème 15 Chercher le triplet (T, \mathbf{u}, p) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_G \\ T = 2 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B \text{ et sur } \Gamma_H \\ T = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \beta g (T - T_0) \mathbf{e}_y \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{array} \right.$$

On se propose d'utiliser la version étendue de la méthode *VEF* pour résoudre ce problème. La figure 3.8 montre le comportement de la norme du champ de vitesse, ainsi que le comportement

de la température. Il est également possible de voir le sens de l'écoulement, symbolisé par des flèches.

Le gradient de température imposé entre les bords Γ_D et Γ_G joue le rôle de moteur car c'est ce

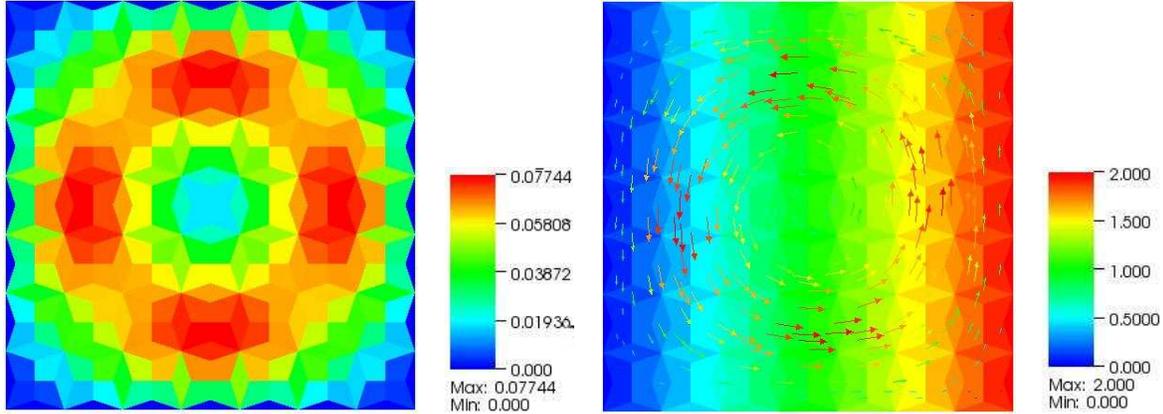


FIG. 3.8: Résolution du problème 15. Illustration de la norme de la vitesse (gauche) et de la température (droite).

terme qui va entraîner le fluide. En effet, le fluide chaud va avoir tendance à se rapprocher du bord Γ_H alors que le fluide froid va au contraire se rapprocher du bord Γ_B .

Les résultats obtenus sont conformes à nos attentes. Nous constatons qu'il y a bien une interaction entre l'équation thermique et l'équation hydraulique.

3.2.2 Utilisation des éléments joints

À présent, nous allons montrer qu'il est possible de résoudre des problèmes faisant intervenir de la convection, ou un couplage entre les équations, via les éléments joints.

Problème de type Navier-Stokes

Soit Ω le carré unité. On se propose de résoudre le problème 13 sur le domaine Ω maillé comme illustré par la figure 3.9. Comme précédemment nous utilisons la version étendue de la méthode *VEF*. En plus du maillage de Ω , la figure 3.9 montre la composante u_1 du champ de vitesse obtenue à convergence.

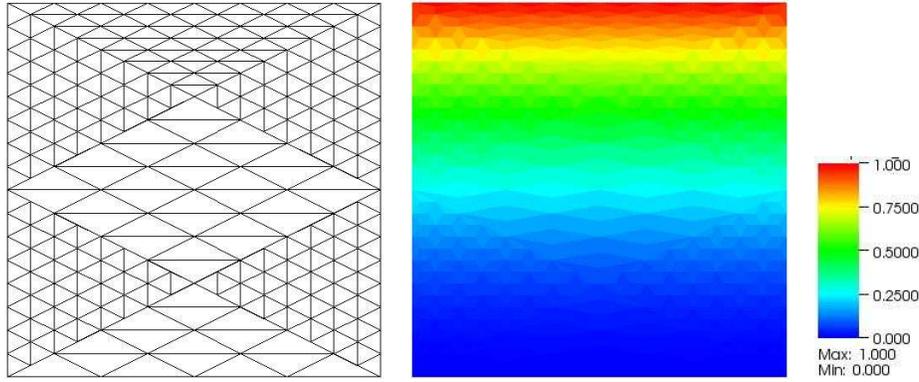


FIG. 3.9: Maillage du domaine Ω (droite) et composante u_1 du champ de vitesse obtenue après résolution du problème 13.

Nous constatons que nous sommes très proches de la solution analytique. Intéressons-nous au comportement de la pression à présent. La figure 3.10 montre sur une première figure (à gauche) le comportement de la pression. Nous nous apercevons que la pression atteint ses valeurs maximales sur quelques éléments, situés dans les coins supérieurs gauches et droits du domaine Ω . Ce phénomène a déjà été remarqué, dans une moindre importance, dans le cas de résolution du problème 13 sans l'utilisation des mortars.

Afin de mieux voir le comportement de la pression, nous avons joué sur la palette de couleurs.

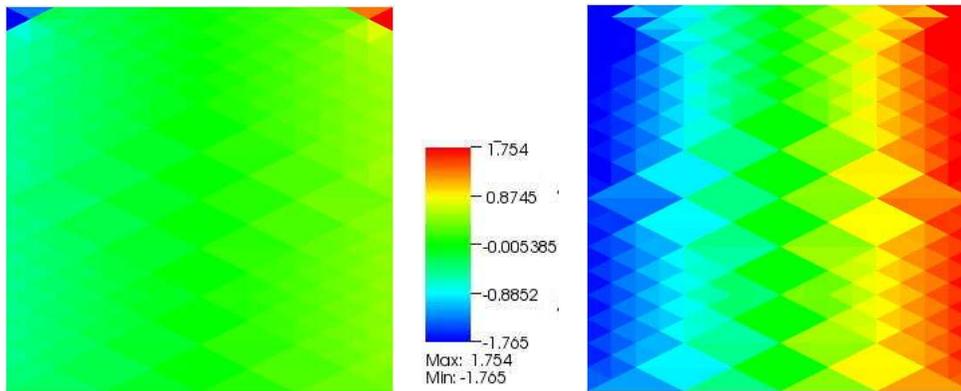


FIG. 3.10: Résolution du problème 13. Comportement de la pression sans modifier la palette de couleurs (gauche), puis en modifiant les bornes min et max de la palette de couleurs (droite).

Notons Min et Max les valeurs minimales et maximales prises par la palette de couleurs, nous avons posé $Min = -0.5$ et $Max = 0.5$. Maintenant, étudions le comportement de la pression le long de la ligne située en $y = 0.8$.

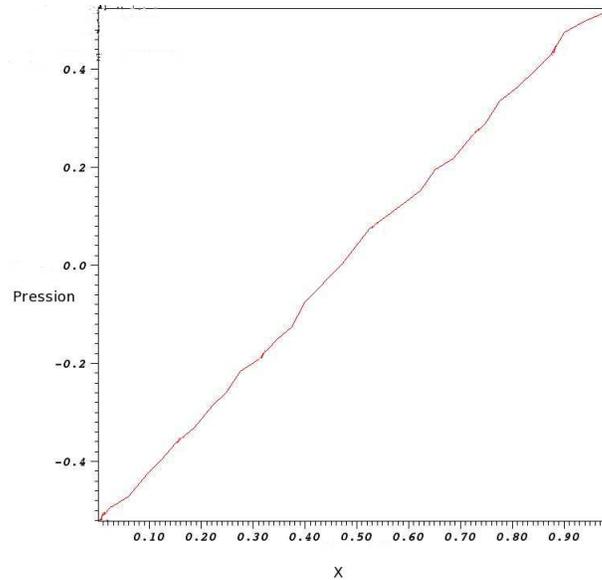


FIG. 3.11: Comportement de la pression le long de la ligne située en $y = 0.8$.

Grâce à la figure 3.11 nous constatons que, abstraction faite des coins supérieurs gauches et droits, la pression se comporte de la manière que nous attendions sur Ω en étant linéaire.

Problème de convection thermique

Partionnons le domaine Ω en trois sous-domaines composés de maillages raffinés à des niveaux différents, comme illustré par la figure 3.12.

Nous imposons à l'intérieur du domaine Ω un champ de vitesse de 0.1 m.s^{-1} , constant au cours du temps. Nous avons donc

$$\mathbf{u} = (0.1, 0)^t$$

Réolvons le problème suivant :

Problème 16 Chercher T vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f & \text{dans } \Omega \\ T = x & \text{sur } \partial\Omega \\ T = 0 & \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Avec $f = 0.1$, à l'état stationnaire, la solution du problème 16 est $T(x, y) = x$.

Nous constatons que nous obtenons bien la solution $T(x, y) = x$ à l'état stationnaire.

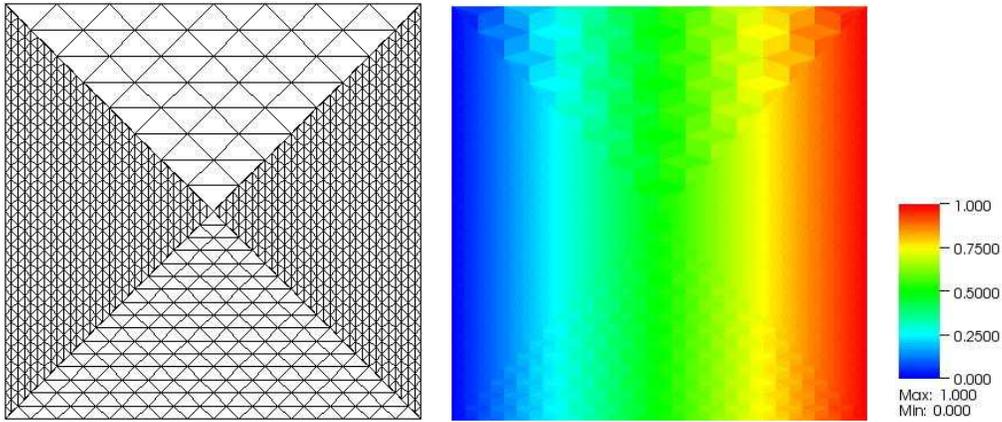


FIG. 3.12: Illustration du maillage du domaine d'étude Ω avec différents niveaux de raffinement (gauche) ; Résolution du problème 16 en utilisant un schéma centré (droite).

Remarque 3.2.2 .

Le problème 16 a été résolu en utilisant l'opérateur de convection EF_Stab . Si nous remplaçons l'opérateur EF_Stab par un opérateur de convection utilisant un schéma amont alors nous verrons que la température prend des valeurs négatives au cours du temps avant de converger vers la solution analytique. Ceci est anormal car en utilisant un schéma amont, la température devrait rester toujours positive ou nulle.

Nos propos sont illustrés par la figure 3.13.

Ce phénomène est dû au fait que, lors de l'utilisation de la méthode des éléments joints, la positivité du schéma n'est pas forcément conservée. Pour plus de détails, se reporter au chapitre 8 qui est consacré à l'étude de ce phénomène.

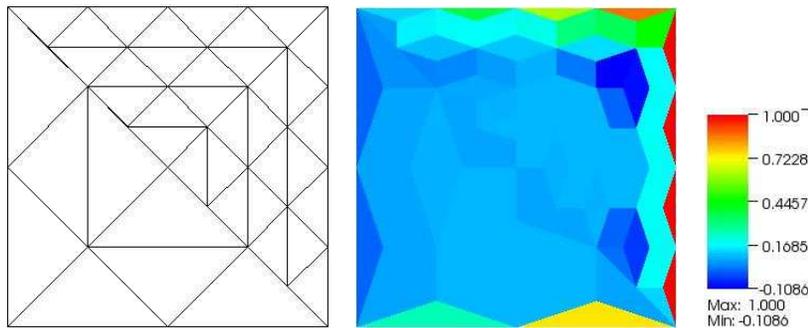


FIG. 3.13: Illustration du maillage du domaine d'étude Ω (gauche) ; En utilisant un schéma amont, après quelques itérations, la température prend des valeurs négatives (droite).

Problème thermohydraulique

Soit Ω le carré unité. Résolvons le problème 15 sur le domaine Ω maillé comme illustré par la figure 3.14.

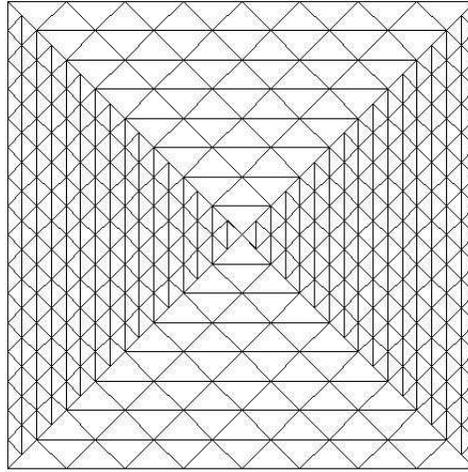


FIG. 3.14: Maillage du domaine Ω pour la résolution du problème 15.

Le champ de vitesse et la température obtenue après la résolution du problème 15 sur le domaine Ω sont présentés par la figure 3.15.

Les résultats obtenus correspondent bien à nos attentes car nous retrouvons le même compor-

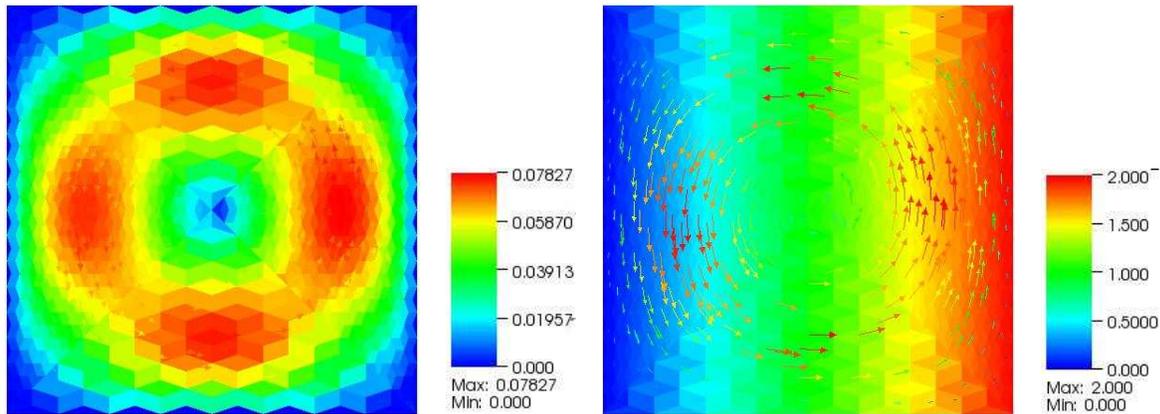


FIG. 3.15: Résolution du problème 15. Illustration de la norme du champ de vitesse (gauche) ainsi que de la température (droite).

tement du fluide et de la température que dans le cas où le domaine était maillé de manière homogène (voir figure 3.8).

3.2.3 Raffinement automatique

À présent, nous allons illustrer l'utilisation du raffinement automatique suivant le critère de "non-conformité" mis en place dans [22]. Ce critère consiste à analyser le caractère lisse de la solution obtenue. Puisque nous utilisons la méthode VEF (version étendue), la solution que nous obtenons appartient à l'espace \mathbb{P}_{NC}^1 . Nous allons donc comparer notre solution à sa projection sur l'espace \mathbb{P}^1 , et raffiner localement aux endroits présentant des singularités.

Reprenons le problème 15 mais cette fois nous allons fixer $\beta = 200 K^{-1}$. La figure 3.16 représente l'évolution du maillage au cours du temps. La figure 3.17 illustre, à convergence, le compor-

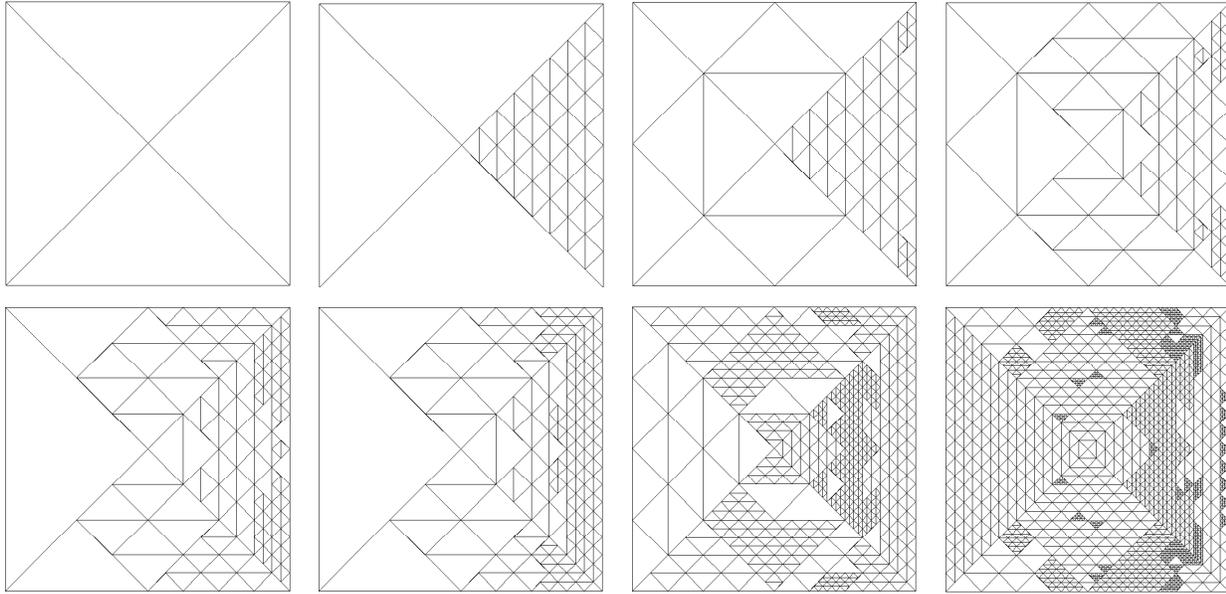


FIG. 3.16: Évolution du maillage lors de la résolution du problème 15.

tement du fluide et l'impacte qu'a ce dernier sur la température. Sur la figure 3.15 nous ne voyons

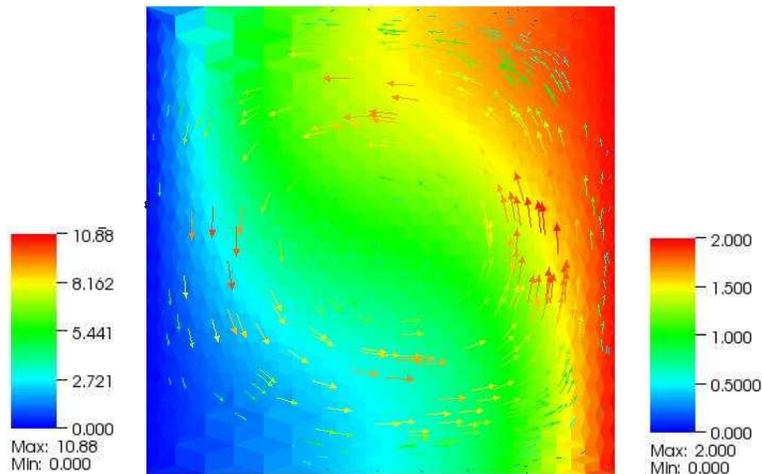


FIG. 3.17: Résolution du problème 15. Illustration de la norme du champ de vitesse (gauche) ainsi que de la température (droite).

pas l'impacte du fluide sur la température car la figure montrait la résolution du problème 15 avec le coefficient $\beta = 1 K^{-1}$ alors que la figure 3.17 montre la résolution du problème 15 avec le coefficient $\beta = 200 K^{-1}$.

Maintenant, prenons comme domaine d'étude, le cube unité défini sur $[0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$ et dont la figure 3.18 montre le maillage après ses évolutions.

Introduisons les bords suivants :

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 & \text{situé en } x = 0 \\ \Gamma_2 & \text{situé en } x = 1 \\ \Gamma_3 & \text{situé en } y = 0 \\ \Gamma_4 & \text{situé en } y = 1 \\ \Gamma_5 & \text{situé en } z = 0 \\ \Gamma_6 & \text{situé en } z = 1 \end{array}$$

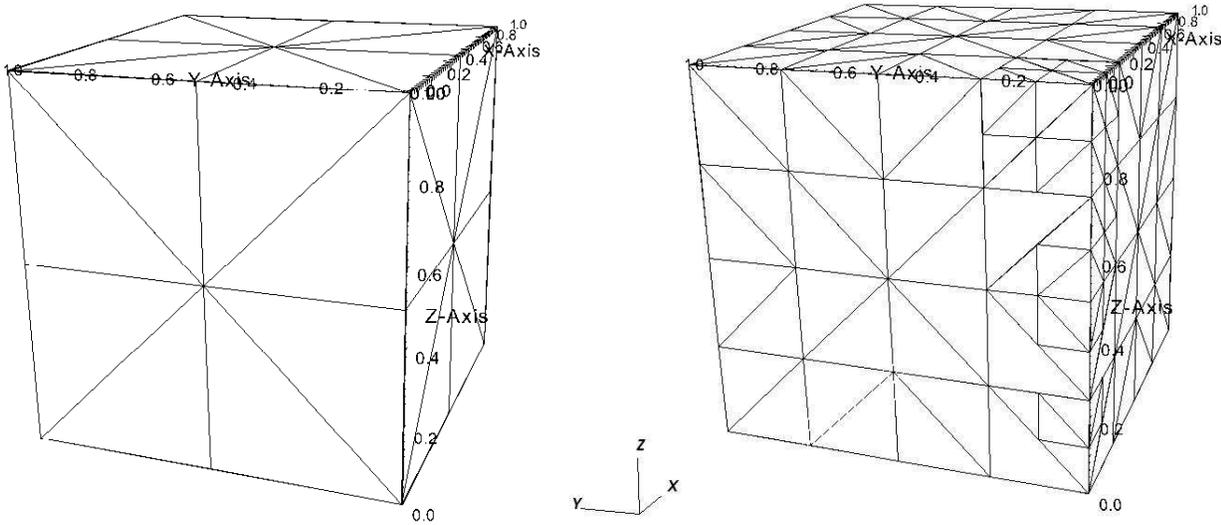


FIG. 3.18: Maillage initial du domaine d'étude Ω (gauche) et après les diverses étapes de raffinement (droite).

Intéressons-nous maintenant au problème suivant, en posant cette fois-ci $\beta = 1 K^{-1}$:

Problème 17 Chercher le triplet (T, \mathbf{u}, p) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \\ T = 2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \\ T = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \mathbf{u} = \beta g(T - T_0) \mathbf{e}_z \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{array} \right.$$

Ce problème a été résolu en parallèle sur 4 processeurs.

La figure 3.19 illustre le comportement du champ de température, à convergence, à l'aide de coupes réalisées parallèlement à l'axe z . Nous constatons que, comme attendu, la température se propage

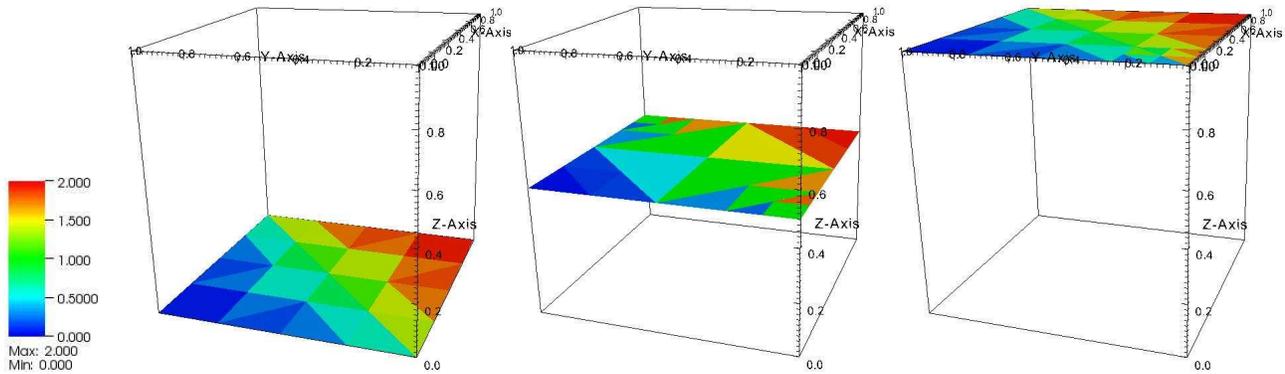


FIG. 3.19: Résolution du problème 17. Comportement de la température suivant différentes coupes le long de l'axe z .

des bords du domaine vers l'intérieur.

Étudions à présent le comportement du fluide. La figure 3.20 montre le champ de vitesse via des coupes suivant chaque axe directionnel.

Lorsqu'il s'approche d'une face dont la température est $T = 0$ le champ de vitesse se dirige dans

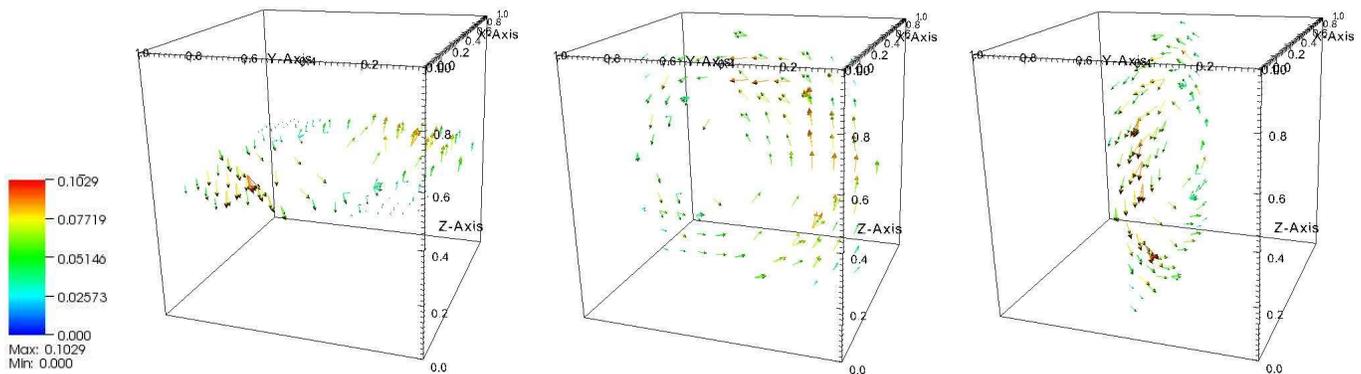


FIG. 3.20: Résolution du problème 17. Comportement du champ de vitesse via des coupes suivant chaque axe directionnel.

la direction de la face située en $z = 0$ alors qu'au contraire lorsqu'il s'approche d'une face dont la température est plus élevée alors il se dirige dans la direction de la face située en $z = 1$.

Cela est conforme à nos attentes.

La figure 3.21 quant à elle offre une vue d'ensemble du comportement du champ de vitesse à l'intérieur du domaine d'étude.

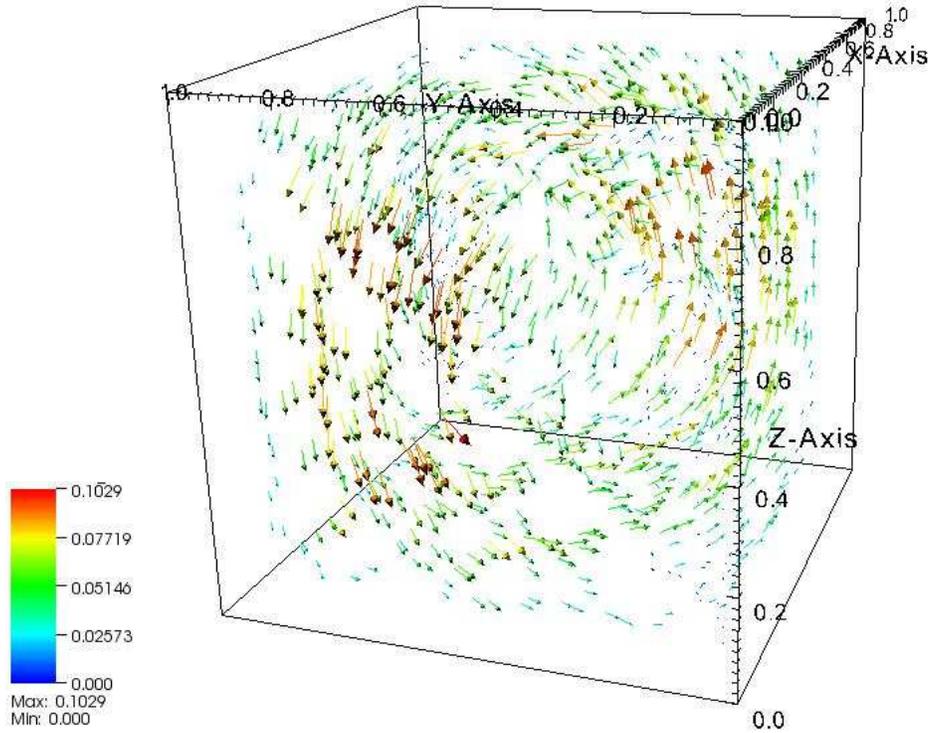


FIG. 3.21: Résolution du problème 17. Comportement du champ de vitesse.

Conclusion de ce chapitre :

Jusqu'à présent, le module AMR ne permettait pas la résolution d'équations comportant un terme de convection, ni de problèmes couplés. Comme nous venons de le montrer, il est maintenant possible de résoudre un problème thermohydraulique. Ceci signifie que le module AMR peut résoudre un problème possédant deux équations couplées entre elles et ayant un des termes de convectifs.

Chapitre 4

Intégration de la discrétisation VDF

Jusqu'à présent, seule la discrétisation VEF de TRIO_U était proposée pour résoudre les problèmes dans le module AMR. Nous avons donc fait en sorte, au cours de ce DRT, de pouvoir utiliser une autre méthode numérique disponible dans TRIO_U : la discrétisation VDF (Volumes-Différences Finis). Plus de détails concernant cette discrétisation sont disponibles dans l'annexe A.

Remarque : Comme indiqué dans l'annexe A, l'utilisation de la discrétisation type VDF peut être vue comme l'utilisation de l'élément fini de Raviart-Thomas.

Dans une première partie nous nous intéresserons à la bonne prise en compte de la discrétisation VDF dans le module AMR, puis nous résoudrons un problème faisant intervenir l'utilisation de la méthode des éléments joints (ou mortars). Enfin nous évoquerons les problèmes rencontrés, spécifiques à la discrétisation VDF , et nous donnerons des pistes pour les résoudre.

4.1 Discrétisation VDF sans mortar

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur la bonne prise en compte de la discrétisation de type VDF par le module AMR, sans nous soucier de l'aspect mortar. Nous allons donc prendre un domaine d'étude maillé de manière homogène.

On se propose de montrer que nous pouvons résoudre un problème de type Stokes à l'aide d'une discrétisation VDF . Considérons le problème suivant :

Problème 18 Soit Ω le carré unité et $\partial\Omega$ sa frontière.

Trouver le couple (\mathbf{u}, p) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{ini} & \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{array} \right.$$

Où nous avons fixé :

$$\mathbf{f} = (0, 0)^t \quad ; \quad \mathbf{u}_\Gamma = (x, -y)^t \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{ini} = (0, 0)^t \quad (4.1)$$

En considérant 4.1, la solution du problème 18 est donnée par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p = 0 \quad (4.2)$$

Maillons le domaine avec 30 mailles dans chaque direction et lançons la résolution du problème avec un pas de temps $dt = 10^{-2}$ secondes. La figure 4.1 illustre le résultat obtenu à convergence (au bout d'une itération) pour la composante u_1 (gauche) et u_2 (droite). La solution 4.2 étant li-

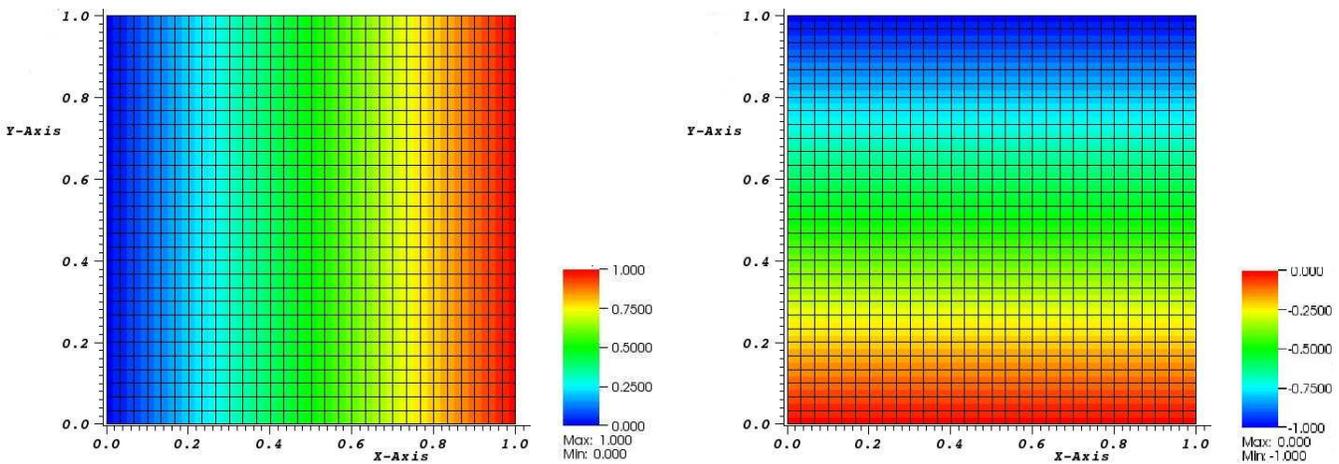


FIG. 4.1: Composante u_1 (gauche) et u_2 (gauche) du champ de vitesse.

néaire en chaque composante, on la capte exactement. L'erreur commise, en norme L^2 , est de l'ordre de 10^{-14} .

À présent, fixons :

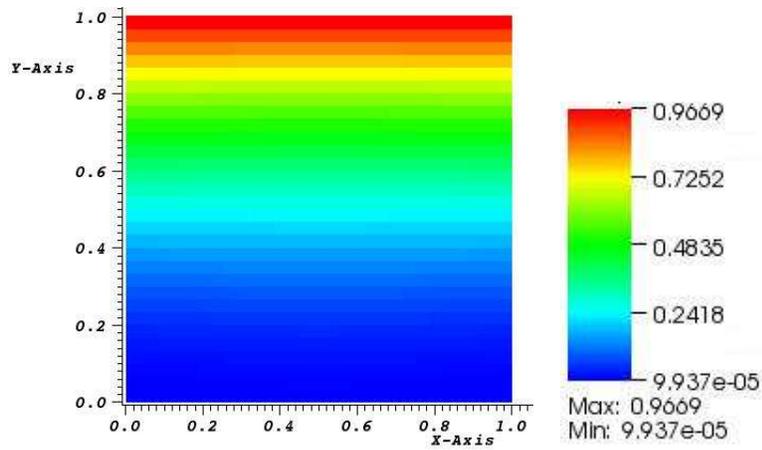
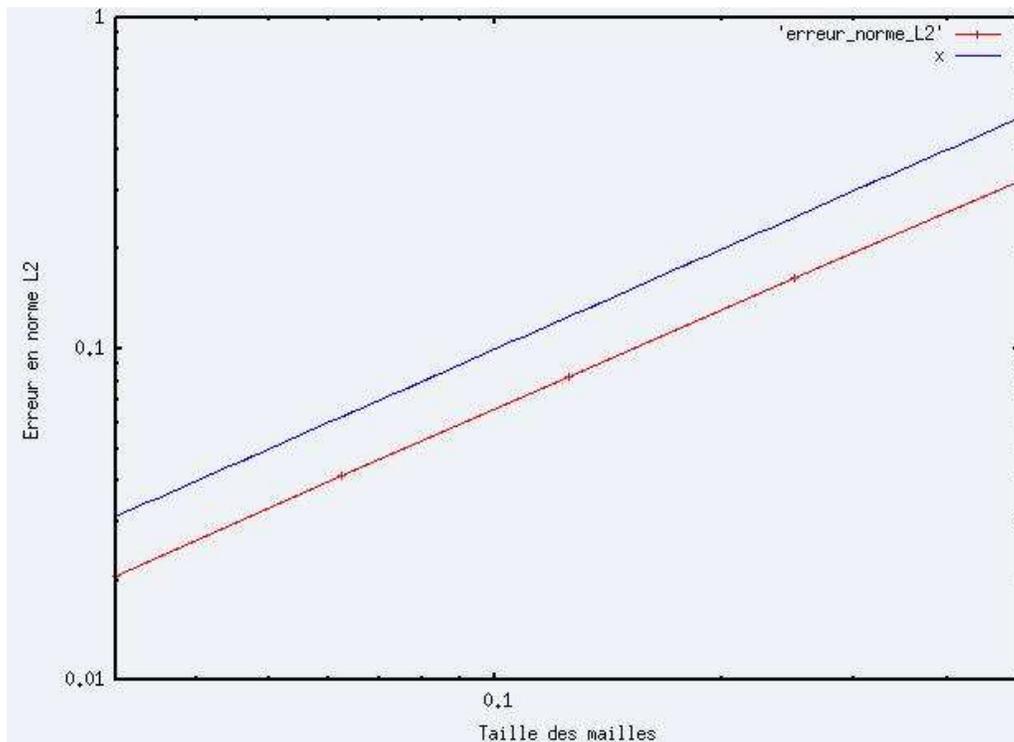
$$\mathbf{f} = (-2, 0)^t \quad ; \quad \mathbf{u}_\Gamma = (y^2, 0)^t \quad ; \quad \mathbf{u}_{ini} = (0, 0)^t \quad (4.3)$$

En considérant 4.3, la solution du problème 18 est donnée par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p = 0 \quad (4.4)$$

La figure 4.2 illustre le résultat obtenu à convergence (au bout de 40 itérations) pour la composante u_1 . La solution 4.4 n'étant pas linéaire en u_1 , on ne la capte pas exactement. L'erreur commise, en norme L^2 , est de l'ordre de 10^{-2} .

À présent, faisons varier la taille du maillage et étudions le comportement de l'erreur en norme L^2 .

FIG. 4.2: Composante u_1 du champ de vitesse.FIG. 4.3: Comportement de l'erreur en norme L^2 .

La figure 4.3 représente le comportement de l'erreur en fonction de la taille des mailles de Ω , en échelle logarithmique. La pente obtenue est de 0.978

4.2 Discrétisation VDF avec mortar

Maintenant que nous avons pu constater que le module AMR prenait correctement en compte la discrétisation VDF , nous allons résoudre un problème de type Darcy nécessitant l'utilisation de la méthode des éléments joints. Il est intéressant de s'intéresser à un problème de type Darcy, comportant un terme source non nul, car un tel problème peut être interprété comme un problème de type Stokes sans terme source.

Intéressons-nous au problème suivant :

Problème 19 Soit Ω le carré unité et $\partial\Omega$ sa frontière. Notons Γ la frontière interne séparant les sous-domaines recouvrant Ω . Γ est une frontière de type mortar.

Trouver le couple (\mathbf{u}, p) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = (0; 1)^t & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = (x; -y)^t & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = (0; 0)^t & \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{array} \right.$$

La solution du problème 19 est donnée par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p = y + C \quad (4.5)$$

Où C est une constante réelle.

La figure 4.4 illustre le domaine Ω ainsi que deux sous-domaines maillés chacun de manière différente. Les deux composantes du champ de vitesse sont illustrées par la figure 4.5. Remarquons

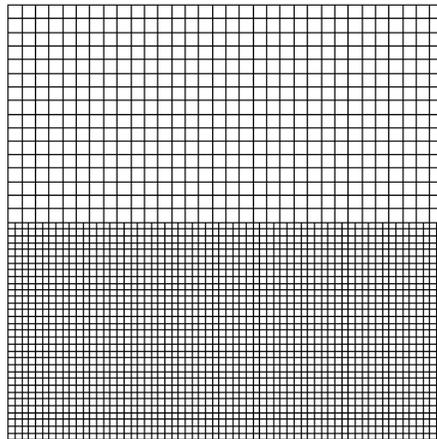


FIG. 4.4: Maillage utilisé pour la résolution du problème 19.

que nous retrouvons bien la solution analytique 4.5. Le comportement de la pression est illustré sur la figure 4.6.

Étudions le comportement de la pression de plus près. La figure 4.7 représente les différentes

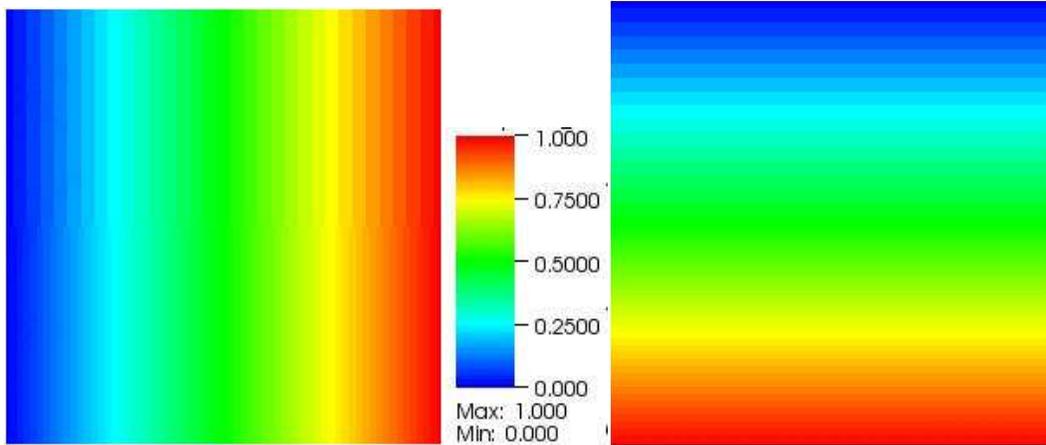


FIG. 4.5: Composantes u_1 (à gauche) et u_2 (à droite) du champ de vitesse obtenues lors de la résolution du problème 19, à convergence.

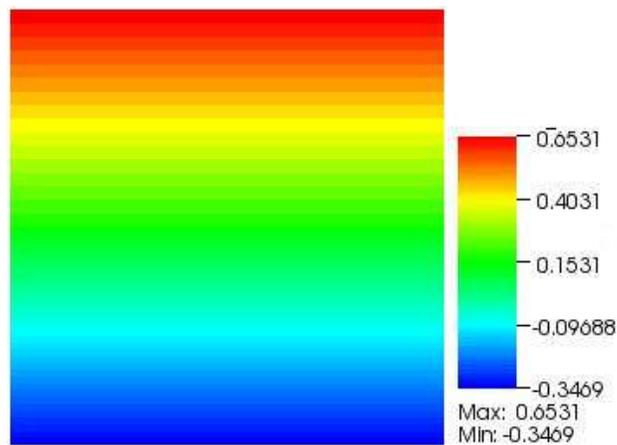


FIG. 4.6: Pression obtenue lors de la résolution du problème 19, à convergence.

valeurs prises par la pression le long d'un axe, qui coupe le domaine Ω dans sa longueur. Cet axe coupe donc la frontière interne Γ .

Nous constatons que la pression évolue linéairement, et que la différence de pression suivant l'axe Y , vaut bien 1. Notons que le léger décrochage qui apparaît au milieu de la courbe est dû au changement de maillage.

Nous ne résolvons pas de problème de type Stokes qui nécessitent l'utilisation de la méthode des éléments joints car nous nous sommes heurtés à des difficultés que nous présentons dans la section suivante.

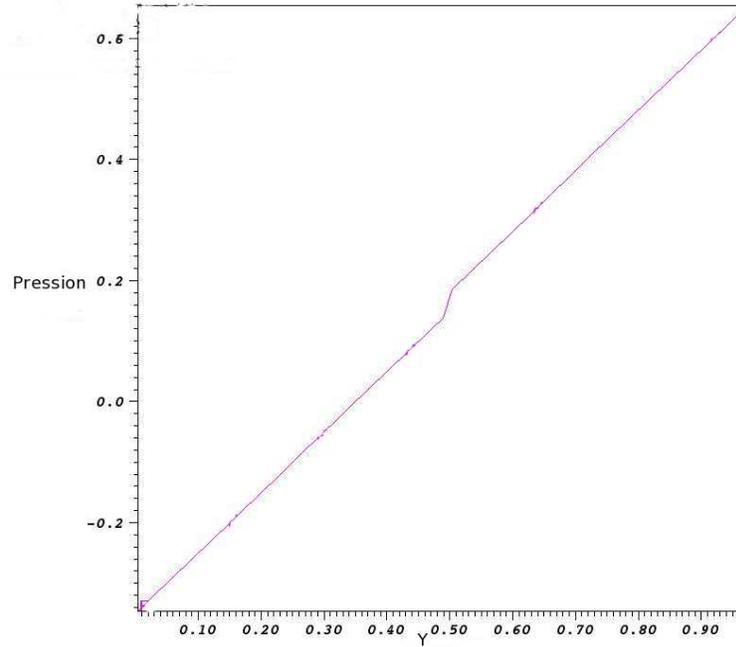


FIG. 4.7: Comportement de la pression le long d'un axe vertical.

4.3 Difficultés liées à la discrétisation *VDF*

À présent, nous allons évoquer les problèmes qui nous empêchent, à l'heure actuelle, de résoudre un problème de type Stokes. Il s'agit de problèmes techniques, liés à `TRIO_U`, et plus particulièrement aux opérateurs différentiels.

Nous aurons besoin de définir la structure du code `TRIO_U`. Pour cela nous nous appuyerons sur la documentation [18].

Dans `TRIO_U`, les opérateurs différentiels de la méthode *VDF* effectuent deux tâches principales :

- parcourt des faces du domaine discrétisé Ω ;
- calcul de flux.

Ces deux tâches étant indépendantes, à chacune d'entre elles correspond un objet C++ spécifique. **L'itérateur** prendra en charge les boucles sur les faces du domaine, alors que les calculs de flux sont gérés par **l'évaluateur**.

Dans `TRIO_U`, un opérateur différentiel peut être vu comme l'agrégation d'un itérateur et d'un évaluateur. Étudions comment ces deux objets interagissent entre eux.

L'itérateur parcourt toutes les faces du domaine discrétisé (faces internes et faces de bord) puis, pour chacune d'entre elles, fait appel à l'évaluateur pour calculer les flux selon la méthode propre au *VDF*.

Lors du traitement des faces internes, nous n'avons rien à modifier. Mais étudions de plus près le traitement des faces de bord. Pour calculer le flux, l'évaluateur a besoin de connaître la nature des faces qu'il traite, mais également la nature des arêtes (sommets en 2D, arêtes en 3D) séparant les différentes faces de bord. Puis, en fonction de la nature de cette arête et de l'opérateur différentiel appelé, l'évaluateur appelle alors la bonne fonction de calcul de flux.

Nous devons alors repérer les faces de bord ainsi que les conditions limites qui leurs sont attachées (condition limite de type Dirichlet , Neumann ...), mais également repérer les arêtes séparant les différentes faces de bord et leur attribuer une nature. Ainsi une arête pourra être vue comme séparant deux faces portant des conditions limites de type Dirichlet, ou une face portant une condition limite de type Neumann et l'autre une condition limite de type Dirichlet ...

Si l'on souhaite se servir des **itérateurs** et **évaluateurs** proposés par TRIO_U pour intégrer complètement la discrétisation VDF dans le module AMR il nous faut :

- définir de nouvelles natures d'arête spécifiques à la méthode des éléments joints, correspondant à toutes les interactions de conditions limites possibles.
- il faudra également stocker chacune de ces nouveaux types d'arête dans une structure de donnée adaptée.

Ces deux contraintes font que le codage à effectuer ne se limite pas au module AMR, mais nécessite une modification importante des sources du code de TRIO_U. Par conséquent, les modifications apportées devront subir une série de tests de validation afin de mesurer la robustesse du code modifié.

Une fois ce travail effectué, il reste encore le problème du calcul des flux. En effet, dès lors qu'une face (ou une arête) de type mortar est détectée, il faut définir la manière de calculer les flux pour chacune des possibilités rencontrées et pour chacun des opérateurs différentiels codés.

Notons cependant qu'il est possible de coder un opérateur pour la méthode VDF , sans passer par les itérateurs. Il est également possible de recoder les opérateurs VDF dans un formalisme type Élément Finis, mais dans le cas de l'opérateur de diffusion, le problème reste entier.

Conclusion de ce chapitre :

À présent le module AMR offre la possibilité, en 2D, de résoudre un problème de type Darcy, nécessitant l'utilisation de la méthode des éléments joints, avec la discrétisation VDF . Le terme source est correctement capté par le gradient de pression, par conséquent nous pouvons espérer qu'après avoir réglé les problèmes techniques liés aux opérateurs différentiels, nous pourrions résoudre un problème de type Navier-Stokes.

Notons également que maintenant le module AMR prend en compte un maillage constitué de mailles carrées ou rectangulaires, il n'est plus limité à l'utilisation de simplexes. De plus, le raffinement de ces nouvelles mailles est lui aussi opérationnel.

Deuxième partie
Aspects théoriques

Chapitre 5

Unicité et existence des solutions (VEF)

Dans ce chapitre, nous nous proposons de montrer que les problèmes que nous résolvons, dans le cadre de la méthode des éléments joints, sont bien posés. Nous nous appuyerons notamment sur les conditions de type inf-sup.

Nous nous plaçons dans le cas où l'inconnue est un champ scalaire : la température. Le cas où l'inconnue est un champ vectoriel se traite de façon similaire.

Remarque : Nous nous limiterons à l'utilisation d'une discrétisation de type *VEF* ou \mathbb{Q}_{NC}^1

5.1 Système linéaire global

Dans cette section, nous rappelons le système linéaire que nous étudierons tout au long de ce chapitre.

Soit Ω un domaine polygonal convexe. On suppose Ω recouvert par des ouverts Ω_i convexes tels que $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ et $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \Gamma_{ij}$. Rappelons que chacun des sous-domaines Ω_i est supposé posséder sa triangulation propre, \mathcal{T}_h^i , et par conséquent les frontières Γ_{ij} possèdent naturellement deux triangulations possibles $\mathcal{T}_h^i(\Gamma_{ij})$ et $\mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij})$.

Nous cherchons à trouver les fonctions $(T_h, \lambda_h, T_\Gamma)$ dans $W_h \times L_h \times M_h$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_h(T_h, v_h) + b_h(\lambda_h, v_h) = l_h(v_h) & \forall v_h \in W_h \\ b_h(\mu_h, T_h) - c_h(\mu_h, T_\Gamma) = 0 & \forall \mu_h \in L_h \\ c_h(\lambda_h, v_\Gamma) = 0 & \forall v_\Gamma \in M_h \end{cases} \quad (5.1)$$

Où les différentes formes linéaires et bilinéaires sont détaillées dans la section 1.2.2. Il en est de même pour les différents espaces utilisés.

5.2 Conditions d'existence et d'unicité global

Maintenant, nous nous intéresserons aux différentes conditions inf-sup que doivent vérifier les formes bilinéaires pour assurer l'unicité de la solution. En particulier, si l'on définit les noyaux des formes bilinéaires $c_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ par :

$$D_h = \{ \mu_h \in L_h, \forall v_\Gamma \in M_h, c_h(\mu_h, v_\Gamma) = 0 \} \quad (5.2)$$

$$V_h = \{ v_h \in W_h, \forall \mu_h \in D_h, b_h(\mu_h, v_h) = 0 \} \quad (5.3)$$

Alors l'unicité de la solution est assurée si et seulement si les conditions, dites inf-sup, suivantes sont réalisées :

$$\exists \alpha > 0, \forall T_h \in V_h, \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(T_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_h}} \geq \alpha \|T_h\|_{W_h} \quad (5.4)$$

$$\exists \beta > 0, \forall \lambda_h \in D_h, \sup_{v_h \in W_h} \frac{b_h(\lambda_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_h}} \geq \beta \|\lambda_h\|_{L_h} \quad (5.5)$$

$$\exists \delta > 0, \forall T_\Gamma \in M_h, \sup_{\mu_h \in L_h} \frac{c_h(\mu_h, T_\Gamma)}{\|\mu_h\|_{L_h}} \geq \delta \|T_\Gamma\|_{M_h} \quad (5.6)$$

$$\forall v_h \in V_h, (\forall T_h \in V_h, a_h(T_h, v_h) = 0) \Rightarrow v_h = 0 \quad (5.7)$$

Ces conditions sont nécessaires car si l'on réécrit le système 5.1 en le projetant sur les sous-espaces V_h et D_h , nous obtenons un nouveau système linéaire découplé :

$$\begin{cases} b_h(\mu_h, T_h) = 0 & \forall \mu_h \in D_h \\ a_h(T_h, v_h) = l_h(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ b_h(\lambda_h, v_h) = l_h(v_h) - a_h(T_h, v_h) & \forall v_h \in W_h \\ c_h(\mu_h, T_\Gamma) = b_h(\mu_h, T_h) & \forall \mu_h \in L_h \\ c_h(\lambda_h, v_\Gamma) = 0 & \forall v_\Gamma \in M_h \end{cases} \quad (5.8)$$

Résoudre le système d'équations 5.8 revient alors, de manière équivalente, à résoudre les trois problèmes suivants :

Problème 20 Trouver $T_h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h$ on ait :

$$a_h(T_h, v_h) = l_h(v_h)$$

Problème 21 Trouver $\lambda_h \in D_h$ tel que $\forall v_h \in W_h$ on ait :

$$b_h(\lambda_h, v_h) = l_h(v_h) - a_h(T_h, v_h)$$

et enfin

Problème 22 Trouver $T_\Gamma \in M_h$ tel que $\forall \mu_h \in L_h$ on ait :

$$c_h(\mu_h, T_\Gamma) = b_h(\mu_h, T_h)$$

Les conditions 5.4 et 5.7 montrent alors l'existence et l'unicité de T_h , solution du problème 20. Les conditions 5.5 et 5.6 montrent ensuite l'existence et l'unicité respectivement de λ_h et T_Γ , solution respectivement des problèmes 21 et 22 .

On se propose à présent de déterminer une base des espaces D_h et V_h . Il est important de ne pas oublier que, pour une frontière de type mortar Γ_{ij} donnée, il existe deux possibilités pour

choisir la discrétisation maître (resp. esclave).

Nous distinguerons donc le cas où la discrétisation maître (resp. esclave) celle associée au maillage le plus fin (resp. gros) et vice-versa.

Dans tout ce qui suit, nous allons désigner par F une face grossière quelconque appartenant à une frontière mortar Γ_{ij} , et nous désignons également par (f_k) l'ensemble des faces fines recouvrant F (l'entier k indexe les différentes faces fines).

Soit $\mu_h(\mathbf{x})$ une fonction appartenant à l'espace L_h , alors nous pouvons écrire

$$\mu_h(\mathbf{x}) = \left((\mu_h^{ij}(\mathbf{x}), \mu_h^{ji}(\mathbf{x}))_i \right)_j$$

Où nous avons

$$\mu_h^{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \mu_{h,F}^{ij} \mathbf{1}_F \quad \text{avec} \quad \mu_{h,F}^{ij} \in \mathbb{P}^0(F)$$

$$\mu_h^{ji}(\mathbf{x}) = \sum_{f \in \mathcal{T}_h^i(\Gamma_{ij}), i < j} \mu_{h,f}^{ji} \mathbf{1}_f \quad \text{avec} \quad \mu_{h,f}^{ji} \in \mathbb{P}^0(f)$$

5.3 Première caractérisation de D_h et V_h

On supposera, dans toute cette section, que la discrétisation maître est la discrétisation la plus fine. De plus, on supposera également que les sous-domaines Ω_i sont ordonnés selon la triangulation de la plus fine vers la plus grossière.

5.3.1 Détermination de D_h

Commençons par déterminer l'ensemble D_h . Étudions la propriété suivante :

Propriété 2 Soient les espaces D_h et \hat{D}_h définis par :

$$D_h = \{ \mu_h \in L_h, \forall v_\Gamma \in M_h, c_h(\mu_h, v_\Gamma) = 0 \}$$

$$\hat{D}_h = \{ \mu_h \in L_h, \mu_h^{i,j} = -\pi_{ij}^i(\mu_h^{j,i}) \quad \forall j, \forall i < j \}$$

Alors nous avons l'égalité : $\hat{D}_h = D_h$

Preuve de la propriété 2 :

Afin de montrer la propriété 2, nous allons dans un premier temps déterminer la dimension de l'espace D_h , puis nous montrerons que \hat{D}_h est inclus dans D_h , et enfin nous concluerons grâce au fait que l'espace \hat{D}_h a la même dimension que D_h .

Étude de la dimension de D_h .

Dans ce paragraphe, on se propose de déterminer la dimension de l'espace D_h . Si on suppose vérifiées les conditions inf-sup données précédemment, nous pouvons affirmer que $C_h : L_h \rightarrow M_h$ est un isomorphisme de D_h^\perp vers M_h . Ce qui d'après le théorème du rang donne :

$$\dim D_h = \dim L_h - \dim M_h$$

Or l'espace M_h contient l'ensemble des faces maîtres (fines), et l'espace L_h contient quant à lui l'ensemble de toutes les faces appartenant à un bord de type mortier, qu'elles soient maîtres ou esclaves. Par conséquent, l'espace D_h contient l'ensemble des faces esclaves (grossières). Dans notre cas, D_h a pour dimension le nombre total des faces grossières appartenant à un bord de type mortier.

Inclusion de \hat{D}_h dans D_h .

Montrons que \hat{D}_h est bien un sous ensemble de D_h . Soit μ_h un élément de l'ensemble \hat{D}_h . Grâce à la définition des opérateurs de projection donnée en 1.2.2, nous avons la relation

$$(\pi_{ij}^i(\mu_h^{ji}), v_{\Gamma_{ij}}) = (\mu_h^{ji}, v_{\Gamma_{ij}}) = (\mu_h^{ji}, \pi_{ij}^j(v_{\Gamma_{ij}}))$$

Donc, nous pouvons réécrire la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$, de la manière suivante :

$$c_h(\mu_h, v_\Gamma) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} [(\mu_h^{i,j}, v_{\Gamma_{ij}}) + (\pi_{ij}^i(\mu_h^{j,i}), v_{\Gamma_{ij}})] \quad (5.9)$$

Où N est le nombre de problèmes locaux.

À la vue de cette définition de $c_h(\cdot, \cdot)$, nous constatons que \hat{D}_h contient l'ensemble des μ_h appartenant à L_h tels que $c_h(\mu_h, v_\Gamma) = 0$, par conséquent \hat{D}_h est inclu dans D_h .

Étude de la dimension de \hat{D}_h

Nous remarquons immédiatement que la dimension de l'ensemble \hat{D}_h est exactement égale au nombre total de faces grossières des frontières mortars.

Égalité

L'espace \hat{D}_h étant inclus dans D_h et étant de dimension égale, on en conclut que \hat{D}_h est exactement égal à D_h . \diamond

5.3.2 Construction d'une base de D_h

Nous allons à présent déterminer une base de l'ensemble D_h . Dans ce cas, il est très simple de construire explicitement une base de D_h . Comme la base que nous allons exhiber est évidente, nous allons l'appeler base **canonique**. La propriété suivante propose une expression des vecteurs de cette base.

Propriété 3 Soit \mathbf{x} un point situé sur une frontière mortier Γ_{ij} . Soient F et f les indices associés respectivement à une face grossière et fine. Si la discrétisation maître est la plus fine alors une base de D_h est constituée des vecteurs μ_h^F s'écrivant sous la forme

$$\mu_h^F(\mathbf{x}) = (\mu_{h,F}^{ij}(\mathbf{x}), \mu_{h,f}^{ji}(\mathbf{x}))$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\mu_{h,F}^{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_F \quad \mu_{h,f}^{ji}(\mathbf{x}) = -\mathbf{1}_f \quad \forall f \subset F$$

Preuve de la propriété 3 :

Immédiatement nous constatons que la base comporte autant de vecteurs qu'il y a de faces grossières. En notant N_{FG} le nombre de faces grossières, on se propose de montrer que la famille $(\mu_h^i)_{i=0..N_{FG}}$ est libre.

Supposons qu'il existe N_{FG} constantes, notées $(\alpha_i)_{i=1..N_{FG}}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N_{FG}} \alpha_i \mu_h^i(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.10)$$

Nous allons montrer que pour tout point \mathbf{x} appartenant à Γ_{ij} , la relation suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{N_{FG}} \alpha_i \mu_h^i(\mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{FG} \quad (5.11)$$

Prenons \mathbf{x} appartenant à une face grossière, \hat{F} fixée. Cela entraîne

$$\mu_h^F(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall F \neq \hat{F}$$

La relation 5.10 se résume alors à

$$\alpha_{\hat{F}} \mu_h^{\hat{F}}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.12)$$

Comme $\mu_h^{\hat{F}}(\mathbf{x}) \neq 0$:

$$\alpha_{\hat{F}} \mu_h^{\hat{F}}(\mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\hat{F}} = 0$$

En répétant l'opération autant de fois qu'il y a de faces grossières alors la relation 5.11 est vérifiée. La famille $(\mu_h^i)_{i=0..N_{FG}}$ étant libre et génératrice, elle forme une base de l'espace D_h . \diamond

Remarque 5.3.1 Définissons l'application à valeur dans \mathbb{R} suivante pour un élément quelconque μ_h de D_h :

$$\|\mu_h\|_{D_h} = \sqrt{\sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \|\mu_h^{i,j}\|_{L^2}^2}$$

Alors il est facile de vérifier, compte tenu de la définition de D_h , que cette application est une norme sur D_h et que de plus nous avons l'encadrement suivant pour tout élément μ_h de D_h :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \|\mu_h\|_{L_h} \leq \|\mu_h\|_{D_h} \leq \|\mu_h\|_{L_h}$$

La relation $\|\mu_h\|_{D_h} \leq \|\mu_h\|_{L_h}$ s'obtient trivialement, nous allons donc montrer la relation

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \|\mu_h\|_{L_h} \leq \|\mu_h\|_{D_h} \quad (5.13)$$

Soit $\mu_h \in D_h$, nous avons alors

$$\mu_h = \left(\sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \mu_{h,F}^{ij} \mathbf{1}_F, \sum_{f \in \mathcal{T}_h^i(\Gamma_{ij}), i < j} \mu_{h,f}^{ji} \mathbf{1}_f \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\mu_h\|_{L_h} &= \sqrt{\left(\sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \int_F (\mu_{h,F}^{ij})^2 + \sum_{f \in \mathcal{T}_h^i(\Gamma_{ij}), i < j} \int_f (\mu_{h,f}^{ji})^2 \right)} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \int_F (\mu_{h,F}^{ij})^2 + \sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \sum_{f \subset F} (\mu_{h,f}^{ji})^2 |f| \right)} \end{aligned}$$

or, nous avons

$$\mu_{h,F}^{ij} = -\mu_{h,f}^{ji} \quad ; \quad \forall f \subset F$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|\mu_h\|_{L_h} &= \sqrt{\left(\sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \int_F (\mu_{h,F}^{ij})^2 + \sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} (\mu_{h,F}^{ji})^2 |F| \right)} \\ &= \sqrt{\left(2 \sum_{F \in \mathcal{T}_h^j(\Gamma_{ij}), i < j} \int_F (\mu_{h,F}^{ij})^2 \right)} = \sqrt{2} \|\mu_h\|_{D_h} \end{aligned}$$

Donc nous avons bien la relation 5.13

5.3.3 Détermination de V_h

Nous allons commencer par déterminer l'ensemble V_h . Énonçons la propriété suivante :

Propriété 4 Soient les espaces V_h et \hat{V}_h définis par :

$$V_h = \{v_h \in W_h, \forall \mu_h \in D_h, b_h(\mu_h, v_h) = 0\}$$

$$\hat{V}_h = \{v_h \in W_h, \forall f_k, \forall F, F \cap f_k \neq \emptyset \int_F v_h^j = \sum_{f_k \subset F} \int_{f_k} v_h^i, j > i\}$$

Alors nous avons l'égalité : $\hat{V}_h = V_h$

Preuve :

Afin de montrer la propriété 4, nous allons dans un premier temps déterminer la dimension de l'espace V_h , puis nous verrons que V_h est inclus dans \hat{V}_h et enfin nous concluerons grâce au fait que l'espace \hat{V}_h a la même dimension que V_h .

Étude de la dimension de V_h .

On se propose de déterminer la dimension de V_h . En supposant les conditions inf-sup évoquées plus haut vérifiées, on peut affirmer que B_h est un isomorphisme de V_h^\perp vers D_h . Par le théorème du rang, nous avons donc :

$$\dim V_h = \dim W_h - \dim D_h$$

La dimension de V_h est donc le nombre total de face fines appartenant à un bord de type mortier auquel s'ajoute le nombre total de faces internes du domaine d'étude Ω .

Inclusion de V_h dans \hat{V}_h .

Montrons que V_h est un sous-ensemble de \hat{V}_h . Soit v_h un élément de V_h . Par définition de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$, nous avons, pour un élément μ_h appartenant à la base canonique de D_h :

$$b_h(\mu_h, v_h) = \sum_i \sum_{j \neq i} (\mu_h^{i,j}, \pi_{ij}^i(\gamma_{ij}^i(v_h))) = 0$$

Pour déterminer v_h , il suffit d'utiliser chacun des vecteurs de la base canonique de D_h . Soit μ_h un élément de la base canonique de D_h associé à la face F . On trouve alors :

$$b_h(\mu_h, v_h) = |F| \frac{1}{|F|} \int_F v_h^j - \sum_{f_k \subset F} |f_k| \frac{1}{|f_k|} \int_{f_k} v_h^i = 0$$

Par conséquent, V_h est inclus dans \hat{V}_h .

Étude de la dimension de \hat{V}_h

Avec ce que nous venons de voir, nous remarquons que la dimension de \hat{V}_h est le nombre de faces fines auquel s'ajoutent le nombre total de faces internes de Ω . Donc nous avons :

$$\dim(\hat{V}_h) = \dim(V_h)$$

Égalité :

L'espace \hat{V}_h ayant la même dimension que V_h et étant inclus dans ce dernier, alors nous pouvons dire que nous avons l'égalité :

$$\hat{V}_h = V_h$$

Remarque 5.3.2 Si on désigne par M_F et M_{f_k} les milieux des faces F et f_k alors nous constatons que l'élément v_h vérifie *quelle que soit la discrétisation utilisée* :

$$|F| v_h^j(M_F) = \sum_{k, f_k \subset F} |f_k| v_h^i(M_{f_k}) \quad \forall j, \forall i < j$$

Où $v_h^i(M_{f_k})$ représente la *valeur moyenne* de l'inconnue v_h sur la face f_k .

Les faces f_k formant un recouvrement de F , et compte tenu du choix effectué concernant le raffinement, nous obtenons finalement :

$$v_h^j(M_F) = \sum_{f_k \subset F} \alpha^{r_F - r_{f_k}} v_h^i(M_{f_k})$$

En particulier, si une face grossière est recouverte par des faces fines issues d'un même raffinement, alors l'expression précédente devient :

$$v_h^j(M_F) = \frac{1}{\text{Card}\{f_k \subset F\}} \sum_{f_k \subset F} v_h^i(M_{f_k})$$

Où $\text{Card}\{f_k \subset F\}$ représente le nombre de faces fines f_k incluses dans la face grossière F . Ceci signifie que dans ce cas, nous conservons la linéarité de la solution entre deux sous-domaines.

Remarque 5.3.3 On peut réinterpréter de manière plus générale la contrainte en disant moralement que la somme des intégrales de la variable sur les faces fines doit être égale à l'intégrale de la variable sur la face grossière. Cette interprétation à le mérite d'être valable pour l'utilisation de la discrétisation de type VEF , VDF mais aussi \mathbb{Q}_{NC}^1

5.3.4 Base de V_h

À présent nous allons nous intéresser à la construction d'une base de V_h . Étudions la propriété suivante :

Propriété 5 Soient f^I et f respectivement, une face interne quelconque appartenant au domaine d'étude Ω , et une face quelconque de Ω différente de f^I .

Soit f^Γ une face fine quelconque appartenant à un bord mortar. Notons F^Γ l'unique face grossière, associée à f^Γ . Soient Φ^I et Φ^Γ respectivement la fonction de base associée à la face f^I , et celle associée à la face f^Γ .

Nous avons :

$$\frac{1}{|f^I|} \int_{f^I} \Phi^I = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{|f|} \int_f \Phi^I = 0$$

À présent, on suppose en plus que $f \neq F^\Gamma$ et $f \neq f^\Gamma$, on a :

$$\frac{1}{|f^\Gamma|} \int_{f^\Gamma} \Phi^\Gamma = 1 \quad ; \quad \frac{1}{|F^\Gamma|} \int_{F^\Gamma} \Phi^\Gamma = \alpha^{r_{F^\Gamma} - r_{f^\Gamma}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|f|} \int_f \Phi^\Gamma = 0$$

Pour plus de détails sur l'expression $\alpha^{r_{F^\Gamma} - r_{f^\Gamma}}$, se reporter à la propriété 1.

Preuve de la propriété 5 :

Montrons que si nous construisons les fonctions Φ^I et Φ^Γ alors nous obtiendrons une base de V_h . Dans un premier temps, nous allons montrer que le nombre de fonctions de base est égale à la dimension de V_h . Puis nous montrerons que les fonctions de base sont libres. Pour ce point, nous partagerons le travail en trois :

- étude des faces internes ;
- étude des faces fines (appartenant donc à une frontière mortar) ;
- étude des différentes interactions entre une face interne et une face fine.

Nombre de fonctions de base.

À chaque face interne de Ω est associée une fonction de base. À chaque face fine (appartenant à une frontière mortar) est associée une fonction de base. Le nombre de fonctions de base est donc égal à la dimension de V_h .

Faces interne.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux fonctions de base qui sont définies sur les faces internes (en considérant uniquement les faces internes de Ω) alors on s'aperçoit que les fonctions de base proposées par la propriété 5 forment un sous-ensemble des fonctions de base utilisées pour l'élément de Crouzeix-Raviart. Par conséquent les fonctions associées aux faces internes forment bien une sous-suite libre.

Faces fines.

Maintenant, étudions ce qu'il se passe uniquement sur les faces fines.

Notons $\Phi_{f^\Gamma}^\Gamma$ la fonction de base associée à la face fine f^Γ . Soit N_{Ff} le nombre de faces fines. supposons qu'il existe N_{Ff} constantes, notées $(\beta_{f^\Gamma})_{1 \leq f^\Gamma \leq N_{Ff}}$ tels que

$$\sum_{f^\Gamma=1}^{N_{Ff}} \beta_{f^\Gamma} \Phi_{f^\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \tag{5.14}$$

Nous allons montrer que pour tout point \mathbf{x} :

$$\sum_{f^\Gamma=1}^{N_{Ff}} \beta_{f^\Gamma} \Phi_{f^\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{f^\Gamma} = 0 \quad \forall 1 \leq f^\Gamma \leq N_{Ff} \quad (5.15)$$

Introduisons quelques notations.

Nous avons noté f^Γ une face fine appartenant à un bord mortar Γ . À cette face fine est associée une face grossière, que l'on note F^Γ . Notons K_F la maille contenant la face F^Γ . De l'autre côté de la frontière Γ se trouve la maille K_f qui contient f^Γ (mais elle ne contient pas F^Γ).

Prenons \mathbf{x} à l'intérieur de la maille K_f . Seule la fonction de base $\Phi_{f^\Gamma}^\Gamma$ évaluée en \mathbf{x} ne sera pas nulle. Toutes les autres fonctions de base associées aux autres faces fines, évaluées en \mathbf{x} , seront nulles. Donc la relation 5.14 se résume à

$$\beta_{f^\Gamma} \Phi_{f^\Gamma}^\Gamma = 0$$

Or $\Phi_{f^\Gamma}^\Gamma \neq 0$, par conséquent nous avons $\beta_{f^\Gamma} = 0$.

En répétant l'opération autant de fois qu'il y a de faces fines, alors la relation 5.15 est vérifiée. Donc les fonctions de base Φ^Γ forment une sous-suite libre.

Interaction faces internes et faces fines.

Que ce soit K_f ou K_F , ces deux mailles possèdent des faces internes. Notons Φ_f^I la fonction de base associée à une face interne f .

Soit N_{Fi} le nombre de faces internes. Reprenons les notations du paragraphe précédent.

Supposons qu'il existe N_{Fi} constantes, notées $(\beta_f^I)_f$, ainsi que N_{Ff} constantes $(\beta_{f^\Gamma}^\Gamma)_{f^\Gamma}$ tels que

$$\sum_{f=1}^{N_{Fi}} \beta_f^I \Phi_f^I(\mathbf{x}) + \sum_{f^\Gamma=1}^{N_{Ff}} \beta_{f^\Gamma}^\Gamma \Phi_{f^\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.16)$$

On se propose de montrer que pour tout point \mathbf{x} :

$$\sum_{f=1}^{N_{Fi}} \beta_f^I \Phi_f^I(\mathbf{x}) + \sum_{f^\Gamma=1}^{N_{Ff}} \beta_{f^\Gamma}^\Gamma \Phi_{f^\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\beta_f^I = 0 \forall 1 \leq f \leq N_{Fi} \text{ et } \beta_{f^\Gamma}^\Gamma = 0 \forall 1 \leq f^\Gamma \leq N_{Ff}) \quad (5.17)$$

Intéressons-nous à la maille K_f .

Prenons \mathbf{x} sur le barycentre de la face \hat{f}^Γ , alors :

$$\begin{aligned} \Phi_f^I(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall f \\ \Phi_{f^\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall f^\Gamma \neq \hat{f}^\Gamma \end{aligned} \quad (5.18)$$

Donc la relation 5.16 se résume à

$$\beta_{\hat{f}^\Gamma}^\Gamma \Phi_{\hat{f}^\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.19)$$

Comme $\Phi_{\hat{f}^\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) \neq 0$ on en déduit :

$$\beta_{\hat{f}^\Gamma}^\Gamma = 0$$

Restons sur la maille K_f , mais déplaçons le point \mathbf{x} sur le barycentre d'une face interne \hat{f} . Nous avons alors

$$\begin{aligned}\Phi_f^I(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall f \neq \hat{f} \\ \Phi_{f\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall f^\Gamma\end{aligned}\tag{5.20}$$

Donc la relation 5.16 se résume à

$$\beta_f^I \Phi_f^I(\mathbf{x}) = 0\tag{5.21}$$

Comme $\Phi_{\hat{f}}^I(\mathbf{x}) \neq 0$ on en déduit :

$$\beta_{\hat{f}\Gamma}^\Gamma = 0$$

Cette opération se répète autant de fois qu'il y a de faces internes sur la maille K_f .

Plaçons-nous sur la maille K_F . Puisque le support de $\Phi_{\hat{f}\Gamma}^\Gamma(\mathbf{x})$ jusqu'à la maille K_F , alors nous pouvons répéter les manipulations présentées ci-dessus en prenant \mathbf{x} sur le barycentre de la face appartenant à la frontière mortar, puis sur les barycentres des faces internes.

Ce raisonnement s'étend sur l'ensemble des mailles ayant une face sur une frontière mortar. Ainsi $(\Phi_f^I)_f$ et $(\Phi_{f\Gamma}^\Gamma)_{f\Gamma}$ sont deux ensembles linéairement indépendants.

Conclusion :

L'ensemble des arguments présentés ici nous permettent de conclure que la construction des fonctions de base proposée par la propriété 5 aboutit à une base de V_h . \diamond

Nous venons d'étudier le cas où la discrétisation maître était la discrétisation la plus fine. Regardons ce qu'il se passe dans le cas contraire.

5.4 Seconde caractérisation de D_h et V_h

On supposera dans toute cette section que la discrétisation maître est la discrétisation la plus grossière. De plus, on supposera que les sous-domaines Ω_i sont ordonnés selon la triangulation de la plus grossière vers la plus fine.

5.4.1 Détermination de D_h

Comme précédemment, nous allons déterminer l'expression de D_h . Étudions la propriété suivante :

Propriété 6 Soient les espaces D_h et \hat{D}_h définis par :

$$\begin{aligned}D_h &= \{\mu_h \in L_h, \forall v_\Gamma \in M_h, c_h(\mu_h, v_\Gamma) = 0\} \\ \hat{D}_h &= \{\mu_h \in L_h, \mu_h^{i,j} = -\pi_{ij}^i(\mu_h^{j,i}) \quad \forall j, \forall i < j\}\end{aligned}$$

Alors nous avons l'égalité :

$$\hat{D}_h = D_h$$

La preuve est la même que celle associée à la propriété 2. Toutefois les conséquences ne sont pas les mêmes. En effet, ici la dimension de D_h est le nombre total de faces fines des frontières mortar.

5.4.2 Base de D_h

Maintenant, nous allons nous intéresser à la construction d'une base de D_h . Construisons une base **canonique** de D_h , d'après la propriété suivante :

Propriété 7 Soit x un point situé sur une frontière mortar Γ_{ij} . Si la discrétisation maître est la plus grossière alors une base de D_h est constituée des vecteurs μ_h s'écrivant sous la forme

$$\mu_h^f(\mathbf{x}) = (\mu_{h,F}^{ij}(\mathbf{x}), \mu_{h,f}^{ji}(\mathbf{x}))$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\mu_{h,F}^{ij}(\mathbf{x}) = -\alpha^{r_F - r_{f_k}} \mathbb{1}_F \quad \mu_{h,f}^{ji}(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_f$$

Pour plus de détails sur l'expression $\alpha^{r_F - r_{f_k}}$, se reporter à la propriété 1. La preuve de la propriété 7 est semblable à la preuve de la propriété 3.

5.4.3 Détermination de V_h

Nous allons caractériser l'ensemble V_h . Énonçons la propriété suivante :

Propriété 8 Soient les espaces V_h et \hat{V}_h définis par :

$$\begin{aligned} V_h &= \{v_h \in W_h, \forall \mu_h \in D_h, b_h(\mu_h, v_h) = 0\} \\ \hat{V}_h &:= \{v_h \in W_h, \forall F, \forall f_k, f_k \subset F, \frac{1}{|f_k|} \int_{f_k} v_h^j = \frac{1}{|F|} \int_F v_h^i, j > i\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Alors nous avons :

$$\hat{V}_h = V_h$$

Preuve de la propriété 8 :

Afin de montrer la propriété 8, nous allons dans un premier temps déterminer la dimension de l'espace V_h , puis nous verrons que V_h est inclus dans \hat{V}_h et enfin nous concluerons grâce au fait que l'espace \hat{V}_h a la même dimension que V_h .

Dimension de V_h

Grâce aux conditions inf-sup évoquées plus haut, on peut affirmer que B_h est un isomorphisme de V_h^\perp vers D_h . Par le théorème du rang, nous avons donc :

$$\dim V_h = \dim W_h - \dim D_h$$

La dimension de l'espace V_h est donc le nombre total de faces grossières des frontières mortar auquel s'ajoute le nombre de faces internes du domaine d'étude Ω .

Inclusion de V_h dans \hat{V}_h .

Montrons que V_h est un sous-ensemble de \hat{V}_h . Soit v_h un élément de V_h . Par définition de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$, nous avons donc pour un élément μ_h de la **base canonique** de D_h :

$$b_h(\mu_h, v_h) = \sum_i \sum_{j \neq i} (\mu_h^{i,j}, \pi_{ij}^i (\gamma_{ij}^i(v_h))) = 0$$

Reprenons les notations introduites lors de la première caractérisation de V_h . Pour déterminer les éléments de V_h , il suffit d'utiliser le vecteur de la base canonique μ_h associé à une face f_k donnée. On trouve alors :

$$b_h(\mu_h, v_h) = |f_k| \frac{1}{|f_k|} \int_{f_k} v_h^j - |F| \alpha^{r_F - r_{f_k}} \frac{1}{|F|} \int_F v_h^i = 0$$

Rappelons que, d'après la propriété 1 nous avons

$$|F| \alpha^{r_F - r_{f_k}} = |f_k|$$

Par conséquent l'espace V_h est bien inclus dans \hat{V}_h .

Dimension de \hat{V}_h

Nous constatons que la dimension de \hat{V}_h est le nombre de faces grossières appartenant à une frontière mortar, auquel s'ajoute le nombre de faces internes. Nous avons donc

$$\dim(\hat{V}_h) = \dim(V_h)$$

Égalité

L'espace V_h étant inclus dans \hat{V}_h , et comme ceux deux espaces ont la même dimension, nous concluons que \hat{V}_h est exactement égal à V_h .

5.4.4 Base de V_h

À présent nous allons nous intéresser à la construction d'une base de V_h . Étudions la propriété suivante :

Propriété 9 Soient f^I et f respectivement, une face interne quelconque appartenant au domaine d'étude Ω , et une face quelconque de Ω différente de f^I .

Soit F^Γ une face grossière quelconque appartenant à un bord mortar. A F^Γ est associée une collection de faces mortar fines que nous notons $(f_j^\Gamma)_j$. Soient Φ^I et Φ^Γ respectivement la fonction de base associée à la face f^I , et celle associée à la face f^Γ .

Nous avons :

$$\frac{1}{|f^I|} \int_{f^I} \Phi^I = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{|f|} \int_f \Phi^I = 0$$

À présent, on suppose en plus que $f \neq F^\Gamma$ et $f \notin (f_j^\Gamma)_j$, et on a :

$$\frac{1}{|f^\Gamma|} \int_{f^\Gamma} \Phi^\Gamma = 1 \quad ; \quad \frac{1}{|F^\Gamma|} \int_{F^\Gamma} \Phi^\Gamma = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{|f|} \int_f \Phi^\Gamma = 0$$

La preuve de la propriété 9 est semblable à celle de la propriété 5.

5.5 Démonstration des conditions inf-sup

Nous venons de donner une caractérisation des espaces D_h et V_h dans le cas où la discrétisation maître était la plus fine, puis dans le cas où elle était la plus grossière. À présent, nous allons étudier sous quelles conditions les relations 5.4, 5.5 et 5.6 sont vérifiées.

Dans un premier temps, on ne s'occupera que des formes bilinéaires $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$. La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ subira un traitement différent car elle peut varier d'un problème à un autre.

5.5.1 Condition inf-sup sur $b_h(\cdot, \cdot)$

Intéressons-nous à la condition inf-sup 5.5. Soit un élément $\lambda_h \in L_h$ quelconque fixé. Notons que λ_h n'appartient pas à D_h , mais à L_h qui est un espace plus grand que D_h . Nous allons donc montrer une condition plus contraignante que si λ_h appartenait à D_h . En effet comme nous avons la relation :

$$\inf_{\lambda_h \in D_h} \sup_{v_h \in W_h} \frac{b_h(\lambda_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_h} \|\lambda_h\|_{L_h}} \geq \inf_{\lambda_h \in L_h} \sup_{v_h \in W_h} \frac{b_h(\lambda_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_h} \|\lambda_h\|_{L_h}}$$

Il nous suffit de montrer la validité de la condition inf-sup sur le membre de droite.

Nous allons construire un élément v_h de W_h satisfaisant la condition inf-sup. En particulier, choisissons v_h tel que :

$$\forall i, \forall f \in \mathcal{T}_h^i(\cup_{j \neq i} \Gamma_{ij}), \frac{1}{|f|} \int_f v_h^i = \lambda_h^i|_f$$

$$v_h^i = 0, \text{ dans } \Omega_i \quad \forall i$$

Cette expression a bien un sens en vertu de la définition des espaces W_h vu comme un produit cartésien d'espaces de Crouzeix-Raviart sur les Ω_i et L_h qui s'interprète comme le produit cartésien des fonctions constantes sur les faces (doubles) des frontières Γ_{ij} .

En remarquant alors que :

$$\forall i, \forall f \in \mathcal{T}_h^i(\cup_{j \neq i} \Gamma_{ij}), \pi_{ij}^i(\gamma_{ij}^i(v_h))|_f = \frac{1}{|f|} \int_f v_h^i$$

Où $\pi_{ij}^i(\gamma_{ij}^i(v_h))|_f$ désigne la restriction sur la face f de la projection de la trace de v_h sur le bord i de la frontière Γ_{ij} . Il vient par conséquent pour ce choix de fonction et pour la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$:

$$b_h(\lambda_h, v_h) = \sum_i^N \sum_{j \neq i} (\lambda_h^{i,j}, \lambda_h^{i,j})_{L^2(\Gamma_{ij})} = \|\lambda_h\|_{L_h}^2$$

Il nous reste à prouver qu'il existe une constante c telle que :

$$\|v_h\|_{W_h} \leq c \|\lambda_h\|_{L_h}$$

Or par définition de la norme sur W_h et de v_h , on a, en notant Φ_h^i les fonctions de forme dans $W_h(\Omega_i)$:

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{W_h} &= \sqrt{\sum_i^N \|v_h^i\|_{W_h(\Omega_i)}^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_i^N \sum_{j \neq i} \sum_{f \in \Gamma_{ij}} \|\Phi_h^i\|_{W_h(\Omega_i)}^2 |\lambda_h^i|_f^2} \\ &\leq \sum_i^N \sum_{j \neq i} \sum_{f \in \Gamma_{ij}} \|\Phi_h^i\|_{W_h(\Omega_i)} |\lambda_h^i|_f \\ &\leq c \|\lambda_h\|_{L_h} \end{aligned}$$

Et donc, nous en concluons qu'il existe une constante β vérifiant :

$$\beta \geq \frac{1}{c}$$

telle que

$$\sup_{v_h \in W_h} \frac{b_h(\lambda_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_h}} \geq \beta \|\lambda_h\|_{L_h}$$

5.5.2 Condition inf-sup sur $c_h(\cdot, \cdot)$

Soit un $T_\Gamma \in M_h$ quelconque fixé. De la même façon que ci-dessus, nous allons construire un élément μ_h de L_h satisfaisant la condition inf-sup. Nous savons que T_Γ n'est définie que sur les frontières maîtres du domaine, et est une fonction constante par morceaux sur ces frontières (maîtres). Pour satisfaire, la condition inf-sup, il suffit dès lors de choisir μ_h de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mu_h^{i,j} = T_\Gamma & \text{si } i \text{ est la frontière maître} \\ \mu_h^{i,j} = 0 & \text{si } i \text{ est la frontière esclave} \end{cases} \quad (5.23)$$

Avec ce choix particulier, il vient donc :

$$c_h(\mu_h, T_\Gamma) = \sum_i \sum_{j < i} (u_{\Gamma_{ij}}, T_{\Gamma_{ij}})_{L^2(\Gamma_{ij})} = \|T_\Gamma\|_{M_h}^2$$

Il nous reste à prouver qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|\mu_h\|_{L_h} \leq c \|T_\Gamma\|_{M_h}$$

Or compte tenu que μ_h vérifie les relations 5.23, il est facile de voir que $\|\mu_h\|_{L_h} = \|T_\Gamma\|_{M_h}$ et on en conclut donc qu'il existe une constante δ vérifiant

$$\delta \geq 1$$

telle que.

$$\sup_{\mu_h \in L_h} \frac{c_h(\mu_h, T_\Gamma)}{\|\mu_h\|_{L_h}} \geq \delta \|T_\Gamma\|_{M_h}$$

5.5.3 Condition inf-sup sur $a_h(\cdot, \cdot)$

La condition inf-sup dont il est question ici dépend évidemment de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$. Mais nous allons l'étudier dans la cas où la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ représente le laplacien. Dans ce cas, $a_h(\cdot, \cdot)$ est coercive et symétrique, ce qui suffit à vérifier les conditions 5.4 et 5.7. Dans le cas où $a_h(\cdot, \cdot)$ correspond uniquement à un opérateur de convection, il faudrait vérifier chacune des deux conditions évoquées. Nous ne nous occuperons pas de ces démonstrations et nous supposerons donc les conditions nécessaires à l'existence et l'unicité d'une solution satisfaites.

Conclusion de ce chapitre :

Nous venons de montrer que le problème global que nous résolvons lorsque nous appliquons la méthode des éléments joints décrite dans [22] est bien posé. Par conséquent, nous avons existence et unicité de la solution de ce problème.

Chapitre 6

Unicité et existence des solutions (VDF)

Dans le chapitre 5 nous avons montré que les problèmes issus de la méthode des éléments joints étaient bien posés lorsqu'on utilisait la discrétisation VEF . On se propose à présent d'étudier sous quelles conditions ces problèmes restent bien posés si on utilise la discrétisation VDF en 2D.

Prenons le cas où l'inconnue est le champ de vitesse (donc l'inconnue est vectorielle). Rappelons que la méthode des éléments joints impose la continuité faible du champ de vitesse via des multiplicateurs de Lagrange. Or la discrétisation VDF n'impose, à priori, que la continuité faible de la **composante normale** du champ de vitesse. Il y a donc antagonisme entre le but initialement recherché par la méthode des éléments joints et les contraintes imposées par la discrétisation VDF . La question qui se pose alors est la suivante : faut-il imposer la continuité faible de toutes les composantes du champ de vitesse, ou bien faut-il imposer la continuité faible uniquement sur la composante normale du champ de vitesse ?

Pour répondre à cette question, nous allons étudier les conditions inf-sup pour les formes bilinéaires associées aux contraintes de continuité. Étant donné que deux types de contrainte de continuité faible pour le champ de vitesse sont envisageables, nous allons étudier chacune de ces deux possibilités.

Nous commencerons dans un premier temps par considérer le cas où on impose la continuité faible à toutes les composantes du champ de vitesse, puis nous étudierons le cas où on impose la continuité faible seulement sur la composante normale du champ de vitesse.

6.1 Continuité faible du champ de vitesse

Cette section concerne l'étude des conditions inf-sup associées à $b_h(.,.)$ et $c_h(.,.)$ dans le cas où l'on cherche à imposer les contraintes de continuité sur toutes les composantes de la vitesse.

Après avoir introduit quelques notations et définitions d'espace, nous étudierons la condition inf-sup liée à la forme bilinéaire $b_h(.,.)$.

6.1.1 Définitions et notations

En reprenant les notations introduites au chapitre 5, le système linéaire global issu de l'utilisation de la méthode des éléments joints, dans le cas où l'inconnue est le couple (vitesse/pression),

s'écrit de la manière suivante : Trouver les fonctions $((\mathbf{u}_h, p_h), \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u}_\Gamma)$ dans $\mathbf{W}_h \times X_h^0 \times \mathbf{L}_h \times \mathbf{M}_h$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_h((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) + b_h(\boldsymbol{\lambda}_h, (\mathbf{v}_h, q_h)) = l_h((\mathbf{v}_h, q_h)) & \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{W}_h \times X_h^0 \\ b_h(\boldsymbol{\mu}_h, (\mathbf{u}_h, p_h)) - c_h(\boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{u}_\Gamma) = 0 & \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{L}_h \\ c_h(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_\Gamma) = 0 & \forall \mathbf{v}_\Gamma \in \mathbf{M}_h \end{cases} \quad (6.1)$$

Puisque nous considérons le cas où on impose la continuité faible à toutes les composantes du champ de vitesse, la variable \mathbf{u}_Γ du problème discret 6.1 est une fonction vectorielle. Par déduction, les espaces \mathbf{L}_h et \mathbf{M}_h sont des espaces de fonctions vectorielles.

Les formes bilinéaires $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ sont identiques à celles utilisées dans le cas de la discrétisation VEF , elles sont décrites dans la section 1.2.2. Par conséquent, le noyau \mathbf{D}_h de la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$ est donné la relation 5.2.

À présent, nous allons introduire de nouvelles notations. Si $\boldsymbol{\mu}_h$ est une fonction appartenant à \mathbf{L}_h , on désignera par $\boldsymbol{\mu}_h^n$ sa composante normale, et par $\boldsymbol{\mu}_h^T$ sa composante tangentielle. Il en sera de même pour les fonctions appartenant à l'espace \mathbf{W}_h . Si f désigne une face quelconque d'un bord mortar quelconque, alors nous pouvons construire de nouveaux espaces vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h &= \mathbf{D}_h^n \oplus \mathbf{D}_h^T \\ \mathbf{D}_h^n &= \{\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{D}_h, \forall i, j, \forall f \in \Gamma_{ij} \quad \boldsymbol{\mu}_h^T|_f = 0\} \\ \mathbf{D}_h^T &= \{\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{D}_h, \forall i, j, \forall f \in \Gamma_{ij} \quad \boldsymbol{\mu}_h^n|_f = 0\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_h &= \mathbf{W}_h^n \oplus \mathbf{W}_h^T \\ \mathbf{W}_h^n &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h, \forall i, j, \forall f \in \Gamma_{ij} \quad \mathbf{v}_h^t|_f = 0\} \\ \mathbf{W}_h^T &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h, \forall i, j, \forall f \in \Gamma_{ij} \quad \mathbf{v}_h^n|_f = 0\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.1.2 Condition inf-sup liée à $b_h(\cdot, \cdot)$

Nous allons nous intéresser maintenant à l'étude de la condition inf-sup associée à la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$, mais avant cela, énonçons la propriété suivante :

Propriété 10 *Les relations suivantes sont équivalentes.*

1. $\exists \beta > 0, \inf_{\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{D}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h} \frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h, (\mathbf{v}_h, p_h))}{\|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{L}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h}} \geq \beta$
2. $\exists \beta^n > 0, \exists \beta^T > 0, \inf_{\boldsymbol{\lambda}_h^n \in \mathbf{D}_h^n} \sup_{\mathbf{v}_h^n \in \mathbf{W}_h^n} \frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h))}{\|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h} \|\mathbf{v}_h^n\|_{\mathbf{W}_h}} \geq \beta^n$ et $\inf_{\boldsymbol{\lambda}_h^T \in \mathbf{D}_h^T} \sup_{\mathbf{v}_h^T \in \mathbf{W}_h^T} \frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^T, (\mathbf{v}_h^T, p_h))}{\|\boldsymbol{\lambda}_h^T\|_{\mathbf{L}_h} \|\mathbf{v}_h^T\|_{\mathbf{W}_h}} \geq \beta^T$

Preuve de la propriété 10

Nous allons montrer que la relation 1 implique la relation 2, puis nous montrerons que la relation 2 implique la relation 1.

Montrons que 1 implique 2.

On ne s'intéressera seulement à la condition inf-sup portant sur les espaces \mathbf{D}_h^n et \mathbf{W}_h^n , la démonstration de la seconde étant en tout point identique.

Par hypothèse il existe un vecteur $\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h$ tel que

$$b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h, p_h)) = \|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h}^2 \quad (6.4)$$

ainsi que :

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h} \leq c \|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h} \quad (6.5)$$

Où c est une constante strictement positive.

Par définition de l'espace \mathbf{D}_h^n il vient :

$$b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h, p_h)) = b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n + \mathbf{v}_h^T, p_h)) = b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h)) \quad (6.6)$$

avec $\mathbf{v}_h^n \in \mathbf{W}_h^n$ et $\mathbf{v}_h^T \in \mathbf{W}_h^T$. De plus, nous avons l'inégalité :

$$\|\mathbf{v}_h^n\|_{\mathbf{W}_h} \leq \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h} \leq c \|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h} \quad (6.7)$$

Par conséquent, si β est une constante strictement positive, nous avons :

$$\frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h))}{\|\mathbf{v}_h^n\|_{\mathbf{W}_h}} \geq \frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h, p_h))}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h}} \geq \beta \|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h} \quad (6.8)$$

Ce qui permet finalement d'avoir :

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda}_h^n \in \mathbf{D}_h^n} \sup_{\mathbf{v}_h^n \in \mathbf{W}_h^n} \frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h))}{\|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h} \|\mathbf{v}_h^n\|_{\mathbf{W}_h}} \geq \beta$$

Nous venons ainsi de montrer que la relation 1 implique la relation 2.

On se propose maintenant de montrer que la relation 2 implique la relation 1.

Soit $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{D}_h$. Par définition des espaces \mathbf{D}_h^n et \mathbf{D}_h^T , nous avons :

$$\boldsymbol{\lambda}_h = \boldsymbol{\lambda}_h^n + \boldsymbol{\lambda}_h^T \quad (6.9)$$

Les conditions inf-sup de la relation 2 étant supposées vérifiées, il existe des constantes strictement positives, c^n et c^T , ainsi que des vecteurs $\mathbf{v}_h^n \in \mathbf{W}_h^n$ et $\mathbf{v}_h^T \in \mathbf{W}_h^T$ tels que :

$$b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h)) = \|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h}^2 \quad (6.10)$$

$$\|\mathbf{v}_h^n\|_{\mathbf{W}_h} \leq c^n \|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h} \quad (6.11)$$

et

$$b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^T, (\mathbf{v}_h^T, p_h)) = \|\boldsymbol{\lambda}_h^T\|_{\mathbf{L}_h}^2 \quad (6.12)$$

$$\|\mathbf{v}_h^T\|_{\mathbf{W}_h} \leq c^T \|\boldsymbol{\lambda}_h^T\|_{\mathbf{L}_h} \quad (6.13)$$

Nous remarquons donc que nous avons :

$$b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h)) = b_h(\boldsymbol{\lambda}_h, (\mathbf{v}_h^n, p_h)) \quad (6.14)$$

$$b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^T, (\mathbf{v}_h^T, p_h)) = b_h(\boldsymbol{\lambda}_h, (\mathbf{v}_h^T, p_h)) \quad (6.15)$$

Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h$ tel que $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^n + \mathbf{v}_h^T$. Avec ce qui précède, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$b_h(\boldsymbol{\lambda}_h, (\mathbf{v}_h, p_h)) = b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h)) + b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^T, (\mathbf{v}_h^T, p_h)) \quad (6.16)$$

$$\|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h}^2 + \|\boldsymbol{\lambda}_h^T\|_{\mathbf{L}_h}^2 = \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{L}_h}^2 \quad (6.17)$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h} &\leq \sqrt{\|\mathbf{v}_h^n\|_{\mathbf{W}_h}^2 + \|\mathbf{v}_h^T\|_{\mathbf{W}_h}^2} \\ &\leq cte \sqrt{\|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h}^2 + \|\boldsymbol{\lambda}_h^T\|_{\mathbf{L}_h}^2} \\ &\leq cte \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{L}_h} \end{aligned} \quad (6.18)$$

où cte est une constante strictement positive.

Par conséquent, si nous posons $c^{inf} = \inf(c^n, c^T)$, alors nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h, (\mathbf{v}_h, p_h))}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h}} &\geq \frac{b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^n, (\mathbf{v}_h^n, p_h)) + b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^T, (\mathbf{v}_h^T, p_h))}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h}} \\ &\geq \frac{c^n \|\boldsymbol{\lambda}_h^n\|_{\mathbf{L}_h}^2 + c^T \|\boldsymbol{\lambda}_h^T\|_{\mathbf{L}_h}^2}{cte \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{L}_h}} \\ &\geq \frac{c^{inf} \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{L}_h}^2}{cte \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{L}_h}} \\ &\geq \beta \|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{\mathbf{L}_h} \end{aligned} \quad (6.19)$$

où β est une constante strictement positive.

Nous venons de montrer que la relation 2 implique la relation 1.

Nous en déduisons donc que les relations 1 et 2 sont équivalentes. \diamond

Pour démontrer la validité de la condition inf-sup associée à la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$, nous sommes amenés à montrer les deux conditions inf-sup de la relation 2.

Intéressons-nous à la condition portant sur les espaces \mathbf{D}_h^T et \mathbf{W}_h^T .

Nous avons alors la propriété suivante :

Propriété 11 *La condition inf-sup associée aux espaces \mathbf{D}_h^T et \mathbf{W}_h^T ne peut pas être vérifiée*

Preuve de la propriété 11

On se propose d'exhiber un contre-exemple dans le cas où la dimension de \mathbf{D}_h est indexée par le nombre de faces grossières des frontières mortars.

Notons $B_h^t : \mathbf{W}_h^T \rightarrow \mathbf{D}_h^T$ l'opérateur suivant :

$$(B_h^t(\mathbf{v}_h^T, p_h), \boldsymbol{\lambda}_h^T)_{\mathbf{L}_h} = b_h(\boldsymbol{\lambda}_h^T, (\mathbf{v}_h^T, p_h)) \quad \forall \mathbf{v}_h^T \in \mathbf{W}_h^T, \forall \boldsymbol{\lambda}_h^T \in \mathbf{D}_h^T$$

Si la condition inf-sup était vérifiée, alors l'opérateur B_h^t serait surjectif. Considérons maintenant la figure 6.1. Suivant cette configuration, on constate que $\mathbf{D}_h^T \neq \emptyset$ et qu'il a pour dimension le nombre de faces grossières, c'est-à-dire dans notre cas 8. De la même façon, on voit que l'espace \mathbf{W}_h^T est au mieux de dimension 4 : en effet seules les faces internes du domaine grossier peuvent contribuer à définir une trace tangentielle sur les bords mortars. Par conséquent, nous avons au mieux $\dim \text{Im}(B_h^t) = 4$ et B_h^t ne peut être surjectif. \diamond

Nous venons de voir qu'imposer la continuité faible de toutes les composantes du champ de vitesse conduit à un problème discret mal posé puisque la condition inf-sup sur $b_h(\cdot, \cdot)$ ne peut être vérifiée. Il convient donc de s'intéresser à la continuité faible uniquement sur la composante normale du champ de vitesse.

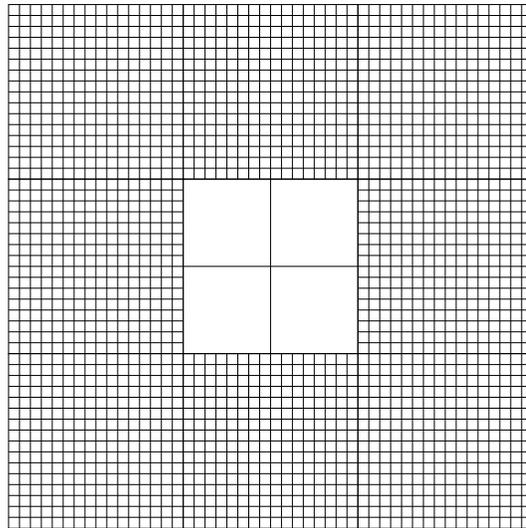


FIG. 6.1: Exemple de décomposition d'un domaine d'étude en deux sous-domaines.

6.2 Continuité faible de la composante normale du champ de vitesse

À présent nous allons montrer que la contrainte de continuité doit porter, non pas sur l'ensemble des composantes, mais uniquement sur la composante normale du champ de vitesse pour que le problème issu de la méthode des éléments joints soit bien posé.

Après avoir donné quelques définitions et introduit des notations, nous montrerons que les conditions inf-sup portant sur les formes bilinéaires $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ sont bien vérifiées.

6.2.1 Définitions et notations

Puisque nous considérons le cas où on impose la continuité faible uniquement à la composante normale du champ de vitesse, la variable u_Γ du problème discret 6.1 est une fonction scalaire. Par déduction, les espaces L_h et M_h sont des espaces de fonctions scalaires.

Il nous faut également redéfinir la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 b_h : L_h \times \mathbf{W}_h \times X_h^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (\mu_h, (\mathbf{v}_h, p_h)) &\rightarrow \sum_i b_h^i(\mu_h^i, (\mathbf{v}_h^i, p_h)) = \sum_i \sum_{j \neq i} (\mu_h^{i,j}, \pi_{ij}^i(\gamma_{ij}^i(\mathbf{v}_h^i) \cdot \mathbf{n}_{ij}))_{L^2(\Gamma_{ij})}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

où \mathbf{n}_{ij} est le vecteur unitaire normal à la frontière Γ_{ij} et extérieur au domaine Ω_i .

6.2.2 Condition inf-sup liée à $b_h(\cdot, \cdot)$

Intéressons-nous à la condition inf-sup associée à la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ définie en 6.20. Nous avons la propriété suivante :

Propriété 12 *Nous avons la relation suivante qui est vérifiée :*

$$\exists \beta, \forall \lambda_h \in D_h, \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h} \frac{b_h(\lambda_h, (\mathbf{v}_h, p_h))}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{W}_h}} \geq \beta \|\lambda_h\|_{L_h}$$

Preuve de le propriété 12

La preuve est la même que la démonstration 5.5.1 rédigée dans le cadre de l'utilisation de la discrétisation VEF , à ceci près que le vecteur \mathbf{v}_h de \mathbf{W}_h doit être choisi ainsi :

$$\forall i, \forall f \in \mathcal{T}_h^i(\cup_{j \neq i} \Gamma_{ij}), \frac{1}{|f|} \int_f \mathbf{v}_h|_{\Omega_i} \cdot \mathbf{n}_{f,i} = \lambda_h^i|_f \cdot \mathbf{n}_{f,i}$$

$$\mathbf{v}_h = 0, \text{ dans } \Omega_i \quad \forall i$$

Où $\mathbf{n}_{f,i}$ désigne le vecteur unitaire normal à la face f et extérieur à Ω_i . \diamond

6.2.3 Condition inf-sup liée à $c_h(\cdot, \cdot)$

Intéressons-nous à la condition inf-sup associée à la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$. Nous avons la propriété suivante :

Propriété 13 *Nous avons la relation suivante qui est vérifiée :*

$$\exists \delta > 0, \forall u_\Gamma \in M_h, \sup_{\mu_h \in L_h} \frac{c_h(\mu_h, u_\Gamma)}{\|\mu_h\|_{L_h}} \geq \delta \|u_\Gamma\|_{M_h} \quad (6.21)$$

Preuve de la propriété 13

La preuve est identique à la démonstration 5.5.2 rédigée dans le cadre de l'utilisation de la discrétisation VEF . \diamond

Conclusion de ce chapitre :

Nous venons de montrer que dans le cadre de l'utilisation de la discrétisation VDF, lorsque nous appliquons la méthode des éléments joints décrite dans [22], pour que le problème soit bien posé, il faut non pas imposer la continuité de toutes les composantes du champ de vitesse, mais seulement sur la composante normale de ce dernier.

Chapitre 7

Opérateurs d'interpolation et d'extrapolation

Ce chapitre est consacré à l'opérateur d'interpolation permettant de définir un champ, scalaire ou vectoriel, sur un élément géométrique père, noté K_p , à partir des données disponibles sur les éléments fils de K_p , que l'on notera $(K_{fi})_i$. Il sera également question de l'opérateur d'extrapolation qui permet de définir le champ inconnu sur les éléments fils $(K_{fi})_i$ à partir des données sur l'élément père K_p .

Les opérateurs que nous cherchons à construire devront, lorsqu'ils seront appliqués à un champ vectoriel, conserver la nullité de la divergence de ce dernier. Cette propriété de l'opérateur est intéressante car elle nous permet d'économiser une étape de projection (afin d'obtenir un champ de vitesse à divergence nulle). En effet, si nous résolvons un problème instationnaire, même si à l'instant t nous avons un champ de vitesse à divergence nulle sur l'ensemble du domaine d'étude Ω , lorsque les calculs débiteront à l'instant $t + 1$, le maillage aura probablement été modifié (raffinement ou déraffinement). Jusqu'à présent rien ne permet de garantir qu'au temps $t + 1$ la divergence du champ de vitesse soit toujours nulle, ce qui nécessite une étape de projection.

Dans le module AMR, la construction des opérateurs d'interpolation et d'extrapolation se fait de manière récursive. Autrement dit, en notant i un niveau de raffinement, et $i + 1$ le niveau de raffinement supérieur (les mailles appartenant au niveau de raffinement $i + 1$ sont issues du raffinement de mailles appartenant au niveau de raffinement i), dans le cas de l'opérateur d'interpolation, nous chercherons toujours à définir un champ sur un élément père appartenant au niveau de raffinement i , à partir des données disponibles sur ses éléments fils, qui eux, appartiennent au niveau de raffinement $i + 1$.

Nous commencerons par rappeler comment ont été définis les opérateurs mis en place dans [22] et nous en montrerons les limites. Puis nous étudierons comment construire de nouveaux opérateurs, que ce soit pour l'interpolation ou l'extrapolation.

7.1 Opérateur d'interpolation mis en place par Éli Laucoin

Nous allons présenter comment a été construit l'opérateur d'interpolation dans [22], puis nous montrerons que si nous l'appliquons à un champ vectoriel, alors nous ne conservons pas la nullité

de la divergence de ce dernier.

Rappelons que durant sa thèse Éli Laucoin ne s'est intéressé qu'à la discrétisation VEF .

7.1.1 Construction de l'opérateur de l'opérateur d'interpolation

Commençons par faire une remarque sur la structure de donnée, et les conséquences qu'elle a sur le fonctionnement de l'opérateur.

Dans le module AMR, la structure de données a été pensée de telle manière à ce que l'opérateur d'interpolation manipule les valeurs des champs (scalaires ou vectoriels), aux sommets des éléments, et non pas aux barycentres des arêtes (resp. faces). Il ne s'agit pas d'une projection, mais d'un changement **local** de discrétisation (avec cette structure de données, chaque sommet est dupliqué autant de fois que le nombre d'éléments auxquels il appartient).

Maintenant, étudions la méthode proposée dans [22] pour définir un champ vectoriel \mathbf{u}_h sur un élément père K_p à partir des données disponible sur ses fils $(K_{fi})_i$.

La figure 7.1 illustre, en 2D, un élément père et ses quatre élément fils, issus du raffinement de l'élément père. \mathbf{u}_h est défini sur les sommets des éléments fils, notés sur la figure F_i $i=0..5$. Pour

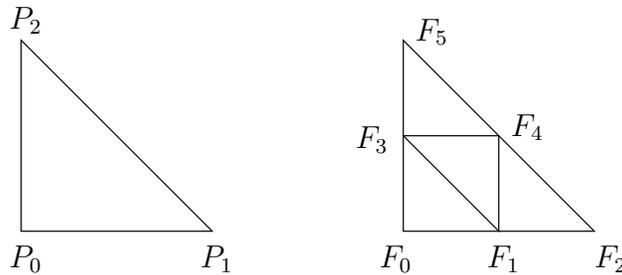


FIG. 7.1: Un élément père et ses quatre éléments fils.

interpoler \mathbf{u}_h sur l'élément père, la méthode proposée dans [22] consiste à appliquer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(P_0) &= \mathbf{u}_h(F_0) \\ \mathbf{u}_h(P_2) &= \mathbf{u}_h(F_5) \\ \mathbf{u}_h(P_1) &= \mathbf{u}_h(F_2) \end{aligned} \tag{7.1}$$

En 3D, le principe reste le même, à savoir que la valeur de \mathbf{u}_h sur un sommet de l'élément père est la valeur de \mathbf{u}_h définie sur le même sommet, mais d'un élément fils.

Notons que cette méthode conserve la linéarité de \mathbf{u}_h . Cependant, comme nous allons le montrer, rien ne permet d'assurer la conservation de la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h . Prenons un élément père, comme indiqué sur la figure 7.2. Les sommets de l'élément père ont pour coordonnées :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

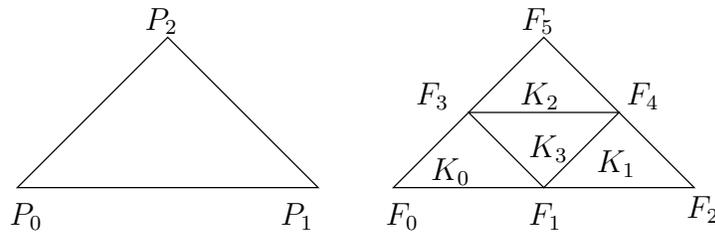


FIG. 7.2: Élément père (gauche) et son découpage en quatre éléments fils (droite)

Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini sur chaque élément fils, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h|_{K_0} &= \begin{pmatrix} x + y - \frac{1}{2} \\ -y \end{pmatrix} & \mathbf{u}_h|_{K_1} &= \begin{pmatrix} x \\ -y + x - \frac{5}{4} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_h|_{K_2} &= \begin{pmatrix} x + y - 1 \\ -y + x - 1 \end{pmatrix} & \mathbf{u}_h|_{K_3} &= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la continuité de \mathbf{u}_h entre les éléments, aux barycentres des arêtes, est bien assurée. Il en est de même pour la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h sur chaque élément fils.

Nous allons définir le champ de vitesse sur l'élément père, noté \mathbf{u}_h^{old} en utilisant l'opérateur précédemment décrit. Comme données initiales nous avons :

$$\mathbf{u}_h(F_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{u}_h(F_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{u}_h(F_5) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la relation 7.1 il vient :

$$\mathbf{u}_h^{old}(P_0) = \mathbf{u}_h(F_0) ; \quad \mathbf{u}_h^{old}(P_1) = \mathbf{u}_h(F_2) ; \quad \mathbf{u}_h^{old}(P_2) = \mathbf{u}_h(F_5) ;$$

Nous pouvons alors trouver un polynôme de degré 1 définissant \mathbf{u}_h^{old} sur l'ensemble de l'élément père, et après interpolation nous trouvons :

$$\mathbf{u}_h^{old} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}y \\ \frac{3}{8}x - \frac{19}{16}y \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

En calculant la divergence de \mathbf{u}_h^{old} nous obtenons

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{old} = \frac{1}{16}$$

Par conséquent $\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{old} \neq 0$.

La partie suivante montre comment construire un opérateur d'interpolation permettant de conserver la nullité de la divergence d'un champ de vitesse, des éléments fils, à l'élément père.

7.2 Construction du nouvel opérateur d'interpolation

Nous allons présenter les principes de base de la construction d'un opérateur d'interpolation, puis nous étudierons comment construire un opérateur permettant de conserver la nullité de la divergence d'un champ vectoriel.

Notons N_f le nombre d'éléments fils issus du raffinement d'un élément père.

7.2.1 Principes de base

Afin d'alléger ce document, nous nous plaçons uniquement dans le cas de l'utilisation d'une discrétisation VEF . Le raisonnement reste identique en tout point pour les discrétisations VDF ou \mathbb{Q}_{NC}^1 . Plus de détails sur ces discrétisations sont disponibles dans l'annexe A. Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel.

Considérons un domaine Ω de \mathbb{R}^n , muni d'un maillage conforme, noté \mathcal{T}_h . Introduisons l'espace global suivant :

$$\mathbf{W}_h = \{\mathbf{u}_h \in (L^2(\Omega))^n, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{u}_h|_K \in \mathcal{C}^\infty(K)\}$$

Nous aurons également besoin de l'espace W_h qui est la version scalaire de \mathbf{W}_h . Comme \mathbf{u}_h est un champ vectoriel, il possède plusieurs composantes scalaires (u_{hk} désignera la k^{eme} composante de \mathbf{u}_h). Le traitement de chaque composante est identique, donc par moment nous ne considérerons que la k^{eme} composante u_{hk} . Remarquons que u_{hk} appartient à l'espace W_h .

Soient les deux triplets $\{K_1, P_1, \Sigma_1\}$ et $\{K_2, P_2, \Sigma_2\}$, où :

- K_1 et K_2 désignent une partie compacte, connexe, d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d ;
- P_1 et P_2 désignent les espaces vectoriels de fonctions définies respectivement sur K_1 et K_2 ;
- Σ_1 et Σ_2 désignent les ensembles de formes linéaires définies respectivement sur P_1 et P_2 .

Supposons que les espaces de discrétisation associés aux éléments finis définis ci-dessus, que nous noterons X_h^1 et X_h^2 , vérifient les relations :

$$\begin{aligned} X_h^1 &\subset W_h \\ X_h^2 &\subset W_h \\ X_h^1 + X_h^2 &\subset W_h \end{aligned}$$

Introduisons les fonctions de base des espaces X_h^1 et X_h^2 que l'on note respectivement $(\Phi_i^1)_{0 \leq i < N_1}$ et $(\Phi_i^2)_{0 \leq i < N_2}$. Pour chaque élément K de \mathcal{T}_h , nous définissons :

$$\mathcal{N}^j(K) = \{i \in \llbracket 1, N_j \rrbracket, \text{supp}(\Phi_i^j) \cap \overset{\circ}{K} \neq \emptyset\}$$

Nous pouvons alors, pour chaque élément K , définir un ensemble de fonctions de base locales $\Phi_{i|K}^2$ et un ensemble de formes linéaires $\sigma_{i,K}$ qui vérifient la relation :

$$\sigma_{i,K}(\Phi_{j|K}^2) = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2(K)^2 \quad (7.3)$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Pour tout i de $\mathcal{N}^2(K)$, nous posons :

$$\mathcal{T}_h^i = \{K \in \mathcal{T}_h, i \in \mathcal{N}^2(K)\}$$

Définissons N_2 formes linéaires sur l'espace W_h , en posant, pour tout i dans $\mathcal{N}^2(K)$:

$$\begin{aligned} \sigma_i : W_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ u_{hk} &\rightarrow \sigma_i(u_{hk}) = \frac{1}{w_i} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^i} w_{i,K} \sigma_{i,K} \end{aligned} \quad (7.4)$$

avec :

$$w_i = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^i} w_{i,K} \quad (7.5)$$

et où les poids $w_{i,K}$ sont supposés positifs, mais choisis de manière arbitraire. À l'aide de ces formes linéaires, nous pouvons définir un opérateur de projection sur l'espace X_h^2 défini sur W_h par :

$$\begin{aligned} \pi_h : W_h &\rightarrow X_h^2 \\ u_{hk} &\rightarrow \pi_h(u_{hk}) = \sum_{i=1}^{N_2} \sigma_i(u_{hk}) \Phi_{ik}^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Comme X_h^1 est inclus dans W_h , nous pouvons définir notre opérateur d'interpolation $\mathcal{R}_h^{1,2}$ comme étant la restriction du projecteur π_h à l'espace X_h^1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h^{1,2} : X_h^1 &\rightarrow X_h^2 \\ u_{hk}^1 &\rightarrow \mathcal{R}_h^{1,2}(u_{hk}^1) = \pi_h(u_{hk}^1) = \sum_{i=1}^{N_2} \sigma_i(u_{hk}^1) \Phi_{ik}^2 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Considérons maintenant \mathcal{T}_h^g et \mathcal{T}_h^{g+1} deux maillages de Ω tels que \mathcal{T}_h^{g+1} soit un raffinement de \mathcal{T}_h^g . Nous sommes assurés d'avoir :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h^{g+1}, \exists ! K' \in \mathcal{T}_h^g, K \subset K' \quad (7.8)$$

Notons V_h^g et V_h^{g+1} les espaces discrets définis respectivement à l'aide des maillages \mathcal{T}_h^g et \mathcal{T}_h^{g+1} . La propriété d'inclusion 7.8 a alors pour conséquence :

$$V_h^g \subset W_h = \{u_{hk} \in L^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h^{g+1}, u_{hk}|_K \in C^\infty(K)\} \quad (7.9)$$

En définissant l'opérateur de projection π_h comme précédemment :

$$\begin{aligned} \pi_h : W_h &\rightarrow V_h^{k+1} \\ u_{hk} &\rightarrow \pi_h(u_{hk}) = \sum_{i=1}^{N_{g+1}} \sigma_i(u) \Phi_i^{g+1} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Nous pouvons définir notre opérateur de prolongement en prenant sa restriction à l'espace V_k :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h^{g,g+1} : V_h^g &\rightarrow V_h^{g+1} \\ u_{hk}^g &\rightarrow \mathcal{R}_h^{g,g+1}(u_{hk}^g) = \pi_h(u_{hk}^g) = \sum_{i=1}^{N_{g+1}} \sigma_i(u_{hk}^g) \Phi_i^{g+1} \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.2.2 Construction de l'opérateur

Maintenant, nous allons étudier comment construire un opérateur d'interpolation qui, une fois appliqué à un champ vectoriel, permettra de conserver la nullité de la divergence de ce dernier. Contrairement à la partie précédente, nous n'allons pas limiter l'étude à la discrétisation VEF , mais les résultats que nous présenterons seront valables aussi bien pour une discrétisation VEF , VDF ou \mathbb{Q}_{NC}^1 .

Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel, il est important de remarquer que dans le cas des discrétisations VEF et \mathbb{Q}_{NC}^1 les degrés de liberté donnent la valeur moyenne de \mathbf{u}_h alors que la discrétisation VDF ne donne que la valeur moyenne de la composante normale du champ vectoriel \mathbf{u}_h .

Dans la suite, nous ne distinguerons pas la discrétisation VEF de la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 car le raisonnement et les notations sont les mêmes. Par conséquent nous ferons la distinction uniquement entre discrétisation VEF et VDF , car bien que le raisonnement soit le même pour les deux discrétisations, les notations employées différeront.

Considérons un problème de Stokes, muni de conditions aux limites de types Dirichlet homogènes sur un domaine borne Ω de \mathbb{R}^n .

Définissons les espaces discrets associés aux discrétisations VEF et VDF :

$$W_h^{VEF} = \{u_{hk} \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega), u_{hk|K} \in \mathbb{P}^1(K); \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^I(\mathcal{T}_h(\Omega_i)), u_{hk} \text{ continue en } \mathbf{x}; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^\partial(\mathcal{T}_h(\Omega)), u_{hk}(\mathbf{x}) = 0\} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{W}_h^{VDF} = \{\mathbf{u}_h \in (L^2(\Omega))^n; \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega), \mathbf{u}_h|_K \in \mathbf{RT}_0(K); \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^I(\mathcal{T}_h(\Omega_i)), \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \text{ continue en } \mathbf{x}; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}^\partial(\mathcal{T}_h(\Omega)), \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = 0\} \quad (7.13)$$

Où $\mathcal{N}^I(\Omega_i)$ (resp. $\mathcal{N}^\partial(\Omega)$) désigne Ensemble des barycentres des arêtes (resp. faces) des éléments intérieurs à Ω_i (resp. sur le bord de Ω), et \mathbf{n} est le vecteur normal extérieur au bord de Ω .

Soit K une partie compacte, connexe, d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n . Introduisons P un espace vectoriel de fonctions définies sur K . Notons Σ^{VEF} (resp. Σ^{VDF}) l'ensemble des formes linéaires qui, à toute fonction appartenant à P , associe sa valeur moyenne (resp. la valeur moyenne de sa normale extérieur) le long d'une arête ou d'une face de K . Autrement dit, si nous considérons la i^{me} forme linéaire σ_i appartenant à Σ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_i^{VEF} : P(K) &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \quad \sigma_i^{VDF} : P(K) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Phi &\rightarrow \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \Phi & & \quad \Phi &\rightarrow \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \Phi \cdot \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (7.14)$$

Où Γ_i représente la i^{eme} arête (resp. face) de K et \mathbf{n}_i est le vecteur normal extérieur à Γ_i .

Reprenons les 2 triplets $\{K_1, P_1, \Sigma_1\}$ et $\{K_2, P_2, \Sigma_2\}$ et détaillons-les suivant la discrétisation utilisée.

Si nous utilisons une discrétisation VEF alors :

- K_1 et K_2 désignent deux simplexes de \mathbb{R}^n
- $P_1 = P_2 = \mathbb{P}^1(K)$
- $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma^{VEF}$

Alors que si nous utilisons une discrétisation VDF :

- K_1 et K_2 désignent deux rectangles (resp. pavés)
- $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{RT}_0(K)$

$-\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma^{VDF}$
 $X_h^{VEF,1}$, $X_h^{VEF,2}$, $\mathbf{X}_h^{VDF,1}$ et $\mathbf{X}_h^{VDF,2}$ sont les espaces de discrétisation associés aux éléments finis définis par les triplets $\{K_1, P_1, \Sigma_1\}$ et $\{K_2, P_2, \Sigma_2\}$. Afin que notre opérateur conserve la divergence d'un champ vectoriel \mathbf{u}_h , nous souhaitons qu'il puisse vérifier la relation :

$$\int_{\Gamma} [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} - \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}] = 0, \quad \forall \Gamma \in \partial K_P \quad (7.15)$$

Où \mathbf{n} est le vecteur normal extérieur à Γ .

Par conséquent, en reprenant les notations introduites dans le paragraphe précédent, nous allons définir \mathcal{N}_2 formes linéaires sur $P(K)$, en posant, pour tout i dans \mathcal{N}^2 :

$$\begin{aligned} \sigma_i^{VEF} : P(K) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u_{hk} &\rightarrow \sigma_i^{VEF}(u_{hk}) = \frac{1}{|\Gamma_i|} \left(\int_{\Gamma_i} u_{hk}|_K \right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_i^{VDF} : P(K) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u}_h &\rightarrow \sigma_i^{VDF}(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{|\Gamma_i|} \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_h|_K \cdot \mathbf{n}_i \right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Où \mathbf{n}_i est le vecteur normal extérieur associé à Γ_i .

Propriété 14 Soit K_p un élément père. Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel à divergence nulle défini sur les éléments fils de K_p . Soient π_h^{VEF} et π_h^{VDF} les opérateurs d'interpolation associés respectivement aux discrétisations VEF et VDF , définis comme suit :

$$\pi_h^{VEF}(u_{hk}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}^2(K)} \sigma_i(u_{hk}) \Phi_i^2 \quad (7.18)$$

et

$$\pi_h^{VDF}(\mathbf{u}_h) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}^2(K)} \sigma_i(\mathbf{u}_h) \Phi_i^2 \quad (7.19)$$

Alors, sur l'élément père, $\pi_h^{VEF}(\mathbf{u}_h)$ (resp. $\pi_h^{VDF}(\mathbf{u}_h)$) est à divergence nulle. Autrement dit nous avons :

$$\nabla \cdot \pi_h^{VEF}(\mathbf{u}_h) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \pi_h^{VDF}(\mathbf{u}_h) = 0$$

Preuve de la propriété 14 :

Soit e un élément fils de K_p . Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel à divergence nulle défini sur chaque élément fils de K_p . Notons Γ_f^e la f^{eme} face (resp. arête) de l'élément fils e . En notant \mathbf{u}_h^e la restriction de \mathbf{u}_h à l'élément e , et \mathbf{n}_f^e le vecteur normal extérieur à la face (resp. arête) f de l'élément e , nous avons :

$$\sum_{f=1}^{\mathcal{N}^2(K)} \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{u}_h^e \cdot \mathbf{n}_f^e = 0 \quad (7.20)$$

Notons ∂K_P l'ensemble des faces (ou arêtes) de l'élément père K_P . Notons également \mathbf{n}_Γ le vecteur normal extérieur à la face (reps. arête) Γ de l'élément père K_P .

De plus, nous avons, en notant Nb_fils le nombre d'éléments fils issus du raffinement de l'élément père K_P :

$$\sum_{e=1}^{Nb_fils} \left(\sum_{f=1}^{N^2(K)} \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{u}_h^e \cdot \mathbf{n}_f^e \right) = \sum_{\Gamma \in \partial K_P} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_h^e \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0 \quad (7.21)$$

Grâce à la relation 7.15 nous pouvons écrire :

$$\sum_{\Gamma \in \partial K_P} \int_{\Gamma} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \int_{K_P} \nabla \cdot \pi_h(\mathbf{u}_h) = 0 \quad (7.22)$$

Où π_h désigne un opérateur d'interpolation, mais ici il n'est pas utile de préciser s'il s'agit de π_h^{VEF} ou π_h^{VDF} , la relation étant vérifiée pour les deux types d'opérateurs.

Nous en déduisons que le champ vectoriel obtenu sur l'élément père K_P est bien à divergence nulle. \diamond

Nous allons à présent détailler les formules 7.18 et 7.19.

Rappelons que dans le cas de l'utilisation de la discrétisation VDF nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \Phi_j \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij} \quad (7.23)$$

Où Φ_j est la fonction de base associée à l'arête (resp. face) Γ_j et \mathbf{n}_j est le vecteur normal extérieur à l'arête (resp. face) Γ_j .

D'autre part, dans le cas de l'utilisation de la discrétisation VEF nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \Phi_j = \delta_{ij} \quad (7.24)$$

Soit N_{fb} l'entier correspondant au nombre d'arêtes (resp. face) appartenant aux éléments fils, issues de l'arête (resp. face) numéro F de l'élément père. Dans les cas 2D et 3D nous avons respectivement $N_{fb} = 2$ et $N_{fb} = 4$. Dans ce qui suit, nous noterons F_i la face (resp. arête) de l'élément père portant le numéro i , et $f_{ij} \quad j=1..N_{fb}$ les faces (resp. arêtes) filles issues du raffinement de la face F_i . Avec ces notations, nous avons :

$$f_{ij} \cap F_i = f_{ij} \quad \text{si } 1 \leq j \leq N_{fb} \quad (7.25)$$

Nous noterons $\mathbf{u}_h^{f_{ij}}$ la valeur de \mathbf{u}_h au barycentre de la face (resp. arête) f_{ij} . Dans le cas où nous utilisons la discrétisation VDF alors nous ne nous intéresserons qu'à la composante normale de la valeur de \mathbf{u} au barycentre de la face.

Introduisons la numérotation suivante :

Considérons un élément père et ses éléments fils, comme cela est illustré sur la figure 7.3 dans le cas particulier du simplexe en 2D.

Lorsqu'une arête (resp. une face) de l'élément père se trouve être découpée plusieurs arêtes (resp. faces) appartenant à ses éléments fils, alors ces dernières porteront le même numéro que

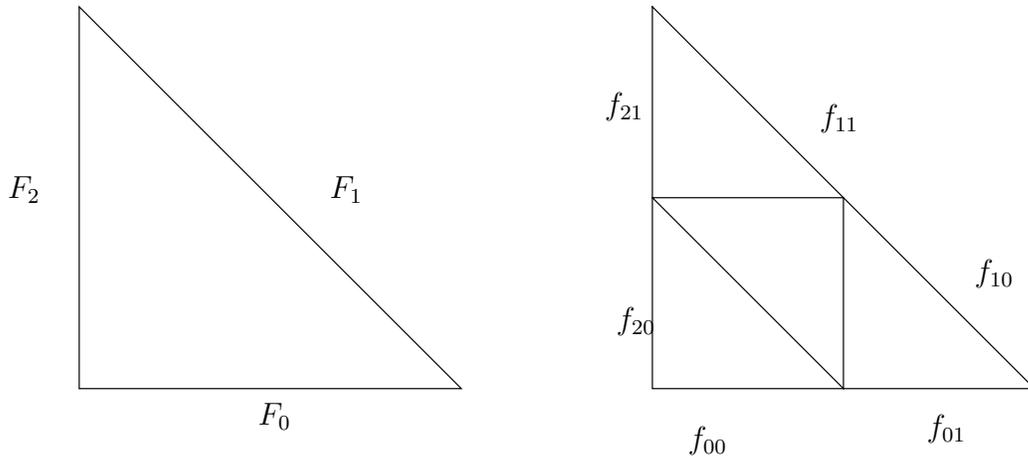


FIG. 7.3: Numérotation des arêtes de l'élément père (à gauche) et de celles de ses éléments fils (à droite)

l'arrête (resp. face) dont elles sont issues.

Exprimons l'intégrale de u_{hk} (resp. $\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_i$) sur une face mère F_i donnée, nous avons :

$$\int_{F_i} u_{hk} = \sum_{j=1}^{N_{fb}} u_{hk}^{f_{ij}} \int_{f_{ij}} \Phi_{f_{ij}} = \sum_{j=1}^{N_{fb}} u_{hk}^{f_{ij}} |f_{ij}| \quad (7.26)$$

et, en notant $\mathbf{u}_h^{f_{ij}}$ la valeur de \mathbf{u}_h au barycentre de la face f_{ij}

$$\int_{F_i} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_i = \sum_{j=1}^{N_{fb}} \mathbf{u}_h^{f_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{f_{ij}} \int_{f_{ij}} \Phi_{f_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{f_{ij}} = \sum_{j=1}^{N_{fb}} \mathbf{u}_h^{f_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{f_{ij}} |f_{ij}| \quad (7.27)$$

Où $\Phi_{f_{ij}}$ (resp. $\Phi_{f_{ij}}$) est la fonction de base associée à la face f_{ij} .

7.2.3 Application aux simplexes

Dans cette partie, nous allons détailler la formule 7.18 lorsque nous avons des simplexes. Remarquons que dans ce cas, les différentes faces filles issues d'une même face de l'élément père, ont la même surface. Autrement dit, si nous nous intéressons aux faces filles issues de la face i de l'élément père, nous avons la relation :

$$\begin{aligned} |f_{i0}| &= |f_{i1}| & \text{en 2D} \\ |f_{i0}| &= |f_{i1}| = |f_{i2}| = |f_{i3}| & \text{en 3D} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Ainsi, nous pouvons réécrire la formule 7.18 de la manière suivante :

$$\pi_h^{VEF}(u_{hk}) = \frac{1}{N_{fb}} \sum_{i=1}^{nb_faces} \left(\sum_{j=1}^{N_{fb}} u_{hk}^{ij} \right) \Phi_i \quad (7.29)$$

Où nb_faces est le nombre de faces (resp. arête) du simplexe. Φ_i est la fonction de base associée à la face (resp. arête) numéro i de l'élément père.

7.2.4 Application aux quadrangles et hexaèdres

Discrétisation VDF

Dans le cas de l'utilisation de la discrétisation VDF , le maillage ne peut être formé que de rectangles (resp. pavés). Par conséquent la relation 7.28 est toujours vérifiée et nous avons

$$\pi_h^{VDF}(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{N_{fb}} \sum_{i=1}^{nb_faces} \left(\sum_{j=1}^{N_{fb}} \mathbf{u}_h^{ij} \cdot \mathbf{n}_{f_{ij}} \right) \Phi_i \quad (7.30)$$

Discrétisation Q_{NC}^1

Si nous utilisons la discrétisation Q_{NC}^1 alors la relation 7.28 n'est plus vérifiée. Les différentes faces des éléments fils, issues d'une même face de l'élément père, n'ont pas forcément les mêmes surfaces, comme illustré par la figure 7.4. Cette remarque donne lieu à la propriété suivante :

Propriété 15 Soit K_p un élément père hexaédrique. Notons F_i la i^{eme} face de K_p .

Si F_i est un trapèze non rectangle alors le découpage de F_i en quatre faces (f_{ij}) $_j$ par subdivision au milieu des arêtes de F_i engendre des faces qui ne sont pas de même surface. Nous avons donc :

$$|f_{i1}| \neq |f_{i3}|$$

Preuve de la propriété 15 :

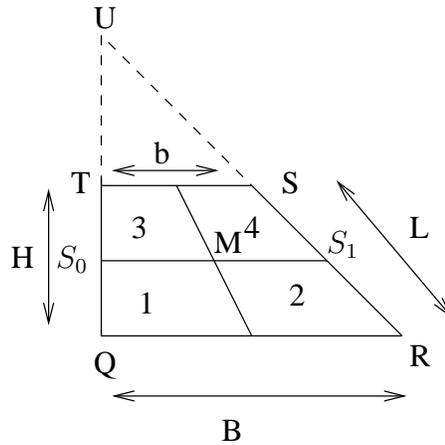


FIG. 7.4: Découpage d'une face d'un hexaèdre quelconque

Reportons-nous sur la figure 7.4, elle représente le découpage d'une face (TQRS) d'un hexaèdre en quatre faces filles numérotées de 1 à 4. Posons $H = 1$.

Soit A_i l'aire de la face portant le numéro i . Notons $\|AB\|$ la longueur du segment AB .

Les points S_0 et S_1 sont situés au milieu des segments TQ et SR .

Nous allons montrer que $A_1 \neq A_3$. Pour cela il nous faut d'abord avoir $\|S_0M\|$.

Calcul de $\|S_0M\|$:

Introduisons le réel k tel que $b = kB$ avec $k < 1$.

Nous pouvons écrire, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\|UT\|}{\|UQ\|} = \frac{b}{B} = k$$

Donc

$$\|UQ\| = \|UT\| + H = \|UT\| + 1$$

D'où

$$\|UT\| = \frac{k}{1-k} \quad (7.31)$$

De plus nous avons la relation :

$$\frac{b/2}{\|S_0M\|} = \frac{\|UT\|}{\|UT\| + H/2} = \frac{\|UT\|}{\|UT\| + 0.5} \quad (7.32)$$

Nous pouvons maintenant calculer $\|S_0M\|$:

$$\begin{aligned} \|S_0M\| &= \frac{b}{2} * \frac{\|UT + 0.5\|}{\|UT\|} \\ &= \frac{b}{2} * \frac{k+1}{1-k} \\ &= \frac{b}{2} * \frac{2(1-k)}{k} \\ &= \frac{b(k+1)}{4k} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer les aires A_1 et A_3 .

Calcul de A_1 et A_3 :

Nous avons :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(\|S_0M\| + \frac{b}{2} \right) \frac{H}{2} = \frac{b}{8} \left(\frac{k+1}{2k} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{b}{16} \right) \left(\frac{3k+1}{k} \right) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{2} \left(\|S_0M\| + \frac{B}{2} \right) \frac{H}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{bk+1}{4k} + \frac{B}{2} \right) \\ &= \left(\frac{b}{16} \right) \left(\frac{k+3}{k} \right) \end{aligned}$$

Conclusion :

Pour avoir l'égalité $A_1 = A_3$ il faudrait avoir l'égalité $3k + 1 = k + 3$. Or cette dernière égalité n'est vérifiée que dans le cas où $k = 1$. Par conséquent, si la face F_i de l'élément père n'est pas rectangle, alors nous avons bien :

$$|f_{i1}| \neq |f_{i3}|$$

◇

Lorsque nous utilisons la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 , si nous voulons appliquer l'opérateur d'interpolation 7.19 nous devons utiliser la formule suivante :

$$\pi_h^{\mathbb{Q}_{NC}^1}(u_{hk}) = \frac{1}{N_{fb}} \sum_{i=1}^{nb_faces} \left(\frac{1}{|F_i|} \sum_{j=0}^{N_{fb}} u_{hk}^{ij} |f_{ij}| \right) \Phi_i \quad (7.33)$$

7.3 Apport du nouvel opérateur d'interpolation

Dans cette partie, nous allons mettre en lumière ce qu'à apporter l'utilisation du nouvel opérateur d'interpolation défini par 7.18.

Reprenons la figure 7.2. Sur les éléments fils, ajoutons les points suivants :

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| a : milieu du segment S_0S_1 ; | d : milieu du segment S_3S_4 |
| b : milieu du segment S_1S_2 ; | e : milieu du segment S_4S_5 |
| c : milieu du segment S_2S_3 ; | f : milieu du segment S_5S_0 |

La figure 7.5 illustre ces ajouts. Sur l'élément père, rajoutons :

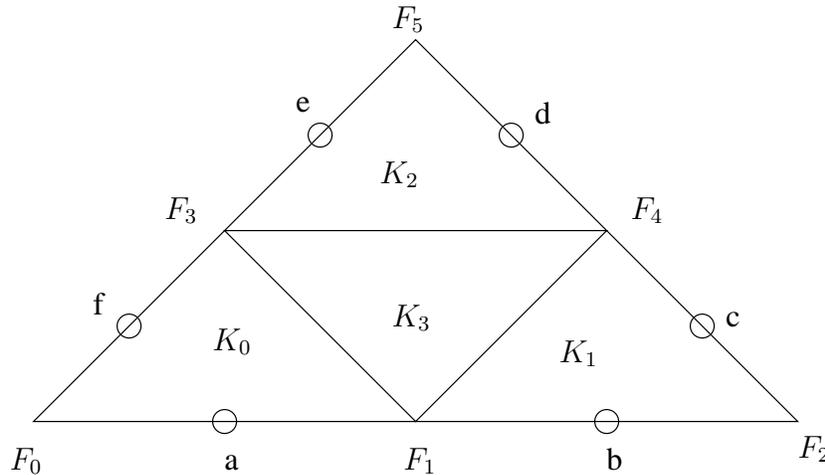


FIG. 7.5: Illustration des nouveaux ajouts.

- A : milieu du segment P_0P_2 (A est confondu avec F_3);
- B : milieu du segment P_2P_1 (B est confondu avec F_4);
- C : milieu du segment P_0P_1 (C est confondu avec F_1).

Rappelons que nous avons un champ vectoriel \mathbf{u}_h à divergence nulle, défini sur chaque élément fils. Soit \mathbf{u}_h^{old} le champ vectoriel défini sur l'élément père à partir de l'opérateur défini dans [22]. Nous avons constaté que la divergence de \mathbf{u}_h^{old} n'était pas nulle.

Introduisons à présent le champ vectoriel \mathbf{u}_h^{new} défini sur l'élément père à partir de l'opérateur d'interpolation que nous venons de décrire. Pour cela nous avons besoin des informations sui-

vantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(a) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{u}(b) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}(c) &= \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{u}(d) &= \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 5 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}(e) &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} & \mathbf{u}(f) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

À présent nous pouvons appliquer la formule 7.29. Nous obtenons alors :

$$\mathbf{u}_h^{new}(A) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_h^{new}(B) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{1} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_h^{new}(C) = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

Après interpolation, il vient :

$$\mathbf{u}_h^{new} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}y \\ \frac{3}{8} + \frac{1}{2}x - y \\ -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}x - y \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

Un rapide calcul nous donne la divergence :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{new} = 1 - 1 = 0$$

Nous avons bien la divergence de \mathbf{u}_h^{new} qui est nulle.

7.4 Résultats numériques

7.4.1 2D

Considérons le problème suivant

Problème 23 Soit Ω le carré unité défini sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Nous cherchons un couple (\mathbf{u}, p) , à valeur respectivement dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} , tel que :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{bord} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où on a posé :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2 * \cos(x) * \sin(y) \\ -2 * \sin(x) * \cos(y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{bord} = \begin{pmatrix} \cos(x) * \sin(y) \\ -\sin(x) * \cos(y) \end{pmatrix}$$

Alors, la solution analytique de ce problème est donnée par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos(x) * \sin(y) \\ -\sin(x) * \cos(y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p = 0 \quad (7.36)$$

La pression étant définie à une constante près, TRIO_U impose $p = 0$ sur un élément. Notons que nous utilisons la version étendue de la méthode VEF.

Maillons Ω avec, pour commencer, quatre mailles. Puis raffinons le maillage quatre fois de suite (nous obtenons alors 256 mailles). Le maillage obtenu est présenté par la figure 7.6 À chaque ité-

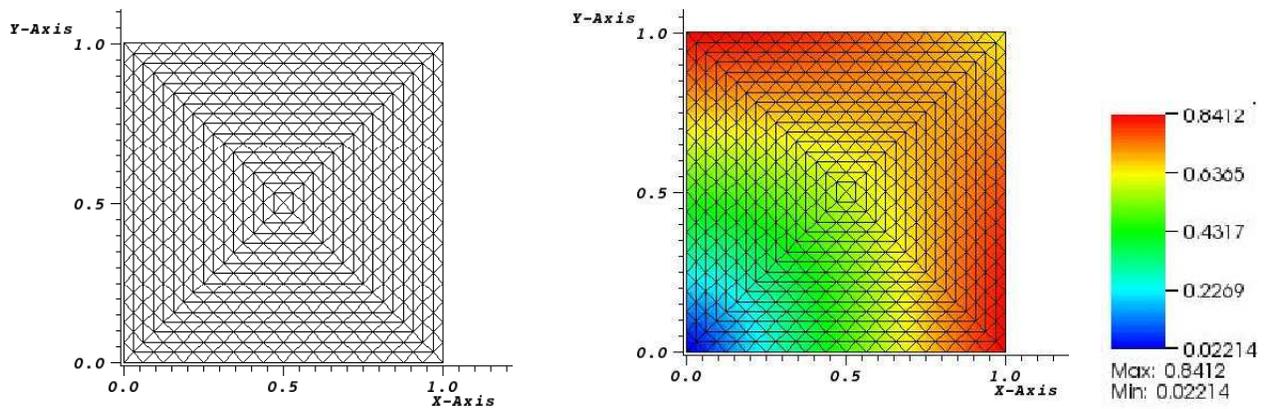


FIG. 7.6: Maillage de Ω et la norme du champ de vitesse obtenue après le lancement de la simulation.

ration, après avoir résolu le problème avec un niveau de raffinement donné, le module AMR de TRIO_U interpole l'inconnue pour la définir sur les maillages "pères", plus grossiers. La figure 7.7 regroupe plusieurs illustrations de la divergence du champ de vitesse sur différents niveaux de raffinement du maillage (résultats obtenus via l'opérateur d'interpolation mis en place dans ce chapitre). Sur le maillage le plus fin est calculé le champ de vitesse \mathbf{u}_h . Sur le maillage intermédiaire est calculé $\pi_h^{VEF}(\mathbf{u}_h)$ et enfin sur le maillage le plus grossier, c'est $\pi_h^{VEF}(\pi_h^{VEF}(\mathbf{u}_h))$ qui est calculé. Le solveur utilisé pour cette simulation est un solveur de type Uzawa dont le seuil a été fixé à $1e - 10$.

Maintenant, étudions le comportement de l'erreur, calculée en norme L^2 , en fonction de la taille moyenne des mailles. Pour cela lançons la résolution du problème 23 en imposant le raffinement de l'ensemble du domaine Ω de manière homogène. La figure 7.8 représente le comportement de l'erreur en fonction de la taille des mailles de Ω , en échelle logarithmique. En échelle logarithmique, nous nous attendons à avoir une pente de 2. Sur la figure 7.8 nous avons tracé le comportement de la fonction x^2 car en échelle logarithmique, la pente de x^2 est de 2. La pente de la courbe de l'erreur obtenue est d'environ 1.99026, soit approximativement 0.48% de différence par rapport à la pente de la courbe de x^2 .

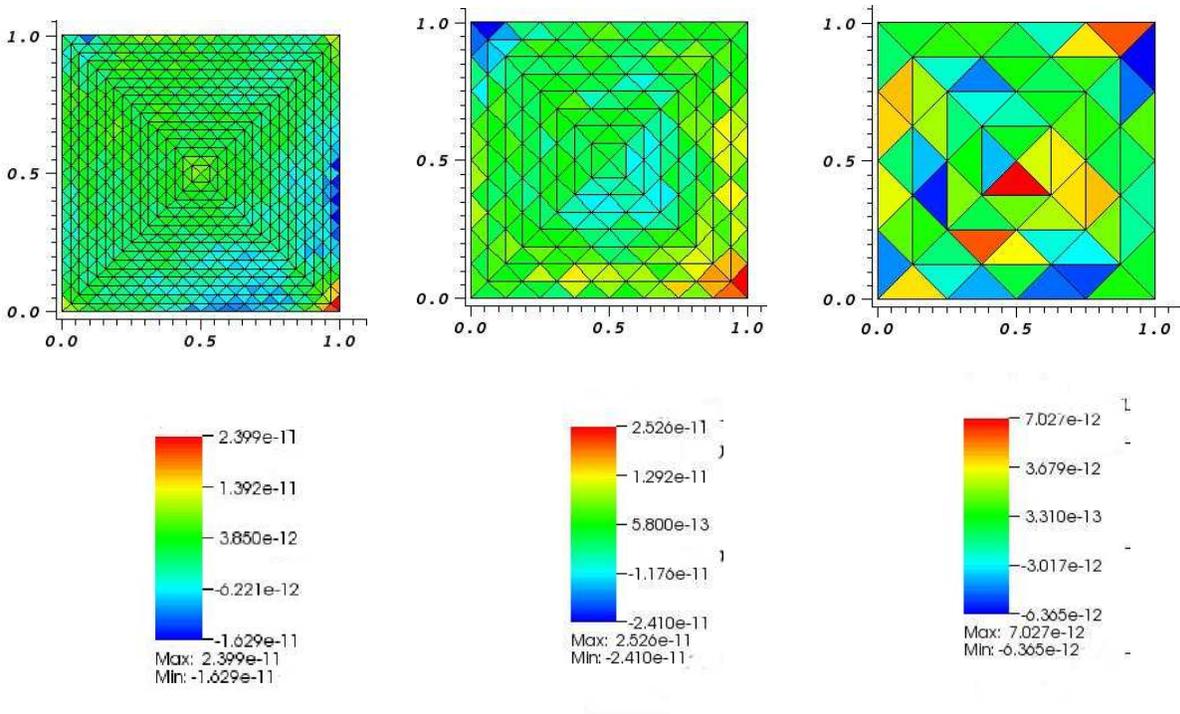


FIG. 7.7: Illustration de la divergence, calculée aux éléments, des interpolés successifs du champ de vitesse.

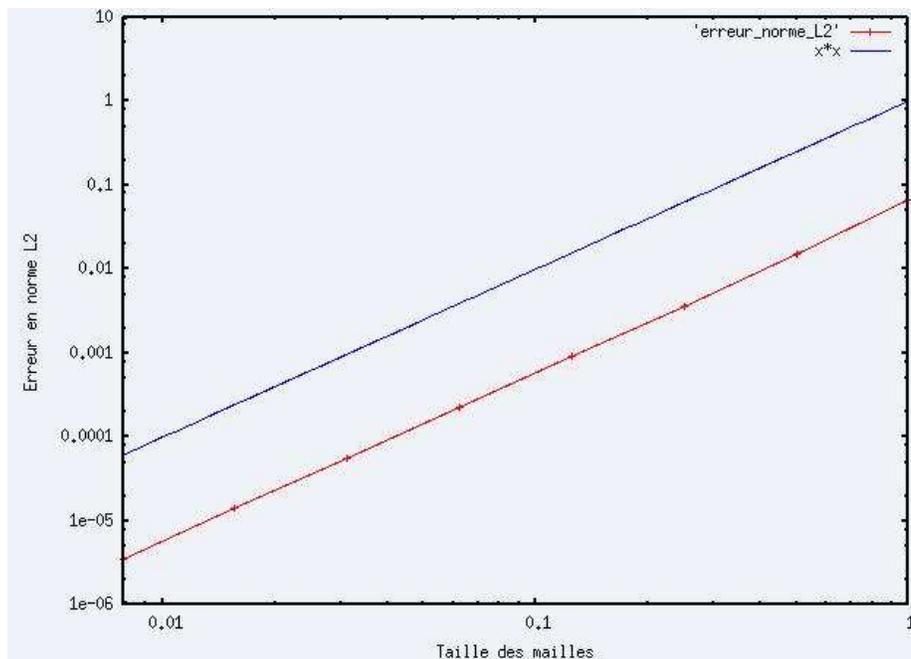


FIG. 7.8: Comportement de l'erreur en norme L^2 .

7.4.2 3D

Intéressons à présent à un problème en 3 dimensions.

Problème 24 Soit Ω le cube unité défini sur $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Nous cherchons un couple (\mathbf{u}, p) , à valeur respectivement dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R} , tel que :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{bord} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où on a posé :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 3 * \sin(x) * \cos(y) * \sin(z) \\ -3 * 0.5 * \cos(x) * \sin(y) * \sin(z) \\ 3 * 0.5 * \cos(x) * \cos(y) * \cos(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{bord} = \begin{pmatrix} \sin(x) * \cos(y) * \sin(z) \\ -0.5 * \cos(x) * \sin(y) * \sin(z) \\ 0.5 * \cos(x) * \cos(y) * \cos(z) \end{pmatrix}$$

Alors, la solution analytique de ce problème est donnée par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(x) * \cos(y) * \sin(z) \\ -0.5 * \cos(x) * \sin(y) * \sin(z) \\ 0.5 * \cos(x) * \cos(y) * \cos(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p = 0 \quad (7.37)$$

Nous allons, comme dans le cas 2D, partir avec un maillage initial relativement grossier, puis le raffiner au fur et à mesure. Intéressons-nous à la divergence du champ de vitesse, une fois celui-ci interpolé. La figure 7.9 regroupe plusieurs illustrations de la divergence du champ de vitesse sur différents niveaux de raffinement du maillage. Comme dans le cas 2D, sur le maillage le plus fin est calculé le champ de vitesse \mathbf{u}_h . Sur le maillage intermédiaire est calculé $\pi_h^{VEF}(\mathbf{u}_h)$ et enfin sur le maillage le plus grossier, c'est $\pi_h^{VEF}(\pi_h^{VEF}(\mathbf{u}_h))$ qui est calculé.

Le solveur utilisé pour cette simulation est un solveur de type Uzawa dont le seuil a été fixé à $1e - 10$.

Maintenant, étudions le comportement de l'erreur, calculée en norme L^2 , en fonction de la taille moyenne des mailles. Pour cela lançons la résolution du problème 24 en imposant le raffinement de l'ensemble du domaine Ω de manière homogène. La figure 7.10 représente le comportement de l'erreur en fonction de la taille des mailles de Ω , en échelle logarithmique.

La pente de la courbe de l'erreur obtenue est d'environ 1.85 alors que, comme dans le cas 2D, nous nous attendions à avoir une pente de 2. Nous avons donc approximativement 7.5% de différence par rapport à la pente de la courbe de x^2 .

Ce résultat n'étant pas satisfaisant, nous avons relancé ce cas test avec le code reçu au début du DRT (avant qu'il n'y ait la moindre modification) et nous obtenons le même résultat. Deux pistes restent encore à explorer :

- abaisser le seuil du solver Uzawa ;
- raffiner davantage pour étudier le comportement de l'erreur avec des mailles encore plus fines.

7.5 Opérateur d'extrapolation mis en place par Éli Laucoin

Nous venons de voir comment a été construit le nouvel opérateur d'interpolation permettant de définir l'inconnue sur l'élément père à partir des données disponibles sur les éléments fils.

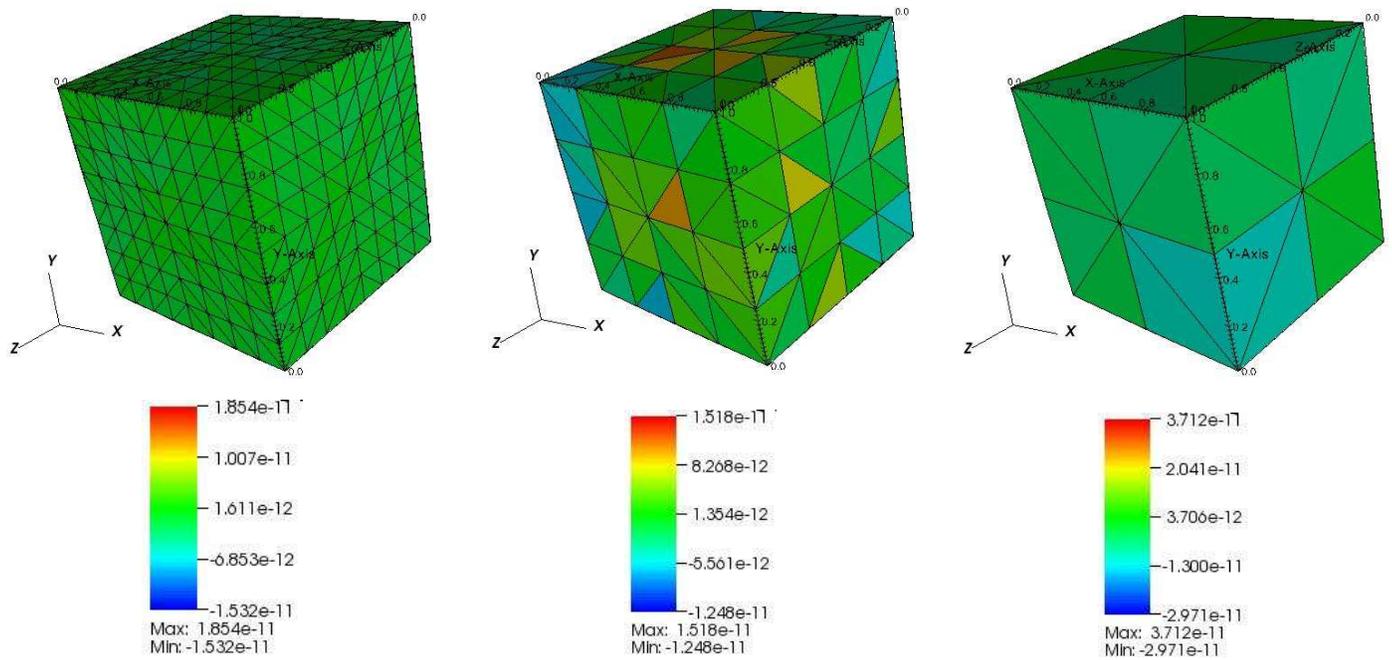


FIG. 7.9: Illustration de la divergence, calculée aux éléments, des interpolés successifs du champ de vitesse.

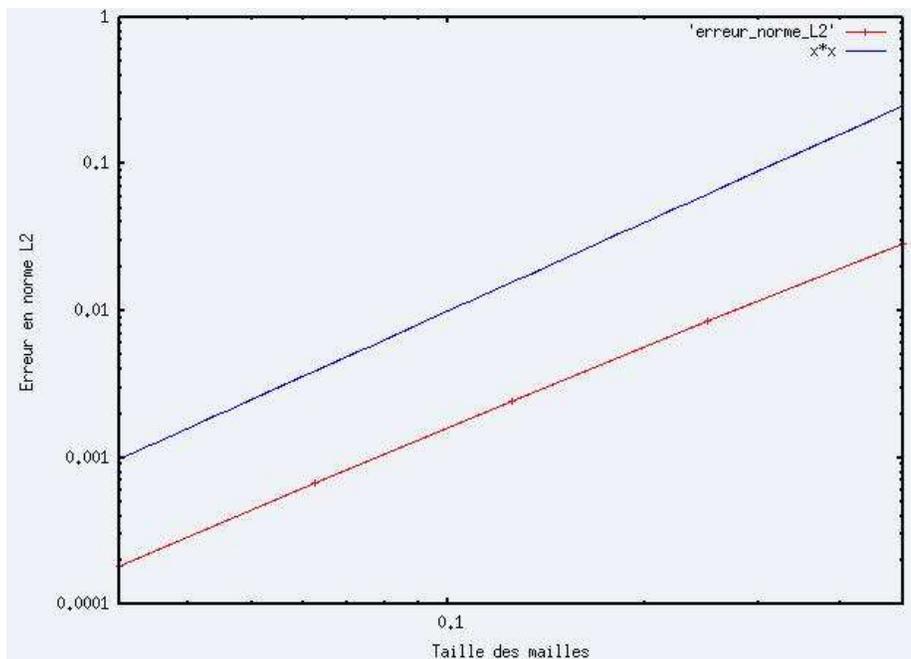


FIG. 7.10: Comportement de l'erreur en norme L^2 .

Rappelons que les opérateurs mis en place dans [22] manipulent les valeurs des champs inconnues (scalaires ou vectoriels) aux sommets des éléments, et non pas aux barycentres des faces

(resp. arêtes). Dans cette structure de données, chaque sommet se trouve dupliqué autant de fois que le nombre d'éléments auxquels il appartient.

Étudions la méthode proposée dans [22] pour définir un champ vectoriel \mathbf{u}_h sur les éléments fils

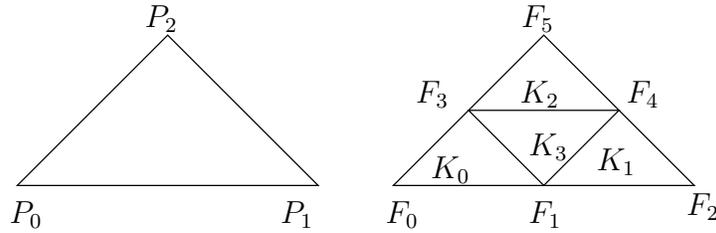


FIG. 7.11: Élément père (gauche) et son découpage en quatre éléments fils (droite)

$(F_{fi})_i$ à partir des données disponibles sur l'élément père K_p . La figure 7.11 illustre, en 2D, un élément père et ses quatre éléments fils issus du raffinement de l'élément père.

Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini aux sommets de l'élément père. Afin d'extrapoler \mathbf{u}_h sur les sommets des éléments fils, la méthode proposée dans [22] consiste à appliquer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(F_0) &= \mathbf{u}_h(P_0) & ; & & \mathbf{u}_h(F_1) &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_h(P_0) + \mathbf{u}_h(P_1)) \\ \mathbf{u}_h(F_2) &= \mathbf{u}_h(P_2) & ; & & \mathbf{u}_h(F_3) &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_h(P_0) + \mathbf{u}_h(P_2)) \\ \mathbf{u}_h(F_5) &= \mathbf{u}_h(P_2) & ; & & \mathbf{u}_h(F_4) &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_h(P_1) + \mathbf{u}_h(P_2)) \end{aligned} \quad (7.38)$$

En 3D, le principe reste exactement le même.

En appliquant les relations 7.38, nous conservons la linéarité du champ vectoriel, et le champ vectoriel ainsi défini sur les éléments fils sera identique au champ vectoriel défini sur l'élément père. L'opérateur d'extrapolation mis en place dans [22] conserve donc la nullité de la divergence d'un champ vectoriel. Cependant, il ne faut pas oublier que nous manipulons, via un changement **local** de discrétisation, les valeurs de l'inconnue aux sommets. Rien n'assure la continuité de l'inconnue aux barycentres des faces (resp. arêtes). Pour assurer la continuité de l'inconnue aux barycentres des faces (resp. arête), la méthode proposée dans [22] consiste à calculer la valeur aux barycentres des faces (resp. arête) comme étant la moyenne des valeurs de l'inconnue aux sommets encadrant la face (resp. arête), et ce, pour chaque élément séparé par la face (resp. arête).

Illustrons nos propos par un exemple. La figure 7.12 montre deux éléments triangulaires n'étant pas issus du même élément père.

Supposons qu'après l'étape d'extrapolation, nous ayons un champ vectoriel \mathbf{u}_h défini aux sommets (en l'occurrence S_0 et S_1). Dans le cas illustré par la figure 7.12, \mathbf{u}_h possède deux valeurs sur chacun des sommets S_0 et S_1 , une valeur associée à l'élément K_{21} et une autre associée à l'élément K_0 . Notons $\mathbf{u}_h(S_i)|_{K_i}$ la valeur de \mathbf{u}_h au sommet S_i associé à l'élément K_i . Aussi, pour calculer \mathbf{u}_h en M , la méthode proposée dans [22] est la suivante :

$$\mathbf{u}_h(M) = \frac{1}{4} (\mathbf{u}_h(S_0)|_{K_{21}} + \mathbf{u}_h(S_1)|_{K_{21}} + \mathbf{u}_h(S_0)|_{K_0} + \mathbf{u}_h(S_1)|_{K_0}) \quad (7.39)$$

Ainsi la continuité de \mathbf{u}_h est assurée en M , en revanche rien n'assure la conservation de la nullité de la divergence.

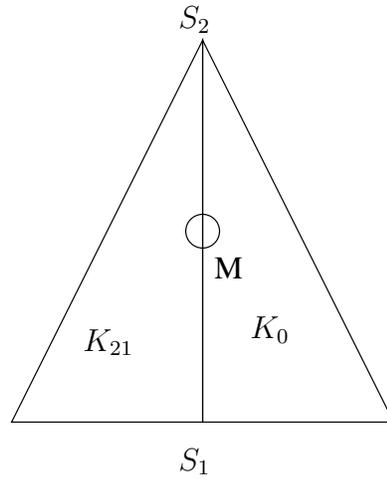


FIG. 7.12: Deux éléments fils n'étant pas issus du même élément père.

On se propose donc de définir un nouvel opérateur d'extrapolation qui traitera le champ inconnu aux barycentres des faces (resp. arêtes).

7.6 Construction du nouvel opérateur d'extrapolation

Nous allons étudier comment construire un opérateur d'extrapolation qui, une fois appliqué à un champ vectoriel, conservera la nullité de la divergence de ce dernier. Dans ce qui suit, l'inconnue sera définie aux barycentres des faces (resp. arête).

Soit \mathbf{u} un champ de vitesse à divergence nulle, défini sur l'élément père K_p .

Dans ce qui suit les faces de l'élément père seront notées $(F_i)_i$ tandis que les faces des éléments fils $(K_{fk})_k$ seront notées $(f_m)_m$.

Rappelons également que par définition du raffinement du maillage, dans l'ensemble des faces $(f_m)_m$, se trouvent les faces issues du raffinement d'une face F_i . Nous noterons ces faces : $(f_{ij})_j$. Autrement dit, les faces $(f_{ij})_j$ forment un recouvrement de la face F_i , et plus précisément nous avons les propriétés suivantes :

- à chaque face F_i de l'élément père correspond un nombre d ($d = 2$ en 2D et $d = 4$ en 3D) de faces des éléments fils, $(f_{ij})_j$, qui la recouvrent ;
- à chaque face f_{ij} d'un élément fils K_{fk} tel que $\partial K_{fk} \cap \partial K_p \neq \emptyset$, correspond une unique face F_i de l'élément père telle que l'on ait $f_{ij} \subset F_i$;
- à chaque face f_{ij} d'un élément fils K_{fk} tel que $\partial K_{fk} \cap \partial K_p = \emptyset$, ne correspond aucune face de l'élément père .

Rémarquons également que, si $f_m \in \partial K_p$, la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{f_m}{F_i} = \frac{f_{ij}}{F_i} = \frac{1}{d} \quad (7.40)$$

Dans la suite, $\pi_h(\mathbf{u}_h)$ (encore noté $\pi_h^{PF}(\mathbf{u}_h)$) représentera le champ vectoriel \mathbf{u}_h extrapolé vers les éléments fils $(K_{fk})_k$ à partir de l'élément père K_p .

Pour définir l'opérateur $\pi_h(\mathbf{u}_h)$ nous allons commencer par considérer le cas où les mailles sont

des simplexes, puis nous passerons au cas où les mailles sont des parallélogrammes ou des parallélépipèdes.

7.6.1 Définition de π_h sur les triangles

Étudions la propriété suivante :

Propriété 16 Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini sur un élément père K_p . Dans le cas où $f_m \in \partial K_p$, F_i est l'unique face de l'élément K_p telle que $f_m \subset F_i$. Soit F_p^{opp} l'arête appartenant à ∂K_p , parallèle à f_m . L'opérateur d'extrapolation π_h défini par les relations :

$$\begin{aligned} \forall f_m \in \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) &= \frac{|f_m|}{|F_i|} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \\ \forall f_m \notin \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) &= \frac{|f_m|}{|F_p^{opp}|} \int_{F_p^{opp}} \mathbf{u}_h \end{aligned}$$

conserve la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h sur les éléments fils.

Preuve de la propriété 16 :

Commençons par remarquer que nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{|f_m|}{|F_i|} &= \frac{1}{d} \quad \text{si } f_m \in \partial K_p \\ \frac{|f_m|}{|F_p^{opp}|} &= \frac{1}{d} \quad \text{si } f_m \notin \partial K_p \end{aligned} \tag{7.41}$$

Illustrons à l'aide de la figure 7.13 ce qu'est l'arête F_p^{opp} par rapport à l'arête f_m .

Maintenant, vérifions que $\pi_h(\mathbf{u}_h)$ est bien à divergence nulle sur les éléments fils $(K_{fk})_k$ issus du

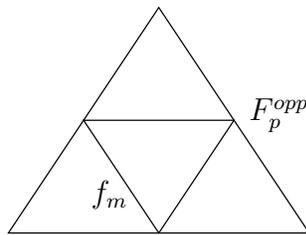


FIG. 7.13: Illustration de l'arête F_p^{opp} .

raffinement de l'élément père K_p . Deux cas de figures se présentent à nous : soit l'élément fils possède au moins une arête sur ∂K_p , soit il ne possède aucune arête sur ∂K_p .

Supposons que K_{fk} ne possède aucune arête sur ∂K_p . En notant \mathbf{n} le vecteur normal unitaire extérieur à K_{fk} , il vient alors :

$$\int_{K_{fk}} \nabla \cdot \pi_h(\mathbf{u}_h) = \int_{\partial K_{fk}} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{d} \int_{\partial K_p} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{d} \int_{K_p} \nabla \cdot \mathbf{u}_h$$

Supposons maintenant que K_{fk} possède au moins une arête sur ∂K_p , il vient :

$$\begin{aligned}
\int_{K_{fk}} \nabla \cdot \pi_h(\mathbf{u}_h) &= \int_{\partial K_{fk}} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \\
&= \sum_{f_m \in \partial K_P} \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \sum_{f_m \notin \partial K_P} \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \\
&= \frac{1}{d} \sum_{f_m \in \partial K_P} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{d} \sum_{f_m \notin \partial K_P} \int_{F_p^{opp}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\
&= \frac{1}{d} \int_{\partial K_P} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\
&= \frac{1}{d} \int_{K_P} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le champ vectoriel défini sur les éléments fils à partir de l'opérateur π_h est bien à divergence nulle. \diamond

Remarquons que la définition donnée par la propriété 16 de l'interpolé assure que le champ de vitesse obtenu est bien continue au milieu des arêtes des éléments fils : ceci est important car on pourrait bien avoir deux éléments pères voisins qui soient raffinés de façon identiques et donc qui doivent respecter cette contrainte.

Remarque 7.6.1 La formule proposée ici permet de retrouver *localement* le champ inconnu vectoriel initial quand on applique successivement un raffinement défini à l'aide de l'opérateur d'extrapolation ci-dessus puis un déraffinement défini à l'aide de l'interpolateur d'interpolation défini dans ce document. En effet, notons π_h^{PF} l'opérateur d'extrapolation que nous venons de définir et π_h^{FP} l'opérateur d'interpolation défini en 7.18, nous avons :

$$\forall f_m \in \partial K_P, \int_{f_m} \pi_h^{PF}(\mathbf{u}_h) = \frac{|f_m|}{|F_i|} \int_{F_i} \mathbf{u}_h = \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h$$

et

$$\forall F_i \in \partial K_P, \int_{F_i} \pi_h^{FP}(\mathbf{u}_h) = \sum_j \int_{f_{ij}} \mathbf{u}_h$$

L'application successive de ces deux opérations redonnent bien *localement* le champ vectoriel initial.

Remarque 7.6.2 L'interpolateur proposé ici ne préserve toutefois pas la linéarité d'un champ vectoriel passé en argument. Il préserve cependant les constantes.

7.6.2 Définition de π_h sur les tétraèdres

Intéressons-nous maintenant à la définition de l'opérateur d'extrapolation lorsque nous utilisons des tétraèdres.

Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel donné à divergence nulle sur l'élément père K_p . Commençons par introduire quelques notations. Par soucis de cohérence, nous reprendrons les notations introduites

dans [22] : x_i désigne un sommet de l'élément père K_P , x_{ij} le milieu de l'arête de K_P dont les extrémités sont x_i et x_j . Les éléments fils K_k pour $k = 1 \dots 8$ sont définis dans [22] par la donnée de la liste de leurs sommets selon la convention suivante :

$$\begin{aligned} K_1 &= [x_0, x_{01}, x_{02}, x_{03}] & K_5 &= [x_{02}, x_{23}, x_{13}, x_{12}] \\ K_2 &= [x_{01}, x_1, x_{12}, x_{13}] & K_6 &= [x_{23}, x_{13}, x_{03}, x_{02}] \\ K_3 &= [x_{02}, x_{12}, x_2, x_{23}] & K_7 &= [x_{13}, x_{03}, x_{02}, x_{01}] \\ K_4 &= [x_{03}, x_{13}, x_{23}, x_3] & K_8 &= [x_{12}, x_{02}, x_{01}, x_{13}] \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, les faces des éléments fils K_k seront également données par la liste de leurs sommets.

Nous souhaitons définir l'opérateur d'extrapolation de manière identique à celle utilisée dans le cas des triangles. Pour cela, introduisons les grandeurs numériques $(FL_i)_{i=1..4}$ définies de la manière suivante :

$$FL_i = \frac{1}{d} \int_{f_i^p} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}$$

où f_i^p désigne la face de l'élément père K_P opposé au sommet x_i et n le vecteur normal unitaire extérieur à K_P .

Nous avons bien sûr la relation :

$$\sum_i FL_i = 0$$

Afin d'associer à une face des éléments fils K_{fk} l'une des grandeurs FL_i nous utiliserons la notation suivante :

$$\begin{aligned} FL_0 &= [x_1, x_{12}, x_{13}] = [x_2, x_{12}, x_{23}] = [x_3, x_{13}, x_{23}] = [x_{01}, x_{02}, x_{03}] = [x_{12}, x_{13}, x_{23}] \\ FL_1 &= [x_0, x_{02}, x_{03}] = [x_2, x_{02}, x_{23}] = [x_3, x_{03}, x_{23}] = [x_{01}, x_{12}, x_{13}] = [x_{02}, x_{03}, x_{23}] \\ FL_2 &= [x_0, x_{01}, x_{03}] = [x_1, x_{01}, x_{13}] = [x_3, x_{03}, x_{23}] = [x_{02}, x_{12}, x_{23}] = [x_{01}, x_{03}, x_{13}] \\ FL_3 &= [x_0, x_{01}, x_{03}] = [x_1, x_{01}, x_{12}] = [x_2, x_{02}, x_{12}] = [x_{03}, x_{13}, x_{23}] = [x_{01}, x_{02}, x_{12}] \end{aligned}$$

Nous remarquons que, contrairement au cas des triangles, nous n'avons pas pu associer une des quantités FL_i à chaque face des éléments fils. C'est le cas de certaines faces des éléments fils intérieurs à l'élément père (i.e. les éléments K_5, K_6, K_7 et K_8).

Introduisons alors l'ensemble suivant :

- Y : Ensemble des faces f_m n'appartenant pas au bord de l'élément père ∂K_P et qui ne soit parallèle à aucune face F_i se trouvant sur ∂K_P .

Pour déterminer quel flux l'opérateur d'extrapolation devra imposer sur les faces appartenant à l'ensemble Y, nous allons tenter de satisfaire la contrainte de divergence nulle sur les éléments fils suivants (ici, repérés par leurs faces) :

$$\begin{aligned} K_5 &: [x_{02}, x_{13}, x_{23}], [x_{02}, x_{12}, x_{23}], [x_{02}, x_{12}, x_{13}], [x_{12}, x_{13}, x_{23}] \\ K_6 &: [x_{03}, x_{13}, x_{23}], [x_{02}, x_{13}, x_{23}], [x_{02}, x_{03}, x_{23}], [x_{02}, x_{03}, x_{13}] \\ K_7 &: [x_{02}, x_{03}, x_{13}], [x_{01}, x_{03}, x_{13}], [x_{01}, x_{02}, x_{13}], [x_{01}, x_{02}, x_{03}] \\ K_8 &: [x_{01}, x_{02}, x_{12}], [x_{02}, x_{12}, x_{13}], [x_{01}, x_{12}, x_{13}], [x_{01}, x_{02}, x_{13}] \end{aligned}$$

On voit que parmi cette liste de faces que 4 n'appartiennent pas à l'ensemble Y. Nous allons donc chercher 4 valeurs telles que les 4 conditions de divergence nulle sur les éléments fils K_{fk}

pour $k = 5 \dots 8$ soient vérifiées. Soient α , β , γ et δ les flux que l'opérateur π_h imposera sur les faces $[x_{02}, x_{13}, x_{23}]$, $[x_{02}, x_{12}, x_{13}]$, $[x_{01}, x_{02}, x_{13}]$ et $[x_{02}, x_{03}, x_{13}]$. Nous aboutissons alors au système suivant :

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= FL_1 + FL_3 \\ -\alpha + \delta &= FL_0 + FL_2 = -(FL_1 + FL_3) \\ -\delta + \gamma &= FL_1 + FL_3 \\ -\beta - \gamma &= FL_0 + FL_2 = -(FL_1 + FL_3)\end{aligned}$$

Remarque 7.6.3 La présence de signe "-" tient au fait que pour une face interne donnée et pour les deux éléments fils internes possédant cette face, le sens du vecteur normal unitaire sortant associé à cette face change d'un élément fils à l'autre.

La matrice associée au système linéaire précédent est de rang 3 (la dernière de la matrice s'écrit comme l'opposé de la somme des trois premières) et le membre de droite est dans l'image de la matrice. Il existe une infinité de solutions au système 7.42, dont une solution particulière est donnée par :

$$\begin{aligned}\alpha &= FL_1 + FL_3 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= FL_1 + FL_3 \\ \delta &= 0\end{aligned}$$

La définition de l'opérateur d'extrapolation en 3D est donnée par la propriété suivante :

Propriété 17 Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini sur un élément père K_p . Soit F_i^{opp} la face appartenant à ∂K_p et parallèle à f_m . Soit π_h l'opérateur d'extrapolation défini par : π_h défini par les relations :

$$\begin{aligned}\forall f_m \in \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) &= \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \\ \forall f_m \text{ telle que } f_m \notin \partial K_p \text{ et } f_m \notin Y, \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) &= \frac{1}{d} \int_{F_i^{opp}} \mathbf{u}_h \\ \forall f_m \in Y, \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} &= \Theta\end{aligned}$$

Où Θ est un scalaire valant α , β , γ ou δ suivant la face considérée. Alors π_h conserve la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h sur les éléments fils.

Preuve de la propriété 17 :

Dans le cas où l'élément fils possède une face appartenant à l'ensemble Y , rien n'est à démontrer puisque nous avons calculer les flux à imposer de telle manière à conserver la nullité de la divergence du champ vectoriel \mathbf{u}_h .

Intéressons-nous plutôt à un des éléments fils K_{fk} avec k compris entre 0 et 4, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{K_{fk}} \nabla \cdot \pi_h(\mathbf{u}_h) &= \int_{\partial K_{fk}} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \\
&= \sum_{f_m \in \partial K_P} \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \sum_{\substack{f_m \notin \partial K_P \\ f_m \notin Y}} \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \\
&= \sum_{f_m \in \partial K_P} FL_i + \sum_{\substack{f_m \notin \partial K_P \\ f_m \notin Y}} FL_{opp} \\
&= \frac{1}{d} \int_{\partial K_P} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\
&= \frac{1}{d} \int_{K_P} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notons que dans le cas où $f_m \in \partial K_p$, l'indice i de l'expression FL_i est le même que l'indice i qui désigne la face F_i (vérifiant $f_m \subset F_i$).

Le champ vectoriel défini sur les éléments fils à partir de l'opérateur π_h est bien à divergence nulle. \diamond

7.6.3 Définition de π_h sur les parallélogrammes

Dans cette partie, on se propose de généraliser la définition de l'opérateur d'extrapolation π_h , défini dans le cas des simplexes, afin de pouvoir nous en servir dans le cas des parallélogrammes. Nous allons donc définir un opérateur d'extrapolation adaptée pour la discrétisation VDF et un autre adapté pour la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 .

Reprenons les notations de la partie précédente et introduisons x_M le sommet se trouvant au milieu de l'élément, comme illustré par la figure 7.14.

Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel à divergence nulle sur l'élément père K_p . Introduisons les grandeurs numériques $(FL_i)_{i=1..4}$ définies de la manière suivante :

$$FL_i = \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}$$

Afin d'associer à une arête (repérée par ses sommets) des éléments fils K_{fk} l'une des grandeurs FL_i nous utiliserons la notation suivante :

$$\begin{aligned}
FL_0 &= [x_0, x_{02}] = [x_{02}, x_2] \\
FL_1 &= [x_0, x_{01}] = [x_{01}, x_1] \\
FL_2 &= [x_2, x_{23}] = [x_{23}, x_3] \\
FL_3 &= [x_1, x_{13}] = [x_{13}, x_3]
\end{aligned}$$

Nous constatons que, comme dans le cas des triangles, toute arête qui ne se trouve pas sur ∂K_p est parallèle à au moins une arête de l'élément père. Seulement, contrairement au cas des triangles,

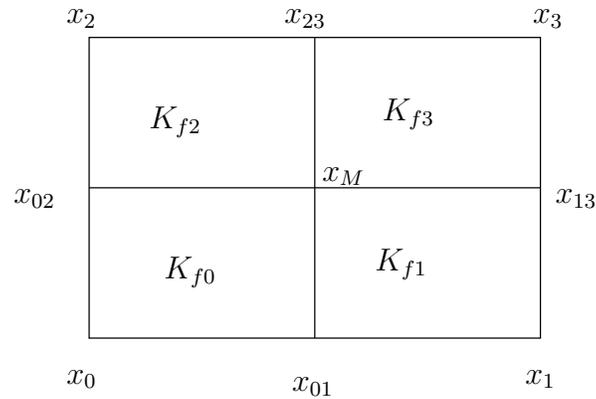


FIG. 7.14: Découpage d'un élément père en quatre éléments fils.

toute arête qui ne se trouve pas sur ∂K_p est parallèle non pas à une seule arête de l'élément père, mais deux. Par conséquent, nous ne savons pas, a priori, quel flux imposer le long de ces arêtes. Comme précédemment, pour déterminer quel flux l'opérateur d'extrapolation devra imposer sur les arêtes $[x_{01} \ x_M]$, $[x_{02} \ x_M]$, $[x_{23} \ x_M]$ et $[x_{13} \ x_M]$, nous allons tenter de satisfaire la contrainte de divergence nulle sur l'ensemble des éléments fils.

Soient α , β , γ et δ les flux que l'opérateur π_h imposera $[x_{01} \ x_M]$, $[x_{02} \ x_M]$, $[x_{23} \ x_M]$ et $[x_{13} \ x_M]$. Nous aboutissons alors au système suivant :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= FL_0 + FL_1 \\ -\beta + \gamma &= FL_0 + FL_2 \\ -\gamma + \delta &= FL_2 + FL_3 \\ -\alpha + \delta &= FL_3 + FL_1 \end{aligned}$$

Le système ci-dessus est bien posé car bien que la matrice soit de rang 3 (la dernière de la matrice s'écrit comme l'opposé de la somme des trois premières), le second membre appartient bien à l'image de la matrice. Par conséquent il existe une infinité de solutions (due à la présence d'un noyau pour la matrice), dont la particulière :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= FL_0 + FL_1 \\ \gamma &= FL_0 - FL_3 \\ \delta &= FL_2 - FL_3 \end{aligned}$$

La définition de l'opérateur d'extrapolation dans le cas de l'utilisation de la discrétisation VDF est donné par la propriété suivante :

Propriété 18 Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini sur un élément père K_p . Soit \mathbf{n} le vecteur normal unitaire extérieur à K_p . Soit π_h^{VDF} l'opérateur d'extrapolation défini par :

$$\begin{aligned} \forall f_m \in \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h^{VDF}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\ \forall f_m \notin \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} &= \Theta \end{aligned}$$

Où Θ est un scalaire valant α, β, γ ou δ suivant la face considérée. Alors π_h^{VDF} conserve la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h sur les éléments fils.

La définition de l'opérateur d'extrapolation dans le cas de l'utilisation de la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 est donné par la propriété suivante :

Propriété 19 Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini sur un élément père K_p . Soit \mathbf{n} le vecteur normal unitaire extérieur à K_p . Soit π_h^{Q1NC} l'opérateur d'extrapolation défini par :

$$\begin{aligned} \forall f_m \in \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h^{Q1NC}(\mathbf{u}_h) &= \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \\ \forall f_m \notin \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h(\mathbf{u}_h)^{Q1NC} \cdot \mathbf{n} &= \Theta \end{aligned}$$

Où Θ est un scalaire valant α, β, γ ou δ suivant la face considérée. Alors π_h^{Q1NC} conserve la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h sur les éléments fils.

Les preuves des propriétés 18 et 19 sont semblables aux preuves des propriétés 16 et 17.

7.6.4 Définition de π_h sur les parallélépipèdes

Dans cette partie, on se propose de généraliser la définition des opérateurs d'extrapolation π_h^{VDF} et π_h^{Q1NC} , définis dans le cas des parallélogrammes. En reprenant les notations introduites précédemment, il nous est possible de définir les faces du parallélépipède père K_p en fonction des sommets, comme suit :

$$\begin{aligned} F_0 &= [x_0, x_2, x_4, x_6] & F_1 &= [x_0, x_1, x_3, x_2] \\ F_2 &= [x_0, x_1, x_5, x_4] & F_3 &= [x_1, x_3, x_7, x_5] \\ F_4 &= [x_2, x_3, x_7, x_6] & F_5 &= [x_4, x_5, x_7, x_6] \end{aligned}$$

Intéressons-nous au cas aux facesportées par les éléments fils $(K_{fk})_k$. Comme dans le cas des parallélogrammes, toute face f_i n'appartenant pas à ∂K_p est parallèle à deux faces de l'élément père K_p . Par conséquent, nous ne savons pas, a priori, quel flux imposer le long de ces faces. Douze faces sont dans ce cas. Afin de les repérer, introduisons les notations suivantes : x_{Mi} est le barycentre de la face F_i et x_M est le barycentre de l'élément père K_p . Les faces portées par les éléments fils, n'appartenant pas à ∂K_p sont les faces suivantes :

$$[x_{01}, x_{M1}, x_M, x_{M2}] \quad [x_{M1}, x_{23}, x_{M4}, x_M] \quad [x_{M2}, x_M, x_{M5}, x_{45}] \quad [x_M, x_{M4}, x_{67}, x_{M5}] \quad (7.42)$$

$$[x_{04}, x_{M2}, x_M, x_{M0}] \quad [x_{M2}, x_{51}, x_{M3}, x_M] \quad [x_{M0}, x_M, x_{M4}, x_{62}] \quad [x_M, x_{M3}, x_{73}, x_{M4}] \quad (7.43)$$

$$[x_{02}, x_{M1}, x_M, x_{M0}] \quad [x_{M1}, x_{13}, x_{M3}, x_M] \quad [x_{M0}, x_M, x_{M5}, x_{46}] \quad [x_M, x_{M3}, x_{57}, x_{M5}] \quad (7.44)$$

Comme précédemment, pour déterminer quel flux l'opérateur d'extrapolation devra imposer sur ces faces nous allons tenter de satisfaire la contrainte de divergence nulle sur l'ensemble des éléments fils.

Soient $(\alpha_i)_i, (\beta_i)_i$ et $(\gamma_i)_i$ les flux que l'opérateur π_h imposera sur les faces décrites respectivement en 7.42, 7.43 et 7.44.

Introduisons maintenant les grandeurs numériques $(FL_i)_{i=1..6}$ définies de la manière suivante :

$$FL_i = \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}$$

Nous aboutissons alors au système suivant :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 &= FL_3 + FL_4 + FL_5 & ; & & -\alpha_0 - \beta_1 - \gamma_1 &= FL_1 + FL_2 + FL_3 \\
-\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_0 &= FL_0 + FL_1 + FL_4 & ; & & -\alpha_1 - \beta_3 + \gamma_1 &= FL_1 + FL_3 + FL_4 \\
-\alpha_2 + \beta_0 - \gamma_2 &= FL_0 + FL_2 + FL_5 & ; & & \alpha_2 + \beta_1 - \gamma_3 &= FL_2 + FL_3 + FL_5 \\
-\alpha_3 + \beta_2 + \gamma_2 &= FL_0 + FL_4 + FL_5 & ; & & \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 &= FL_3 + FL_4 + FL_5
\end{aligned}$$

La matrice associée à ce système est de rang 6 et le second membre est dans l'image de la matrice. Notons qu'il existe une infinité de solutions.

Les opérateurs d'extrapolation π_h^{VDF} et π_h^{Q1NC} sont définis par les propriétés suivantes :

Propriété 20 Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini sur un élément père K_p . Soit \mathbf{n} le vecteur normal unitaire extérieur à K_p . Soit π_h^{VDF} l'opérateur d'extrapolation défini par :

$$\begin{aligned}
\forall f_m \in \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h^{VDF}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\
\forall f_m \notin \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h^{VDF}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} &= \Theta
\end{aligned}$$

Où Θ est un scalaire valant $(\alpha_i)_i$, $(\beta_i)_i$ ou $(\gamma_i)_i$ suivant la face considérée. Alors π_h^{VDF} conserve la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h sur les éléments fils.

Propriété 21 Soit \mathbf{u}_h un champ vectoriel défini sur un élément père K_p . Soit \mathbf{n} le vecteur normal unitaire extérieur à K_p . Soit π_h^{Q1NC} l'opérateur d'extrapolation défini par :

$$\begin{aligned}
\forall f_m \in \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h^{Q1NC}(\mathbf{u}_h) &= \frac{1}{d} \int_{F_i} \mathbf{u}_h \\
\forall f_m \notin \partial K_p, \int_{f_m} \pi_h^{Q1NC}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} &= \Theta
\end{aligned}$$

Où Θ est un scalaire valant $(\alpha_i)_i$, $(\beta_i)_i$ ou $(\gamma_i)_i$ suivant la face considérée. Alors π_h^{Q1NC} conserve la nullité de la divergence de \mathbf{u}_h sur les éléments fils.

Les preuves des propriétés 20 et 21 sont semblables aux preuves des propriétés 16 et 17.

Conclusion de ce chapitre :

Alors que jusqu'à présent, lors d'une étape de déraffinement, rien ne garantissait la conservation de la nullité de la divergence d'un champ vectoriel, nous venons de mettre en place un opérateur d'interpolation qui assure, justement, la conservation de la nullité de la divergence du champ vectoriel sur lequel il s'applique. Comme nous l'avons remarqué en introduction, le fait de conserver la nullité de la divergence d'un champ vectoriel lorsque le maillage se modifie, permet d'économiser une étape de projection qui peut coûter cher en temps de calcul.

Nous avons également proposé la construction d'un opérateur d'extrapolation permettant de conserver la nullité de la divergence d'un champ vectoriel sur les éléments fils.

Chapitre 8

Étude de la positivité du schéma numérique de convection amont

La propriété de positivité est très importante car de nombreuses équations de la physique (notamment celles sur la température) garantissent la positivité de leurs variables au cours du temps. Il est donc souhaitable que les schémas numériques discrets que l'on propose conservent cette propriété physique. Dans ce chapitre, nous allons donc vérifier si les schémas numériques mortars possèdent cette propriété.

Dans TRIO_U, la matrice de masse est diagonale que ce soit en 2D ou en 3D (car lumpée). En revanche, ce n'est plus le cas lorsque nous utilisons la méthode des éléments joints. On se propose donc d'étudier quel impact cela a sur la positivité du schéma numérique de convection. Pour cela, nous n'allons considérer pour l'exemple qu'une équation de transport de scalaire passif dont la vitesse de transport est connue. Nous supposons que le schéma numérique adopté pour représenter l'opérateur de convection est un schéma amont et nous allons étudier le comportement du schéma numérique mortar pour chacun des deux espaces V_h décrits dans le chapitre 5. Enfin nous ferons l'hypothèse importante que le schéma temporel utilisé est un schéma de type Euler explicite.

8.1 Schéma numérique de convection

Dans la suite, on notera β la vitesse transportante associée à l'opérateur de convection, et N le nombre de problèmes locaux.

Introduisons les formes bilinéaires $m_h(\cdot, \cdot)$ et $l_h(\cdot, \cdot)$:

$$\forall T_h \in V_h, \forall v_h \in V_h, \quad m_h(T_h, v_h) = \sum_{k=1}^N (T_h^k, v_h^k)_{L^2(\Omega_k)}$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad l_h(v_h, T_h^n) = -dt \sum_{k=1}^N (\beta \cdot \nabla T_h^{n,k}, v_h^k)_{L^2(\Omega_k)} + m_h(T_h^n, v_h)$$

Où T_h^n représente la valeur de T_h au temps n .

Remarquons que ce que nous venons d'écrire le schéma de convection centré, pour obtenir le schéma de convection amont il faut ajouter un terme de diffusion. Compte tenu des hypothèses

faites ci-dessus, le schéma numérique mortar que l'on étudie a la forme suivante :

$$\forall T_h \in V_h, \forall v_h \in V_h, a_h(T_h^{n+1}, v_h) = l_h(v_h, T_h^n) \quad (8.1)$$

Où la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ se réduit à :

$$\forall T_h \in V_h, \forall v_h \in V_h, a_h(T_h, v_h) = m_h(T_h, v_h)$$

En notant M et $-K$ les représentations matricielles de $a_h(\cdot, \cdot)$ et de l'opérateur de convection dans la base **canonique** de V_h , le système 8.1 peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$U_h^{n+1} = (\text{Id} + dt M^{-1}K) U_h^n \quad (8.2)$$

Où U_h^n est la représentation de u_h^n dans la base **canonique** de V_h .

Or ce schéma respecte la contrainte de positivité si et seulement si les coefficients extra-diagonaux de la matrice $M^{-1}K$ sont tous positifs.

On supposera dans la suite que le produit KU^n est positif. Nous allons donc porter notre attention sur la matrice M .

8.2 Matrice de masse M

Dans cette partie nous allons exhiber les matrices de masse associées à chacun des espaces V_h et exhiber leurs propriétés respectives.

Nous rappelons que les différentes discrétisations de V_h sont présentés dans le chapitre 5.

Par soucis de simplification, on se place dans le cas **2D** et nous supposons que nous utilisons une discrétisation de type *VEF* (hypothèses importantes).

8.2.1 Première caractérisation de V_h

Nous aurons besoin des notations suivantes. On notera Φ_j^I une fonction de base de V_h associée à une face interne f_j de Ω et on notera Φ_k^Γ une fonction de base associée à une face fine f_k d'un bord mortar.

Enfin, on notera M_{II} , $M_{I\Gamma}$, $M_{\Gamma I}$ et $M_{\Gamma\Gamma}$, les sous-matrices de M associées aux interactions entre respectivement les couples $(\Phi_j^I, \Phi_k^I)_{jk}$, $(\Phi_j^I, \Phi_k^\Gamma)_{jk}$, $(\Phi_j^\Gamma, \Phi_k^I)_{jk}$ et $(\Phi_j^\Gamma, \Phi_k^\Gamma)_{jk}$.

Précisons la forme de la matrice M_{II} . Dans ce cas, nous constatons que :

$$a_h(\Phi_j^I, \Phi_k^I) = 0 \quad \forall j, \forall k \neq j$$

En effet deux cas se présentent :

- soit les supports des deux fonctions sont disjoints (dans un même domaine ou dans deux domaines différents) et dans ce cas le résultat est trivialement nul,
- soit ce n'est pas le cas, et les deux fonctions de forme coïncident avec les fonctions de base de l'élément fini de Crouzeix-Raviart et sont donc naturellement orthogonales pour le produit scalaire L^2 .

Pour les mêmes raisons, nous avons

$$a_h(\Phi_j^I, \Phi_k^\Gamma) = 0 ; \quad \forall j \text{ et } \forall k$$

En regroupant ces deux séries d'information, on en déduit que M_{II} est une matrice **diagonale** dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, tandis que $M_{I\Gamma}$ et $M_{\Gamma I} = M_{I\Gamma}^t$ sont nulles. Il ne nous reste plus qu'à étudier la sous-matrice $M_{\Gamma\Gamma}$. Pour mieux appréhender les résultats, nous allons étudier l'interaction des fonctions de forme de V_h associées aux faces fines mortar dans le cas du maillage de la figure (8.1). On voit alors facilement que compte tenu du maillage :

$$\begin{aligned} a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_4^\Gamma) &= a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_5^\Gamma) = 0 \\ a_h(\Phi_2^\Gamma, \Phi_4^\Gamma) &= a_h(\Phi_2^\Gamma, \Phi_5^\Gamma) = 0 \end{aligned}$$

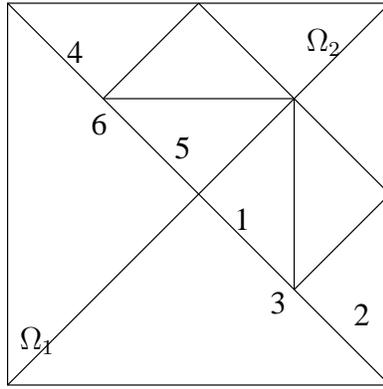


FIG. 8.1: Illustration de deux domaines portant deux maillages raffinés à des niveaux différents

Par contre, nous avons, par définition des fonctions de base de V_h , et en désignant par Ψ_3 la fonction de base du \mathbb{P}_{NC}^1 , **locale** au domaine Ω_1 et associée à la face 3 :

$$a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_2^\Gamma) = (\Phi_1^\Gamma, \Phi_2^\Gamma)_{L^2(\Omega_1)} = \left(\frac{1}{2}\Psi_3, \frac{1}{2}\Psi_3\right)_{L^2(\Omega_1)}$$

Remarquons que sur le domaine Ω_2 les supports des fonctions Φ_1^Γ et Φ_2^Γ sont disjoints. On se propose de calculer $(\frac{1}{2}\Psi_3, \frac{1}{2}\Psi_3)_{L^2(\Omega_1)}$ en utilisant la formule d'intégration suivante :

$$\int_K \Phi = \frac{|K|}{3} \sum_{i=1}^3 \Phi(\mathbf{M}_i) \quad (8.3)$$

Où les points $(\mathbf{M}_i)_i$ sont situés aux barycentres des arêtes de la maille K . La formule 8.3 permet d'intégrer de manière exacte des polynômes de degré 2.

La fonction Ψ_3 étant une fonction de base de l'élément fini de Crouzeix-Raviart, nous avons

$$\int_\Omega \Phi_1^\Gamma \Phi_2^\Gamma = \frac{1}{4} \int_{\Omega_1} (\Psi_3)^2 = \frac{|K|}{12} \quad (8.4)$$

A l'aide des symétries du maillage, nous avons de plus :

$$a_h(\Phi_4^\Gamma, \Phi_5^\Gamma) = a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_2^\Gamma)$$

Ainsi que :

$$a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_1^\Gamma) = a_h(\Phi_2^\Gamma, \Phi_2^\Gamma) = a_h(\Phi_4^\Gamma, \Phi_4^\Gamma) = a_h(\Phi_5^\Gamma, \Phi_5^\Gamma)$$

On se propose maintenant de calculer $a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_1^\Gamma)$ à l'aide de la formule 8.3. La fonction Φ_1^Γ étant une fonction de base de l'élément fini de Crouzeix-Raviart nous avons :

$$\int_{\Omega} (\Phi_1^\Gamma)^2 = \int_{\Omega_1} (\Phi_1^\Gamma)^2 + \int_{\Omega_2} (\Phi_1^\Gamma)^2 = \frac{|K|}{12} + \frac{|K|}{3} = \frac{5|K|}{12} \quad (8.5)$$

Posons $a = a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_1^\Gamma)$ et $b = a_h(\Phi_1^\Gamma, \Phi_2^\Gamma)$. Par conséquent, $M_{\Gamma\Gamma}$ est une matrice diagonale **par bloc** et telle que chacun des sous-blocs $M_{\Gamma\Gamma}^i$ adopte la configuration suivante :

$$M_{\Gamma\Gamma}^i := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

D'après les relations 8.5 et 8.4 il apparaît que nous avons $a > b > 0$. L'inverse des matrices $M_{\Gamma\Gamma}^i$ est facilement calculable :

$$(M_{\Gamma\Gamma}^i)^{-1} := \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de voir que les matrices $M_{\Gamma\Gamma}^i$ ne sont pas **monotones** puisque leurs inverses contiennent des coefficients extra-diagonaux strictement négatifs. La positivité du schéma n'est donc pas assurée.

8.2.2 Seconde caractérisation de V_h

Notons Φ_j^I une fonction de base de V_h associée à une face interne f_j de Ω et on notera Φ_k^Γ une fonction de forme associée à une face grossière f_k d'un bord mortar.

Précisons la forme de la matrice M_{II} . Dans ce cas, il est facile de voir que :

$$a_h(\Phi_j^I, \Phi_k^I) = 0 \quad \forall j, \forall k \neq j$$

ainsi que

$$a_h(\Phi_j^I, \Phi_k^\Gamma) = 0 \quad ; \quad \forall j \text{ et } \forall k$$

pour les mêmes raisons que celles évoquées au paragraphe précédent sur la première caractérisation de V_h .

En regroupant ces deux séries d'information, on en déduit que M_{II} est une matrice **diagonale** dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, tandis que par symétrie, $M_{I\Gamma}$ et $M_{\Gamma I}$ sont nulles.

Il ne nous reste plus qu'à étudier la sous-matrice $M_{\Gamma\Gamma}$. Par définition du raffinement de maillage et des fonctions de forme, il est facile de voir que pour tout entier j et k tels que $j \neq k$, on a :

$$a_h(\Phi_j^\Gamma, \Phi_k^\Gamma) = 0$$

Par conséquent, $M_{\Gamma\Gamma}$ est une matrice **diagonale** dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. La positivité du schéma est donc assurée.

Conclusion de ce chapitre :

Suivant la caractérisation de l'espace V_h , la positivité du schéma numérique peut ne pas être conservé. Dans le module AMR, et plus particulièrement dans la classe MORTAR_EXCHANGER, il est possible de déterminer un côté de la frontière mortar appelé maître et un autre côté appelé esclave. Ce choix est important car il peut influencer sur la positivité du schéma numérique.

Rappelons que dans le chapitre 5 nous avons montré que nous avons existence et unicité de la solution, quelle que soit la caractérisation de l'espace V_h .

Chapitre 9

Prise en compte des conditions limites sur les bords de type Mortar

Lors de la résolution d'un problème faisant intervenir la méthode des éléments joints, le domaine d'étude Ω est composé de plusieurs sous-domaines sur lesquels sont définis différents maillages.

Sur un sous-domaine donné est défini un problème local que nous résolvons, de manière totalement indépendante des autres problèmes posés sur les autres sous-domaines. Il est donc nécessaire d'imposer des conditions limites au niveau des frontières séparants deux sous-domaines (que l'on notera *frontières de type mortar*). Cependant, dans le cadre de l'utilisation de la méthode des éléments joints, il est important de faire attention aux conditions limites utilisées sur les frontières de type mortar.

Dans ce chapitre, nous allons voir quelles conditions sont à éviter, et quelles sont les solutions dans le cadre de l'utilisation de la méthode *VEF*.

9.1 Équation hydraulique

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cadre de l'utilisation de la méthode étendue de *VEF*.

Jusqu'à présent, dans le module AMR, une pression $p = p_0$ était imposée le long des frontières de type mortar. Soit Γ une frontière de type mortar, lorsqu'un utilisateur souhaite imposer une pression p_0 le long de Γ , TRIO_U prend en compte cette condition limite de deux manières différentes :

- de manière **forte** (condition limite essentielle) ;
- de manière **faible** (condition limite naturelle)

Après avoir brièvement expliqué la différence entre une condition limite essentielle et une condition limite naturelle, nous verrons laquelle est à privilégier dans le cadre de l'utilisation des éléments joints.

Lorsque l'utilisateur impose, de manière forte (condition limite essentielle) la valeur de la pression le long de la frontière Γ alors cette condition se trouve intégrée à la construction de l'espace de discrétisation. Par conséquent, sur les noeud du maillage appartenant à Γ , la pression est imposée par la relation $p = p_0$.

On se propose de montrer, via une illustration, en quoi le fait de traiter cette condition limite comme une condition limite essentielle est à banir lorsque nous utilisons la méthode des élé-

ments joints.

Soit Ω le carré unité. Effectuons une décomposition en deux sous-domaines et maillons-les de manière différente, comme indiqué par la figure 9.1. Notons $\partial\Omega$ le bord du domaine Ω et Γ_M la frontière séparant les deux sous-domaines. Remarquons que la frontière Γ_M , de type mortar, a

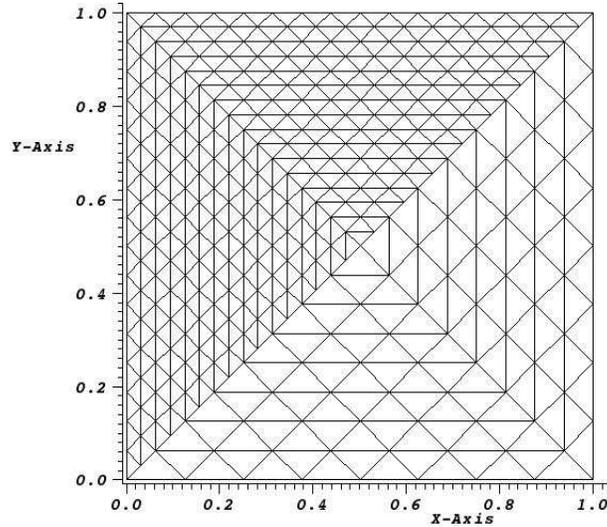


FIG. 9.1: Découpage du domaine Ω . La frontière entre les deux sous-domaines a pour équation $y = x$.

pour l'équation $y = x$.

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = (x, y)^t & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = (x, -y)^t & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{u} = (x, -y)^t & \text{dans } \Omega \text{ à l'instant initial} \end{array} \right. \quad (9.1)$$

les solutions de 9.1 sont données par :

$$\mathbf{u} = (x, -y)^t \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad (9.2)$$

En prenant $p_0 = 0$ cela revient donc à imposer $p = 0$ le long de la frontière Γ_M . L'évaluation de la solution analytique pour la pression, le long de la frontière Γ_M ne vaut pas 0. Par conséquent, la pression n'est pas correcte, et cela a une conséquence sur le champ de vitesse qui, comme l'illustre la figure 9.2, n'a rien à voir avec la solution analytique.

La figure 9.2 est une capture d'écran réalisée après 20 itérations (nous rappelons que nous avons initialisé le champ de vitesse à $(x, -y)^t$, qui se trouve être la solution analytique).

Afin de nous assurer que ce mauvais résultat provient de la prise en compte de la condition limite $p = p_0$, avec $p_0 = 0$, le long de Γ_M de manière forte, nous allons résoudre de nouveau le problème 9.1. Cette fois-ci, la condition $p = p_0$ le long de la frontière Γ_M est prise en compte de

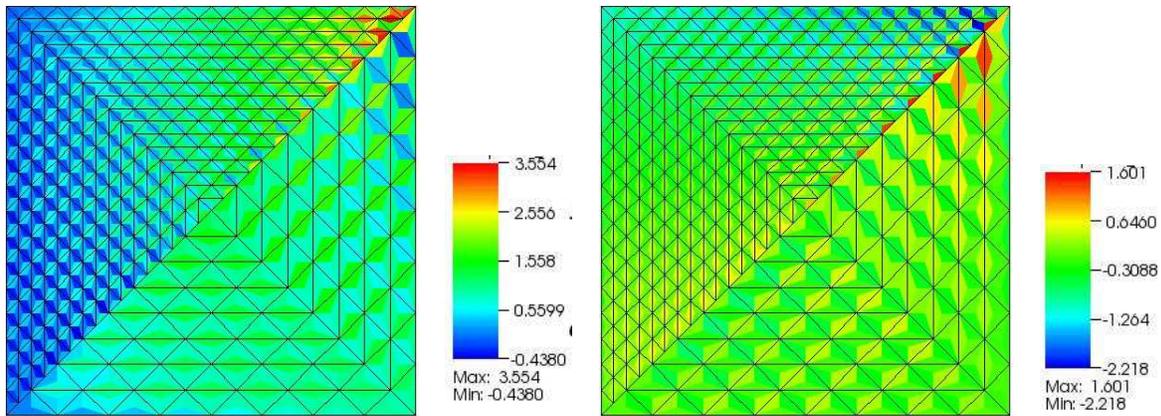


FIG. 9.2: Champ de vitesse obtenu après 20 itérations de résolution de 9.1 lorsque la condition $p = 0$ sur Γ_M est forte. La composante x se trouve à gauche et la composante y se trouve à droite.

manière faible. Cela revient à ajouter à la formulation variationnelle du problème que l'utilisateur souhaite résoudre la relation :

$$\int_{\Omega} p \mathbf{n} = \int_{\Omega} p_0 \mathbf{n}$$

Nous obtenons alors la pression désirée et, comme illustré par la figure 9.3, le champ de vitesse

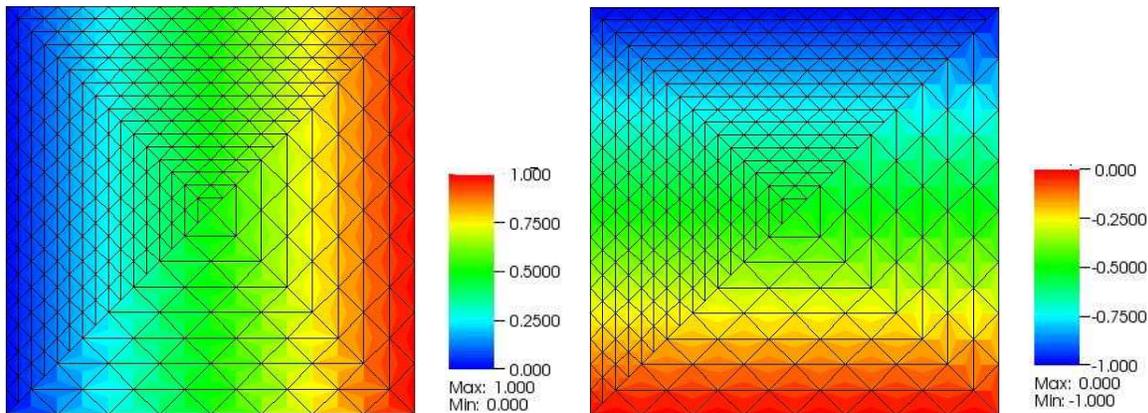


FIG. 9.3: Champ de vitesse obtenu lors de la résolution de 9.1 lorsque la condition $p = 0$ sur Γ_M est faible. La composante x se trouve à gauche et la composante y se trouve à droite.

est également celui attendu.

Pour une équation hydraulique, lorsque nous utilisons la méthode des éléments joints, il est important de prendre en compte les conditions limites du type $p = p_0$ de manière faible.

Solution

Pour ne plus qu'il y ait d'utilisateurs qui se trompent, nous avons implémenté la condition limite *Frontiere_ouverte_pressure_imposee_mortar*, qui dérive de la condition limite de type Neumann, afin que la contrainte $p = p_0$ le long des frontière de type mortar soit prise en compte de manière

faible automatiquement.

Pour cela nous avons modifié les fichiers suivants :

- Solv_M_VEF ;
- AssembleurPP1B ;
- AssembleurPP1BUtil ;
- Op_Div_VEFPP1B_Elem ;
- OpConvEFP1NCStab ;
- OpGradVEFP1Fa

9.2 Équation thermique

Jusqu'à présent, dans le module AMR, la condition limite de TRIO_U *Frontiere_ouverte* T_{ext} (avec $T_{ext} = 0$) était appliquée le long des frontières de type mortar. Cette condition limite a la particularité de prendre comme argument une température, que l'on nomera T_{ext} . En utilisant cette condition limite le long des frontières de type mortar, nous introduisons artificiellement une température T_{ext} le long de cette frontière, et c'est précisément cette température que vont convecter les opérateurs de convection.

Nous allons montrer, via un exemple, que cette condition limite est à banir le long des frontières de type mortar. Reprenons le domaine d'étude illustré par la figure 9.1 mais avec un raffinement plus grossier.

Imposons à l'intérieur du domaine Ω un champ de vitesse de 0.1 m.s^{-1} , constant au cours du temps. Nous avons donc

$$\mathbf{u} = (0.1, 0)^t$$

Nous imposons le terme source : $f = 1$ et fixons le pas de temps $\delta t = 1e^{-2}s$. Résolvons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \quad \text{dans } \Omega \\ T = x \quad \text{sur } \partial\Omega \\ T = x \quad \text{dans } \Omega \text{ à } t = 0 \end{array} \right. \quad (9.3)$$

La figure 9.4 montre le résultat de la simulation à convergence. Notons qu'à l'instant initial nous avons imposé sur l'ensemble du domaine Ω la solution analytique, mais au cours des itérations, nous nous en éloignons.

En étudiant la figure 9.4, nous nous apercevons que nous sommes très loin de la solution analytique $T(x, y) = x$.

Notons que l'argument T_{ext} n'intervient seulement lorsque nous utilisons des opérateurs de convection. Par conséquent, cela est transparent dans le cas des problèmes de type Laplace ou Stokes.

Solution

Nous avons rajouté un type de condition limite, reconnu par TRIO_U, nommé *Neumann_sortie_libre_mortar*, puis nous avons modifié l'implémentation des opérateurs utilisés pour les applications présentées dans ce document, afin que chaque face (resp. arête) possédant ce type de condition limite, soit traitée comme une face interne.

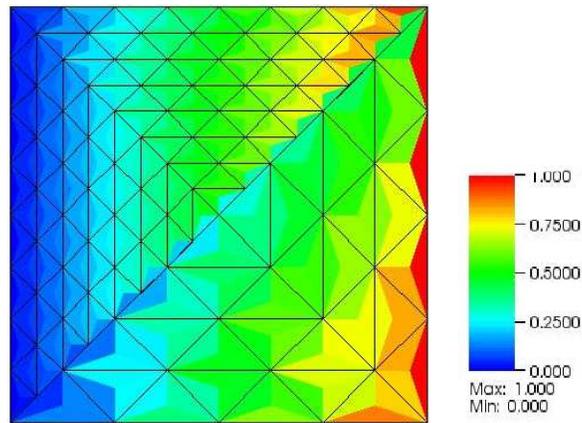


FIG. 9.4: Résolution du problème 9.3 en imposant une température extérieure nulle le long de la frontière Γ_M .

Conclusion de ce chapitre :

Nous venons de mettre en évidence qu'il était important de modifier les conditions limites portant sur les frontières internes de type mortier. À présent, pour la discrétisation VEF, ces conditions limites ont été changées, ce qui permet, par exemple dans le cas d'une équation hydraulique, de pouvoir capter correctement le terme source.

Notons que la continuité du flux entre les différents sous-domaines est assurée par les multiplicateurs de Lagrange.

Chapitre 10

Problème lié à l'implémentation du \mathbb{Q}_{NC}^1

Nous n'avons pas pu introduire la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 dans le module AMR. Ce chapitre en explique les principales raisons. Pour plus de simplicité nous ne nous intéresserons qu'au problème de type Laplace.

Dans un premier temps, nous présenterons le problème auquel nous sommes confrontés, sans rentrer dans les détails informatiques, puis nous nous intéresserons à la structure informatique mise en place par Éli Laucoin lors de sa thèse, et enfin nous verrons quels sont les points bloquants à l'implémentation de la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 dans le module AMR.

10.1 Présentation du problème

Dans le code développé par Éli Laucoin, les valeurs des inconnues sont exprimées successivement aux sommets des mailles, puis aux barycentres des faces (resp. arêtes).

Dans le cas où nous utilisons une discrétisation de type \mathbb{P}_{NC}^1 (les valeurs des inconnues sont exprimées aux barycentres des faces), nous pouvons passer, localement, à une discrétisation de type Lagrange (\mathbb{P}^1 , les valeurs des inconnues sont exprimées aux sommets).

En effet, notons $\mathcal{F}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1}$ les espaces vectoriels, locaux à chaque maille, dans lesquels vivent les fonctions de base utilisées respectivement, avec les éléments finis de type \mathbb{P}_{NC}^1 et \mathbb{P}^1 . L'espace $\mathcal{F}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ est engendré par $\{1, x, y\}$ en 2D et par $\{1, x, y, z\}$ en 3D, tout comme l'espace $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1}$. Par conséquent, les deux espaces, $\mathcal{F}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1}$, sont égaux.

Localement (sur chaque maille), nous pouvons alors passer d'une discrétisation de type \mathbb{P}^1 à une discrétisation de type \mathbb{P}_{NC}^1 , et vice-versa.

Remarque 10.1.1 Soit T_h un champ scalaire discrétisé aux barycentres des faces. Notons $\pi_h(T_h)$ la discrétisation du champ T_h aux sommets. Introduisons N_{ddl} qui vaut 3 en 2D et 4 en 3D. En reprenant les notations utilisées dans le chapitre 7 nous avons :

$$\pi_h(T_h) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \sigma_i^{VEF}(T_h) \phi_i$$

Maintenant regardons ce qu'il se passe lorsque nous utilisons une discrétisation de type VDF (discrétisation basée sur l'utilisation de l'élément fini de Raviart-Thomas, les valeurs des inconnues vectorielles sont alors exprimées aux barycentres des faces). Rappelons qu'avec une telle

discrétisation, les mailles ne sont plus des simplexes, mais des rectangles ou des pavés.

Localement, nous pouvons nous permettre de passer d'une discrétisation de type \mathbb{Q}^1 à une discrétisation de type VDF . En effet, notons \mathbf{RT}_0 et $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}^1}$ les espaces vectoriels, locaux à chaque maille, dans lesquels vivent les fonctions de base utilisées respectivement, avec les éléments finis de type Raviart-Thomas et \mathbb{Q}^1 . L'espace \mathbf{RT}_0 est défini par la relation 10.1

$$\mathbf{RT}_0 = \begin{cases} \{(a_1 + a_2x, b_1 + b_2y)^t\} & \text{dans le cas 2D.} \\ \{(a_1 + a_2x, b_1 + b_2y, c_1 + c_2z)^t\} & \text{dans le cas 3D.} \end{cases} \quad (10.1)$$

Où les coefficients $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sont des réels.

Quant à lui, l'espace local à chaque maille, $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}^1}$ est engendré par $\{1, x, y, xy\}$ en 2D, et par $\{1, x, y, z, xyz, \}$ en 3D. Ces deux espaces ne sont pas égaux, cependant $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}^1}$ contient chaque composante de l'espace \mathbf{RT}_0 . Lorsque l'on souhaite obtenir la valeur d'une inconnue vectorielle sur un barycentre d'une face (resp arête), nous ne gardons que la composante normale de l'inconnue. Par conséquent nous pouvons, localement, passer d'une discrétisation de type \mathbb{Q}^1 à une discrétisation de type VDF , et vice-versa.

En revanche, ce n'est plus le cas si on décide d'utiliser une discrétisation de type \mathbb{Q}_{NC}^1 pour exprimer les valeurs des inconnues aux barycentres des faces (resp. arêtes).

Notons $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{NC}^1}$ et $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}^1}$ les espaces vectoriels, locaux à chaque maille, dans lesquels vivent les fonctions de base utilisées respectivement, avec les éléments finis de type \mathbb{Q}_{NC}^1 et \mathbb{Q}^1 . L'espace $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{NC}^1}$ est engendré par $\{1, x, y, x^2 - y^2\}$ en 2D et par $\{1, x, y, z, x^2 - y^2, x^2 - z^2\}$ en 3D. Par conséquent, nous ne pouvons nous ramener à un cas exhibé ci-dessus. Les deux espaces ne sont pas égaux et aucun ne contient l'autre.

Nous pourrions alors construire des fonctions de base vivant dans l'espace \mathbb{Q}^1 et dont les évaluations au barycentre des faces (resp. arêtes) valent certaines valeurs préalablement fixées. En nous plaçant en 2D, nous allons montrer que la construction de telles fonction est impossible.

Considérons le carré unité et essayons de construire la fonction dont l'évaluation au barycentre de l'arête numéro 0 vaut 1 et 0 sur toutes les autres arêtes. Notons M_i les coordonnées du barycentre de l'arête numéro i . Supposons que l'on ait $M_0 = (0;0.5)$, $M_1 = (0.5;0)$, $M_2 = (1;0.5)$ et $M_3 = (0.5;1)$. Étant donné que nous cherchons une fonction de la forme $A + Bx + Cy + Dxy$, où les coefficients A, B, C, D sont à déterminer, il nous faut résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Or la matrice du système 10.2 n'est pas inversible. De plus, le rang de cette matrice est 3 et le second membre n'appartient pas à l'image de la matrice.

Il est donc impossible de construire de telles fonctions de base.

Pour ces raisons nous ne pouvons pas, localement, passer d'une discrétisation de type \mathbb{Q}^1 à une discrétisation de type \mathbb{Q}_{NC}^1 , et vice-versa.

Une solution consiste à occulter ce changement de discrétisation locale, mais comme le montrent les paragraphes suivants, nous nous sommes heurtés à des difficultés techniques.

10.2 Structure mise en place par Éli Laucoin

Lors de l'initialisation des différents champs, via la fonction *initialize_fields* de `AMR_PROBLEM_BASE` (en méthode virtuelle) et qui est implémentée dans `AMR_LAPLACE_PROBLEM`, les valeurs des inconnues sont calculées aux sommets des éléments du maillage, et sont stockées dans un tableau de taille $(nb_mailles * nb_sommets * nb_comp)$ où *nb_mailles*, *nb_sommets* et *nb_comp* représentent respectivement :

- le nombre de mailles initiales dans le domaine d'étude ;
- le nombre de sommets par maille ;
- le nombre de composantes de l'inconnue.

Notons que chaque sommet est dupliqué autant de fois que le nombre de mailles auxquelles il appartient.

Dans un deuxième temps, afin de faire les calculs nécessaires à la résolution du problème, la fonction *initialize_unknown*, implémentée dans `AMR_LAPLACE_PROBLEM`, permet d'exprimer les valeurs des inconnues aux barycentres des faces (resp. arêtes), à partir des valeurs des inconnues aux sommets des mailles.

Une fois le calcul achevé, la fonction *finalize_unknown*, implémentée dans `AMR_LAPLACE_PROBLEM`, stocke les valeurs de l'inconnue aux sommets (dans le même tableau de taille $nb_mailles * nb_sommets * nb_comp$).

Notons également que l'implémentation de la méthode *interpolate* de `AMR_FIELDS_BASE` (méthode virtuelle), a comme donnée les valeurs de l'inconnue aux sommets. Il est donc nécessaire de les exprimer aux barycentres des faces pour appliquer la formule d'interpolation présentée dans ce DRT (formule 7.18), puis d'exprimer le résultat aux sommets (de nouveau).

10.3 Points bloquants rencontrés

Lors de la première étape, qui consiste à initialiser les champs à l'aide de *initialize_fields*, implémentée dans `AMR_LAPLACE_PROBLEM`, il nous faut les coordonnées des barycentres des faces (resp. arêtes) pour évaluer l'inconnue en ces points. Malheureusement il est impossible d'accéder à un objet de type `ZONE_VEF` et d'accéder directement aux coordonnées des barycentres des faces. En revanche nous avons accès aux coordonnées des sommets. Pour une maille donnée, nous pouvons également déterminer les numéros des sommets qui appartiennent à cette maille. Il serait donc envisageable de calculer les barycentres des arêtes. Cependant, rien n'indique comment numéroter les faces de manière cohérente avec le reste du code. Cette méthode nous paraît donc extrêmement risquée.

Pour éviter ce problème, il faudrait avoir accès à une `ZONE_VEF`. Or cet objet est créé une fois les problèmes locaux initialisés, via *initialize_local_problems* implémenté dans `AMR_PROBLEM_BASE`.

Mais il est impossible de déplacer l'appel de *initialize_fields* après celui de *initialize_local_problems*. En effet *initialize_local_problems* va appeler *complete_local_proxies* qui va déterminer le nombre de sous-champs présents dans le domaine. Or aucune information n'est disponible si les champs ne sont pas initialisés.

Une solution serait de séparer l'initialisation des champs et l'évaluation de l'inconnue. Ainsi, en évaluant l'inconnue aux barycentres des faces (resp. arêtes) après avoir initialisé les problèmes locaux, il serait possible d'accéder à un objet de type *Zone_VEF* et donc de récupérer les coordonnées des barycentres des faces (resp. arêtes).

Une tentative de mise en place d'une telle structure a été réalisée durant ce DRT, mais nous nous sommes heurtés à un problème lors de l'initialisation des problèmes locaux. Faute de temps, nous n'avons pas plus approfondi cette piste.

Conclusion de ce chapitre :

Si nous voulons pouvoir résoudre, via le module AMR, des problèmes en utilisant la discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1 , il est nécessaire de repenser la structure de donnée mise en place dans le module AMR.

Annexe A

Méthodes numériques utilisées

La méthode des éléments joints a comme intérêts (parmi d'autres) de permettre :

- le raffinement de maillage adaptatif ;
- l'utilisation de différentes méthodes numériques sur un même domaine.

Pour cette raison, il est important d'étudier la mise en oeuvre de la méthode des éléments joints sur différents types de discrétisations.

Rappelons que TRIO_U ([10], [11]) propose essentiellement deux méthodes numériques :

- la méthode des Volumes-Différences Finies (VDF) ;
- la méthode des Volumes-Éléments Finis (VEF).

Toutes deux appartiennent à la famille des méthodes de volumes finis, mais elles se distinguent par la notion d'approximation sous-jacente.

La méthode VDF repose sur le formalisme des différences finies, où l'on remplace les dérivées partielles par des différences finies en utilisant des formules de Taylor, alors que la méthode VEF repose sur le formalisme des éléments finis, à savoir une approximation variationnelle du problème.

La différence la plus notable est que la méthode VDF suppose que le maillage soit une grille cartésienne, ce qui n'est pas le cas de la méthode VEF.

Les bases de la méthode VEF de TRIO_U sont présentées en détail dans les travaux de la thèse de P.Émonot [16]. Il s'agit en quelque sorte d'une réinterprétation de la discrétisation par éléments finis, dans un cadre de volumes finis. L'idée est d'associer à chaque degré de liberté un *volume de contrôle*, et de réinterpréter les intégrations par parties de la méthode des éléments finis comme l'écriture de lois de conservation sur ces volumes de contrôle. Les intérêts de coupler une approche volumes finis et une approche éléments finis sont multiples :

- l'approche volumes finis est particulièrement bien adaptée aux lois de conservations utilisées en thermohydraulique (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) ;
- l'approche élément finis fournit un cadre mathématique cohérent et parfaitement établi ;

Nous présenterons chacune des discrétisations proposées par TRIO_U. Puis nous verrons qu'il est possible de voir la méthode VDF comme une méthode éléments finis, ce qui permet d'utiliser la méthode des éléments joints sur la discrétisation de type VDF.

A.1 Discrétisation VEF

Lorsque nous travaillons avec la discrétisation VEF , nous utilisons la discrétisation \mathbb{P}_{NC}^1 , cela signifie que nous nous servons de l'élément fini de type Crouzeix-Raviart. Détaillons ce qu'est cet élément fini :

L'élément géométrique de référence est le triangle unité (2D) ou le tétraèdre unité (3D) et est noté $\hat{K}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$. Notons $\hat{\mathcal{F}}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ l'espace vectoriel engendré par $\{1, x, y\}$ dans le cas 2D et par $\{1, x, y, z\}$ dans le cas 3D, dont une base est $\{\hat{f}_i\}_{i=0..Nb}$.

Soit $\hat{\Sigma}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ l'ensemble des $Nb + 1$ formes linéaires, notées $(\hat{\sigma}_i)_{i=0..Nb}$, qui à toute fonction de base appartenant à $\hat{\mathcal{F}}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ associe sa valeur moyenne le long d'une face (resp. arête). Autrement dit, si nous notons $\hat{\Phi}_i$ $_{i=0..Nb}$ les fonctions de base associées au simplexe de référence alors la relation suivante est vérifiée :

$$\hat{\Phi}_i(\hat{M}_j) = \delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

Les points \hat{M}_j $_{0 \leq j \leq Nb}$, sont situés sur les centres de gravité des faces (resp. arêtes).

Si on ne s'intéresse qu'au simplexe de référence \hat{K} alors l'élément fini de Crouzeix-Raviart est défini par le triplet $\{\hat{K}_{\mathbb{P}_{NC}^1}, \hat{\mathcal{F}}_{\mathbb{P}_{NC}^1}, \hat{\Sigma}_{\mathbb{P}_{NC}^1}\}$.

Introduisons un simplexe quelconque, noté $K_{\mathbb{P}_{NC}^1}$, et définissons une transformation affine bijective envoyant $\hat{K}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ dans $K_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ que l'on note $\mathcal{G}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$. L'élément fini Crouzeix-Raviart associé à

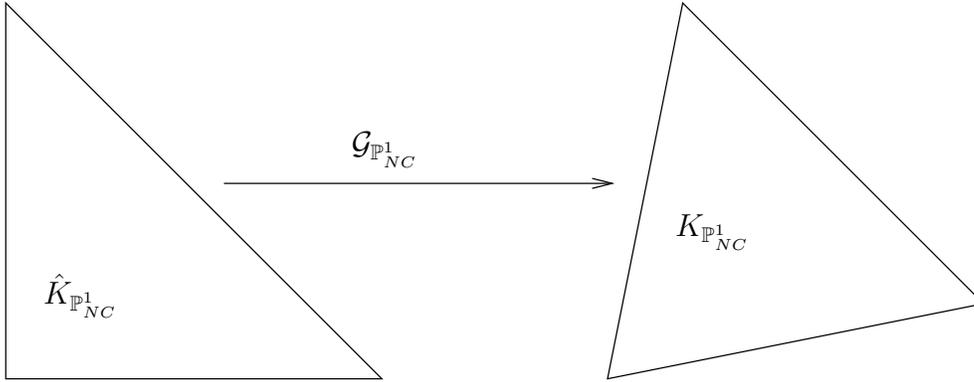


FIG. A.1: Illustration de la transformation $\mathcal{G}_{\mathbb{P}_{NC}^1}$ permettant de passer du simplexe de référence à un simplexe quelconque

un simplexe quelconque est défini par le triplet $\{K_{\mathbb{P}_{NC}^1}, \mathcal{F}_{\mathbb{P}_{NC}^1}, \Sigma_{\mathbb{P}_{NC}^1}\}$, avec :

$$\begin{cases} K_{\mathbb{P}_{NC}^1} = \mathcal{G}_{\mathbb{P}_{NC}^1}(\hat{K}_{\mathbb{P}_{NC}^1}) \\ \mathcal{F}_{\mathbb{P}_{NC}^1} = \{\hat{f} \circ \mathcal{G}_{\mathbb{P}_{NC}^1}^{-1}, \hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}_{\mathbb{P}_{NC}^1}\} \\ \Sigma_{\mathbb{P}_{NC}^1} = (\sigma_i)_{i=0..Nb}; \sigma_i(f) = \hat{\sigma}(f \circ \mathcal{G}_{\mathbb{P}_{NC}^1}), \forall f \in \mathcal{F}_{\mathbb{P}_{NC}^1} \end{cases}$$

A.2 Discrétisation \mathbb{Q}_{NC}^1

Comme pour le cas de l'élément fini de Crouzeix-Raviart, avec la discrétisation de type \mathbb{Q}_{NC}^1 , l'inconnue est discrétisée aux milieux des arêtes (resp faces).

Soit $K_{Q_{NC}^1}$ un quadrangle (resp un hexaèdre) quelconque. Nous allons définir sur la maille $K_{Q_{NC}^1}$ un repère local. Dans le repère local, un point sera déterminé par ses coordonnées exprimées en ξ

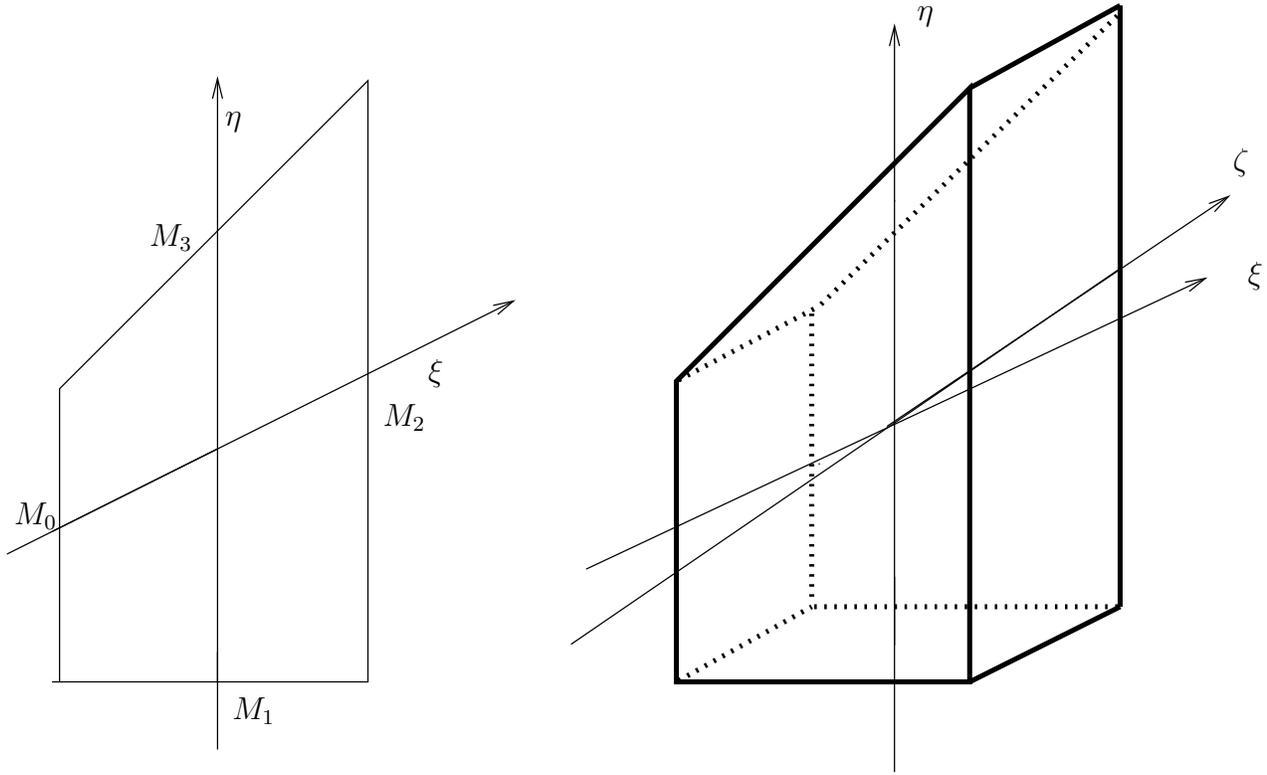


FIG. A.2: Illustration du repère local défini sur une maille quelconque.

, η et ζ si l'on se trouve dans un cas 3D. Définissons les vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} qui seront les vecteurs de la nouvelle base (locale à une maille quelconque $K_{Q_{NC}^1}$).

Soit G le centre de gravité de K . En 2D, définissons les points M_2 et M_3 comme étant les centres de gravité de deux arêtes de K . Alors les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont les vecteurs reliant G à M_2 et G à M_3 . Dans le cas 3D, les vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} sont définis de manière analogue.

Introduisons $\mathcal{F}_{Q_{NC}^1}$, l'espace vectoriel engendré par $\{1, \xi, \eta, \xi^2 - \eta^2\}$ dans le cas 2D et par $\{1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2 - \eta^2, \xi^2 - \zeta^2\}$ dans le cas 3D, dont une base est $\{f_i\}_{i=0..Nb}$. Soit $\Sigma_{Q_{NC}^1}$ l'ensemble des $Nb + 1$ formes linéaires, notées $(\sigma_i)_{i=0..Nb}$, qui à toute fonction de base appartenant à $\mathcal{F}_{Q_{NC}^1}$ associe sa valeur moyenne le long d'une face (resp. arête). Autrement dit, si nous notons Φ_i $i=0..Nb$ les fonctions de base associées à $K_{Q_{NC}^1}$ alors la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{|\Gamma_j|} \int_{\Gamma_j} \Phi_i = \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

La notation $|\Gamma_j|$ représente la surface (resp. la longueur) de la face (resp. arête) j .

L'élément fini de type Q_{NC}^1 associé à $K_{Q_{NC}^1}$ est défini par le triplet $\{K_{Q_{NC}^1}, \mathcal{F}_{Q_{NC}^1}, \Sigma_{Q_{NC}^1}\}$.

Plus de détails sont disponibles dans [30]

A.3 Élément fini de Raviart-Thomas

Nous allons faire une rapide présentation de l'élément fini de Raviart-Thomas (pour plus d'informations, se reporter à [17] page 40), en nous concentrant sur le cas où les mailles sont des rectangles ou des pavés.

L'élément de référence, \hat{K}_{RT} est un carré (2D) ou un cube (3D).

Introduisons $\hat{\mathcal{F}}_{RT}$, l'espace vectoriel défini par

$$\hat{RT}_0 = \begin{cases} \{(a_1 + a_2x, b_1 + b_2y)^t\} & \text{dans le cas 2D.} \\ \{(a_1 + a_2x, b_1 + b_2y, c_1 + c_2z)^t\} & \text{dans le cas 3D.} \end{cases}$$

Où $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^6$. Soit $\{\hat{f}_i\}_{i=0..Nb}$ une base de \hat{RT}_0 .

Soit $\hat{\Sigma}_{RT}$ l'ensemble des $Nb + 1$ formes linéaires, notées $(\hat{\sigma}_i)_{i=0..Nb}$, qui à toute fonction de base appartenant à \hat{RT}_0 , pour une face f donnée, associe la moyenne, sur la face f , de sa composante normale. Autrement dit, si nous notons $\hat{\Phi}_i$ $_{i=0..Nb}$ les fonctions de base associées à \hat{K}_{RT} et \mathbf{n}_f le vecteur normal extérieur associé à la face numéro f , alors la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{|\Gamma_j|} \int_{\Gamma_j} \hat{\Phi}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Où la notation $|\Gamma_j|$ représente la surface (resp. la longueur) de la face (resp. arête) j . L'élément fini de Raviart-Thomas associé à l'élément géométrique de référence \hat{K}_{RT} est défini par le triplet $\{\hat{K}_{RT}, \hat{RT}_0, \hat{\Sigma}_{RT}\}$.

Introduisons un élément géométrique noté K_{RT} , qui est un rectangle (resp. pavé), et définissons une transformation affine, bijective, envoyant \hat{K}_{RT} dans K_{RT} que l'on note \mathcal{G}_{RT} .

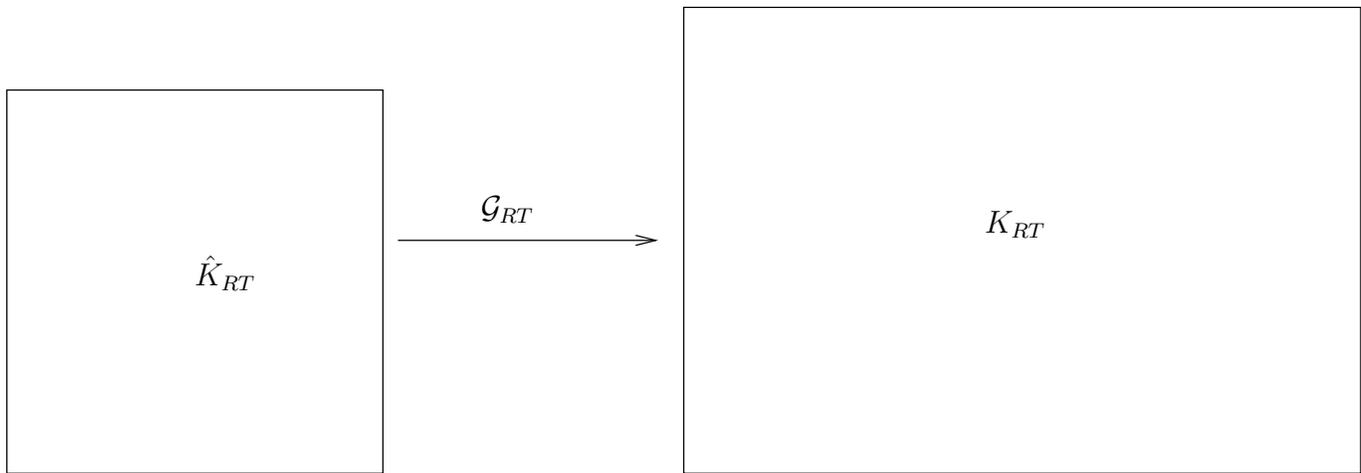


FIG. A.3: Illustration de la transformation \mathcal{G}_{RT} permettant de passer du carré de référence à un rectangle quelconque

Puisque \mathcal{G}_{RT} est affine elle s'écrit

$$\mathcal{G}_{RT} = B\mathbf{X} + b$$

Où B est la jacobienne de \mathcal{G}_{RT} et b un vecteur constant. En utilisant la transformation de Piola alors l'élément fini de Raviart-Thomas associé à K_{RT} est défini par le triplet $\{K_{RT}, \mathcal{F}_{RT}, \Sigma_{RT}\}$, avec :

$$\begin{cases} K_{RT} = \mathcal{G}_{RT}(\hat{K}_{\mathbb{Q}_{NC}^1}) \\ RT_0 = \left\{ \frac{1}{\det(B)} B \left(\hat{\mathbf{f}} \circ \mathcal{G}_{RT}^{-1} \right), \hat{\mathbf{f}} \in RT_0 \right\} \\ \Sigma_{RT} = (\sigma_i)_{i=0..Nb}; \sigma_i(\mathbf{f}) = \hat{\sigma} \left(\frac{1}{\det(B)} B (f \circ \mathcal{G}_{RT}) \right), \forall \mathbf{f} \in RT_0 \end{cases}$$

Remarque A.3.1 On se propose d'étudier l'expression de la matrice

$$\frac{1}{\det(B)} B \tag{A.4}$$

Plaçons-nous dans le cas 2D. Notons h_x et h_y respectivement la largeur et la hauteur de la maille rectangulaire K_{RT} . Nous avons alors

$$B = \begin{pmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{\det(B)} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_x} \end{pmatrix}$$

Nous constatons donc qu'à un facteur de dilatation près le long des axes principaux, la matrice $\frac{1}{\det(B)} B$ peut être perçue comme l'identité.

A.4 Équivalence VDF - Raviart-Thomas

Nous nous proposons de montrer l'équivalence entre les méthodes de volumes finis employées dans Trio_U et rassemblées sous le terme générique VDF et les méthodes d'éléments finis construites à l'aide de l'élément de Raviart-Thomas. Cette démarche est essentielle car en interprétant le VDF comme une méthode d'éléments finis, il sera plus facile de faire rentrer les schémas numériques associés dans le cadre des méthodes d'éléments joints usuelles, développées à partir d'un formalisme éléments finis.

A.4.1 Hypothèses de base

Dans la suite, nous supposons le domaine Ω polygonal, convexe, borné quelconque. Ce domaine est de surcroît supposé être recouvert en dimension 2 par des rectangles alignés avec les axes (Ox) , (Oy) et en dimension 3 par des pavés également alignés avec les axes (Ox) , (Oy) , (Oz) tous identiques à une translation près : on définit ainsi une quadriangulation τ_h de Ω .

Notons K les mailles appartenant à τ_h . De la même façon, les faces, arêtes (lorsqu'il y a lieu de distinguer arête et face) et sommets de τ_h seront notés respectivement f , e et v .

La lettre \mathbf{x} en gras désignera en règle général un vecteur position et lorsqu'elle sera suivie d'une des lettres K , f , e ou v , elle désignera plus particulièrement la position respectivement de la

maille, de la face, de l'arête ou du sommet correspondant. La lettre \mathbf{u} désignera sauf mention du contraire la vitesse de l'écoulement et la lettre p la pression du fluide.

Définissons ω_f , le volume de contrôle associé à la face f . Soit \mathbf{n}_f le vecteur normal extérieur à la face f . Soit h la longueur (resp. surface) d'une maille dans la direction de \mathbf{n}_f alors nous avons :

$$\omega_f := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_f\|_\infty \leq h\}$$

La figure A.4 illustre ce qu'est ω_f en 2D (surface hachurée).

A.4.2 Équations pour le VDF

Dans tout ce qui suit, nous noterons \mathbf{n} le vecteur normal extérieur à la frontière du volume de contrôle que l'on étudie. En VDF, seules les vitesses orthogonales aux faces du maillage sont calculées tandis que la pression est discrétisée aux éléments.

Les équations de Navier-Stokes incompressibles sous leurs formes conservatives sont intégrées sur les volumes de contrôle ω_f pour la conservation de la quantité de mouvement et sur les mailles K pour la conservation de la quantité de matière, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \int_{\omega_f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \int_{\partial \omega_f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u} + \int_{\partial \omega_f} p\mathbf{n} = \int_{\omega_f} f \\ \int_K \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$$

Pour pouvoir comparer les méthodes d'éléments finis et VDF, nous allons employer la méthodologie développée par P. Émonot dans sa thèse (voir [16]). Celle-ci consistant à comparer les matrices des opérateurs pour chacune des discrétisations, nous allons exhiber ici les matrices pour le cas VDF.

Par soucis de simplicité, on se place dans le cadre 2D mais le raisonnement qui suit s'applique tout autant au cas 3D. On supposera également que la face f_{ij} considérée est interne et parallèle à l'axe (Oy) sachant que les opérations suivantes s'appliquent de la même façon sur les faces internes parallèles à l'axe (Ox) et les faces de bord.

Matrice de masse

Par construction du schéma numérique, il est facile de voir que la matrice de masse est diagonale et que ces coefficients diagonaux sont les volumes des ω_f .

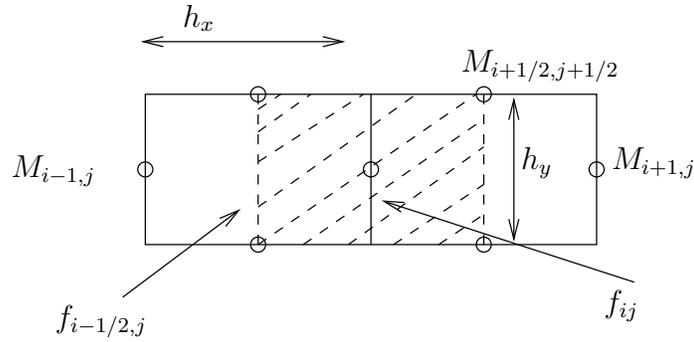
Matrice du laplacien

Nous avons à calculer pour le $\omega_{f_{ij}}$ associée à la face f_{ij} , la grandeur suivante :

$$\int_{\partial \omega_{f_{ij}}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}$$

La figure A.4 illustre les notations que nous allons utiliser.

Nous avons deux mailles rectangulaires, et nous notons f_{ij} la face séparant ces deux mailles. En

FIG. A.4: En hachuré, le volume de contrôle associé à la face f_{ij} .

hachuré se trouve le volume de contrôle associé à la face f_{ij} que l'on note $w_{f_{ij}}$ ($w_{f_{ij}}$ est à cheval sur les deux mailles).

Les points M_{AB} sont portés par les faces f_{AB} . Notons h_x et (resp. h_y) la largeur (resp. hauteur) d'une maille.

Soient \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Notons également $\mathbf{u}(M_{ij})$ l'évaluation de \mathbf{u} au point M_{ij} .

En rappelant que nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\partial w_{f_{ij}}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} &= - \int_{f_{i-\frac{1}{2},j}} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x + \int_{f_{i+\frac{1}{2},j}} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x - \int_{f_{i,j-\frac{1}{2}}} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y + \int_{f_{i,j+\frac{1}{2}}} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y \\ &= h_y \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(f_{i+\frac{1}{2},j}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(f_{i-\frac{1}{2},j}) \right) + h_x \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(f_{i,j+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(f_{i,j-\frac{1}{2}}) \right) \end{aligned}$$

Or le gradient de \mathbf{u} pour les faces du volume contrôle sont calculées à l'aide des différences finis centrées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(f_{i+\frac{1}{2},j}) &= \frac{1}{h_x} (\mathbf{u}(M_{i+1,j}) - \mathbf{u}(M_{i,j})) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(f_{i-\frac{1}{2},j}) &= \frac{1}{h_x} (\mathbf{u}(M_{i-1,j}) - \mathbf{u}(M_{i,j})) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(f_{i,j+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{h_y} (\mathbf{u}(M_{i,j+1}) - \mathbf{u}(M_{i,j})) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(f_{i,j-\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{h_y} (\mathbf{u}(M_{i,j-1}) - \mathbf{u}(M_{i,j})) \end{aligned}$$

D'où en revenant à l'expression initiale :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_{f_{ij}}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} &= h_y \frac{\mathbf{u}(M_{i+1,j}) - 2\mathbf{u}(M_{i,j}) + \mathbf{u}(M_{i-1,j})}{h_x} + h_x \frac{\mathbf{u}(M_{i,j+1}) - 2\mathbf{u}(M_{i,j}) + \mathbf{u}(M_{i,j-1})}{h_y} \\ &= h_x h_y \left(\frac{\mathbf{u}(M_{i+1,j}) - 2\mathbf{u}(M_{i,j}) + \mathbf{u}(M_{i-1,j})}{h_x^2} + \frac{\mathbf{u}(M_{i,j+1}) - 2\mathbf{u}(M_{i,j}) + \mathbf{u}(M_{i,j-1})}{h_y^2} \right) \\ &= |\omega_{f_{ij}}| \left(\frac{\mathbf{u}(M_{i+1,j}) - 2\mathbf{u}(M_{i,j}) + \mathbf{u}(M_{i-1,j})}{h_x^2} + \frac{\mathbf{u}(M_{i,j+1}) - 2\mathbf{u}(M_{i,j}) + \mathbf{u}(M_{i,j-1})}{h_y^2} \right) \end{aligned}$$

On reconnaît, au facteur volumique $|\omega_{ij}|$ près, l'expression du laplacien obtenu à l'aide des différences finis usuelles.

Matrice de l'opérateur gradient

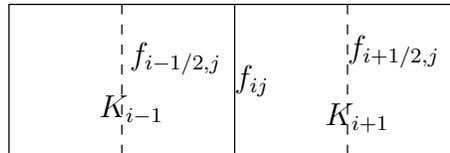


FIG. A.5: La pression est constante sur les mailles K_{i-1} et K_{i+1} .

Nous avons à calculer pour le volume de contrôle $\omega_{f_{ij}}$ associé à la face f_{ij} , la grandeur suivante :

$$\int_{\partial\omega_{f_{ij}}} p \mathbf{n}$$

Puisque nous ne devons calculer que la composante selon \mathbf{e}_x du gradient, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_{f_{ij}}} p \mathbf{n} &= - \int_{f_{i-\frac{1}{2},j}} p \mathbf{e}_x + \int_{f_{i+\frac{1}{2},j}} p \mathbf{e}_x \\ &= h_y \left(p_{i+\frac{1}{2},j} - p_{i-\frac{1}{2},j} \right) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Or la pression étant constante par maille, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} p_{i+\frac{1}{2},j} &= p_{K_{i+1,j}} \\ p_{i-\frac{1}{2},j} &= p_{K_{i-1,j}} \end{aligned}$$

D'où en revenant à l'expression originale :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_{f_{ij}}} p \mathbf{n} &= h_x h_y \frac{p_{K_{i+1,j}} - p_{K_{i-1,j}}}{h_x} \mathbf{e}_x \\ &= |\omega_{ij}| \frac{p_{K_{i+1,j}} - p_{K_{i-1,j}}}{h_x} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc, au facteur volumique $|\omega_{ij}|$ près, l'expression du gradient de pression obtenue à l'aide des différences finis.

Matrice de l'opérateur divergence

Nous avons à calculer, pour le volume de contrôle $\omega_{f_{ij}}$ associé à la face f_{ij} :

$$\int_{\partial\omega_{f_{ij}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

En utilisant les notations introduites précédemment :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_{f_{ij}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \int_{f_{i-\frac{1}{2},j}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{f_{i+\frac{1}{2},j}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{f_{i,j-\frac{1}{2}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{f_{i,j+\frac{1}{2}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ &= h_y \left(\mathbf{u}(M_{i+\frac{1}{2},j}) - \mathbf{u}(M_{i-\frac{1}{2},j}) \right) \cdot \mathbf{e}_x + h_x \left(\mathbf{u}(M_{i,j+\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}(M_{i,j-\frac{1}{2}}) \right) \cdot \mathbf{e}_y \\ &= h_x h_y \left(\frac{\mathbf{u}_x(M_{i+\frac{1}{2},j}) - \mathbf{u}_x(M_{i-\frac{1}{2},j})}{h_x} + \frac{\mathbf{u}_y(M_{i,j+\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}_y(M_{i,j-\frac{1}{2}})}{h_y} \right) \\ &= |\omega_{f_{ij}}| \left(\frac{\mathbf{u}_x(M_{i+\frac{1}{2},j}) - \mathbf{u}_x(M_{i-\frac{1}{2},j})}{h_x} + \frac{\mathbf{u}_y(M_{i,j+\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}_y(M_{i,j-\frac{1}{2}})}{h_y} \right) \end{aligned}$$

On retrouve donc, au facteur volumique $|\omega_{f_{ij}}|$ près, l'expression de la divergence de la vitesse obtenue à l'aide des différences finis.

Maintenant nous allons nous intéresser à l'élément fini de Raviart-Thomas.

A.4.3 Équations pour l'élément fini de Raviart-Thomas

Rappelons que les degrés de liberté utilisés par cet élément fini sont les moyennes sur les faces des composantes normales de la vitesse et les valeurs moyennes de la pression sur les éléments du maillage. De plus et compte tenu des hypothèses faites au début de ce papier, les fonctions de base Φ_{ij} de cet élément fini sont sur un élément quelconque K de τ_h , sont de la forme :

$$\Phi_{ij} = ((a_1x + a_2)\delta_x, (b_1y + b_2)\delta_y, (c_1z + c_2)\delta_z)^t$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des constantes qui ne dépendent que de l'élément considéré et les fonctions δ_x, δ_y et δ_z valent 0 ou 1 selon que la face f_{ij} est alignée respectivement avec les axes $(Ox), (Oy)$ ou (Oz) .

Définissons une orientation **fixe** pour chaque face de τ_h . Nous supposons donc que les faces perpendiculaires à l'axe (Ox) auront leur vecteur normal de référence orienté selon \mathbf{e}_x , les faces perpendiculaires à l'axe (Oy) auront leur vecteur normal de référence orienté selon \mathbf{e}_y et les faces perpendiculaires à l'axe (Oz) auront leur vecteur normal de référence orienté selon \mathbf{e}_z .

Matrice de masse

Remarquons que l'interaction de deux fonctions de base définies sur des faces orientées différemment se réduit à 0. Il nous suffit donc de regarder l'interaction de fonctions de base associées à deux faces orientées de la même façon et dont l'intersection des supports est non vide. Et même dans ce cas, seules les faces appartenant à un même élément K peuvent se voir. Par conséquent et

pour simplifier le raisonnement, nous ne regarderons que deux faces d'un même élément orientées selon (Ox) .

Commençons par calculer les coefficients extra-diagonaux de la matrice de masse. Ainsi en remarquant que les fonctions de base considérées ne dépendent que de la variable y et en utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$\sum_{K, f_{ij}, f_{i,j+1} \in K} \int_K \Phi_{ij} \cdot \Phi_{i,j+1} = \sum_{K, f_{ij}, f_{i,j+1} \in K} h_x \int_{v_{ij} v_{i,j+1}} \Phi_{ij} \cdot \Phi_{i,j+1}$$

Nous nous sommes donc ramenés à une intégration 1D pour un polynôme de degré 2. Pour calculer cette intégrale, nous allons utiliser une formule d'intégration numérique approchée valable uniquement pour les polynôme de degré 1 : la formule du trapèze. A l'aide de ce choix, il vient :

$$\sum_{K, f_{ij}, f_{i,j+1} \in K} \int_K \Phi_{ij} \cdot \Phi_{i,j+1} = 0$$

En répétant ces opérations pour le calcul des coefficients diagonaux de la matrice nous trouvons :

$$\sum_{K, f_{ij} \in K} \int_K \Phi_{ij} \cdot \Phi_{ij} = |\omega_{ij}|$$

On retrouve donc bien la matrice de masse du VDF.

Matrice du laplacien

Pour montrer l'équivalence de l'opérateur de diffusion avec le schéma VDF, nous invitons le lecteur intéressé à se reporter à [19].

Matrice de l'opérateur gradient

La forme bilinéaire associée au gradient de pression est :

$$\langle \nabla p, \Phi_{ij} \rangle = - \sum_{K, f_{ij} \in K} \int_K p \nabla \cdot \Phi_{ij}$$

Soit encore :

$$\langle \nabla p, \Phi_{ij} \rangle = - \sum_{K, f_{ij} \in K} p_K \int_{\partial K} \Phi_{ij} \cdot \mathbf{n}$$

Selon la convention d'orientation choisie, il est facile de voir que dans ce cas :

$$\begin{aligned} \langle \nabla p, \Phi_{ij} \rangle &= h_x h_y \frac{p_{K_{i+1,j}} - p_{K_{i-1,j}}}{h_x} \mathbf{e}_x \\ &= |\omega_{ij}| \frac{p_{K_{i+1,j}} - p_{K_{i-1,j}}}{h_x} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

On retrouve la même expression du gradient qu'en VDF.

Matrice de l'opérateur divergence

La forme bilinéaire associée à la divergence est la suivante pour une fonction q constante par morceaux quelconque fixée :

$$- \langle q, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle = - \sum_{K, f_{ij} \in K} \int_K q \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Ce qui s'écrit encore pour une maille K_{ij} donnée :

$$- \langle 1_K, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle = \int_{\partial K_{ij}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

Où \mathbf{n} est le vecteur normal extérieur à la maille K_{ij} .

Cette expression est la même que celle calculée en VDF.

Conclusion de ce chapitre :

Nous venons de comparer les matrices associées à des opérateurs pour la discrétisation VDF et celle associée à l'élément fini de Raviart-Thomas. Il en ressort que les matrices sont identiques, par conséquent nous pouvons interpréter la discrétisation VDF comme étant la discrétisation associée à l'élément fini de Raviart-Thomas.

Ceci est important car le formalisme utilisé par la méthode des éléments joints repose sur l'utilisation d'éléments finis. Nous pouvons donc utiliser la méthode des éléments joints avec la discrétisation VDF.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Nous sommes partis des travaux effectués par Éli Laucoin lors de sa thèse. Ces travaux avaient abouti à la mise en place d'un module AMR permettant la résolution, via la discrétisation VEF , du problème de Stokes.

Nous avons alors modifié le module AMR afin qu'il puisse proposer la résolution de problèmes thermohydrauliques. C'est-à-dire des problèmes possédant plusieurs équations couplées, et dont les équations portent un terme de convection. Nous avons également rendu possible l'utilisation de la discrétisation VDF , notamment en introduisant le raffinement de mailles rectangulaires. Cependant l'intégration de la discrétisation VDF dans le module AMR n'a pas pu aboutir complètement à cause des difficultés techniques énoncées dans le chapitre 4. Nous avons tout de même montré qu'il était possible de résoudre une équation de type Darcy avec un terme source non nul. Un tel problème peut être vu comme un problème de Stokes sans terme source. Du coup, une fois les difficultés, liées aux opérateurs différentiels, surmontées, la résolution d'un problème de type Navier-Stokes est envisageable.

Un opérateur d'interpolation, utilisé pour définir un champ (scalaire ou vectoriel) sur des mailles plus grossières lors d'une phase de déraffinement a également été mis en place. Cet opérateur a la propriété intéressante de conserver la nullité de la divergence d'un champ vectoriel. Cela permet d'économiser une étape de projection généralement très coûteuse.

Perspectives

Ajout de nouvelles discrétisations

La possibilité de résoudre numériquement un problème de type Darcy en utilisant la discrétisation VDF est un premier pas vers la résolution d'un problème de type Stokes avec cette même discrétisation. Cependant, beaucoup de travail reste encore à réaliser avant de pouvoir résoudre un tel problème avec la discrétisation VDF .

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 10, l'ajout de la discrétisation Q_{NC}^1 n'est pas immédiate et nécessite de repenser la structure de donnée mise en place dans le module AMR afin d'éviter d'être obligé de passer par les valeurs des inconnues aux sommets pour avant l'étape d'interpolation.

Couplage des discrétisations

Une fois que les problèmes évoqués dans le paragraphe précédent seront levés, une piste de travail intéressante serait l'étude de la mise en place du couplage entre différentes discrétisations. Par exemple un couplage entre la discrétisation VEF et VDF nécessite de se poser des questions sur la manière de traiter la pression. En effet dans la méthode étendue de VEF , la pression est discrétisée en partie avec l'élément fini \mathbb{P}^1 Lagrange, alors que dans la discrétisation VDF , la pression est constante par maille.

Nouvelle approche de la méthode des éléments joints

Dans le chapitre 5, nous avons introduit une base des espaces V_h et D_h , qui ne sont rien d'autre que les noyaux des formes bilinéaires $b_h(.,.)$ et $c_h(.,.)$. Ces formes linéaires assurent la continuité de la solution entre les différents sous-domaine.

Introduisons X_h l'espace dans lequel nous cherchons l'inconnue de notre problème. L'approche primale de la méthode des éléments joints repose sur le fait que les contraintes de raccordement de l'inconnue entre les différents sous-domaines sont incluses dans l'espace X_h . Par conséquent, les fonctions de base de X_h doivent appartenir au noyau de la forme bilinéaire de $b_h(.,.)$. Or nous sommes capables de construire de telles fonctions. La mise en place d'une approche primale est donc théoriquement réalisable.

Remarquons que la mise en place d'une telle approche nécessite de recoder les opérateurs différentiels de TRIO_U car les fonctions de base auront été modifiées par rapport aux discrétisations utilisées par TRIO_U.

Il serait intéressant d'étudier les difficultés liées à la mise en place d'une telle méthode et aux avantages que cela peut apporter au module AMR.

Raffinement automatique et critères

Le module AMR offre la possibilité de raffinement, ou déraffiner, automatiquement des zones du domaine d'étude d'après les informations fournies par un estimateur d'erreur. Lorsque nous résolvons un problème qui ne comporte qu'une seule équation, nous n'avons qu'un seul estimateur (associé à l'inconnue de notre équation). Ce dernier peut donc juger, seul, de l'utilité ou non de modifier le maillage.

Lorsque nous résolvons un problème possédant deux équations couplées, avec une inconnue par équation, deux estimateurs d'erreur sont attachés à notre problème. Dans ce cas, comment déterminer s'il faut modifier le maillage ou non ? Les deux inconnues n'ayant pas forcément le même comportement, si nous faisons le choix de ne considérer que l'indicateur le plus contraignant, nous risquons de raffiner la totalité du maillage. Au contraire, si nous ne prenons en compte que l'indicateur le moins contraignant, nous risquons alors de ne pas atteindre une précision satisfaisante sur au moins une des inconnues.

Bibliographie

- [1] Y. ACHDOU AND O. PIRONNEAU *A Fast Solver For Navier-Stokes Equations In The Laminar Regime Using Mortar Finite Element And Boundary Element Methods.*
SIAM journal on numerical analysis, vol.32(4) , 985 - 1016
1995
- [2] F. BEN BELGACEM AND Y. MADAY *The Mortar Element Method for Three Dimensional Finite Elements.*
Modélisation mathématique et analyse numérique
vol.31(2) 289 - 302
- [3] F. BEN BELGACEM *The Mortar Finite Element Method With Lagrange Multipliers.*
Numerische Mathematik, 84 (2) : 173 - 197
1999
- [4] C. BERNARDI ET F. HECHT *Mesh adaptivity in the mortar finite element method.*
12th International Conference on Domain Decomposition Methods.
2001
- [5] C. BERNARDI ET Y. MADAY *Mesh adaptivity in finite elements using the mortar method.*
Revue européenne des Éléments finis, 9 :451-456.
2000
- [6] C. BERNARDI, Y.MADAY AND A.T. PATERA *A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method.*
Université Pierre et Marie Curie , Centre National de la Recherche Scientifique
Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique
imprimé en janvier 1990
- [7] M. BOGOVSKI *Solutions of some problems of vector analysis, associated with the operators div and grad.*
In Theory of Cubature Formulas and the Applications of Functional Analysis to Problems of Mathematical Physics, volume 149, pages 5-40. Trudy Sem S. Sl. Soboleva, Akad Nauk SSSR Sibirsk, Otdel. Inst. Mat. Novosibirsk, Russia.
1980
- [8] D. BRAESS, W. DAHMEN ET C. WIENERS *A Multigrid Algorithm for the Mortar Finite Element Method.*
SIAM Journal on Numerical Analysis, vol.37(1) : 48 - 49
Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA
1999
- [9] D. BRAESS AND W. DAHMEN *Stability Estimates of the Mortar Finite Element Method for 3-Dimensional Problems.*

- East-West J. Numer. Math, vol.6 249 - 264
1998
- [10] C.CALVIN ET P.ÉMONOT. *The Trio-Unitaire project : a parallel CFD 3D code.*
In ISOCOPE
1997
- [11] C.CALVIN , O.CUETO ET P.ÉMONOT. *An object oriented approach to the design of fluid mechanics software.*
Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN), Special Issus on Scientific Software Tools, 306-907-921.
2002
- [12] J. CHEN ET X. XU *The Mortar Element Method for the Rotated Q1 Element.*
Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods
Editors : N. Debit, M. Garbey, R. Hoppe, J.Périaux, D.Keyes, Y.Kuznetsov
2001
- [13] P. CIARLET *The finite element method for elliptic problems.*
Studies in mathematics and its applications, North-Holland, Amsterdam
1976
- [14] P. CLÉMENT *Approximation by finite elemnt functions using local regularization.*
Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle, Analyse Numérique, 9 (R-2) : 77 - 84
1975
- [15] M. CROUZEIX ET P.A. RAVIART *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations.*
Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle Analyse Numérique, 7 (R-3) : 33 - 76
1973
- [16] P. ÉMONOT. *Thèse : Méthodes de volumes éléments finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence.*
1992
- [17] A. ERN ET J-L. GUERMOND. *Eléments finis : Théorie , applications , mise en oeuvre.*
Editions Springer - imprimé en 2002
- [18] M.FARVACQUE , P.ÉMONOT ET O.CUETO. *Document de conception Trio-U version 1.*
1996
- [19] V.GIRAULT ET H.LOPEZ. *Finite-element error estimates for the MAC scheme.*
IMA Journal of Numerical Analysis - pp 347-379
1996
- [20] S. HEIB *Nouvelles discrétisations non-structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée.*
Thèse de doctorat, Université Paris VI.
2003
- [21] BISHNU P. LAMICHHANE AND BARBARA I. WOHLMUTH *The Mortar Element Method for the Rotated Q1 Element.*
University of Stuttgart, Institute of Applied Analysis and Numerical Simulation

- [22] É. LAUCOIN. *Thèse : Développement du parallélisme des méthodes numériques adaptatives pour un code industriel de simulation en mécanique des fluides.*
2008
- [23] L. MARCINKOWSKI *The mortar element method with locally nonconforming elements.*
BIT Numerical Mathematics, 39(4) : 716 - 739
1999
- [24] L. MARCINKOWSKI *Additive schwarz method for mortar discretisation of elliptic problems with P_1 nonconforming finite elements .*
BIT Numerical Mathematics, 45(2) : 375 - 394
2005
- [25] P.A. RAVIART ET J.M. THOMAS *Primal Hybrid Finite Elements Methods for 2nd Order Elliptic Equations .*
Mathematics of Computation, 31 (138) :391-413
1997
- [26] P.A. RAVIART ET J.M. THOMAS *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles .*
Dunod
1993
- [27] B. STROUSTRUP *The C++ Programming Language, Special Edition.*
Pearson Education. ISBN 2-7440-7003-3
2003
- [28] R. VERFÜRTH *Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equation.*
Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle Analyse Numérique, 18 : 175 - 182
1984
- [29] R. VERFÜRTH *A review of a posteriori error estimation and adaptative mesh refinement techniques.*
Wiley-Teubner series, advances in numerical mathematics. ISBN10 : 0471967955, 3519026058
1996
- [30] S. VEYS. *Implémentation de l'opérateur de diffusion pour l'élément fini $Q1NC$ dans $Trio_U$.*
2008
- [31] BARBARA I. WOHLMUTH *A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces For The Lagrange Multiplier.*
SIAM J. Numer. Anal., vol.38 : 989-1012
2000