

N° d'ordre :

Thèse présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

École Doctorale : Transfert, dYnamique des Fluides, Energétiques & Procédés
Spécialité : Énergétique et Transfert

par

Adrien TOUTANT

MODÉLISATION PHYSIQUE DES INTERACTIONS ENTRE
INTERFACES ET TURBULENCE

Thèse soutenue le 4 décembre 2006 devant la commission d'examen :

Dr.	Alain BERLEMONT	CORIA Rouen	Rapporteur
Dr.	Marc BOUCKER	EDF Chatou	
Dr.	Olivier LEBAGUE	CEA Grenoble	Encadrant
Dr.	Dominique LEGENDRE	IMF-Toulouse	
Pr.	Pierre SAGAUT	LMM Paris VI	Rapporteur
Pr.	Olivier SIMONIN	IMF-Toulouse	Directeur de thèse

Abstract

Turbulent two-phase flows abound in nature and engineering applications. The complex interactions between interfaces and turbulence strongly impact the flow properties. Consequently, there is both a scientific and industrial interest to study this two-way coupling phenomenon. Local measurements, *e.g.* deformations of interfaces, are very difficult and the only tools able to provide information are numerical experiments. Unfortunately, Direct Numerical Simulations (DNS) have to entail a number of degrees of freedom proportional to the third power of the Reynolds number to correctly describe the flow behavior. This extremely hard constraint makes it impossible to use DNS for industrial applications. In order to successfully carry out industrial simulations their numerical cost has to be reduced.

Our strategy consists in using and improving DNS method in order to better understand the interaction between interfaces and turbulence. Thanks to this reliable tool, we simulate relevant test cases with the purpose of developing the Interfaces and Subgrid Scales concept. ISS is a two-phase equivalent to the single-phase Large Eddy Simulation (LES) concept. In this method, the geometry of interfaces is fully resolved. The challenge of ISS is to integrate the two-way coupling phenomenon into subgrid models. First, we describe our DNS method. Then, we explain our methodology to elaborate the ISS concept.

For DNS, we use a hybrid method front-tracking/Volume Of Fluid (VOF). This method is based on a single fluid formulation that allows writing only one momentum balance valid in the entire domain. Indeed, each variable is expressed as a sum of the liquid contribution and the gas contribution thanks to a phase indicator function.

- However, this formulation requires a closure technique for the dissipative term [88, 13]. Actually, this tensor which is constructed with the single fluid velocity and dynamic viscosity is not satisfactory. We have shown that the equivalent viscosity has to be evaluated by a harmonic average in the normal direction and an arithmetic average in the tangential direction. Two different methods allow us to perform this demonstration : one method originates in the discrete form of the dissipative tensor [29, 59] ; the other method consists in averaging the exact dissipative term on a control volume containing the interface [6]. This closure technique has been validated thanks to two analytical solutions : the two-phase Poiseuille flow, and the motion of a spherical bubble in a creeping flow. The dissipative tensor is responsible of local momentum transfers across the interfaces. That is the reason why this term has to be accurately evaluated for studying the interaction between interfaces and turbulence.
- Another crucial point in order to study this interaction concerns the scheme for time integration. Indeed, the position of the interfaces has to be very precise. For numerical convenience, we choose a third order Runge Kutta scheme [102]. We verify the good coupling between the momentum balance and the interface advection thanks to two simple test cases : the solid rotation of an interface and a bubble submitted to a uniform

accelerated field of velocity. It is worth noting that this type of time scheme is required to use a centered convective operator that is essential for the simulations of turbulence in order to limit numerical dissipation.

In the following section, we explain how we use the above DNS method to develop the ISS modeling.

- Before to elaborate complex LES models thanks to DNS and *a priori* tests, we have studied how under-resolution affects the flow behavior. We have made several calculations of the same physical case (one buoyant deformable bubble) with different resolutions. We have observed that the fact that the zigzagging trajectory of the bubble is not found is due to the bad description of its geometry. The simplest way to improve this description consists in refining the Lagrangian mesh (low cost) but not the Eulerian one (high cost). However, putting more than one Lagrangian point by Eulerian mesh creates numerical instabilities. So, we have developed a method able to suppress these instabilities by smoothing the interfaces. Our method does not modify the volume of bubbles and cuts the high frequencies of interfaces deformation (*i.e.* cutoff length equivalent to the Eulerian grid size) without altering the low frequencies of the interface motion. It has been validated with the analytical test case of bubble oscillations [51].
- Mathematically, under-resolution could be seen as a filter applied to the system of equations [80]. Applying a filter, we have exhibited correlations or subgrid terms that require closures. We have shown that, in two-phase flows, the presence of a discontinuity leads to specific subgrid terms. Indeed, interfaces create anisotropy and, as a result, correlations between the velocity on the one hand, and the normal at the interfaces, the viscosity or the density on the other hand, do exist. In order to sort out the subgrid terms related to these correlations, we have made *a priori* tests thanks to several DNS calculations. The most relevant of these DNS is the interaction of a strongly deformable bubble and a homogeneous isotropic turbulence [96]. Comparing the maximum of the norm of the subgrid terms with the maximum of the norm of the advection tensor, we have found that subgrid terms related to interfacial forces and viscous effect are negligible. Consequently, in the momentum balance, only the subgrid terms related to inertia have to be closed. The subgrid term related to advection is the equivalent of the classical Reynolds tensor. So, the first thing to do is to examine the eddy viscosity assumption. Our results show that standard models based on this assumption do not mimic the negative part of the equivalent turbulent viscosity. That is the reason why we choose to use structural modeling based on the Leonard and Germano decomposition [34]. Thanks to *a priori* tests performed on several DNS data, we demonstrate that this type of decomposition reinterpreted near discontinuity, provide subgrid models that integrate the two-way coupling phenomenon [46, 97].
- These models correspond to the first step of our strategy. Indeed, in this step, interfaces are smooth and, interactions between interfaces and turbulence occur in a transition zone where each physical variable varies sharply but continuously. The next challenge consists in determining the jump conditions across the sharp equivalent interface corresponding to the subgrid models of the transition zone. We propose to use the matched asymptotic expansion method [12]. The first results that we obtain for the velocity of the sharp equivalent interface are very promising.

In brief, we have improved a mixed front-tracking/VOF method in order to simulate accurately interactions between interfaces and turbulence. Thanks to reliable DNS, we study this two-way coupling phenomenon in the purpose of developing the ISS concept, an equivalent to

LES for two-phase flows. Further work concerns implementation and *a posteriori* tests of the developed models. We hope that ISS will be able to simulate (at a low cost, around 2 or 3 times less of degrees of freedom by direction than DNS) turbulent two-phase flows with many bubbles or droplets at high Reynolds numbers.

Πομφόλινξ ὁ ἄνθρωπος
Homo bulla

Table des matières

Abstract	iii
Table des matières	ix
Table des figures	xv
Nomenclature	xix
Introduction	1
I Simulation Numérique Directe	9
1 Le modèle de fluide	11
1.1 Modélisation des interfaces	11
1.2 Formalisme monofluide	12
1.3 Conclusion sur le modèle de fluide	16
2 Méthodes de SND des écoulements diphasiques	17
2.1 Les différentes méthodes de SND existantes	17
2.1.1 Méthodes à maillage mobile	18
2.1.2 Méthodes à maillage mixte	18
2.1.3 Méthodes à maillage fixe	18
2.2 La méthode mixte front-tracking/VOF de Trio_U	19
2.2.1 La discrétisation	19
2.2.2 L'algorithme du front-tracking dans la version actuelle de Trio_U	21
2.2.3 Bilan de volume d'une interface	22
2.2.4 Les courants parasites	22
2.3 Conclusion	24
3 Les améliorations apportées	25
3.1 La gestion des discontinuités	25
3.1.1 Modélisation	26
3.1.2 Validation	32
3.2 Schéma en temps Runge-Kutta d'ordre 3	38
3.2.1 Intérêt d'un schéma en temps compatible avec une discrétisation centrée du terme convectif	38
3.2.2 Notations	39
3.2.3 Le schéma temporel initial : Euler explicite	39
3.2.4 Le schéma proposé : Runge-Kutta d'ordre 3	40
3.2.5 Validation sur l'équation de transport de l'interface	41
3.2.6 Validation sur le couplage entre Navier-Stokes et le transport de l'interface	43
3.3 Raffinement lagrangien	44

3.3.1	Simulations sous-résolues	45
3.3.2	Hypothèses sur les plus petites déformations de l'interface	48
3.3.3	Un modèle de diffusion de courbure	50
3.3.4	Conclusion sur la méthode de raffinement lagrangien	55
3.4	Conclusion sur les améliorations apportées	56
4	Les simulations réalisées	57
4.1	Le 2D et la turbulence	57
4.2	Interaction bulle/tourbillons contrarotatifs	58
4.2.1	Validation	59
4.2.2	Fréquences propres	60
4.2.3	Comportement macroscopique	62
4.3	Montée d'une bulle à contre-courant	65
4.4	Cavité diphasique	66
4.5	Interaction d'une bulle avec une "turbulence de grille"	68
4.5.1	Turbulence Homogène Isotrope Entretienue	68
4.5.2	Interaction	74
4.6	Conclusion	81
II	Simulation des Grandes Echelles	83
5	SGE diphasique avec une vision continue des interfaces	85
5.1	Introduction	85
5.2	Moyenne et séparation d'échelles	87
5.2.1	Définition	87
5.2.2	Quelques exemples de filtre	89
5.3	Quelques modèles monophasiques classiques	93
5.3.1	Modélisation fonctionnelle	94
5.3.2	Modélisation structurelle	95
5.4	Equations monofluides filtrées	99
5.4.1	Discussion sur l'intérêt d'une moyenne de Favre	99
5.4.2	Equations filtrées	102
5.5	Hierarchie des termes sous-maille	104
5.5.1	Discretisation de l'opération de filtrage	105
5.5.2	Discretisation des dérivées spatiales et temporelle	106
5.5.3	Exploitation des SND réalisées	107
5.5.4	Conclusion sur la hiérarchisation des termes sous-maille	110
5.6	Modèles proposés	110
5.6.1	Examen de l'hypothèse de viscosité turbulente	111
5.6.2	Modélisation structurelle	112
5.7	Tests <i>a priori</i> des modèles proposés	115
5.7.1	Comparaison des modèles proposés et des contributions réelles des termes sous-maille	116
5.7.2	Corrélation entre les composantes des modèles proposés et celles des termes sous-maille correspondants	122
5.7.3	Corrélation entre la contribution énergétique des modèles proposés et celle des termes sous-maille associés	125
5.7.4	Conclusion sur ces tests <i>a priori</i>	125
5.8	Illustration des modèles continus proposés dans la zone de transition	126
5.9	Calcul analytique de l'indicatrice de phase moyennée	128
5.9.1	Approche isotrope	128
5.9.2	Approche anisotrope	130

5.9.3	Conclusion sur le calcul de la fonction indicatrice de phase filtrée	130
5.10	Conclusion sur la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces . . .	132
6	SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces : ISS	133
6.1	Intérêt d'une formulation discontinue	133
6.1.1	Intérêt théorique	133
6.1.2	Intérêt pratique	134
6.2	Présentation des méthodes pour le passage d'une vision continue à une vision discontinue des interfaces	134
6.2.1	Analyse générique des processus interfaciaux	135
6.2.2	Méthode des développements asymptotiques raccordés	139
6.3	Objectifs	146
6.4	Application de la méthode des développements asymptotiques raccordés	149
6.4.1	Adimensionnalisation des équations	149
6.4.2	Choix du système de coordonnées	150
6.4.3	Problème intérieur	150
6.4.4	Problème extérieur	153
6.4.5	Raccord entre la région intérieure et les régions extérieures	153
6.4.6	Relations de saut pour le problème extérieur à l'ordre 0	154
6.4.7	Vitesse du repère associé à l'interface	156
6.5	Système SGE discontinu fermé	160
6.5.1	Equation de transport de l'interface filtrée discontinue	161
6.5.2	Equation de continuité	162
6.5.3	Equation de bilan de quantité de mouvement	162
6.5.4	Système complet	163
6.6	Tests <i>a priori</i>	163
6.6.1	Difficulté générale de tester les résultats de DAR	164
6.6.2	Méthodologie dans le cas de l'équation de transport de l'interface	164
6.6.3	Implémentation des opérateurs surfaciques	165
6.6.4	Détermination des paramètres du modèle	166
6.6.5	Bien-fondé du modèle	167
6.7	Conclusion	174
7	Une première validation des nouveaux modèles	177
7.1	Hypothèses supplémentaires	177
7.1.1	Ecriture sous forme non conservative	177
7.1.2	Evolution de la courbure	178
7.1.3	Evaluation de la grandeur en excès	178
7.2	Tests <i>a posteriori</i>	179
7.2.1	Raffinement lagrangien	179
7.2.2	Effet des différents termes	179
7.3	Conclusion	181
	Conclusions et perspectives	183
	Annexes	187
A	Spectre d'énergie d'interface	189
A.1	Les harmoniques sphériques	189
A.2	Spectre d'énergie interfaciale	191
A.2.1	Surface d'un sphéroïde	191

A.2.2	Spectre d'énergie interfaciale	192
A.2.3	Validation de notre implémentation du calcul du spectre d'énergie interfaciale	192
A.3	Conclusion	192
B	Grandeur en excès	195
B.1	Trois définitions	195
B.2	Ecriture 1D de la définition volumique	196
B.3	Ecriture 1D de la définition à partir des flux	196
B.4	Réécriture de la définition 1D	197
B.5	Conclusion	197
C	Système de coordonnées associées à l'interface	199
C.1	Base naturelle associée à l'interface	199
C.2	Variations de la base naturelle	200
C.3	Etude des champs surfaciques tangents	200
C.3.1	Gradient de surface d'un champ scalaire surfacique	201
C.3.2	Gradient de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent	201
C.3.3	Divergence de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent	201
C.3.4	Rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent	201
C.3.5	Laplacien de surface d'un champ scalaire surfacique	202
C.4	Tenseur de courbure normale	202
C.5	Opérateurs de dérivation surfaciques	203
C.5.1	Opérateur gradient surfacique	203
C.5.2	Opérateur divergence surfacique	203
C.5.3	Opérateur laplacien surfacique	203
C.6	Opérateur gradient	204
C.6.1	Gradient d'un scalaire	204
C.6.2	Gradient d'un vecteur	204
C.6.3	Composante normale du tenseur des contraintes visqueuses	205
C.7	Opérateur divergence	205
C.7.1	Divergence d'un vecteur	205
C.7.2	Divergence du tenseur des contraintes visqueuses	206
C.8	Coefficients de Christoffel	206
C.9	Elément de volume	207
C.10	Théorème de la divergence surfacique	207
C.11	Conclusion	208
D	Evolution de la courbure	209
D.1	Démonstration	209
D.2	Illustration	212
D.3	Formulation mettant en évidence l'invariance galiléenne	212
D.4	Conclusion	214
E	Discrétisation des opérateurs de différenciation surfacique	215
E.1	Le théorème de Gauss	215
E.2	Région de Voronoï	216
E.3	Discrétisation du gradient surfacique	216
E.4	Discrétisation du tenseur de courbure	217
E.5	Discrétisation du laplacien surfacique	218
E.6	Conclusion	219
F	Méthode du simplexe	221

F.1	Définition	221
F.2	Description de la méthode	221
F.3	Conclusion	222
 Bibliographie		 225

Table des figures

1	Exemples d'écoulements diphasiques et turbulents	2
2	Spectre schématisant l'énergie globale du champ	3
3	Spectres schématisant la décomposition RANS (moyenne temporelle)	3
4	Spectres schématisant la décomposition RANS instationnaire (moyenne statistique)	4
5	Spectres schématisant la décomposition SGE	4
1.1	Détermination de la position de l'interface équivalente	12
2.1	Discrétisation en volumes finis	20
2.2	Volumes de contrôle	20
3.1	Notations pour le calcul du tenseur des contraintes visqueuses	28
3.2	Poiseuille diphasique	33
3.3	Profil de vitesse au centre du canal, maillage grossier (100x40)	34
3.4	Profil de vitesse au centre du canal, maillage fin (100x80)	34
3.5	Profil de vitesse au centre du canal, convergence en maillage de la moyenne harmonique : maillage fin (100x60) et maillage grossier (100x40)	35
3.6	Force de traînée	35
3.7	Conditions aux limites de la simulation numérique	37
3.8	Ordonnée du centre de la bulle en fonction du temps	37
3.9	Ecart à la vitesse théorique en fonction du temps	38
3.10	Convergence en maillage (grossier 150x150, moyen 300x300, fin 375x375)	39
3.11	Trajectoire du centre de gravité (comparaison Runge-Kutta 3 et Euler explicite)	42
3.12	Ecart entre position théorique et position réelle	42
3.13	Evolution temporelle de la coordonnée verticale (comparaison RK 3 et solution analytique)	43
3.14	Evolution temporelle de la surface de la bulle	44
3.15	Trajectoire et vitesse verticale du centre de gravité de la bulle	46
3.16	Mauvaise description géométrique des interfaces	47
3.17	Raffinement du maillage lagrangien	47
3.18	Echelle simulée et échelle modélisée pour l'énergie cinétique et l'énergie d'interface	48
3.19	Instabilités numériques lors d'un raffinement lagrangien	51
3.20	Oscillations de l'énergie d'interface (4 marqueurs par maille)	56
4.1	Conditions aux limites, conditions initiales et interaction des tourbillons avec l'interface	59
4.2	Evolution du maximum de vortacité	60
4.3	Etude de convergence en maillage	60
4.4	Echange entre énergie cinétique et énergie potentielle	63
4.5	Energie cinétique du gaz	64
4.6	Vitesse du centre de gravité	64
4.7	Fréquence des différents modes propres	65
4.8	Conditions aux limites, conditions initiales et allure du sillage	65

4.9	Trajectoire, vitesse et énergie d'interface de la bulle	66
4.10	Conditions aux limites, conditions initiales et interaction de la couche de mélange avec l'interface	67
4.11	Conditions aux limites, conditions initiales et interaction de la turbulence de grille avec l'interface	69
4.12	Spectre d'énergie du champ de vitesse initial	73
4.13	Evolution temporelle de l'échelle intégrale (THI entretenue)	73
4.14	Comparaison des amplitudes du spectre d'énergie cinétique entre THI en décroissance libre et THI entretenue	74
4.15	Isovaleurs (0,1-0,5-1) du critère Q au temps final de la THI entretenue	75
4.16	Découpage des deux problèmes	77
4.17	Spectre et autocorrélations	77
4.18	Evolution temporelle de la moyenne spatiale de l'intensité turbulente longitudinale	78
4.19	Décroissance spatiale de la moyenne temporelle de l'intensité turbulente longitudinale	79
4.20	Evolution temporelle de la coordonnée verticale du centre de la bulle	79
4.21	Ruptures provoquées par les structures turbulentes $We = 60$	80
5.1	Représentation schématique des structures tourbillonnaires et de l'interface résolues	87
5.2	Fonction de transfert et noyau de convolution associés au filtre porte	90
5.3	Fonction indicatrice de phase filtrée par un filtre porte	90
5.4	Fonction de transfert et noyau de convolution associés au filtre gaussien	91
5.5	Fonction indicatrice de phase filtrée par un filtre gaussien	91
5.6	Fonction de transfert et noyau de convolution associés au filtre boîte	92
5.7	Fonction indicatrice de phase filtrée par un filtre boîte	92
5.8	Décomposition spectrale basée sur l'hypothèse de similarité d'échelle	98
5.9	Origine des termes sous-maille spécifiques	105
5.10	Discretisation de l'opération de filtrage	106
5.11	Evolution temporelle du maximum de la norme des différents termes sous-maille dans l'équation de bilan de quantité de mouvement dans le cas de l'interaction d'une bulle avec deux tourbillons contrarotatifs.	108
5.12	Comparaison des intensités du terme convectif (à gauche) et du terme sous-maille qui lui est associé (à droite) avec le filtre $FiPt$	109
5.13	Comparaison des contributions énergétiques des termes sous-maille de l'équation de bilan de quantité de mouvement	110
5.14	Comparaison des composantes du terme visqueux et du terme sous-maille issu du terme convectif	111
5.15	Comparaison des contributions énergétiques du terme visqueux (à gauche) et du terme sous-maille issu du terme convectif (à droite)	112
5.16	La position de la bulle, sa géométrie et le champ de vitesse à l'instant choisi pour les tests <i>a priori</i> . La gravité est dans le plan de coupe (soit le plan de la feuille). Elle est dirigée du haut vers le bas tout comme l'écoulement moyen.	117
5.17	Comparaison du modèle proposé et du terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface	118
5.18	Comparaison du modèle proposé et du terme sous-maille lié à l'accélération	118
5.19	Comparaison du modèle proposé et du terme sous-maille lié à la convection	119
5.20	Corrélation entre le modèle proposé et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface	120
5.21	Corrélation entre la dérivée temporelle du modèle proposé et la contribution réelle du terme sous-maille lié à l'accélération	120

5.22	Corrélation entre la divergence du modèle proposé et la contribution réelle du terme sous-maille lié à la convection	121
5.23	Corrélation entre le modèle proposé et les composantes du tenseur sous-maille lié à l'accélération	123
5.24	Corrélation entre le modèle proposé et les composantes du tenseur sous-maille lié à la convection	124
5.25	Corrélation entre la contribution énergétique du modèle proposé et du terme sous-maille lié à l'accélération	125
5.26	Corrélation entre la contribution énergétique non conservative du modèle proposé et du terme sous-maille lié à la convection	125
5.27	Lignes de courant	127
5.28	Epaississement de l'interface	127
5.29	Taux de présence (interface sphérique)	129
5.30	Description d'une surface par ses rayons de courbure principaux ($R_1 = 1$) . . .	131
5.31	Notations géométriques (approche anisotrope)	131
6.1	Définition du volume de contrôle associé à la zone de transition interfaciale et d'une grandeur en excès	136
6.2	Décomposition du volume de contrôle entourant la discontinuité	137
6.3	Solutions d'un problème discontinue équivalent obtenues grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés	142
6.4	Allure du profil du champ de pression à l'équilibre et définition de la tension de surface	146
6.5	Détermination de la vitesse de la discontinuité équivalente pour les tests <i>a priori</i> sur l'équation de transport de l'interface dans le cadre de la SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces.	165
6.6	Evolution temporelle de l'erreur commise sur le transport de l'interface.	168
6.7	Comparaison entre contribution réelle et modèles, $t = 0$	170
6.8	Comparaison entre contribution réelle et modèles, $\frac{t}{\Delta t} = 200$	171
6.9	Comparaison entre contribution réelle et modèles, $\frac{t}{\Delta t} = 500$	172
6.10	Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $t = 0$	173
6.11	Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $\frac{t}{\Delta t} = 200$	173
6.12	Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $\frac{t}{\Delta t} = 500$	173
7.1	Convergence en maillage (grossier 150x150, moyen 300x300, fin 375x375)	180
7.2	Convergence du raffinement lagrangien	180
7.3	Etude de l'effet isolé de l'estimation des différents termes sous-maille	181
7.4	Etude de l'effet combiné de l'ensemble des modèles pour différentes pondérations	181
A.1	Coordonnées sphériques	190
A.2	Représentation des harmoniques sphériques Y_9^0 , Y_9^3 , Y_9^6 et Y_9^9	191
A.3	Spectre d'énergie de surface	193
B.1	Définition 3D du volume de contrôle associé à la zone de transition interfaciale et des coordonnées sphériques	196
C.1	Représentation d'un élément de surface, S , et de la courbe, C qui la limite . . .	208
D.1	Evolution du rayon	213
D.2	Lien entre dérivée lagrangienne et la dérivée associée au paramétrage normal .	213

E.1	Définition de la région de Voronoï	216
E.2	Notations géométriques d'un triangle T	217
E.3	Valeurs propres et vecteurs propres du tenseur de courbure normale, $t = 200\Delta_t$	218
F.1	Transformation possible au cours d'une étape de la méthode du simplexe . . .	222
F.2	Organigramme de la méthode de Nelder et Mead	223

Nomenclature

Les scalaires sont notés simplement alors que les vecteurs et tenseurs sont notés en **gras**.

Lettres latines

e_c	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$	densité massique d'énergie cinétique
g	$\text{m}.\text{s}^{-2}$	gravité
g	$\text{m}.\text{s}^{-2}$	norme du vecteur gravité
h	-	fonction de Heaviside
k	m^{-1}	nombre d'onde
\dot{m}	$\text{kg}.\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}$	flux de masse à travers l'interface (positif vers la vapeur)
n_k	-	normale unitaire sortante de la phase k
p	Pa	pression
r	m	longueur caractéristique d'un filtre
t	s	temps
u	$\text{m}.\text{s}^{-1}$	vecteur vitesse
u	$\text{m}.\text{s}^{-1}$	composante de vitesse suivant la direction x
v	$\text{m}.\text{s}^{-1}$	composante de vitesse suivant la direction y
w	$\text{m}.\text{s}^{-1}$	composante de vitesse suivant la direction z
D_b	m	diamètre équivalent d'une bulle
D	s^{-1}	tenseur du taux de déformation
G	m^{-3}	noyau de convolution
H	m^{-2}	courbure de Gauss
I	-	tenseur identité
L	m	longueur
P	-	projecteur dans le plan tangent à l'interface
R_b	m	rayon de courbure d'une bulle
S	Pa	tenseur des contraintes visqueuses
V	m^3	volume
(x, y, z)	m	coordonnées dans la base canonique fixe

Lettres Grecques

α	-	taux de présence volumique de la phase gazeuse
δ_σ	m^{-1}	fonction de Dirac associée à la position de l'interface
δ_{ij}	-	symbole de Kronecker
η	m	échelle de Kolmogorov
ϵ	-	petit paramètre
ε	$\text{m}^2.\text{s}^{-3}$	taux de dissipation visqueuse par unité de masse
κ	m^{-1}	courbure moyenne
μ	Pa.s	viscosité dynamique
ν	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	viscosité cinématique
ρ	$\text{kg}.\text{m}^{-3}$	masse volumique
σ	$\text{N}.\text{m}^{-1}$	tension de surface
χ	-	fonction indicatrice de phase
Δ_x	m	pas du maillage des SND
$\overline{\Delta}_x$	m	pas du maillage équivalent après un filtrage volumique
Δ_t	s	pas de temps
δ	m	épaisseur de la zone de transition
(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	m	coordonnées associées à l'interface
τ	(?)	tenseur sous-maille (l'unité dépend du tenseur)

Opérateurs

T	transposée
\star	produit de convolution
\otimes	produit tensoriel
\cdot	contraction simple
$:$	contraction double
$\nabla \cdot$	divergence
$\nabla_s \cdot$	divergence surfacique
∇	gradient
∇_s	gradient surfacique
Δ	laplacien
Δ_s	laplacien surfacique
$\langle \cdot \rangle$	moyenne statistique
$\overline{\cdot}$	moyenne volumique
$\overline{\cdot}_s$	moyenne surfacique
$\overline{\cdot}_\sigma$	moyenne surfacique restreinte à l'interface
$\sim f$	moyenne de Favre
\sim	limite asymptotique de la moyenne volumique
$\hat{\cdot}$	transformée de Fourier
$\cdot_{,i}$	dérivée partielle par rapport à la composante i
$[\phi] = \phi_l - \phi_g$	saut de la grandeur ϕ
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle par rapport au temps
$\frac{D}{Dt}$	dérivée particulière

Nombres adimensionnels

$Bo = \frac{\rho_l g D_b^2}{\sigma}$	nombre de Bond
$Mo = \frac{g \mu_l^4}{\rho_l \sigma^3}$	nombre de Morton
$Oh = \frac{\mu_l}{\sqrt{\sigma \rho_l} L}$	nombre de Ohnesorge
$Re = \frac{\rho_l \mathbf{u} L}{\mu_l}$	nombre de Reynolds
$We = \frac{\rho_l e_c D}{\sigma}$	nombre de Weber ¹

Indices courants

σ	grandeur relative à l'interface
k	grandeur relative à la phase k
g	grandeur relative à la phase gazeuse
l	grandeur relative à la phase liquide
b	grandeur relative à la bulle
n	composante suivant la direction normale à l'interface
t	composante suivant une direction tangente à l'interface

Abbreviations

DAR	Développements Asymptotiques Raccordés
ISS	<i>Interface and Subgrid Scales</i> (c'est le concept que l'on développe dans ce mémoire)
MILES	<i>Monotone Integrated Large Eddy Simulation</i>
RANS	<i>Reynolds Average Navier-Stokes</i>
REP	Réacteur à Eau Pressurisée
SGE	Simulation des Grandes Échelles (LES pour <i>Large Eddy Simulation</i> en anglais)
SND	Simulation Numérique Directe (DNS pour <i>Direct Numerical Simulation</i> en anglais)
WALE	<i>Wall Adapting Local Eddy-viscosity</i>

¹Dans ce mémoire on utilise le nombre de Weber dans des situations où on se place dans le repère de la bulle. Par conséquent, on estime la vitesse relative entre les deux phases par la racine carrée de la densité massique d'énergie cinétique turbulente e_c .

Introduction

DANS l'expression populaire, *buller* ou *coincer sa bulle* signifie échapper aux turbulences du quotidien, le temps d'une sieste par exemple. En histoire de l'art, les bulles sont une métaphore de la fragilité de la condition humaine, de son caractère éphémère [75]. Ainsi, paradoxalement, isolé dans sa bulle, on se sent protégé mais, incarné en une bulle on est en danger. En mécanique des fluides, on retrouve ce paradoxe. En effet, en apparence fragiles, car susceptibles de subir des changements de topologie sous l'influence de l'agitation turbulente des phases, les interfaces agissent de façon significative sur les propriétés de la turbulence. On retrouve ces interactions complexes entre interfaces et turbulence dans la plupart des écoulements naturels et industriels. Dans les milieux naturels, les interactions entre interfaces et turbulence sont nécessaires à la compréhension du déferlement des vagues, ou de la déformation de la surface d'une rivière cisailée par le vent. Dans l'industrie de la chimie et des procédés, la présence de bulles augmente l'agitation et les surfaces d'échange. Le contrôle de la taille des gouttes lors de l'injection de carburant dans une chambre de combustion permet d'en optimiser le rendement. Les écoulements diphasiques et turbulents se rencontrent aussi dans le domaine énergétique avec les évaporateurs et les condenseurs, ou encore le transport pétrolier en conduite. Enfin, l'injection de bulles peut être utilisée pour réduire la traînée d'objets immergés par rapport à un écoulement monophasique.

Problématique

Les écoulements diphasiques et turbulents sont donc très répandus et apparaissent sous des types très divers. Cependant, de façon générale, ils se caractérisent par la présence d'échelles temporelles et spatiales très différentes. En effet, peuvent coexister au sein d'un même écoulement des interfaces de taille très différentes. Dans le cas des écoulements en conduite, on peut trouver de gros bouchons suivis par un panache de petites bulles dont le diamètre peut être plus de mille fois inférieur à celui du bouchon (fig. 1(a)). Dans le cas de surface libre, l'arrachement de gouttes conduit généralement à des rapports d'échelles encore plus grands. A chacune de ces échelles diphasiques correspondent nécessairement des structures turbulentes à l'origine des déformations interfaciales ou/et créées par elles (fig. 1(b)). La turbulence vient donc encore augmenter la richesse des échelles en présence. On peut représenter l'ensemble des échelles de l'écoulement par le spectre de l'énergie globale (fig. 2).

Calculer l'ensemble de ces échelles (ce que l'on fait en Simulation Numérique Directe, SND ou DNS en anglais pour Direct Numerical Simulation) est extrêmement coûteux numériquement. Les ordres de grandeur de celles-ci s'échelonnent depuis la taille caractéristique des plus grandes structures de l'écoulement considéré (échelle intégrale) jusqu'à celle des plus petites structures dynamiquement actives, correspondant à l'échelle dissipative

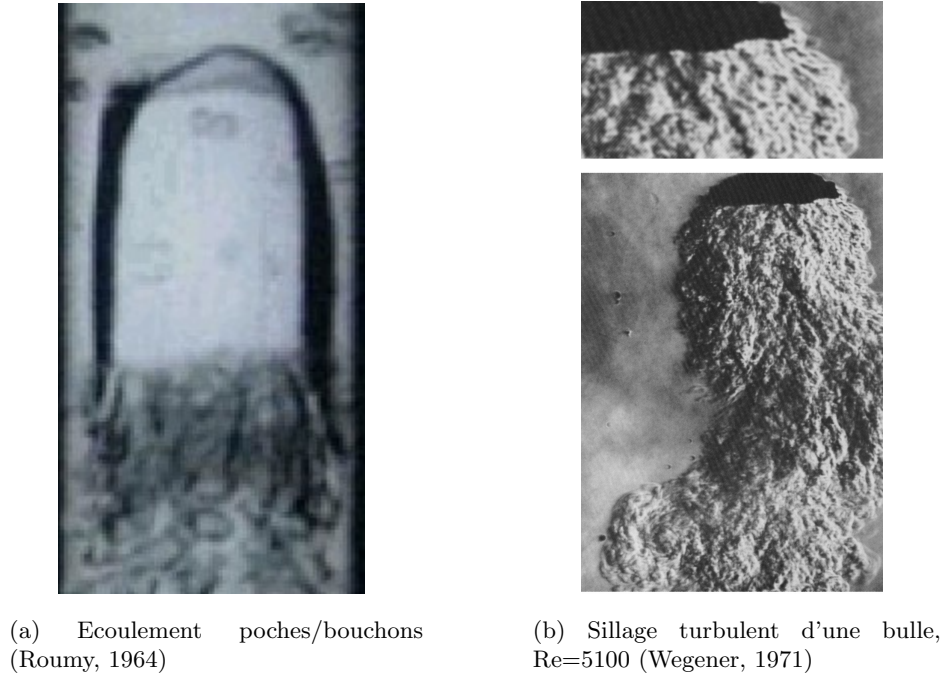


FIG. 1 – Exemples d'écoulements diphasiques et turbulents

de Kolmogorov. Le rapport entre ces deux échelles suit, pour la turbulence homogène isotrope, la loi suivante

$$\frac{L}{\eta} = O(Re^{3/4}) \quad (1)$$

où le nombre de Reynolds Re mesure l'importance relative des forces d'inertie et des forces dissipatives. La turbulence étant par nature tridimensionnelle, la relation précédente implique que le nombre de degrés de liberté de la simulation est proportionnel à $(Re^{3/4})^4 = Re^3$. Cela limite aujourd'hui l'application de la simulation numérique directe (SND) des écoulements turbulents à l'étude d'écoulements à faibles valeurs du nombre de Reynolds (typiquement $Re \sim 10^3$). Cela est très insuffisant pour traiter des configurations industrielles (Re souvent supérieur à 10^6). On pourra retrouver ces considérations sur la DNS monophasique ainsi que de nombreuses autres dans l'article de Moin et Mahesh [68]. En conséquence, des méthodes ont été développées en vue de réduire le nombre de degrés de liberté nécessaire à la description de l'écoulement. Ces méthodes ont initialement été développées pour des écoulements monophasiques puis adaptées à des écoulements diphasiques. Citons :

- Les méthodes statistiques (k-epsilon et RANS pour Reynolds Averaged Navier-Stokes) [74],
- La simulation des grandes échelles (SGE) (LES en anglais : Large Eddy Simulation) qui s'intéresse à la partie basse fréquence du champ [80].

Les méthodes statistiques ne calculent que la partie moyenne du champ (fig. 3). Les équations portent uniquement sur cette partie, ce qui diminue énormément le nombre de degrés de liberté. En particulier, ni la turbulence ni les interfaces ne sont explicitement représentées et leurs effets sur le champ moyen sont modélisés. Pour un écoulement possédant des directions homogènes, le nombre de dimensions peut être réduit de 4 (3 en espace et 1 en temps) à 3, 2 ou 1. Cette réduction du nombre de degrés de liberté rend ce type de méthode séduisant en vue d'applications industrielles.

Malheureusement, la réduction conséquente du nombre de degrés de liberté entraîne un considérable effort de modélisation qu'il est souvent nécessaire de renouveler sur chaque confi-

guration de calcul (problème de manque d'universalité des modèles). Par exemple, développer un modèle issu d'un processus de moyenne statistique qui tienne compte d'une population de bulles homogène (*i.e.* de tailles et de formes comparables) sera *a priori* inefficace pour traiter un écoulement de type poches/bouchons. De plus, les phénomènes instationnaires à large bande ne peuvent être décrits par ces méthodes. En revanche, une instabilité découplée de la turbulence peut être calculée par ces méthodes qualifiées alors d'instationnaires (fig. 4).

La simulation des grandes échelles permet quant à elle de capturer ces phénomènes. Elle décrit en effet toutes les structures de taille supérieure à une certaine échelle de longueur appelée longueur de coupure. Seule la partie à haute fréquence de l'écoulement (petites échelles spatiales) est modélisée (fig. 5). La longueur de coupure est choisie de façon à ce que les structures modélisées soient peu énergétiques et de comportement relativement découplé de celui de l'écoulement moyen, ce qui facilite leur modélisation. Dans ce cadre, les interfaces peuvent être ou ne pas être explicitement résolues suivant que la longueur de coupure choisie est plus ou moins grande que les tailles caractéristiques des inclusions. Idéalement, une méthode de type SGE adaptée aux écoulements diphasiques devrait modéliser l'action des plus petites inclusions, simuler effectivement les grandes interfaces et être capable de *transformer* une interface modélisée en interface simulée pour des phénomènes de coalescence (ou l'inverse pour des phénomènes de rupture).

En contrepartie, la réduction du nombre de degrés de liberté est nettement moins importante que dans le cas des méthodes statistiques et, une partie de la turbulence étant représentée, les calculs sont forcément à 4 dimensions (3 en espace et 1 en temps). Il s'ensuit que le coût numérique des calculs est encore élevé. La vocation de la SGE est donc (avec les moyens de calcul actuel) de combler l'écart entre les codes industriels et académiques.

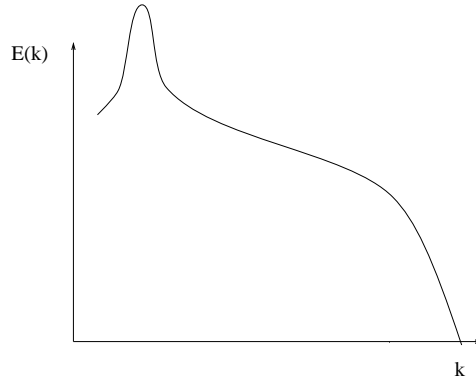


FIG. 2 – Spectre schématisant l'énergie globale du champ
En abscisse : Nombre d'onde ; en ordonnée : Energie totale

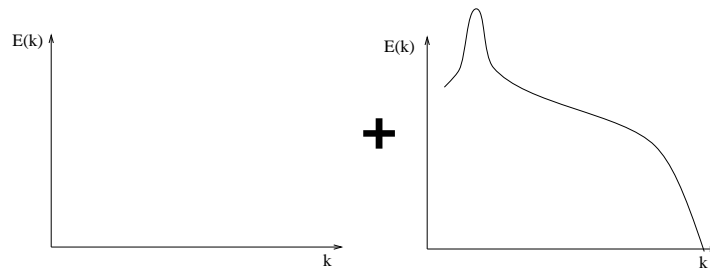


FIG. 3 – Spectres schématisant la décomposition RANS (moyenne temporelle)
Gauche : Energie turbulente calculée ; droite : Energie turbulente modélisée

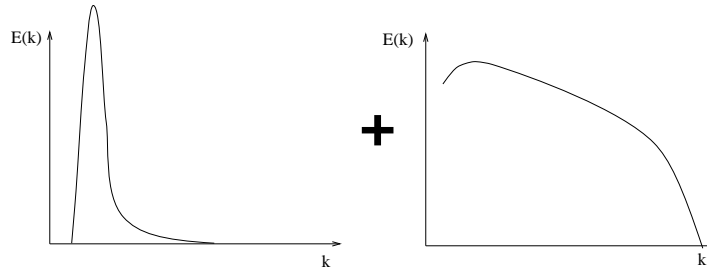


FIG. 4 – Spectres schématisant la décomposition RANS instationnaire (moyenne statistique)
Gauche : Energie turbulente calculée ; droite : Energie turbulente modélisée

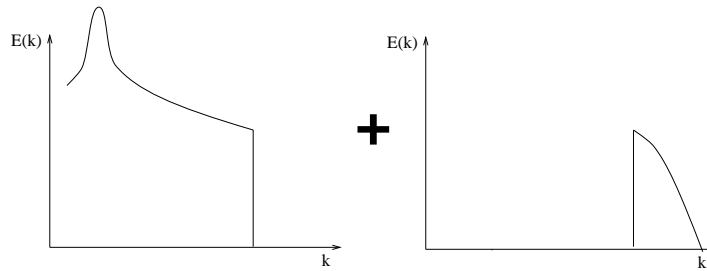


FIG. 5 – Spectres schématisant la décomposition SGE
Gauche : Energie turbulente calculée ; droite : Energie turbulente modélisée

Etat de l'art

La grande majorité des calculs numériques d'écoulements diphasiques et turbulents ont adopté une modélisation de type RANS. Les modèles monophasiques classiques ont souvent été utilisés en diphasique sans qu'auparavant, l'effet sur la dynamique de l'écoulement de la présence d'interfaces ait été réellement étudié. Sato *et al.* [83, 82] font l'hypothèse que les effets de la turbulence inhérente au liquide indépendante de l'existence des bulles d'une part, et de la turbulence supplémentaire due à l'agitation des bulles d'autres part, se superposent linéairement. Ils développent pour la turbulence induite par les bulles un modèle de longueur de mélange basé sur le taux de vide. Leur modèle complet consiste donc à introduire une diffusion supplémentaire liée à la présence des bulles. Ceci revient à supposer que la présence de bulles augmente nécessairement la turbulence de la phase liquide et empêche de reproduire les situations où il y a suppression de turbulence par les bulles [101]. Homescu et Panday ont fait différents calculs RANS d'un phénomène de condensation dans un tube horizontal [38]. De façon générale, l'avantage des approches RANS est de permettre la simulation d'écoulements très complexes. Malheureusement, dans ce type d'écoulement, de nombreux phénomènes physiques sont en jeu et il est, par exemple, difficile de distinguer les effets des modélisations de l'action des interfaces de ceux des modèles de la turbulence.

La SGE a aussi été utilisé pour calculer des écoulements diphasiques. Une grande partie de ces travaux, concerne des sprays ou des écoulements dont les particules sont plus petites que l'échelle de Kolmogorov [7, 22, 24, 49, 65, 92]. Dans ce cas où l'une des deux phases est dispersée et où ces inclusions sont de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov, d'importantes avancées ont été faites. Un autre type d'écoulement très étudié est le cas de la surface libre indéformable d'un canal. Calmet et Magnaudet [11] décrivent les caractéristiques de la turbulence de proche interface à partir des SGE qu'ils ont réalisées ; Shen et Yue [88] développent de nouveaux modèles sous-maille. Dans tous ces travaux, seule une des phases est résolue. Notre intérêt

concerne d'avantage les interfaces déformables et la SGE d'écoulement diphasique dont les inclusions sont plus grandes que les mailles. Ceci est relativement différent car alors, les deux phases sont turbulentes et les interfaces sont le lieu de transferts. Lakehal *et al.* [50] ont développé un modèle sous-maille fondé sur l'analyse de Drew et Lahey [18] des forces agissant sur une sphère et le principe de similarité d'échelle [4]. D'autres travaux concernent l'adaptation de modèle standard de SGE pour l'étude du déferlement des vagues. Cependant, à notre connaissance, aucun modèle ne tient explicitement compte de l'effet de la topologie des interfaces. Pourtant, des études à partir de SND montrent que le caractère déformable des interfaces influence même les caractéristiques macroscopiques de l'écoulement [10].

Quelque soit la démarche adoptée, RANS ou SGE, il ressort que la compréhension de la turbulence en écoulement diphasique est très incomplète et qu'il reste des controverses sur des problèmes essentiels de fermeture.

Objectif scientifique

L'intérêt industriel du CEA, qui a principalement motivé cette thèse, concerne l'ébullition convective qui peut avoir lieu dans les circuits de refroidissement des centrales nucléaires et plus particulièrement dans les sous-canaux des Réacteurs à Eau Pressurisée (REP). Le flux de chaleur nominal aux parois des crayons de combustibles est optimisé afin de produire le maximum d'énergie en restant, de façon certaine, en dessous de la limite pour laquelle apparaît la crise d'ébullition et la possibilité d'un accident nucléaire. La physique détaillée de cet écoulement est mal connue. Par conséquent, l'optimisation du rendement est faite avec des marges de sécurité contraignantes qu'une meilleure connaissance permettrait sans doute de réduire. Pour étudier cette physique, les techniques expérimentales sont très délicates voire impossibles à mettre en oeuvre car elles sont intrusives et ne fournissent pas suffisamment d'informations locales. De plus, cet écoulement diphasique et turbulent n'échappe pas au constat général que nous avons fait précédemment : ces échelles¹ sont telles qu'on ne peut guère espérer réaliser des SND. Il s'agit donc de développer des méthodes et des modèles capables de réduire le coût numérique des simulations de tels écoulements.

Parce que l'objectif final concerne des phénomènes fortement instationnaires avec des transferts importants à travers les interfaces, nous avons choisi de développer un équivalent de la SGE pour les écoulements diphasiques. Notre proposition est ISS pour Interface and Subgrid Scales. Dans cette méthode, la géométrie des interfaces est pratiquement entièrement résolue. Ceci signifie que les plus petites inclusions restent beaucoup plus grosses que la taille des mailles de calcul². Malgré cela, les modèles développés tiennent compte d'une forte déformation locale d'interface lorsqu'elle est sous-résolue. Le défi consiste à intégrer dans des modèles de sous-maille les interactions complexes entre interfaces et turbulence. Ces interactions sont parfois nommées phénomène "two-way coupling" pour insister sur le fait que les fluctuations de vitesse de l'écoulement déforment l'interface et, qu'en retour, la déformation et le déplacement de l'interface produisent des fluctuations. Afin de tenir compte des interactions entre interfaces et turbulence dans le développement de modèles sous-maille, nous nous interrogerons par exemple sur :

¹Classiquement, dans un sous-canal de REP dont le diamètre hydraulique est de 12 mm, où la pression est d'environ 15 MPa et la vitesse de 3,5 m.s⁻¹, l'échelle de Kolmogorov est d'environ 1 μ m alors que la taille caractéristique des bulles est supposée être proche de 150 μ m et on s'intéresse à un domaine qui contient au moins une centaine de bulles.

²Typiquement, pour le sous-canal de REP, avec une taille de maille dix fois supérieure à l'échelle de Kolmogorov (soit un gain de 1000 en trois dimensions par rapport à un calcul SND), il reste encore quinze mailles par diamètre de bulle.

- le rôle de la tension de surface lors des transferts énergétiques,
- les effets induits par la courbure sur la dynamique de l'écoulement,
- la forme des relations de saut pour les équations moyennées.

Il est important de noter qu'au niveau de modélisation où nous nous plaçons, les bulles ou les gouttes ne constituent pas des entités. On n'étudie pas :

- comment l'écoulement modifie la dynamique d'une bulle mais comment, localement, il modifie sa géométrie,
- comment la présence d'une bulle modifie l'écoulement mais comment, localement, la présence d'une portion d'interface modifie l'écoulement.

Pour ce type d'études, il est indispensable de disposer de l'ensemble des grandeurs locales instantanées. Notamment parce qu'elles sont intrusives, les techniques expérimentales actuelles ne permettent pas de mesurer suffisamment de détails de façon simultanée. Les méthodes de SND sont alors un outil puissant pour le développement du concept ISS. De plus, les SND d'écoulements diphasiques et *a fortiori* turbulents sont encore rares. Nous avons donc été amenés à utiliser et à améliorer une méthode de SND. Elle nous a permis de réaliser des simulations originales à partir desquelles nous avons développé les modèles ISS.

Présentation du mémoire

Afin de développer le concept ISS, notre proposition d'un équivalent de la SGE pour le diphasique, nous avons distingué deux étapes à notre travail. La première étape consiste à produire des données d'études qui concernent les interactions entre interface et turbulence, la seconde à les exploiter pour construire des modèles qui tiennent compte de ces interactions. A cause de la difficulté des mesures en proche interface, nous avons choisi d'analyser le phénomène de *two-way coupling* grâce à la SND.

Simulation Numérique Directe

Ce mémoire commence par expliquer le choix du modèle de fluide (chapitre 1). On établit alors les équations du formalisme monofluide. Dans le chapitre 2, nous présentons rapidement l'ensemble des différentes méthodes numériques qui permettent de simuler les écoulements diphasiques et plus précisément celle que nous avons utilisée : une méthode mixte Front-tracking/VOF. Afin de perfectionner cette méthode du point de vue de la simulation de la turbulence, on propose, dans le chapitre 3, d'utiliser une prise en compte de la viscosité différente suivant les directions normale ou tangentielles ainsi qu'un schéma en temps de type Runge-Kutta d'ordre 3. L'introduction d'une nouvelle discrétisation du tenseur moyen des contraintes visqueuses permet de mieux évaluer les transferts de quantité de mouvement à l'interface. Un schéma en temps de type Runge-Kutta d'ordre 3 augmente considérablement la précision par rapport au schéma d'Euler précédemment utilisé, de plus, il permet d'utiliser une discrétisation centrée pour le terme convectif de l'équation de bilan de quantité de mouvement ce qui permet indirectement de limiter la diffusion numérique. A la fin du chapitre 3, on évalue les effets dus à une sous-résolution. On constate que la sous-résolution conduit à une mauvaise description géométrique des interfaces. Afin de limiter cet effet, on propose une technique qui permet de raffiner le maillage lagrangien. Ces trois améliorations nous ont permis de réaliser de nombreuses SND de situations caractéristiques des interactions entre interfaces et turbulence. On les décrit dans le chapitre 4. L'interaction d'une bulle et d'une turbulence de grille constitue une part vraiment originale de notre travail.

Dans cette première partie, nous nous sommes dotés d'une méthode de SND pour les écoulements diphasiques turbulents. Nous avons réalisé et validé des SND de situations académiques représentatives des interactions entre interfaces et turbulence dont nous avons donné une première interprétation physique. Dans la deuxième partie de ce mémoire, on utilise les champs locaux instantanés fournis par ces SND pour développer le concept ISS.

Simulation des Grandes Echelles

La SGE peut être abordée de deux façons différentes : une façon essentiellement pragmatique consiste à mesurer les effets d'une sous-résolution en réalisant des calculs dont on sait que le maillage est trop grossier pour simuler l'ensemble des phénomènes physiques ; une façon très théorique où on filtre analytiquement les équations pour exhiber les termes sous-maille qui sont alors décomposés en parties faisant intervenir les grandeurs résolues ou non résolues. On a choisi de combiner les deux approches.

Au début du chapitre 5, on insiste sur le fait que l'on filtre les équations avec un filtre centré qui peut être à cheval sur l'interface. Ceci est licite car les équations monofluides sont définies partout et nous permet de retrouver formellement la notion de description géométrique dégradée (*i.e.* d'interface filtrée). On présente ensuite le formalisme de la SGE et les modèles classiques pour les écoulements monophasiques incompressibles. Le reste du chapitre est consacré à la mise en évidence des termes sous-maille spécifiques au diphasique, à leur hiérarchisation ainsi qu'à la modélisation des termes prépondérants. On dispose alors d'un système fermé pour la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces. Le chapitre 6 est dédié à la transformation de ce système en un système équivalent où les interfaces sont à nouveau considérées comme des surfaces de discontinuité. Pour ce faire, on utilise des méthodes classiques de la SND qui permettent d'étudier la limite asymptotique discontinue des formulations qui modélisent les interfaces comme des zones volumiques de transition. On précise ainsi les conditions de sauts des grandeurs filtrées et on établit les équations monofluides de la SGE diphasique. Dans le chapitre 7, on réalise les premiers tests *a posteriori* de nos modèles. Nous comparons l'évolution temporelle de la coordonnée verticale du centre de gravité d'une bulle en ascension obtenue par une SND et une SGE diphasique.

Première partie

Simulation Numérique Directe

Le modèle de fluide

LES ÉQUATIONS de Navier-Stokes sont souvent un point de départ pour la modélisation des écoulements de fluide. Cependant, elles ne sont elles-mêmes qu'un modèle qui repose sur l'hypothèse des milieux continus. Il est intéressant de noter les liens entre la modélisation qui existe à ce niveau où l'on cherche à s'affranchir d'une description moléculaire et, celle que nous serons amenés à faire en filtrant les équations de Navier-Stokes pour s'affranchir de décrire explicitement les petites échelles interfaciales et turbulentes de l'écoulement. Nous ne ferons pas ce parallèle dans sa globalité mais seulement pour la description des interfaces. Ainsi, dans ce chapitre, nous insisterons, avant d'établir les équations du formalisme monofluide, sur la modélisation des interfaces qui lui est sous-jacente. La formulation monofluide nous servira alors de base formelle pour l'étude des interactions entre interface et turbulence.

1.1 Modélisation des interfaces

A l'échelle moléculaire, une interface liquide-gaz (ou liquide-vapeur) correspond à une zone de transition où la masse volumique passe progressivement d'une valeur moyenne dans le liquide à une valeur moyenne dans le gaz (ou la vapeur). La courbe en trait plein de la figure 1.1 représente cette variation. La taille de la zone de transition est de l'ordre de quelques libres parcours moyens des molécules. Ceci signifie qu'elle est de l'ordre de un à quelques diamètres moléculaires pour une interface liquide-vapeur près du point critique, et peut atteindre des dimensions macroscopiques lorsque l'on s'en éloigne. Il est possible d'écrire un système d'équations qui décrit un milieu diphasique en tenant compte, rigoureusement d'un point de vue thermodynamique, de cette variation continue de la masse volumique. Pour les interfaces liquide-vapeur, la méthode du second gradient utilise une telle description [41]. Dans le cas de fluides non miscibles, l'équation dite de Cahn-Hilliard permet de décrire les interfaces comme une zone continue de transition [1]. Plus classiquement, le formalisme monofluide (notre choix pour la description d'un milieu diphasique) considère les interfaces comme des surfaces de discontinuité des grandeurs physiques. En supposant que la masse volumique de chaque phase est constante loin de la zone interfaciale, cette description discontinue revient à prolonger ces valeurs constantes jusqu'à la surface de discontinuité. C'est, par exemple, la courbe en pointillé de la figure 1.1. On dispose alors d'un degré de liberté supplémentaire : le choix de l'emplacement de la surface de discontinuité. En général, pour simplifier l'écriture des équations de bilan, on choisit la position de la surface de façon à conserver la masse.

Avec un autre vocabulaire, on dit que l'on choisit la position de l'interface équivalente de façon à avoir une masse volumique en excès qui soit nulle. En notant ρ la masse volumique variant continûment, ρ_l la masse volumique du liquide, ρ_g celle du gaz, h une échelle de longueur grande devant l'épaisseur de la zone de transition et x_σ la position de la surface de discontinuité, on définit x_σ de façon à satisfaire l'égalité :

$$\int_{-h}^h \rho(x) dx = \int_{-h}^{x_\sigma} \rho_l dx + \int_{x_\sigma}^h \rho_g dx \quad (1.1)$$

Suivant l'asymétrie du profil de la masse volumique, x_σ est plus ou moins au centre de la zone de transition. Après avoir appliqué un filtre aux équations de Navier-Stokes (chapitre 5), nous suivrons à nouveau ce raisonnement mais à une autre échelle afin de définir une surface de discontinuité équivalente (chapitre 6).

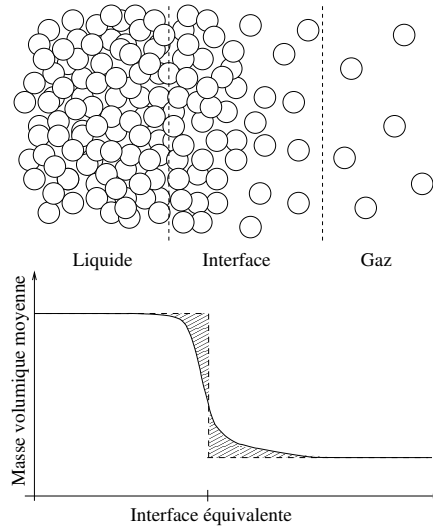


FIG. 1.1 – Détermination de la position de l'interface équivalente

1.2 Formalisme monofluide

Nous allons établir une formulation dite monofluide, dans un cadre incompressible et en supposant que les interfaces sont des surfaces de discontinuités. Ce formalisme permet de condenser en une seule équation locale instantanée les bilans de chacune des deux phases et le bilan à l'interface. On pourra, pour plus de précision ou pour connaître les équations d'énergie et de température monofluides que nous n'énoncerons pas ici, se reporter au travail de thèse de Christophe Duquennoy [20]. Pour l'historique du formalisme monofluide, on se référera aux travaux d'Ishii [40] et Kataoka [44].

On suppose que la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ sont constantes dans chaque phase et on se place dans le cadre des écoulements incompressibles. On écrit les équations pour chaque phase dans un domaine Ω_k (dans le cas du diphasique liquide-gaz, on a $k=g$ lorsqu'il s'agit de la phase gazeuse et $k=l$ pour la phase liquide).

Équation de bilan de masse :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_k) = 0 \quad (1.2)$$

Équation de bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) = \rho_k \mathbf{g} - \nabla p_k + \nabla \cdot \mathbf{S}_k \quad (1.3)$$

où \mathbf{S}_k est le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\mathbf{S}_k = \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k) \quad (1.4)$$

On prolonge les champs de chaque phase sur le domaine total Ω grâce à la fonction indicatrice, χ_k , définie par

$$\begin{aligned} \chi_k(\mathbf{x}) &= 1 \text{ si } \mathbf{x} \in \Omega_k \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (1.5)$$

On montre simplement que ces fonctions ont les propriétés suivantes :

$$\sum_k \chi_k = 1 \quad (1.6a)$$

$$\chi_m \chi_n = \delta_{mn} \chi_m \quad (1.6b)$$

$$\nabla \chi_k = -\mathbf{n}_k \delta_\sigma \quad (1.6c)$$

Par ailleurs, l'équation de transport de χ_k s'écrit classiquement

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{v}_\sigma \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (1.7)$$

où \mathbf{v}_σ est la vitesse de l'interface, \mathbf{n}_k est la normale à l'interface orientée vers l'extérieur de la phase k et δ_σ est une fonction de Dirac centrée sur l'interface.

Enfin, on a les relations de saut suivantes : Relation de saut de la quantité de mouvement (Delhay 1974) [17]

$$\sum_k (\mathbf{u}_k \dot{m}_k - \mathbf{n}_k \cdot (-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k)) + (\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}) \delta_\sigma = 0 \quad (1.8a)$$

où \mathbf{I} représente l'opérateur identité et la normale \mathbf{n} est indifféremment entrante ou sortante de la phase k. L'indice $_s$ signifie que les opérateurs de différenciation sont des opérateurs surfaciques. Ils sont précisément définis dans l'annexe C. Rappelons simplement ici que $-\nabla_s \cdot \mathbf{n}$ est la courbure moyenne de la surface, κ .

Relation de saut de la composante tangentielle de la vitesse :

$$\mathbf{u}_g^t = \mathbf{u}_l^t \quad (1.8b)$$

Relation de saut pour le bilan de masse à l'interface

$$\dot{m}_l = -\dot{m}_g \quad (1.8c)$$

où \dot{m}_k est le débit massique défini par $\dot{m}_k = \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_k$

Pour transformer les équations de chaque phase k , on multiplie par la fonction indicatrice χ_k , on la fait rentrer dans les dérivées en prenant soin de soustraire ce qu'on a ajouté grâce à l'équation de transport (1.7) et à l'expression du gradient de χ_k (1.6c). On obtient alors :

Équation monofluide de bilan de masse :

$$\nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{u}_k \right) + \sum_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_\sigma = 0 \quad (1.9)$$

Équation monofluide de bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \right) &= \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{g} - \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k p_k \right) + \\ &\quad \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \right) + \\ &\quad \sum_k [\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{v}_\sigma - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k \cdot (-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k)] \delta_\sigma \end{aligned} \quad (1.10)$$

On transforme cette équation en utilisant la relation de saut de la quantité de mouvement (1.8a) :

Équation monofluide de bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \right) &= \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{g} - \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k p_k \right) + \\ &\quad \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \right) + \\ &\quad (\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}) \delta_\sigma \end{aligned} \quad (1.11)$$

En utilisant les grandeurs monofluides $\mathbf{u} = \sum_k \chi_k \mathbf{u}_k$ et la propriété

$$\rho \mathbf{u} = \sum_k \chi_k \rho_k \sum_k \chi_k \mathbf{u}_k = \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k, \quad (1.12)$$

on obtient la forme plus condensée :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \right) + (\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}) \delta_\sigma \quad (1.13)$$

Il est important de noter que dans l'équation précédente, le tenseur des contraintes visqueuses n'est pas exprimé en fonction de grandeurs monofluides mais à partir des vitesses phasiques. On ne peut pas introduire la vitesse monofluide dans ce terme comme dans les autres à cause de la double dérivation (divergence du gradient de vitesse). En effet, cela aurait pour conséquence de faire apparaître le produit $\chi_k \delta_\sigma$:

$$\chi_k \mu_k \nabla \mathbf{u}_k = \chi_k \mu_k (\nabla (\chi_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{n}_k \delta_\sigma) \quad (1.14)$$

Et, on ne sait donner aucun sens à ce produit de deux distribution. Dans ce mémoire, nous ne considérerons que des écoulements isothermes et sans changement de phase. Dans ce cas,

- le champ de vitesse est entièrement continu à la traversée de l'interface (seules les composantes tangentes l'étaient dans le cas général),
- la vitesse de l'interface est simplement la vitesse des phases (ceci est une conséquence de la continuité du champ de vitesse signalée précédemment),
- la tension de surface peut être considérée comme constante et uniforme (cette dernière hypothèse est souvent également faite dans un cadre anisotherme et avec changement de phase). Dans la suite de ce travail, nous supposerons toujours être dans ce cas. Par conséquent, les forces capillaires que l'on considère sont uniquement normales à l'interface (leurs composantes tangentielles sont nulles, il n'y a pas d'effet Marangoni). L'énergie d'interface (*i.e.* l'énergie potentielle) d'une bulle est alors simplement égale au produit de la tension de surface par la surface de la bulle en 3D ou son périmètre en 2D.

Les équations monofluides que nous avons établies se simplifient alors un peu : l'hypothèse d'incompressibilité est identique au cas monophasique, le terme de gradient surfacique de la tension de surface dans l'équation bilan de quantité de mouvement disparaît et, puisque toutes les composantes de la vitesse sont continues, on peut définir le tenseur monofluide des contraintes visqueuses. En effet, la continuité du champ de vitesse permet de supprimer le produit de distribution $\chi_k \delta_\sigma$ que l'on ne sait pas définir mathématiquement

$$\begin{aligned}
 \mu \nabla \mathbf{u} &= (\chi_g \mu_g + \chi_l \mu_l) \nabla (\chi_g \mathbf{u}_g + \chi_l \mathbf{u}_l) \\
 &= (\chi_g \mu_g + \chi_l \mu_l) (\chi_g \nabla \mathbf{u}_g + \chi_l \nabla \mathbf{u}_l + \underbrace{(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g) \otimes \mathbf{n}}_0 \delta_\sigma) \\
 &= \chi_g \mu_g \nabla \mathbf{u}_g + \chi_l \mu_l \nabla \mathbf{u}_l
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{n}_g$ est la normale qui est orientée de la phase gazeuse vers la phase liquide. Par souci de clarté, on a écrit les égalités sans tenir compte du gradient transposé mais cela ne change rien au résultat. Ainsi, lorsque le champ de vitesse est continu, l'écriture monofluide est possible. Cependant, nous verrons dans la partie 3.1 que, d'un point de vue discret, la fermeture intuitive consistant à confondre vitesse de phase et vitesse monofluide n'est pas satisfaisante et qu'il est nécessaire de définir une viscosité monofluide différente suivant les directions normale ou tangentes du tenseur des déformations. Ceci est dû au fait que le tenseur des contraintes visqueuses est un produit de deux grandeurs discontinues : la viscosité et le gradient de vitesse. Dans toute la suite de ce travail, nous ferons les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés au fur et à mesure de ce chapitre :

- incompressible par phase,
- ρ et μ constantes dans chaque phase,
- isotherme,
- pas de changement de phase.

Nous avons montré que le système suivant décrit alors la dynamique de l'écoulement :

- Bilan de masse

◊ Hypothèse d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.16a}$$

◊ Equation de transport de la surface de discontinuité

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k = 0 \tag{1.16b}$$

- Bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma \tag{1.16c}$$

1.3 Conclusion sur le modèle de fluide

Le système que nous avons établi est *a priori* très simple et peu différent du cas monophasique (on retrouve les équations monophasiques hors de l'interface) mais il ne faut pas s'y tromper. L'introduction des fonctions indicatrices de phase permet d'aboutir à une formulation élégante. En contrepartie, la notion d'interface apparaît sous la forme d'une discontinuité du champ et les équations ne sont valables qu'au sens des distributions. Ceci signifie pour simplifier que l'on ne cherche pas les solutions de ces équations dans les espaces habituels. Dans le cas d'une interface courbe, on sait, par exemple, que, lorsqu'on tient compte de la tension de surface, la pression n'est même pas continue. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment la méthode de SND que nous avons utilisée pour étudier les interactions entre interfaces et turbulence discrétise et résout le système (1.16). C'est également ce système auquel nous appliquerons un filtre afin d'exhiber les termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques dans le cadre d'une modélisation de type SGE (voir chapitre 5).

Méthodes de SND des écoulements diphasiques

AFIN de mieux comprendre les interactions entre interfaces et turbulence pour en tenir compte dans le développement du concept ISS, il existe au moins trois angles d'attaque différents. Ils reviennent à :

- étudier avec un papier et un crayon les propriétés des équations monofluides établies dans le chapitre précédent,
- mener des campagnes de mesures expérimentales,
- utiliser une méthode de SND.

Les non-linéarités et les couplages des équations qui régissent les écoulements diphasiques et turbulents rendent évidemment impossible un travail uniquement analytique. Les techniques expérimentales actuelles ne permettent pas d'avoir accès à l'ensemble des grandeurs locales instantanées nécessaires à une bonne compréhension de la physique diphase fine, notamment parce qu'elles sont trop intrusives. Les méthodes de SND sont alors un outil puissant qui fournit un ensemble plus vaste de grandeurs locales instantanées. Nous évoquerons tout d'abord les différentes méthodes existantes puis nous expliquerons quelques spécificités de celle que nous avons utilisée.

2.1 Les différentes méthodes de SND existantes

La méthode numérique est pour nous un outil et non un but. Les différentes méthodes de SND que nous présentons ici peuvent *a priori* toutes servir d'outil afin d'étudier les interactions entre interfaces et turbulence. Nous verrons en décrivant les caractéristiques de la méthode que nous avons utilisée qu'elle est particulièrement adaptée à l'étude des interactions entre interfaces et turbulence dans le cadre de nos hypothèses de travail : fortes déformations interfaciales sans changement de topologie (rupture ou coalescence). Cependant, nous avons apporté des améliorations nécessaires à cette méthode. Nous les décrirons et validerons dans le chapitre suivant. Tout comme ses *alter ego*, cette méthode n'est pas parfaite et on s'attend à ce que l'ensemble des méthodes s'homogénéise en gardant le meilleur de chacune d'elles. La méthode que nous utilisons illustre cette attente car certains de ses algorithmes (au moment des remaillages par exemple) sont des adaptations de ceux des méthodes à maillage fixe. On trouve d'ailleurs dans la littérature d'autres exemples de ce type de rapprochement [89]. Dans les paragraphes suivants, nous évoquons sommairement les différentes

méthodes de SND existantes dans l'ordre globalement décroissant de précision et de complexité numérique. Pour une description plus complète de l'ensemble des méthodes, on trouvera des revues plus détaillées [20, 41, 52].

2.1.1 Méthodes à maillage mobile

Ces méthodes sont conceptuellement les plus intuitives puisqu'elles consistent à utiliser un maillage qui épouse la forme des interfaces. Comme la forme des inclusions évolue au cours du temps, le maillage change lui aussi. Avec une telle discrétisation, l'ensemble des conditions de saut aux interfaces peuvent être imposées naturellement et en respectant exactement la géométrie des surfaces. Ces méthodes sont donc très précises. Elles ont néanmoins l'inconvénient d'être difficiles à mettre en oeuvre. En particulier, il est pratiquement hors de portée de simuler plusieurs inclusions ou des changements de topologie avec de telles méthodes. Elles sont très utilisées pour simuler l'ascension d'une bulle unique ou les interfaces libres peu déformées. Elles sont très efficaces lorsqu'on s'intéresse à des conditions d'écoulements où les bulles sont sphériques [53, 54]. Souvent, ces méthodes supposent que la phase gazeuse n'a pas d'effet sur la dynamique de l'écoulement. Elles ne résolvent alors l'équation de bilan de quantité de mouvement que dans la phase liquide et imposent une condition de glissement à l'interface. Cette condition à la limite est une bonne approximation cependant, la condition de saut (1.8a) implique une discontinuité du gradient de vitesse dont on ne peut tenir compte sans résoudre la phase gazeuse. Parmi ces méthodes, on trouve les méthodes mixtes lagrangiennes-eulériennes, dites aussi ALE pour Arbitrary Lagrangian Eulerian [64].

2.1.2 Méthodes à maillage mixte

Ces méthodes, dites front-tracking, utilisent deux types différents de maillage : un maillage fixe pour les grandeurs volumiques et un maillage mobile pour représenter les interfaces [90, 98]. Un système d'aller-retour (interpolation et extrapolation) permet d'échanger des informations entre les deux maillages. Moins complexes à mettre en oeuvre que les méthodes précédentes, ces méthodes (du fait notamment des interpolations) sont moins précises. Cependant, par rapport aux méthodes à maillage fixe (voir ci-après) elles décrivent mieux la géométrie des interfaces. Ce qui permet par exemple d'avoir une meilleure approximation de la courbure d'une interface et donc une estimation plus précise des forces interfaciales. En contrepartie, la gestion du maillage surfacique, avec en particulier les changements de topologie (plus facile à gérer que pour les méthodes à maillage mobile), reste une difficulté majeure. La méthode que nous avons utilisée appartient à cette catégorie. Elle a initialement été implémentée par Christophe Duquennoy [20], puis repensée par Benoît Mathieu [62, 63]. On la décrit dans la deuxième partie de ce chapitre.

2.1.3 Méthodes à maillage fixe

Dans le cas des méthodes à maillage fixe, seul un maillage eulérien discrétise l'ensemble du domaine physique considéré. Les équations d'évolution des fluides et celles des interfaces sont résolues sur ce maillage fixe. On distingue deux types de représentation et de suivi des interfaces suivant que l'on utilise :

- une fonction de présence valant 0 dans une phase ou 1 dans l'autre, ce sont les méthodes VOF pour Volume Of Fluid [48, 77],

- une fonction s’annulant à l’interface (*e.g.* la distance signée à cette interface), ce sont les méthodes level set [87].

Ces deux derniers types de méthode sont fondés sur le formalisme monofluide. Ceci peut apparaître comme une difficulté conceptuelle dans la mesure où ces méthodes étalent généralement l’interface sur plusieurs mailles alors que ce formalisme suppose que les interfaces sont infiniment fines (voir chapitre 1). De ce point de vue, les méthodes à interfaces diffuses [41], qui ne reposent pas sur ce formalisme et qui sont des méthodes à maillage fixe, sont plus cohérentes. Un des avantages de l’ensemble des méthodes à maillage fixe est de permettre naturellement les phénomènes de rupture et de coalescence alors que les méthodes à maillage mixte nécessitent de complexes algorithmes et que les méthodes à maillage mobile ne permettent pas de simuler de tels phénomènes (à l’heure actuelle et à notre connaissance). Cet avantage algorithmique certain ne doit pas faire oublier que la vraie difficulté de la prise en compte des phénomènes de rupture et de coalescence est l’élaboration d’un critère physique. Avec un critère basé sur la distance séparant deux interfaces par exemple, on peut se demander si les méthodes à maillage fixe seraient toujours les plus performantes pour simuler la physique de ces changements de topologie.

2.2 La méthode mixte front-tracking/VOF de Trio_U

Trio_U, plate-forme de développement programmée en C++ par le CEA, permet à chaque chercheur d’ajouter au code de base les fonctionnalités qui lui semblent nécessaires à la bonne poursuite de ses recherches. Des règles de programmation (visant notamment à conserver la modularité initiale de Trio_U), des tests réguliers de non régression ainsi qu’une rigoureuse gestion des configurations permettent à ce logiciel d’évoluer rapidement et sûrement. La présentation de la méthode mixte front-tracking/VOF de Trio_U que nous faisons ici est succincte. Pour plus de précisions sur ses caractéristiques et sa validation, on lira les travaux de Benoît Mathieu (principal développeur et concepteur de la méthode actuelle) [62, 63]. Pour les études menées dans le cadre de cette thèse, ses avantages sont :

- une description très précise de la géométrie des interfaces et donc, de l’énergie et des forces interfaciales,
- un étalement minimum des surfaces de discontinuités (une maille) cohérent avec le formalisme monofluide sur lequel elle repose,
- l’élimination des courants parasites généralement associés à la discrétisation des termes de tension de surface,
- le respect du bilan de masse des phases,
- son implémentation permettant le calcul en parallèle sur plusieurs processeurs par découpage du domaine de la simulation.

2.2.1 La discrétisation

Discrétisation en espace

La méthode front-tracking de Trio_U existe en maillage régulier (*i.e.* constitué de parallélépipèdes rectangles) et irrégulier (*i.e.* constitué de tétraèdres). Comme nos études se limitent à des cas assez académiques, nous n’avons pas eu besoin d’utiliser de maillages tétraédriques et nous ne décrivons donc que la discrétisation associée au maillage régulier

(voir figures 2.1 et 2.2). Le schéma en espace que nous avons retenu est un schéma centré d'ordre 2, car il assure une faible viscosité numérique (nécessaire à l'étude de la turbulence). L'expression de la condition de stabilité (en relation avec le schéma en temps) est délicate en diphasique : en effet, en plus des deux conditions de stabilité classiques, sur les termes de diffusion et convection (CFL), s'ajoute une condition de stabilité liée à la tension de surface que l'on ne sait pas très bien calculer. Nous avons donc souvent dû fixer au cas par cas et de façon pragmatique le pas de temps.

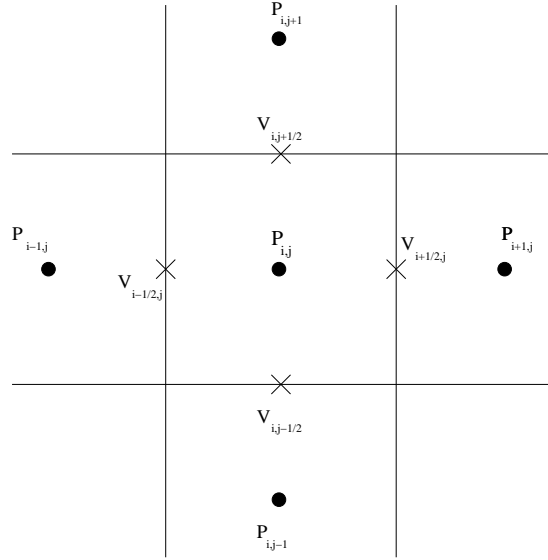


FIG. 2.1 – Discrétisation en volumes finis (VDF : Volume-Différences Finies pour Trio-U)
Les champs scalaires sont localisés au centre des mailles et les composantes des champs vectoriels au centre des faces.

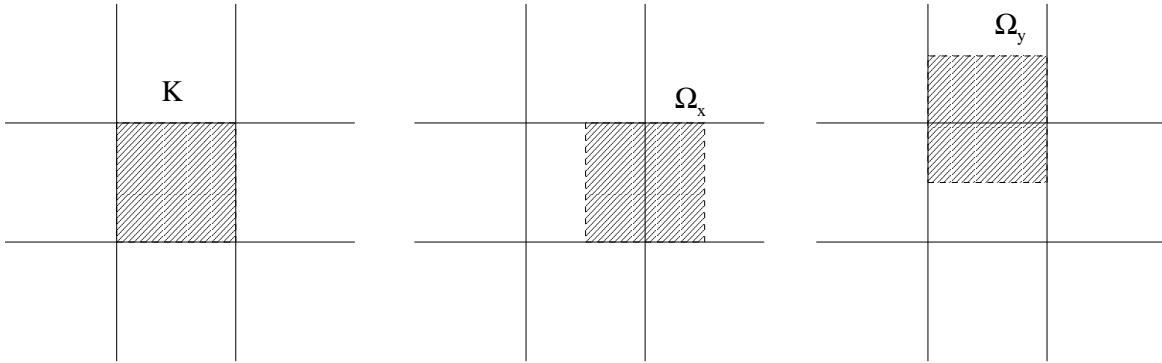


FIG. 2.2 – Volumes de contrôle (VDF)
Les volumes de contrôle des équations scalaires sont les volumes de discrétisation K.
Les volumes de contrôle Ω_l ($l=x,y$) des champs vectoriels sont les volumes décalés dans la direction l .

Discrétisation en temps

Avant ce travail de thèse, le seul schéma en temps compatible avec l'algorithme du front-tracking dans Trio-U était le schéma d'Euler explicite. Ce schéma seulement d'ordre 1 a le

gros désavantage d'être inconditionnellement instable avec un opérateur de convection centré. Or, un tel opérateur est indispensable afin d'étudier les structures cohérentes car il permet de limiter la viscosité numérique. C'est la raison pour laquelle, nous avons implémenté et validé un schéma Runge-Kutta d'ordre 3 compatible avec le front-tracking (voir partie 3.2).

2.2.2 L'algorithme du front-tracking dans la version actuelle de Trio_U

Considérons qu'à l'instant t_n , tous les champs monofluides sont connus. A partir du champ de vitesse on évalue tous les paramètres d'interface à l'instant n , éventuellement par interpolation. On connaît en particulier pour chaque marqueur d'interface sa vitesse de déplacement. On en déduit la position des marqueurs de l'interface à l'instant t_{n+1} . Puis on résout les bilans de masse et de quantité de mouvement comme on le détaille ci-dessous. On en déduit les champs de vitesse et de pression à l'instant t_{n+1} . Enfin, on détermine l'indicatrice à l'instant t_{n+1} .

Advection de l'interface

L'équation (1.16b) est résolue grâce au maillage lagrangien qui discrétise l'interface. Chaque marqueur \mathbf{x}_i est déplacé suivant la direction normale à l'interface à la vitesse

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (2.1)$$

où la vitesse de l'interface, \mathbf{v}_i , est calculée par interpolation du champ de vitesse du maillage eulérien sur les marqueurs \mathbf{x}_i . Par convention, la normale, \mathbf{n} , est orientée de la phase la plus légère vers la plus lourde. Le sens de la normale est en fait indifférent dans cette expression.

Résolution du champ de vitesse

Pour déterminer le champ de vitesse, il faut résoudre l'équation de bilan de quantité de mouvement monofluide (1.16c). Au cours d'un sous-pas de temps pour un schéma temporel de type Runge-Kutta et du pas de temps pour un schéma de type Euler explicite, on distingue trois étapes (on notera qu'au cours de la deuxième le champ de pression est déterminé) :

1. Calcul d'un champ de vitesse intermédiaire

$$(\rho\mathbf{u})_{t_{n+1/2}} = (\rho\mathbf{u})_{t_n} + \Delta t \left\{ -\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mu (\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})) - (\nabla_s \cdot \mathbf{n})\sigma\mathbf{n} \right\}_{t_n} \quad (2.2)$$

2. Calcul du champ de pression. D'après ce qui précède le "vrai" champ de vitesse est tel que

$$(\rho\mathbf{u})_{t_{n+1}} - (\rho\mathbf{u})_{t_{n+1/2}} = \Delta t (-\nabla p_{t_{n+1}}) \quad (2.3)$$

On veut de plus que le champ calculé respecte la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u}_{t_{n+1}} = 0$, ce qui d'après l'équation précédente (2.3) permet de calculer le champ de pression grâce à la méthode de Cholesky ou du gradient conjugué préconditionné,

$$p_{t_{n+1}} = \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla(\cdot) \right) \right]^{-1} \left(\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}_{t_{n+1/2}} \right) \quad (2.4)$$

(écriture condensée décrivant la forme discrète)

3. Calcul du "vrai" champ de vitesse. A ce moment du calcul, on connaît $\mathbf{u}_{t_{n+1/2}}$ et la pression, on peut donc calculer $\mathbf{u}_{t_{n+1}}$ à partir de (2.3).

2.2.3 Bilan de volume d'une interface

De façon à respecter le bilan de volume d'une interface, l'algorithme de transport des interfaces décrit dans le paragraphe 2.2.2 est suivi d'une étape de correction. Cette étape de correction, qui correspond à un deuxième déplacement des interfaces (*a priori* beaucoup plus petit que le déplacement qui utilise la vitesse interpolée), s'inspire des méthodes à maillage fixe. Elle illustre le fait que les différentes méthodes de SND dédiées aux écoulements diphasiques se perfectionnent en devenant petit à petit de plus en plus semblables.

Lors de l'étape de transport proprement dite (interpolation du champ de vitesse), on détermine à chaque sommet du maillage lagrangien le volume que son déplacement a engendré. Par ailleurs, on calcule la variation de volume exacte (du gaz par exemple, on parle alors de sa moyenne volumique : le taux de vide) de chaque élément du maillage eulérien. C'est cette étape qui appartient à l'origine aux méthodes à maillage fixe. Elle utilise le champ de vitesse discrétisé aux faces et l'indicatrice de phase (ou taux de vide) discrétisée au centre des éléments. La justesse de ce bilan sur le maillage eulérien est garantie par l'utilisation d'une méthode de projection lors du calcul du champ de vitesse (voir paragraphe 2.2.2). Par une méthode d'interpolation conservative, on transfère la variation de volume calculée au centre des éléments eulériens aux sommets du maillage lagrangien. Ainsi, à chaque marqueur de l'interface, on dispose du volume résultant de son déplacement et de la variation de volume exact associée au respect du bilan de masse. Par combinaison entre ces deux volumes, on détermine alors un déplacement correctif qui permet de vérifier ce bilan à la précision machine et de façon relativement locale.

2.2.4 Les courants parasites

Les courants parasites sont les courants (champ de vitesse non nul) observés dans une simulation numérique qui a atteint un état stationnaire d'équilibre sans qu'aucune énergie ne soit injectée dans le système. Ces courants résultent d'erreurs de discrétisation de la tension de surface. Leur première conséquence est de rendre certains calculs tout à fait irréalisables en causant le développement d'instabilités interfaciales. La deuxième est de perturber le champ de vitesse en proche interface en ajoutant des fluctuations parasites (*i.e.* d'origine numérique). Il est alors impossible de distinguer les fluctuations turbulentes des fluctuations parasites ce qui interdit l'étude de l'interaction entre interfaces et turbulence. Par conséquent, l'absence de courants parasites dans la méthode que nous avons utilisée était une qualité nécessaire. Cette qualité étant rare, on se propose de résumer la façon dont elle a été obtenue (voir [62] pour l'analyse détaillée).

Interprétation des courants parasites

D'après Duquennoy [20], l'intensité des courants parasites augmente lorsque la valeur du nombre d'Ohnesorge, Oh , diminue

$$Oh \triangleq \frac{\mu_l}{\sqrt{\sigma \rho_l R_b}} \quad (2.5)$$

où μ_l et ρ_l sont respectivement la viscosité dynamique et la masse volumique du liquide, σ la tension de surface et R_b le rayon de la sphère osculatrice. En effet, plus la tension de surface est grande, plus l'erreur de discrétisation sur les forces interfaciales sera visible et moins la viscosité est grande, moins les fluctuations parasites de vitesse seront dissipées.

Les courants parasites ont pour origine une erreur de discrétisation des forces interfaciales qui interdit l'existence d'une géométrie discrétisée des interfaces telle qu'un champ de vitesse nul soit solution des équations de Navier-Stokes.

Discrétisation du terme source

On cherche ici une discrétisation des forces interfaciales qui assure qu'un champ de vitesse nul puisse être solution des équations de Navier-Stokes. L'équation de bilan de quantité de mouvement (1.16c) s'écrit à l'équilibre (*i.e.* pour un champ de vitesse nul) :

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma \quad (2.6)$$

Par conséquent, une discrétisation correcte de la gravité et des forces interfaciales doit permettre de vérifier (d'un point de vue discret) l'égalité précédente. En d'autres termes, il faut qu'à l'équilibre le terme de droite de l'équation soit dans *l'image de grad* : s'exprime comme un gradient discret. Les forces de gravité et de pression sont toutes deux définies sur le maillage eulérien. Il est donc facile de rendre leurs discrétisations cohérentes. En effet, il suffit (mais très peu y ont pensé) d'exprimer la gravitation à partir du potentiel ϕ des forces de pesanteur gravité :

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi \quad (2.7)$$

La difficulté vient du fait que les forces interfaciales sont, elles, définies sur le maillage lagrangien (le maillage mobile) et non sur le maillage eulérien : extrapoler un champ surfacique de façon à qu'il s'exprime comme le gradient d'un champ volumique n'est pas trivial. Le choix qui a été fait consiste à discrétiser les forces interfaciales de façon mixte : à la fois de façon lagrangienne et eulérienne. Ainsi, la courbure de l'interface, $\nabla_s \cdot \mathbf{n}$, est déterminée à partir du maillage lagrangien (elle est ainsi précisément évaluée) alors que la direction de la force, $\mathbf{n} \delta_\sigma$, est directement évaluée sur le maillage eulérien. Ceci est naturel en faisant appel aux fonctions indicatrices de phase. En effet, ces fonctions sont volumiques (elles sont donc discrétisées sur le maillage eulérien) et, en choisissant $\mathbf{n} = \mathbf{n}_g$, la propriété (1.6c), s'écrit pour χ_g :

$$\nabla \chi_g = -\mathbf{n} \delta_\sigma \quad (2.8)$$

Ainsi, en notant comme précédemment la courbure κ (voir le commentaire de l'équation (1.8a)), l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre (2.6) se réécrit :

$$\begin{aligned} \nabla p &= \rho \mathbf{g} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma \\ &= -((\rho_g - \rho_l) \chi_g + \rho_l) \nabla \phi + \kappa \sigma \nabla \chi_g \\ &= -\nabla [((\rho_g - \rho_l) \chi_g + \rho_l) \phi] + (\rho_g - \rho_l) \phi \nabla \chi_g + \kappa \sigma \nabla \chi_g \\ &= -\nabla (\rho \phi) + [(\rho_g - \rho_l) \phi + \kappa \sigma] \nabla \chi_g \end{aligned} \quad (2.9)$$

En discrétisant les forces interfaciales et les forces de gravité à partir de l'écriture obtenue en continue (2.9), on est assuré de l'existence d'un équilibre (au sens discret). En effet, comme la fonction indicatrice du gaz, χ_g , le potentiel des forces de pesanteur, ϕ , et la pression p sont des scalaires définis sur tout l'espace (et non uniquement sur la surface des interfaces), ils sont discrétisés au centre des éléments du maillage eulérien et leurs gradients sont calculés aux faces. Seule la courbure κ est calculée aux noeuds du maillage lagrangien puis extrapolée aux faces du maillage lagrangien. De cette façon, on montre que la discrétisation est cohérente dans le sens où l'égalité (2.9) est atteignable numériquement : il suffit que le terme entre crochet du deuxième terme du membre de droite soit une constante. On assure donc que la vitesse nulle est une solution du système discret : il n'y a plus de courant parasite. Par exemple, le premier terme du membre de droite qui correspond à la pression hydrostatique (au signe près) est exactement compensé même au sens discret par les forces de pression parce qu'il est déjà discrétisé sous la forme d'un gradient.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'ensemble des méthodes de SND pour l'étude des écoulements diphasiques. Comme nous nous limiterons à des études avec une seule interface, les méthodes les plus précises (que nous avons appelées méthodes à maillage mobile) auraient été utilisables. Malheureusement, on ne dispose pas d'une telle méthode, elles sont difficiles à mettre en oeuvre et elles ont un champ d'application restreint. Par conséquent, nous avons utilisé une méthode un peu moins complexe mais malgré tout d'une grande précision : le front-tracking. On a vu que la version du front-tracking dont nous disposons jouit de caractéristiques particulières qui en augmentent encore l'intérêt. Malgré cela, nous y avons apporté des améliorations conséquentes dans le but de simuler des écoulements diphasiques véritablement turbulents. On décrit les principales améliorations apportées dans le chapitre suivant.

Les améliorations apportées

DANS le chapitre précédent, nous avons décrit la méthode de SND dont on se servira pour étudier les interactions entre interfaces et turbulence. Ici, nous détaillons nos trois principales contributions à cette méthode. La première correspond à la modélisation physique du tenseur **moyen**¹ des contraintes visqueuses monofluide. Elle permet notamment de tenir compte plus rigoureusement des transferts d'énergie cinétique turbulente aux interfaces. La deuxième est d'ordre numérique. Il s'agit de l'implémentation d'un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 3 afin de rendre possible l'utilisation d'une discrétisation centrée du terme convectif. Là encore, le principal objectif est d'améliorer le calcul des petites échelles de la turbulence en limitant la dissipation numérique. La troisième est une méthode de raffinement lagrangien qui permet d'améliorer la description de la géométrie des interfaces.

3.1 La gestion des discontinuités

Lors de l'établissement des équations monofluide 1.2, nous avons vu qu'il était nécessaire de trouver une fermeture pour le tenseur moyen des contraintes visqueuses du fait de la discontinuité du gradient de vitesse à la traversée d'une interface. Ce problème est essentiellement numérique, il est dû au fait que l'interface traverse les mailles de calcul. Par conséquent, on est amené à évaluer le tenseur des contraintes visqueuses sur un domaine à cheval sur l'interface. On propose ici deux façons de déduire une fermeture possible :

- La première consiste à raisonner directement sur la discrétisation de ce terme à la façon des méthodes GFM pour Ghost Fluid Method [43, 29, 59, 71, 35],
- La deuxième fait un bilan sur un volume de contrôle contenant l'interface comme Benkenida [6].

Nous verrons que

- les deux méthodes conduisent au même résultat,
- d'autres auteurs utilisent cette fermeture,
- l'expression du tenseur des contraintes visqueuses obtenue est cohérente avec la définition la plus générale.

¹Par moyen, on entend qu'on évalue la moyenne spatiale du tenseur sur un domaine éventuellement à cheval sur l'interface.

Enfin, ce résultat, détaillé ici dans un cas très particulier, est *a priori* très général : il doit permettre l'écriture monofluide de n'importe quelle grandeur. Nous l'avons en particulier utilisé pour le terme de transport diffusif de l'équation de concentration monofluide, pour des travaux dont il n'est pas fait mention dans ce document.

3.1.1 Modélisation

On cherche à fermer l'intégrale sur un volume de contrôle Ω contenant l'interface du tenseur des contraintes visqueuses,

$$\mathbf{S} \int_{\Omega} d\Omega \hat{=} \int_{\Omega} \sum_k \chi_k \mathbf{S}_k d\Omega = \int_{\Omega} \sum_k \chi_k \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k) d\Omega \quad (3.1)$$

en fonction du taux de présence, $\alpha = \frac{\int_{\Omega} \chi_k d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}$, et de la vitesse monofluide. On notera \mathbf{D}_k le tenseur des taux de déformation de la phase k :

$$\mathbf{D}_k = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k) \quad (3.2)$$

De la même façon que pour le tenseur des contraintes visqueuses, on définit pour le tenseur des déformations :

$$\mathbf{D} \int_{\Omega} d\Omega \hat{=} \int_{\Omega} \sum_k \chi_k \mathbf{D}_k d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_k \chi_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k) d\Omega \quad (3.3)$$

Dans le cas sans changement de la phase, toutes les composantes de la vitesse sont continues. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \int_{\Omega} d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\nabla \left(\sum_k \chi_k \mathbf{u}_k \right) + \nabla^T \left(\sum_k \chi_k \mathbf{u}_k \right) \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

En supposant que le volume de contrôle Ω est indépendant du temps et de l'espace, on peut permuter l'ordre des opérations d'intégration et de dérivation² :

$$\mathbf{D} \int_{\Omega} d\Omega = \frac{1}{2} \left(\nabla \int_{\Omega} \mathbf{u} d\Omega + \nabla^T \int_{\Omega} \mathbf{u} d\Omega \right) \quad (3.5)$$

On cherche un opérateur linéaire (lui même fonction des viscosités dynamiques des phases, μ_l et μ_g), $\boldsymbol{\mu}$, tel que :

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{D} \quad (3.6)$$

Par souci de clarté, nous ne détaillerons les calculs que dans un cas 2D. Le volume de contrôle Ω étant arbitrairement petit, l'interface est supposée plane. Pour simplifier les calculs, on se place dans le repère associé à l'interface. On choisit $x = 0$ pour l'équation de l'interface. Comme précédemment, on note \mathbf{u} le vecteur vitesse. Ses composantes normale et tangente à l'interface sont respectivement notées u et v .

²On discute de cette question en détail pour l'opération de moyenne correspondant à un filtre de type SGE dans le chapitre 5.

Etablissement des relations de saut

Soit ϕ une grandeur définie dans le liquide, l , et le gaz, g , on définit le saut de cette grandeur à la traversée de l'interface, $[\phi]$:

$$[\phi] = \phi_g - \phi_l \quad (3.7)$$

On a vu en établissant le formalisme monofluide (paragraphe 1.2) que, sans changement de phase, toutes les composantes de la vitesse étaient continues :

$$[\mathbf{u}] = 0 \quad (3.8a)$$

Cette égalité des vitesses de part et d'autre de l'interface implique l'égalité de la dérivée tangentielle :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.8b)$$

Avec les notations de ce paragraphe, l'hypothèse d'incompressibilité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.8c)$$

Cette dernière équation implique :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.8d)$$

En la combinant avec la deuxième composante de (3.8b), on trouve :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.8e)$$

Dans un cas sans changement de phase, la relation de saut (1.8a) projetée suivant la direction parallèle à l'interface (suivant y) donne :

$$\left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.8f)$$

Comme Breugem [9], on suppose que les variations suivant la direction normale sont grandes par rapport à celles suivant la direction tangente. Soit h (respectivement δ) une échelle de longueur caractéristique de la direction tangente (respectivement normale), l'hypothèse précédente signifie que l'on suppose $h \gg \delta$. Soit V_T la vitesse caractéristique, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \propto \frac{V_T}{h} \quad (3.8g)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \propto \frac{V_T}{\delta} \quad (3.8h)$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial x}} \propto \frac{\delta}{h} \ll 1 \quad (3.8i)$$

Sous cette hypothèse (que nous réutiliserons pour fermer le tenseur des contraintes visqueuses), l'équation (3.8f) devient :

$$\left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.8j)$$

Toujours comme conséquence de cette hypothèse (3.8i), on approche le tenseur des contraintes visqueuses de chaque phase par :

$$\mathbf{S}_{l,g} = \mu_{l,g} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

En résumé, les relations de saut que nous considérons sont :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.10a)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.10b)$$

$$\left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \quad (3.10c)$$

A partir des opérateurs discrets

Dans ce paragraphe, on utilise les notations définies par la figure 3.1. Avec une in-

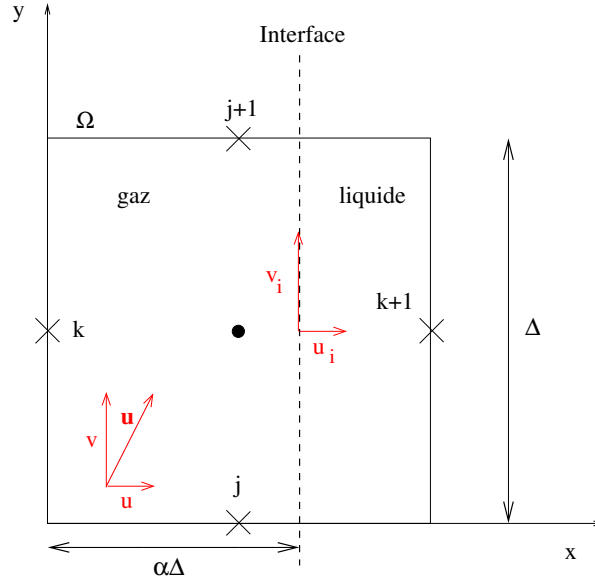


FIG. 3.1 – Notations pour le calcul du tenseur des contraintes visqueuses

terprétation volume fini de la méthode GFM [43], chacune des composantes du tenseur des contraintes visqueuses (3.9)³ se discrétise comme suit :

$$\Delta^2 \mathbf{S}_{xx} = \Delta \left(\alpha \Delta \mu_g \frac{u_i - u_k}{\alpha \Delta} + (1 - \alpha) \Delta \mu_l \frac{u_{k+1} - u_i}{(1 - \alpha) \Delta} \right) \quad (3.11a)$$

$$\Delta^2 \mathbf{S}_{xy} = \Delta \left(\alpha \Delta \mu_g \frac{v_i - v_k}{\alpha \Delta} + (1 - \alpha) \Delta \mu_l \frac{v_{k+1} - v_i}{(1 - \alpha) \Delta} \right) \quad (3.11b)$$

$$\Delta^2 \mathbf{S}_{yy} = \Delta (\alpha \Delta \mu_g + (1 - \alpha) \Delta \mu_l) \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta} \quad (3.11c)$$

³Les composantes extra-diagonales que nous utilisons, sont simplifiées par l'hypothèses (3.8i). Kang *et al.* [43] ne font pas cette hypothèse. Elle n'est donc pas nécessaire à cette approche. Ils arrivent à un résultat similaire. Ce résultat est en fait équivalent dans le cas d'une interface oblique d'équation $y = x$ dans le repère où nous nous sommes placés (voir fig. 3.1).

La dernière relation utilise la continuité de la dérivée tangente du vecteur vitesse (3.10a). On détermine les composantes de la vitesse interfaciale, u_i et v_i , en discrétisant les deux autres relations de saut (3.10b) et (3.10c) :

$$\frac{u_i - u_k}{\alpha\Delta} = \frac{u_{k+1} - u_i}{(1-\alpha)\Delta} \quad (3.12a)$$

$$\mu_g \frac{v_i - v_k}{\alpha\Delta} = \mu_l \frac{v_{k+1} - v_i}{(1-\alpha)\Delta} \quad (3.12b)$$

Une fois u_i et v_i déterminés, on simplifie l'expression des composantes du tenseur des contraintes visqueuses (3.11). Après simplification, on obtient :

$$\mathbf{S}_{xx} = (\alpha\mu_g + (1-\alpha)\mu_l) \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta} \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{S}_{xy} = \frac{\mu_g\mu_l}{\alpha\mu_l + (1-\alpha)\mu_g} \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta} \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{S}_{yy} = (\alpha\mu_g + (1-\alpha)\mu_l) \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta} \quad (3.13c)$$

On définit la moyenne arithmétique (respectivement harmonique) de la viscosité dynamique, μ_a (respectivement μ_h) :

$$\mu_a = \alpha\mu_g + (1-\alpha)\mu_l \quad (3.14a)$$

$$\mu_h = \frac{\mu_g\mu_l}{\alpha\mu_l + (1-\alpha)\mu_g} \quad (3.14b)$$

En utilisant ces définitions et en repassant en continu, les composantes du tenseur des contraintes visqueuses (3.13) se réécrivent :

$$\mathbf{S}_{xx} = \mu_a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{S}_{xy} = \mu_h \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.15b)$$

$$\mathbf{S}_{yy} = \mu_a \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.15c)$$

Ce résultat se généralise facilement au cas tridimensionnel. Il s'écrit en coordonnées intrinsèques (*i.e.* sans utiliser de base particulière) :

$$\mathbf{S} = 2\mu_h \mathbf{D} + 2(\mu_a - \mu_h) (\mathbf{D} + 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \quad (3.16)$$

Cette dernière relation correspond bien à ce que nous cherchions : elle définit un opérateur linéaire, $\boldsymbol{\mu}$, qui, appliqué au tenseur des déformations moyen, donne le tenseur des contraintes visqueuses moyen (voir équation (3.6)).

A partir d'un bilan volumique

Dans ce paragraphe, nous allons conduire des calculs analytiques dans un cas très simple utilisé notamment par Benkenida [6]. On suppose que le champ de vitesse de chacune des phases est linéaire. On a donc *a priori* besoin de six constantes dans chacune des phases ($c_{l,g}^1$ à $c_{l,g}^6$) pour décrire ces champs :

$$u_{l,g} = c_{l,g}^1 + c_{l,g}^2 x + c_{l,g}^3 y \quad (3.17a)$$

$$v_{l,g} = c_{l,g}^4 + c_{l,g}^5 x + c_{l,g}^6 y \quad (3.17b)$$

L'hypothèse d'incompressibilité (3.8c) impose $c_{l,g}^2 = -c_{l,g}^6$. La continuité des dérivées tangentielles (3.10a) implique $c_l^3 = c_g^3$ et $c_l^6 = c_g^6$. La relation (3.10b) donne $c_l^2 = c_g^2$. L'hypothèse sur les variations suivant les directions tangentes et normale (3.8i) conduit à négliger la dérivée tangentielle de la vitesse normale : on prend $c_l^3 = c_g^3 = 0$. Lorsque les constantes sont indépendantes de la phase considérée (du fait des considérations précédentes), on omet les indices l et g . Finalement, on travaille sur les champs suivants :

$$u_{l,g} = c_{l,g}^1 + c^2 x \quad (3.18a)$$

$$v_{l,g} = c_{l,g}^4 + c_{l,g}^5 x - c^2 y \quad (3.18b)$$

Ils correspondent aux tenseurs des déformations et des contraintes visqueuses suivants :

$$\mathbf{D}_{l,g} = \begin{pmatrix} c^2 & \frac{c_{l,g}^5}{2} \\ \frac{c_{l,g}^5}{2} & -c^2 \end{pmatrix} \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{S}_{l,g} = \mu_{l,g} \begin{pmatrix} 2c^2 & c_{l,g}^5 \\ c_{l,g}^5 & -2c^2 \end{pmatrix} \quad (3.19b)$$

En appliquant le processus de moyenne ou de bilan sur un volume de contrôle défini par (3.1) et (3.3), on a :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} c^2 & \frac{\alpha c_g^5 + (1-\alpha)c_l^5}{2} \\ \frac{\alpha c_g^5 + (1-\alpha)c_l^5}{2} & -c^2 \end{pmatrix} \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{S} = \mu_{l,g} \begin{pmatrix} 2(\alpha\mu_g + (1-\alpha)\mu_l)c^2 & \alpha\mu_g c_g^5 + (1-\alpha)\mu_l c_l^5 \\ \alpha\mu_g c_g^5 + (1-\alpha)\mu_l c_l^5 & -2(\alpha\mu_g + (1-\alpha)\mu_l)c^2 \end{pmatrix} \quad (3.20b)$$

La relation de saut de la dérivée normale de la vitesse tangentielle (3.10c) fournit :

$$\mu_l c_l^5 = \mu_g c_g^5 \quad (3.21)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \alpha\mu_g c_g^5 + (1-\alpha)\mu_l c_l^5 &= \mu_g c_g^5 = \frac{(1-\alpha)\mu_g + \alpha\mu_l}{(1-\alpha)\mu_g + \alpha\mu_l} \mu_g c_g^5 \\ &= \frac{(1-\alpha)\mu_g \mu_g c_g^5 + \alpha\mu_l \mu_g c_g^5}{(1-\alpha)\mu_g + \alpha\mu_l} = \frac{(1-\alpha)\mu_g \mu_l c_l^5 + \alpha\mu_g \mu_l c_g^5}{(1-\alpha)\mu_g + \alpha\mu_l} \\ &= \frac{\mu_g \mu_l}{(1-\alpha)\mu_g + \alpha\mu_l} (\alpha c_g^5 + (1-\alpha)c_l^5) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi, le tenseur des contraintes visqueuses moyen se réécrit :

$$\mathbf{S} = 2 \begin{pmatrix} \mu_a c^2 & \mu_h \frac{\alpha c_g^5 + (1-\alpha)c_l^5}{2} \\ \mu_h \frac{\alpha c_g^5 + (1-\alpha)c_l^5}{2} & -\mu_a c^2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

On reconnaît l'expression du tenseur des déformations moyen (3.20a) auquel on a appliqué une application linéaire, $\boldsymbol{\mu}$ (voir équation (3.6)). Cette expression se généralise au cas tridimensionnel. Elle est équivalente à l'équation (3.16) à laquelle aboutit aussi Benkenida [6].

Définition généralisée du tenseur des contraintes visqueuses

En supposant que l'on passe du tenseur des déformations à celui des contraintes visqueuses par une application linéaire, la viscosité est en toute généralité un tenseur d'ordre 4.

Des propriétés d'invariance très générales ou d'autres liées à la microstructure du milieu, permettent de réduire drastiquement le nombre de composantes non nulles de ce tenseur [26]. Ericksen [25], en s'appuyant sur [91], détermine la forme générale du tenseur des contraintes visqueuses. Pour cela, il suppose entre autres que le fluide *moyen* est anisotrope avec une seule direction préférentielle. Dans le cas d'une interface liquide-vapeur et à l'aide de la théorie du second gradient, Seppecher [85, 86] arrive au même résultat

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & a (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) + b \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + c \mathbf{D} + \\ & (d \operatorname{tr}(\mathbf{D}) + e \mathbf{D} : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{I} + e \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.24)$$

où \mathbf{I} est l'opérateur identité et tr l'opérateur trace. Les coefficients a , b , c , d et e doivent vérifier les conditions suivantes :

$$c \geq 0 \quad (3.25a)$$

$$d \geq 0 \quad (3.25b)$$

$$a + c \geq 0 \quad (3.25c)$$

$$b + c + d + 2e \geq 0 \quad (3.25d)$$

$$d(b + c - 2a) - (a + e)^2 \geq 0 \quad (3.25e)$$

Pour comparer la fermeture proposée (3.16) à la forme générale du tenseur des contraintes visqueuses, on peut la réécrire :

$$\mathbf{S} = 2(\mu_h - \mu_a) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) + 4(\mu_a - \mu_h) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 2\mu_a \mathbf{D} \quad (3.26)$$

Comme on travaille en incompressible, on a

$$\operatorname{tr}(\mathbf{D}) = 0 \quad (3.27)$$

et le coefficient d peut être quelconque. Par conséquent, seules les conditions (3.25a) et (3.25c) doivent être regardées. Par identification, on a :

$$a = 2(\mu_h - \mu_a) \quad (3.28a)$$

$$b = 4(\mu_a - \mu_h) \quad (3.28b)$$

$$c = 2\mu_a \quad (3.28c)$$

$$e = 0 \quad (3.28d)$$

Les conditions (3.25a) et (3.25c) correspondent donc à $\mu_a \geq 0$ et $\mu_h \geq 0$, ce qui est bien sûr vérifié. Benkenida note que l'hypothèse d'incompressibilité implique par l'intermédiaire de (3.27) que $\operatorname{tr}(\mathbf{S}) = 0$. On en déduit la condition supplémentaire :

$$2a + b + 3e = 0 \quad (3.29)$$

Cette dernière condition est elle aussi vérifiée. Ainsi, la fermeture proposée est cohérente avec la forme générale du tenseur des contraintes visqueuses.

Conclusion

Contrairement au cas usuel du fluide newtonien incompressible et homogène qui ne nécessite qu'un coefficient de viscosité (dans la limite de l'hypothèse d'incompressibilité) pour relier le tenseur des déformations à celui des contraintes visqueuses, l'analyse précédente montre qu'au moins deux coefficients différents μ_a (la moyenne arithmétique) et μ_h (la

moyenne harmonique) sont indispensables pour décrire correctement un écoulement diphasique incompressible par phase dans le cadre de l'approche monofluide. Cette complexité supplémentaire vient du fait qu'un milieu diphasique est anisotrope. Plus précisément, il est isotrope suivant les directions tangentielles à l'interface mais il possède une direction préférentielle suivant la direction normale. Notre résultat utilise la moyenne harmonique. Il peut être comparé au cas simple d'un transfert diffusif de chaleur à travers une interface qui sépare deux milieux dont la conductivité thermique est différente. Dans ce cas, il est bien connu que la continuité du flux de chaleur à l'interface impose l'introduction de la moyenne harmonique des conductivités des deux milieux [73]. Dans le paragraphe suivant, nous validons l'implémentation de ce modèle dans Trio_U grâce à deux cas analytiques :

- l'écoulement de Poiseuille diphasique,
- la vitesse terminale d'une bulle dans le cas des écoulements rampants.

3.1.2 Validation

Cas test A : Poiseuille diphasique

Le cas très simple du Poiseuille diphasique (figure 3.2) permet de comparer les résultats obtenus avec une moyenne arithmétique des viscosités des deux phases et ceux obtenus avec la fermeture proposée précédemment. L'avantage de ce cas simple est la connaissance du profil analytique [99]. Il est solution de l'équation différentielle munie des conditions aux limites suivantes :

$$\mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} = P_x = \text{constante} \quad (3.30a)$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{l_1} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{l_1} \quad (3.30b)$$

$$u_1(l_1) = u_2(l_1) \quad (3.30c)$$

$$u_1(0) = u_2(l_2) = 0 \quad (3.30d)$$

La solution de ce système est polynomiale par morceaux :

$$u_1(y) = \frac{P_x}{2\mu_1} y^2 + \frac{P_x}{2} \frac{\frac{l_1^2 - l_2^2}{\mu_2} - \frac{l_1^2}{\mu_1}}{l_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}(l_2 - l_1)} y \quad (3.31a)$$

$$u_2(y) = \frac{P_x}{2\mu_2} y^2 + \frac{P_x}{2} \frac{\frac{l_1^2 - l_2^2}{\mu_2} - \frac{l_1^2}{\mu_1}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} l_1 + (l_2 - l_1)} y - \frac{P_x}{2\mu_2} l_2^2 - \frac{P_x}{2} \frac{\frac{l_1^2 - l_2^2}{\mu_2} - \frac{l_1^2}{\mu_1}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} l_1 + (l_2 - l_1)} l_2 \quad (3.31b)$$

Les paramètres de la simulation très académique réalisée ont été fixés comme suit :

$$\begin{aligned} P_x &= -60 \text{ Pa.m}^{-1} \\ l_1 &= 0,5 \text{ m} \\ l_2 &= 1 \text{ m} \\ \mu_1 &= 500 \text{ Pa.s} \\ \mu_2 &= 1 \text{ Pa.s} \\ \rho_1 &= \rho_2 \\ \sigma &= 0.001 \text{ Pa.m} \end{aligned}$$

La longueur du canal est suffisamment grande (5 m) pour que le profil du centre du canal ne subisse pas le problème de condition aux limites paroi/sortie libre de Trio_U. On initialise le

calcul avec la solution exacte que l'on impose aussi comme condition à la limite en entrée. On constate que le profil est dégradé lorsqu'on choisit pour la viscosité équivalente la moyenne arithmétique alors que l'on conserve le bon profil lorsqu'on choisit la fermeture du tenseur des contraintes visqueuses décrite précédemment⁴ (voir la coupe au milieu du canal $x=2,5$ m fig. 3.3 et 3.4). Ainsi, bien que ce cas soit très loin d'être exigeant (une seule composante de vitesse, interface confondue à une ligne de maillage, on impose initialement et en entrée la solution stationnaire), le choix de la moyenne arithmétique ne permet pas le respect de l'équilibre de quantité de mouvement entre les phases ce qui affecte le débit dans chaque phase. La fermeture que nous proposons constitue donc une nette amélioration par rapport à celle classiquement utilisée. De plus, nous avons vérifié sa convergence en maillage (fig. 3.5) dans le cas où l'interface a une position quelconque par rapport aux lignes de maillages (elle reste cependant parallèle aux lignes horizontales).

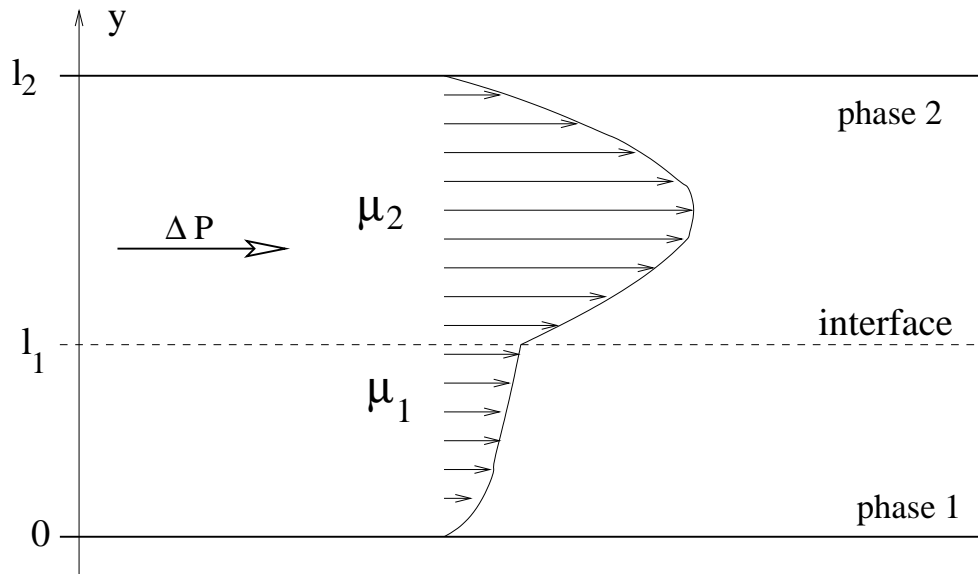


FIG. 3.2 – Poiseuille diphasique

⁴La fermeture proposée correspond à choisir (en 2D et dans un repère dont une direction est parallèle à l'interface) une moyenne harmonique pour les composantes diagonales et une moyenne arithmétique pour les composantes extra-diagonales du tenseur des contraintes visqueuses (voir équations (3.16) et (3.23)). Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille diphasique, seules les composantes extra-diagonales $\frac{\partial u}{\partial y}$ ne sont pas nulles. Par conséquent, dans ce cas précis, la fermeture proposée est équivalente à choisir pour la viscosité équivalente la moyenne harmonique. C'est pourquoi, on désigne par *moyenne harmonique* la fermeture proposée dans les légendes des figures 3.3 à 3.5.

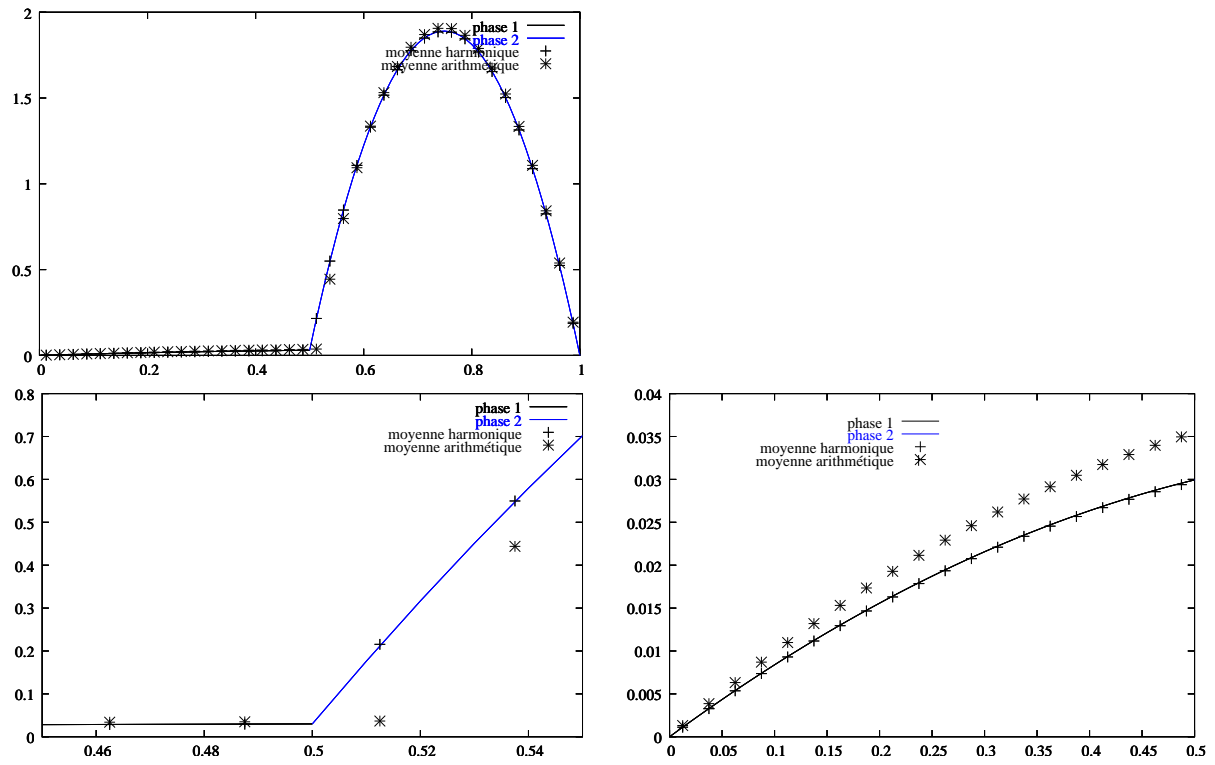


FIG. 3.3 – Profil de vitesse au centre du canal, maillage grossier (100x40)

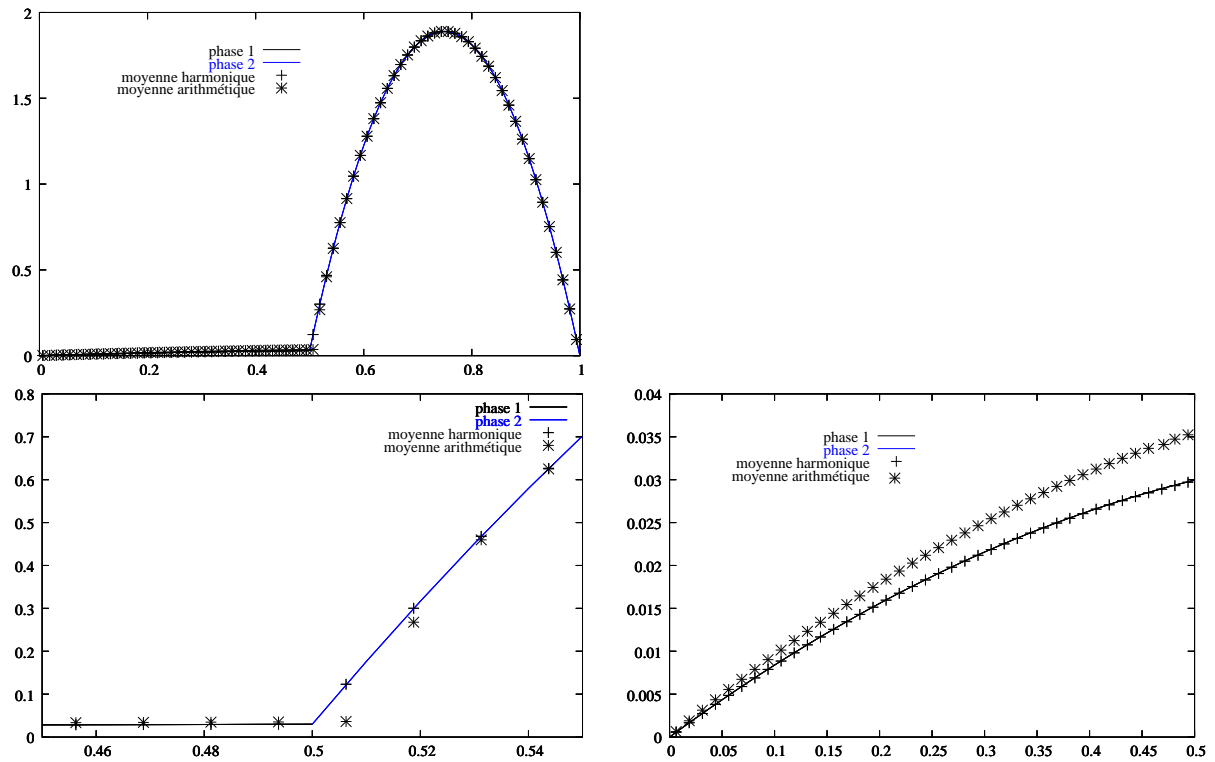


FIG. 3.4 – Profil de vitesse au centre du canal, maillage fin (100x80)

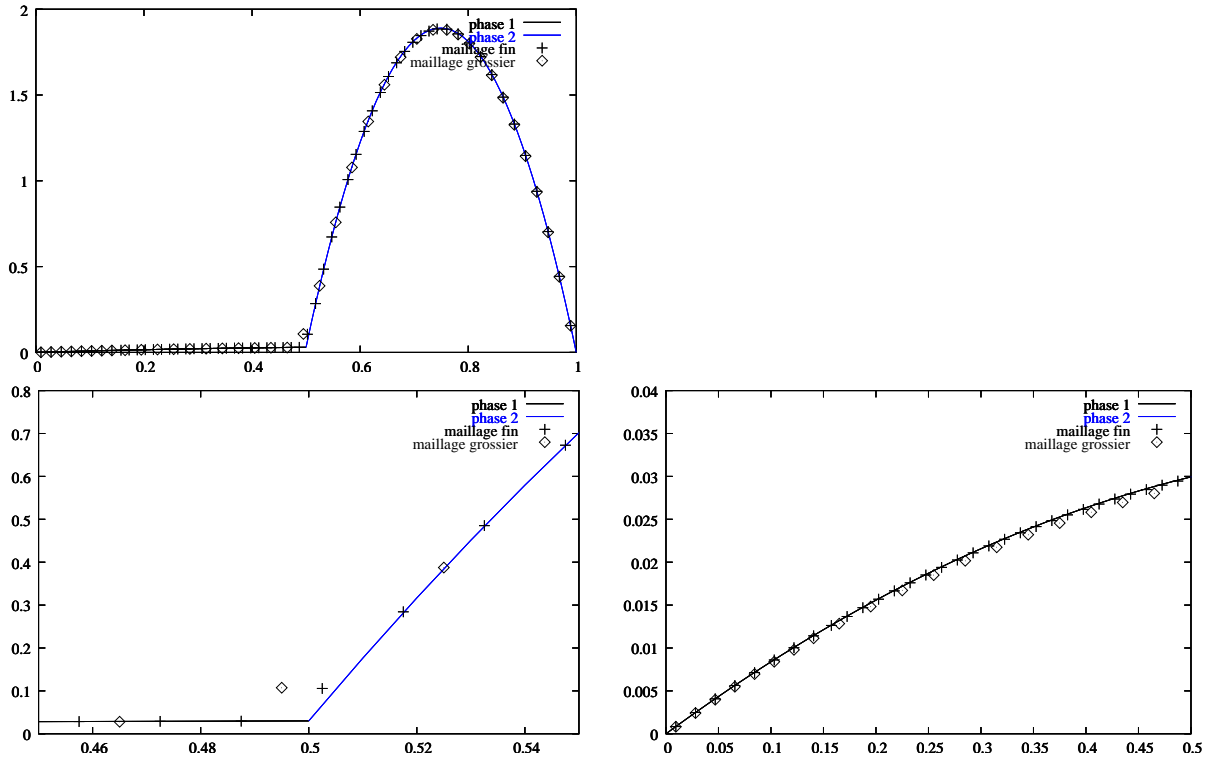


FIG. 3.5 – Profil de vitesse au centre du canal, convergence en maillage de la moyenne harmonique : maillage fin (100x60) et maillage grossier (100x40)

Cas test B : vitesse d'ascension terminale d'une bulle

Comme précédemment, nous avons cherché un cas test où l'on dispose d'une solution analytique qui permet d'une part l'initialisation du calcul (gain de temps en durée de simulation numérique) et d'autre part d'évaluer rigoureusement l'écart entre résultat numérique et théorique. Ce cas test, très utilisé, souffre habituellement du fait que le résultat théorique suppose le milieu infini. Cette condition impossible à mettre en oeuvre numériquement introduit un effet de confinement délicat à évaluer. Notre idée est d'utiliser le résultat théorique pour se placer dans le référentiel en translation uniforme à la vitesse d'ascension finale de la bulle (figure 3.6). La solution analytique que nous allons rappeler et qui remonte aux travaux

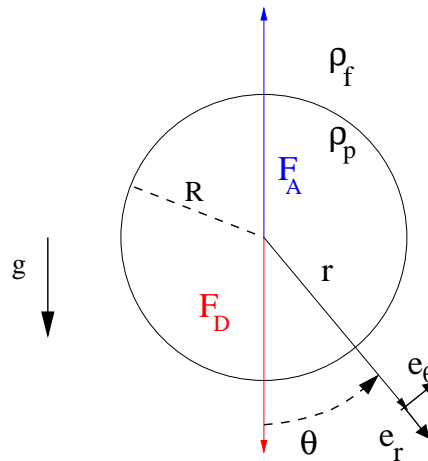


FIG. 3.6 – Force de traînée

	Mouvement externe	Mouvement interne
Champ de vitesse	$u_r = U_\infty \left(1 - \frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \frac{R}{2r} + \frac{\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \frac{R^3}{2r^3} \right) \cos\theta$ $u_\theta = -U_\infty \left(1 - \frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \frac{R}{4r} - \frac{\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \frac{R^3}{4r^3} \right) \sin\theta$	$u_r = -\frac{U_\infty}{2} \frac{1}{1+\phi_\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cos\theta$ $u_\theta = \frac{U_\infty}{2} \frac{1}{1+\phi_\mu} \left(1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \right) \sin\theta$
Pression	$P_0 - \mu_f U_\infty \frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \frac{R}{2r^2} \cos\theta$	$P_0 + \mu_p U_\infty \frac{5}{1+\phi_\mu} \frac{r}{R^2} \cos\theta$
Trainée	$F_D = 2\pi\mu_f R \frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} U_\infty$	

TAB. 3.1 – Ecoulement autour d'une sphère

de Stokes correspond à la solution stationnaire de l'écoulement autour d'une sphère à très faible nombre de Reynolds ($Re = \frac{2\rho_f R U_\infty}{\mu_f} \ll 1$ où ρ_f , R , U_∞ et μ_f désignent respectivement la masse volumique du fluide, le rayon de la particule, la vitesse finale d'ascension de la bulle et la viscosité du fluide). Dans ces conditions, le mouvement fluide autour de la particule est décrit par les équations de Stokes (on néglige les termes inertiels devant les termes visqueux de Navier-Stokes) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 \quad (3.32a)$$

$$\nabla p_f = \mu_f \Delta \mathbf{u}_f \quad (3.32b)$$

Le mouvement interne à la particule vérifie les mêmes équations. Les conditions aux limites à l'interface entre les deux fluides traduisent le raccordement des vitesses normales (nullité en l'absence de déplacement de l'interface et de transfert de masse), l'égalité des vitesses tangentielles et des cisaillements (en l'absence d'effet Marangoni) :

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{e}_\theta, \Sigma_{fr\theta} = \Sigma_{pr\theta} \quad (3.33)$$

En se plaçant dans le référentiel en mouvement avec la particule, les conditions aux limites vérifiées par le fluide à l'infini s'écrivent $\mathbf{u}_f = \mathbf{U}_\infty$ (où U_∞ est la vitesse d'ascension de la bulle). Les solutions axisymétriques sont rappelées dans le tableau 3.1 ($\phi_\mu = \frac{\mu_p}{\mu_f}$ représente le rapport des viscosités). A l'équilibre, la force de trainée, F_D et la force d'Archimède, $F_A = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_f - \rho_p)g$ se compensent : $F_D = F_A$ (en norme). Par conséquent, l'expression de la vitesse terminale de la bulle est :

$$U_\infty = \frac{2}{3} \frac{R^2 g}{\mu_f} \frac{1 + \phi_\mu}{2 + 3\phi_\mu} (\rho_f - \rho_p) \quad (3.34)$$

Les paramètres physiques des simulations axisymétriques réalisées sont :

$$\begin{aligned}
R &= 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\
\mu_f &= 10^{-3} \\
\mu_p &= 10^{-4} \\
\rho_f &= 100 \text{ kg.m}^{-3} \\
\rho_p &= 10 \text{ kg.m}^{-3} \\
g &= 10 \text{ m.s}^{-2} \\
\sigma &= 10^{-15} \text{ m}
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à une valeur du nombre de Reynolds $Re = 10^{-3}$ et à une vitesse d'ascension $U_\infty = 1,94.10^{-4} m.s^{-1}$. Les figures 3.8 et 3.9 illustrent les résultats obtenus. On constate que l'erreur relative est d'environ 0,6% pour les maillages grossier et moyen et de 0,2% pour le maillage fin. Le maillage grossier correspond à 16 mailles par diamètre de bulle, le maillage intermédiaire à 26 et le maillage fin à 40. Le bon résultat du maillage le plus grossier s'explique par une initialisation chanceuse qui place le centre de la bulle légèrement au-dessus de l'origine (figure 3.8). Ceci est favorable étant donné que notre code surestime légèrement la force de traînée par rapport à celle de flottabilité (alors que dans les autres cas, l'erreur commise à l'initialisation du calcul place le centre de la bulle en dessous de l'origine ce qui est défavorable). On vérifie (figure 3.8) aussi que plus le maillage est fin plus le centre de la bulle est proche de la position théorique (ici l'origine). Ainsi, on a obtenu de très bons résultats et la convergence en maillage.

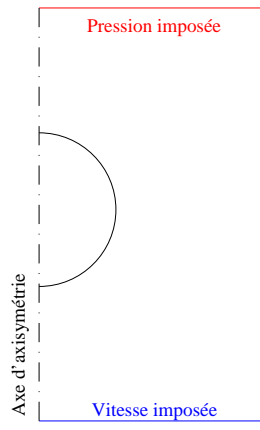


FIG. 3.7 – Conditions aux limites de la simulation numérique

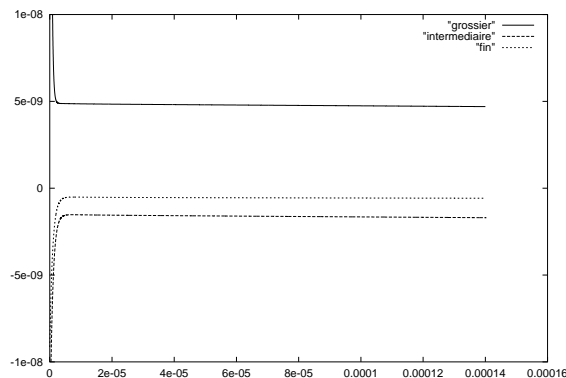


FIG. 3.8 – Ordonnée du centre de la bulle en fonction du temps

Conclusion

Les deux cas tests précédents confirment qu'au moins deux moyennes différentes des viscosités phasiques (la moyenne arithmétique μ_a et la moyenne harmonique μ_h) sont nécessaires pour relier le tenseur des déformations à celui des contraintes visqueuses. De plus, ils montrent

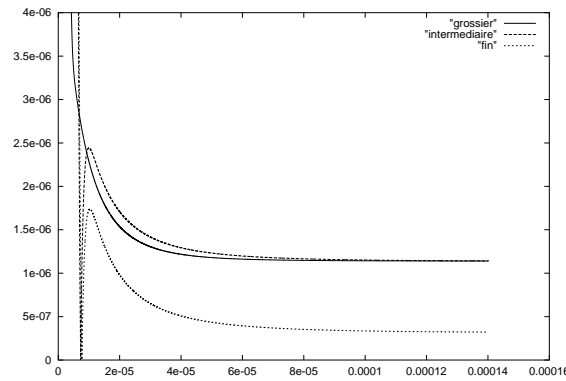


FIG. 3.9 – Ecart à la vitesse théorique en fonction du temps

que notre implémentation numérique de cette fermeture est correcte et possède la propriété indispensable de la convergence en maillage.

3.2 Schéma en temps Runge-Kutta d'ordre 3

Au début du travail de thèse du présent mémoire, le seul schéma temporel dont disposait le front-tracking de Trio_U était un schéma de type Euler explicite. Il a pour inconvénients principaux d'être seulement d'ordre 1 et d'être inconditionnellement instable s'il est utilisé avec une discrétisation centrée du terme convectif. Un tel schéma étant nécessaire à l'étude d'écoulements turbulents, un autre schéma temporel est indispensable. En diphasique, le couplage de l'équation de quantité de mouvement avec celle du transport de l'interface rend la conception de schéma implicite difficile. C'est la raison pour laquelle on s'est orienté vers un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 3. Il a les avantages immédiats d'être d'ordre relativement élevé et d'être conceptuellement simple ainsi que l'avantage subtil, car indirect, d'être compatible avec une discrétisation centrée du terme convectif.

3.2.1 Intérêt d'un schéma en temps compatible avec une discrétisation centrée du terme convectif

La figure 3.10 (issue de la SND décrite au paragraphe 4.3) montre que lorsque l'on sous-résout :

- avec des schémas de convection type schéma amont, la dissipation introduite par ces schémas conduit à une sur-estimation du frottement autour de la bulle (la coordonnée verticale des cas grossier et moyen est inférieure à celle du cas fin),
- avec des schémas de convection centrés, la mauvaise estimation des gradients de vitesse en proche interface conduit à sous-estimer le frottement autour de la bulle (la coordonnée verticale du cas grossier est supérieure à celle du cas moyen).

La dissipation introduite par des schémas de type amont est supérieure à celle qui aurait pu compenser la sous-estimation des gradients de vitesse à l'interface. Comme il est très difficile de faire des modèles de type SGE anti-dissipatifs, il est préférable d'utiliser un schéma centré. Ainsi, dans un objectif de réalisation de simulation type ISS comme pour des études de

SND, un schéma temporel compatible avec une discrétisation centrée du terme convectif est nécessaire.

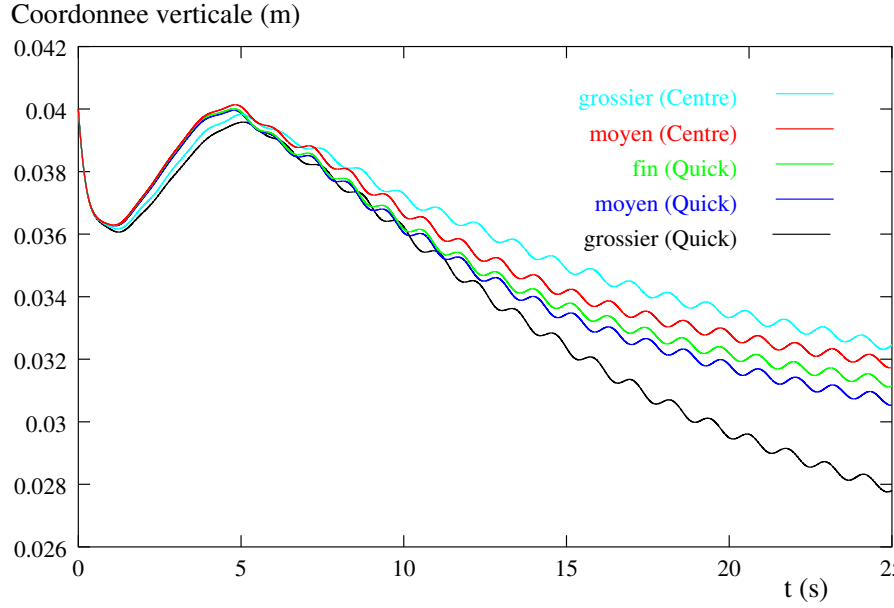


FIG. 3.10 – Convergence en maillage (grossier 150x150, moyen 300x300, fin 375x375)

3.2.2 Notations

En appelant u la vitesse et x_i la position des marqueurs discrétisant l'interface, on notera les deux équations (respectivement le bilan de quantité de mouvement et l'équation du transport de l'interface) à résoudre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, x_i) \quad (3.35a)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = G(u, x_i) \quad (3.35b)$$

3.2.3 Le schéma temporel initial : Euler explicite

En utilisant les notations précédentes, le schéma temporel initial peut se résumer simplement par :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^n, x_i^n) \quad (3.36a)$$

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\Delta t} = G(u^{n+1}, x_i^n) \quad (3.36b)$$

3.2.4 Le schéma proposé : Runge-Kutta d'ordre 3

En conservant les notations, on peut présenter le principe d'un schéma prédicteur-correcteur de type Runge-Kutta avec le cas particulier d'ordre 3 suivant :

$$k_1 = F(u^n, x_i^n) \quad (3.37a)$$

$$l_1 = G(u^n, x_i^n) \quad (3.37b)$$

$$k_2 = F\left(u^n + \frac{\Delta t}{3}k_1, x_i^n + \frac{\Delta t}{3}l_1\right) \quad (3.37c)$$

$$l_2 = G\left(u^n + \frac{\Delta t}{3}k_1, x_i^n + \frac{\Delta t}{3}l_1\right) \quad (3.37d)$$

$$k_3 = F\left(u^n + \frac{2\Delta t}{3}k_2, x_i^n + \frac{2\Delta t}{3}l_2\right) \quad (3.37e)$$

$$l_3 = G\left(u^n + \frac{2\Delta t}{3}k_2, x_i^n + \frac{2\Delta t}{3}l_2\right) \quad (3.37f)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3) \quad (3.37g)$$

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{4}(l_1 + 3l_3) \quad (3.37h)$$

A priori, la fonction F comprend l'étape de projection en pression. Pour des raisons d'organisations du code et afin de diminuer le coût de stockage du schéma, on préfère un algorithme du type décrit par exemple par Williamson (voir [102] où les conditions permettant d'assurer l'équivalence entre les deux types d'algorithme et les relations entre leurs constantes sont précisées). En effet, la difficulté du schéma précédent réside dans le fait qu'il faut garder en mémoire les déplacements correspondant à chaque sous-pas de temps : on ne calcule pas de positions intermédiaires. Dans notre cas précis, où les équations de quantité de mouvement et de transport d'interface sont couplées, le passage par des états intermédiaires est pratique d'un point de vue implémentation numérique. On a donc choisi d'écrire l'algorithme sous une forme équivalente faisant intervenir des états intermédiaires :

$$k_1 = F(u^n, x_i^n) \quad (3.38a)$$

$$u^{n+\frac{1}{3}} = u^n + b_1 \Delta t k_1 \quad (3.38b)$$

$$l_1 = G(u^n, x_i^n) \quad (3.38c)$$

$$x_i^{n+\frac{1}{3}} = x_i^n + b_1 \Delta t l_1 \quad (3.38d)$$

$$k_2 = F\left(u^{n+\frac{1}{3}}, x_i^{n+\frac{1}{3}}\right) + a_2 k_1 \quad (3.38e)$$

$$u^{n+\frac{2}{3}} = u^{n+\frac{1}{3}} + b_2 \Delta t k_2 \quad (3.38f)$$

$$l_2 = G\left(u^{n+\frac{1}{3}}, x_i^{n+\frac{1}{3}}\right) + a_2 l_1 \quad (3.38g)$$

$$x_i^{n+\frac{2}{3}} = x_i^{n+\frac{1}{3}} + b_2 \Delta t l_2 \quad (3.38h)$$

$$k_3 = F\left(u^{n+\frac{2}{3}}, x_i^{n+\frac{2}{3}}\right) + a_3 k_2 \quad (3.38i)$$

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{2}{3}} + b_3 \Delta t k_3 \quad (3.38j)$$

$$l_3 = G\left(u^{n+\frac{2}{3}}, x_i^{n+\frac{2}{3}}\right) + a_3 l_2 \quad (3.38k)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^{n+\frac{2}{3}} + b_3 \Delta t l_3 \quad (3.38l)$$

Pour les constantes a_2 , a_3 , b_1 , b_2 et b_3 , plusieurs choix sont possibles, on a choisi celui qui correspond au cas 7 de [102] :

$$a_2 = -5/9 \quad (3.39a)$$

$$a_3 = -153/128 \quad (3.39b)$$

$$b_1 = 1/3 \quad (3.39c)$$

$$b_2 = 15/16 \quad (3.39d)$$

$$b_3 = 8/15 \quad (3.39e)$$

Les vitesses intermédiaires $u^{n+\frac{1}{3}}$ et $u^{n+\frac{2}{3}}$ ainsi que les positions d'interfaces intermédiaires $x_i^{n+\frac{1}{3}}$ et $x_i^{n+\frac{2}{3}}$ correspondent aux temps $t_n + \frac{1}{3}\Delta t$ et $t_n + \frac{2}{3}\Delta t$ (on obtient ces coefficients en intégrant 1 entre 0 et 1 à l'aide du schéma précédent). Elles correspondent donc à des états réels du système. Cependant, on n'est pas à l'ordre 3 sur ces positions intermédiaires.

Afin de vérifier le bon comportement du schéma choisi, on se propose d'étudier son comportement tout d'abord uniquement sur l'équation de convection de l'interface, puis sur le couplage entre cette dernière et l'équation bilan de quantité de mouvement.

3.2.5 Validation sur l'équation de transport de l'interface

Transport par un champ de vitesse stationnaire mais non uniforme

On soumet une interface sphérique à un champ de rotation solide où la vitesse angulaire, $\dot{\omega}$, vaut 1 s^{-1} . Dans un domaine cubique de 10 cm de côté (discrétisé par 16 mailles), on soumet une interface de coordonnées initiales ($x=25 \text{ mm}$, $y=50 \text{ mm}$, $z=50 \text{ mm}$) au champ de vitesse, V

$$V = \dot{\omega} \begin{pmatrix} -(y - 0,05) \\ (x - 0,05) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

La trajectoire théorique du centre de gravité de l'inclusion est bien entendu un cercle. Sur la figure 3.11 on a tracé les trajectoires obtenues avec différents choix de pas de temps afin de vérifier la convergence et de mesurer les écarts avec la réalité. On visualise ainsi les différences attendues entre l'ancien schéma (Euler explicite) et le nouveau (Runge-Kutta d'ordre 3). Comme le schéma Runge-Kutta d'ordre 3 se fait en trois sous-pas de temps, on choisit comme pas de temps des simulations utilisant un schéma Euler explicite un tiers de celles utilisant le schéma Runge-Kutta. On retrouve en particulier le fait qu'avec le schéma d'Euler explicite la distance, d , entre le centre du domaine et le centre de gravité de l'inclusion augmente au cours du temps : $d_{n+1} = d_n \sqrt{1 + (\dot{\omega} \Delta t)^2}$ jusqu'à ce que les bords de l'interface rencontrent ceux du domaine. La figure 3.12 permet de mesurer l'ordre effectif du schéma en comparant les pentes obtenues pour les deux pas de temps (0,6 s et 0,3 s). Le quotient des deux pentes est un peu plus de 7 ce qui correspond à un ordre d'un peu plus de 2,8 (l'ordre 3 se retrouve à convergence).

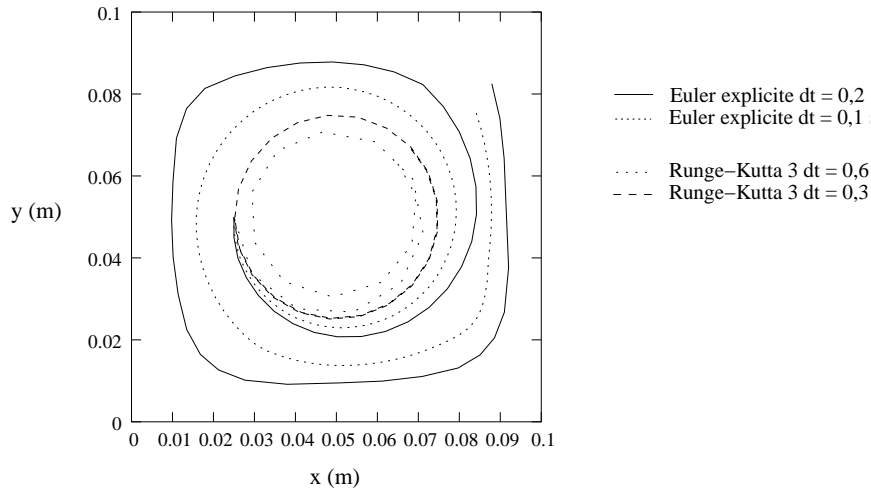


FIG. 3.11 – Trajectoire du centre de gravité (comparaison Runge-Kutta 3 et Euler explicite)

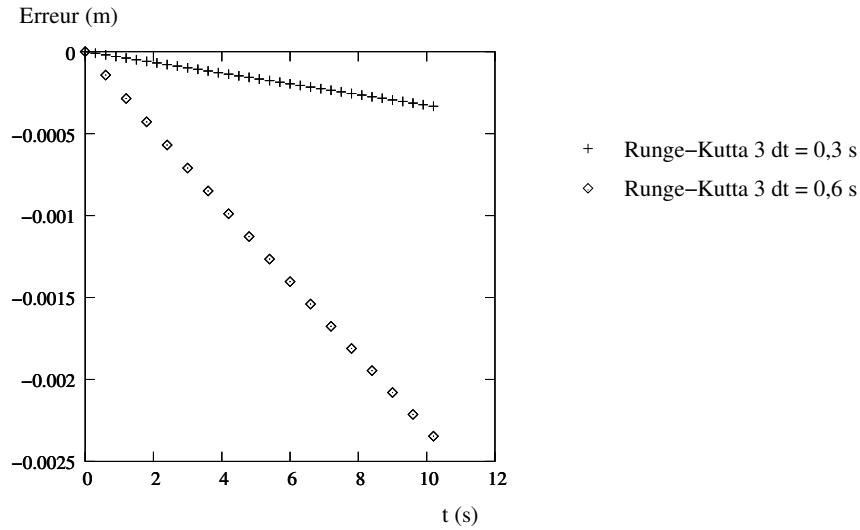


FIG. 3.12 – Ecart entre position théorique et position réelle

Transport par un champ de vitesse uniforme mais instationnaire

On soumet une interface sphérique à un champ de vitesse uniformément accéléré. Initialement la vitesse est nulle et on impose une condition de vitesse instationnaire à la limite en bas du domaine :

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,001t^2 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Ce test a pour but de vérifier la bonne prise en compte des conditions aux limites instationnaires. Le pas de temps est fixé à 0,25 s. Sur la figure 3.13, on vérifie que l'on est exact pour des positions en t^3 (schéma d'ordre 3).

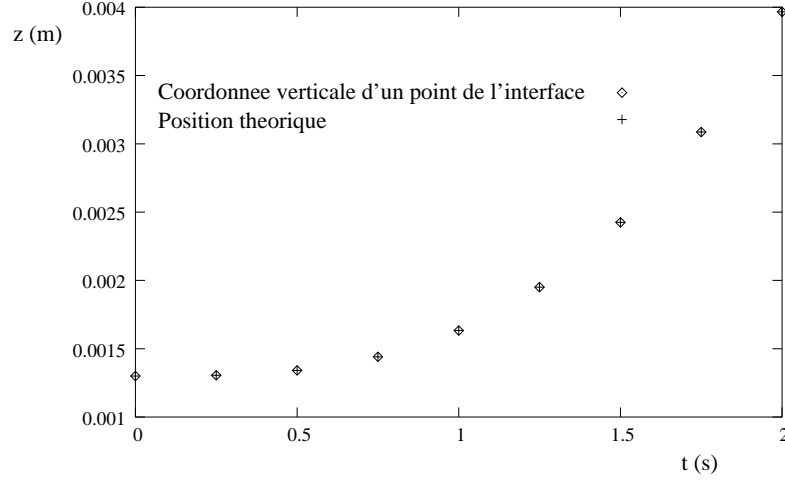


FIG. 3.13 – Evolution temporelle de la coordonnée verticale (comparaison RK 3 et solution analytique)

3.2.6 Validation sur le couplage entre Navier-Stokes et le transport de l'interface

Grâce aux tests précédents, nous avons vérifié notre implémentation d'un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 3. En particulier, on a estimé à partir des résultats numériques que l'ordre effectif du schéma implémenté était bien 3. Logiquement, on a donc constaté que sa convergence en maillage était beaucoup plus rapide qu'un schéma d'Euler explicite (seulement d'ordre 1). On le teste ensuite sur les oscillations d'une inclusion afin de voir quel est son comportement sur les équations couplées. On s'intéresse en particulier à des effets indirects comme la dissipation due au choix (*a priori* obligatoire dans le cas d'un schéma Euler explicite) de la discrétisation du terme convectif.

Oscillation d'une bulle

L'objectif principal de ce cas test est de vérifier l'équilibre entre la tension de surface et les effets d'inertie [55]. En effet, dans l'hypothèse des petites déformations, les périodes propres des oscillations, T_n , sont [51]

$$\omega_n^2 = \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{(n+1)\rho_I + n\rho_O} \frac{\sigma}{R^3} \quad (3.42a)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (3.42b)$$

où R est le rayon ($R = 1,6 \text{ mm}$ dans notre cas), σ la tension de surface ($\sigma = 0,07 \text{ Pa.m}^{-1}$), ρ_I (respectivement ρ_O) la masse volumique du fluide intérieur (respectivement du fluide extérieur) ($\rho_I = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_O = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$). On s'intéresse au cas du mode 2 qui correspond à une forme initiale d'ellipsoïde, sa période propre théorique est $T_2 = 0,0139 \text{ s}$. Les résultats obtenus (voir figure 3.14) avec les différents schémas en temps et les différentes discrétisations du terme convectif pour un maillage de 7 mm de côté discrétisé par 27 mailles dans chaque direction s'écartent de moins de 0,7 pourcent (erreur qui diminue avec le confinement). Cette précision nous confirme à nouveau que le nouveau schéma temporel a bien été implémenté. On constate aussi qu'il n'y a pas d'effet dû au choix du schéma temporel ou de la discrétisation du terme convectif sur la fréquence. A l'inverse, l'atténuation de l'amplitude

dépend elle fortement de la discrétisation du terme convectif : il est connu que le schéma Quick dissipe. On s'aperçoit sur la figure 3.14 que dans le cas que nous avons choisi avec les viscosités dynamiques $\mu_I = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\mu_O = 500 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, le choix du schéma Quick ou centré est négligeable : la courbe en trait plein (légendée viscosité physique) a été obtenue pour les deux schémas. Afin de quantifier un peu plus l'effet du schéma, nous avons donc choisi de faire les mêmes calculs avec une viscosité dix fois plus faible. On s'aperçoit alors de l'importance de la discrétisation du terme convectif : au bout d'une douzaine d'oscillations plus d'un tiers de l'amplitude a été dissipé par la dissipation numérique du schéma ! La surprise est que ce résultat est indépendant du schéma en temps. On s'attendait en particulier à ce qu'un schéma centré soit instable avec le schéma Euler explicite mais ce n'est pas le cas pour ce test précis (la courbe en pointillés fins a été obtenue pour les deux schémas Runge-Kutta 3 et Euler explicite). On explique ceci par le fait que le problème n'est pas du tout dominé par la convection ou le transport de l'interface. Il n'en reste pas moins vrai que, pour des cas plus complexes, en particulier en présence de turbulence, la discrétisation centrée du terme convectif est incompatible avec un schéma Euler explicite. Comme un schéma centré est indispensable pour éviter les problèmes de dissipation similaires à celui décrit ici, un autre schéma en temps était bien nécessaire.

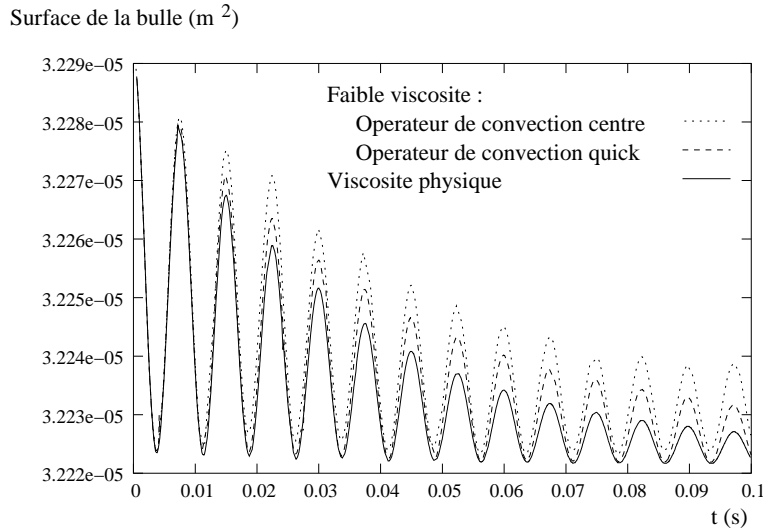


FIG. 3.14 – Evolution temporelle de la surface de la bulle

3.3 Raffinement lagrangien

Avant de réaliser des comparaisons fines et quantitatives sur les normes des termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques à partir de tests *a priori*, nous avons étudié de façon pragmatique les effets dus à une sous-résolution. On dit d'un calcul qu'il est sous-résolu lorsque le maillage utilisé est trop grossier pour décrire l'ensemble des phénomènes et qu'aucun modèle n'est ajouté pour jouer le rôle de ce qui n'est pas simulé. La réalisation de tests *a priori* et l'étude des effets de la sous-résolution sont deux actions complémentaires. En effet, les tests *a priori* permettent de hiérarchiser les différents termes sous-maille et de vérifier si les fermetures de ces termes sont valides. Les effets de la sous-résolution sont plus globaux car il peut y avoir des phénomènes de compensation d'erreur mais ils peuvent aussi être plus fins lorsqu'une erreur minime (imperceptible avec des tests *a priori*) conduit à de grosses différences dans la dynamique de l'écoulement. Typiquement, nous verrons dans ce chapitre qu'une très faible erreur de la description de la géométrie des interfaces entraîne

une très mauvaise prédiction de la trajectoire de la bulle. Pour y remédier, nous proposons une méthode de raffinement du maillage lagrangien qui permet d'améliorer la description des formes de l'interface.

3.3.1 Simulations sous-résolues

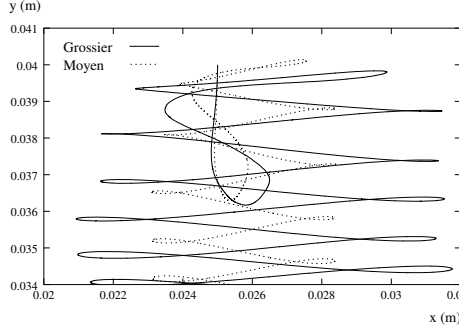
L'ensemble des résultats que nous utilisons ici est issu de la simulation *Montée d'une bulle à contre-courant* présentée dans le paragraphe 4.3. Nous avons déjà fait une étude des effets de la sous-résolution en examinant l'évolution temporelle de la coordonnée verticale du centre de gravité de la bulle (voir figure 3.10 du paragraphe 3.2.1). Nous avons alors comparé les effets de la sous-résolution avec soit l'utilisation d'une discrétisation de type Quick pour le terme convectif de l'équation de bilan de quantité de mouvement, soit l'utilisation d'une discrétisation centrée pour ce même terme. La conclusion est : le schéma de type Quick dissipe trop et le schéma centré pas assez. Ce constat est connu (nous n'avons fait que l'étendre au diphasique) mais il illustre une des difficultés majeures de la SGE : le lien entre les modèles physiques et la méthode numérique⁵. En toute rigueur, on devrait fermer les termes sous-maille qui apparaissent lorsque l'on filtre les équations, d'une façon unique, c'est-à-dire indépendamment du choix de telle ou telle méthode numérique. L'exemple précédent montre que cela n'est pas toujours possible puisque le choix d'un schéma peut nécessiter suivant le cas un modèle dissipatif ou anti-dissipatif. Les approches MILES (*Monotone Integrated Large Eddy Simulation*) [80] considèrent des modèles implicites où le choix du schéma joue le rôle du terme sous-maille (ces approches sont rapidement présentées dans le chapitre suivant). Dans notre cas, cela reviendrait à trouver une discrétisation du terme convectif qui permette de compenser les effets de la sous-résolution. Cette discrétisation devrait donc introduire plus de dissipation qu'une discrétisation centrée et moins que celle introduite par un schéma de type Quick. Pour que ce genre d'approches soit satisfaisant, il est nécessaire de connaître la physique que l'on souhaite modéliser et de maîtriser les effets des méthodes numériques. Finalement, il s'agit toujours de distinguer ce qui relève des aspects numériques de ce qui relève de la physique, quitte, une fois ce *distinguo* mesuré, à faire jouer un rôle physique au comportement particulier d'un type de discrétisation. Notre méthode de raffinement lagrangien intervient au niveau de la méthode numérique de la description de la géométrie des interfaces et non au niveau de la modélisation physique des déformations sous-maille de l'interface. On se place d'ailleurs dans ce mémoire dans les conditions où il n'y a pas de déformations sous-maille⁶ (*a fortiori*, on n'envisage donc pas d'inclusions plus petites que la taille de la maille, la géométrie des interfaces est supposée résolue).

Constats

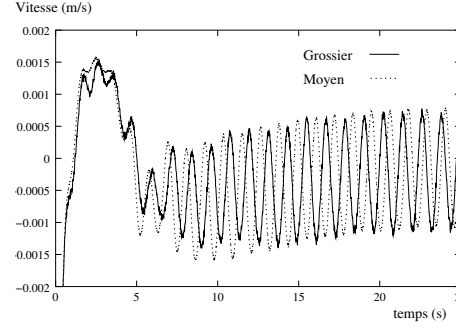
On reprend la figure 4.9, en ne regardant que le début du calcul pour comparer les résultats obtenus avec un maillage grossier d'une part et un maillage fin d'autre part. Sur la figure 3.15(b), on constate que la fréquence des oscillations de la vitesse verticale est plus faible dans le cas sous-résolu que dans le cas résolu. C'est aussi le cas pour l'énergie d'interface qui, nous l'avons vu, oscille à la même fréquence que la vitesse verticale. Ces erreurs de vitesse et de géométrie de l'interface impliquent naturellement des erreurs de trajectoire (voir fig. 3.15(a)). En particulier, la trajectoire de la bulle s'écarte beaucoup plus de son axe de symétrie dans le cas sous-résolu.

⁵On retrouve cette difficulté de la SGE lorsque l'on filtre explicitement les équations : quel filtre approche le mieux le filtre implicite que constitue la méthode numérique utilisée ?

⁶On explicite cette hypothèse dans le paragraphe 3.3.2.



(a) Trajectoire du centre de gravité



(b) Vitesse verticale de la bulle

FIG. 3.15 – Trajectoire et vitesse verticale du centre de gravité de la bulle

Interprétations

Une partie des erreurs constatées précédemment peuvent trouver leurs origines dans une mauvaise description géométrique de l'interface. En effet, de façon générale, même si tous les marqueurs lagrangiens sont bien sur l'interface, un maillage trop grossier conduit à une mauvaise estimation du périmètre et du volume de la bulle. On a alors une erreur globale⁷ sur les forces de flottabilité et les forces de frottement. L'équilibre entre ces forces se fait pour une vitesse terminale de la bulle qui n'est *a priori* pas la bonne vitesse. Une meilleure description de la forme de l'interface devrait permettre de se rapprocher de la bonne vitesse terminale. En fait, une meilleure description nous rapproche des conditions réalistes mais peut sans autre modélisation nous éloigner dans un premier temps de la bonne vitesse terminale à cause de phénomènes de compensation d'erreur. Ainsi, un scénario réaliste est le suivant :

- Une mauvaise description de l'interface sous-estime plus les forces de flottabilité que les forces de frottement. L'erreur géométrique tend alors à ralentir la bulle.
- La sous-résolution du champ de vitesse eulérien entraîne une sous-estimation des gradients dans les zones de proche interface ce qui tend à accélérer la bulle.

Au total, l'erreur liée à la mauvaise géométrie de la bulle peut compenser une partie de l'erreur liée à la sous-résolution des couches limites et en corrigeant seulement l'une de ces deux erreurs, on aura l'impression de dégrader la solution (c'est ce que l'on constate sur la figure 7.2 du chapitre 7). Il est donc très délicat de vérifier le bien fondé d'un modèle *a posteriori* car, comme on ne dispose pas de critère qui permette d'isoler ses effets, on ne l'évalue jamais seul mais combiné avec les autres modélisations (voir la méthodologie utilisée au chapitre 7). Heureusement, on peut facilement estimer l'erreur commise *a priori* sur le périmètre et l'aire (surface et volume en 3D) pour se convaincre de l'intérêt de raffiner le maillage lagrangien. On suppose que l'on discrétise un cercle de rayon 1 avec N marqueurs. L'aire, A , et le périmètre P discrets de ce cercle sont alors :

$$A = N \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (3.43a)$$

$$P = 2N \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (3.43b)$$

L'aire réelle est π et le périmètre réel 2π . En posant $x = \frac{\pi}{N}$, le rapport aire discrète sur aire réelle s'écrit $\cos(x) \frac{\sin(x)}{x}$ et le rapport périmètre discret sur périmètre réel $\frac{\sin(x)}{x}$. Les fonctions représentant l'erreur commise sur l'aire, E_A , et celle commise sur le périmètre, E_P , sont donc :

⁷On considère ici que la bulle est une entité et on intègre les forces sur son volume ou sa surface.

$$E_A(x) = 1 - \cos(x) \frac{\sin(x)}{x} \quad (3.44a)$$

$$E_P(x) = 1 - \frac{\sin(x)}{x} \quad (3.44b)$$

Quand le nombre de marqueurs tend vers l'infini, x tend vers zéro, l'aire et le périmètre discrets tendent vers les valeurs exactes, les fonctions E_A et E_P tendent vers 0. La figure 3.16 montre que l'erreur commise sur l'aire décroît moins vite que l'erreur commise sur le périmètre quand x tend vers zéro. Ceci est cohérent avec notre hypothèse qu'une mauvaise description de l'interface conduit à une plus grosse erreur sur les forces de flottabilité que sur les forces de frottements. Si on veut moins de cinq pour cent d'erreur sur le volume, il est nécessaire que $x < 0,28$, et donc que l'on dispose d'au moins 11 marqueurs pour décrire le cercle. Si on ramène ce critère sur le cercle à un critère sur les déformations de l'interface, on trouve que la distance séparant deux marqueurs doit être trois fois plus petite que le minimum du rayon de courbure. Enfin, il reste à interpréter le fait que, dans un cas sous-résolu, la bulle

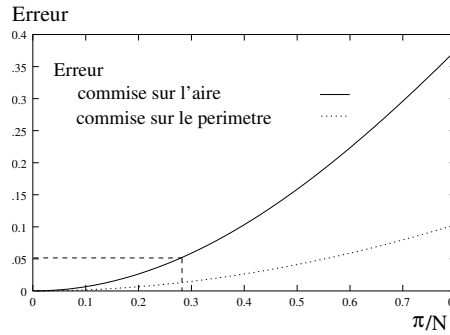


FIG. 3.16 – Représentation de l'erreur commise sur le périmètre et l'aire d'une interface circulaire en fonction du nombre de marqueurs lagrangiens N .

s'écarte beaucoup plus de l'axe de symétrie de sa trajectoire. Pour cela, nous avons eu l'idée de regarder la forme discrétisée de la bulle et la courbure évaluée à chaque marqueur. Nous nous sommes aperçus qu'un maillage lagrangien trop grossier pouvait conduire à une dissymétrie artificielle de l'interface (fig. 3.17(a)) et donc à une dissymétrie des forces interfaciales et du champ de vitesse autour de la bulle. Ce défaut nous semble pouvoir être à l'origine de l'erreur de trajectoire. Il peut être facilement corrigé par la méthode de raffinement du maillage lagrangien que nous proposons.

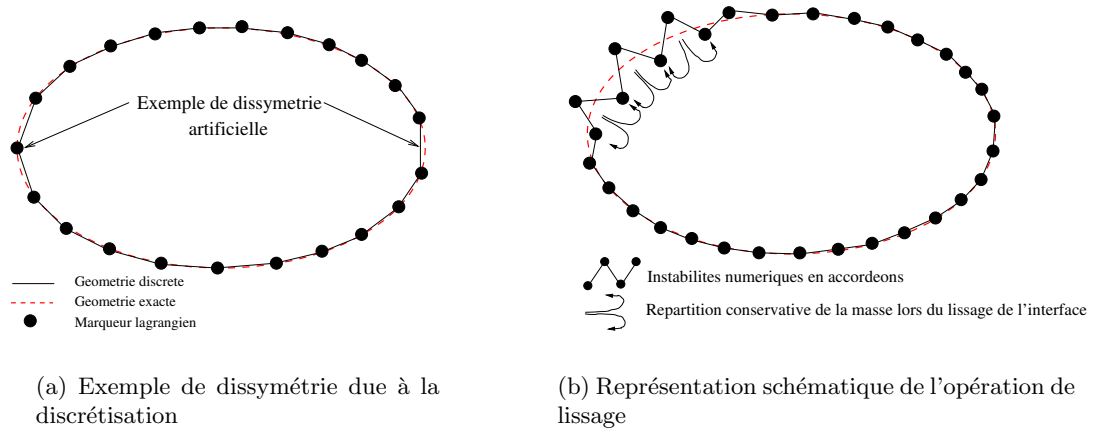


FIG. 3.17 – Raffinement du maillage lagrangien

3.3.2 Hypothèses sur les plus petites déformations de l'interface

Devant la complexité des mécanismes d'interaction interface/turbulence, on se restreint dans ce mémoire au cas où les plus petites échelles des déformations de l'interface sont plus grandes que les plus petites échelles résolues de la turbulence (fig. 3.18). On explique ici pourquoi une telle situation est possible et comment on peut estimer à partir de l'échelle de Kolmogorov, η , la taille des plus petites déformations d'une interface.

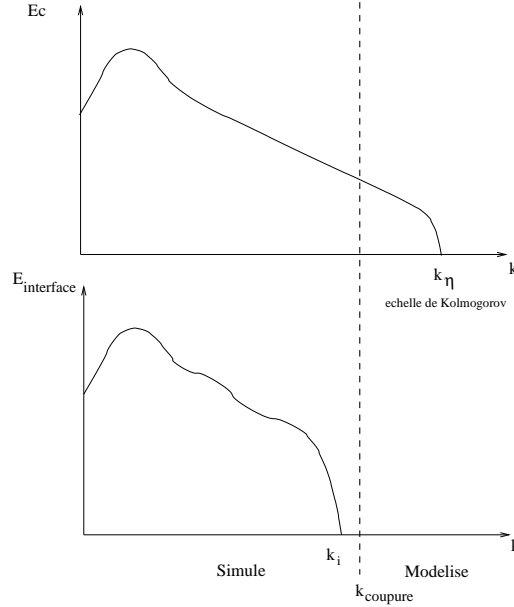


FIG. 3.18 – Echelle simulée et échelle modélisée pour l'énergie cinétique et l'énergie d'interface

Estimation de la taille des plus petites déformations d'une interface

Soit k le nombre d'onde d'une structure turbulente. L'échelle de temps, t_f , qui lui est associé est

$$t_f = \frac{1}{k\sqrt{E(k)k}} \quad (3.45)$$

où E est la densité spectrale d'énergie cinétique. A une déformation de même nombre d'onde d'une interface, on associe le temps caractéristique suivant

$$t_i = \sqrt{\frac{\rho}{k^3\sigma}} \quad (3.46)$$

où ρ est la masse volumique et σ la tension de surface. Il paraît clair qu'une structure turbulente ne peut exciter une interface que si son temps caractéristique, t_f , est inférieur ou du même ordre de grandeur que le temps de réponse de cette interface, t_i . En effet, t_i correspond au temps de retour à l'équilibre de l'interface pour une déformation de nombre d'onde k ⁸. Si la tension de surface, σ , est infinie, le retour à l'équilibre, t_i , est instantané : l'interface revient immédiatement à sa position d'équilibre, elle n'est pas déformée. Si la tension de surface, σ , est nulle, le temps de retour à l'équilibre, t_i , est infini : l'interface reste déformée. Par conséquent, on s'intéresse au nombre d'onde k_i correspondant au cas où le temps caractéristique de la

⁸Ce temps est analogue à celui d'un ressort.

structure turbulente, t_f , est plus petit que celui de l'interface, t_i . Pour se réserver un degré de liberté, on se donne une constante α telle que $\alpha < 1$ et

$$t_f = \alpha t_i \quad (3.47a)$$

L'énergie cinétique turbulente $E(k_i)$ associée à ce nombre d'onde vérifie donc :

$$\frac{1}{k_i \sqrt{E(k_i) k_i}} = \alpha \sqrt{\frac{\rho}{k_i^3 \sigma}} \quad (3.47b)$$

On trouve :

$$E(k_i) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\sigma}{\rho} \quad (3.47c)$$

Comme on cherche k_i plus petit que le nombre d'onde de Kolmogorov $k_\eta = \frac{1}{\eta}$ (voir fig. 3.18), on suppose être dans la zone inertielle du spectre. Pour cette gamme de nombre d'onde, la densité spectrale d'énergie cinétique turbulente s'écrit

$$E(k) = \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (3.48)$$

avec ε le taux de dissipation visqueuse par unité de masse. Les deux dernières équations impliquent que $\frac{1}{\alpha^2} \frac{\sigma}{\rho} = \varepsilon^{\frac{2}{3}} k_i^{-\frac{5}{3}}$, on en déduit une première expression pour le nombre d'onde associé aux plus petites déformations de l'interface, k_i :

$$k_i = \alpha^{\frac{6}{5}} \varepsilon^{\frac{2}{5}} \frac{\rho^{\frac{3}{5}}}{\sigma^{\frac{3}{5}}} \quad (3.49)$$

De façon générale, le taux de dissipation visqueuse par unité de masse, ε , s'exprime à partir du nombre d'onde de Kolmogorov, k_η , et de la viscosité cinématique, ν :

$$\varepsilon = \nu^3 k_\eta^4 \quad (3.50)$$

On a donc :

$$k_i = \alpha^{\frac{6}{5}} k_\eta^{\frac{8}{5}} \mu^{\frac{6}{5}} \sigma^{-\frac{3}{5}} \rho^{-\frac{3}{5}} = \alpha^{\frac{6}{5}} k_\eta \frac{\mu^{\frac{6}{5}}}{\eta^{\frac{3}{5}} \sigma^{\frac{3}{5}} \rho^{\frac{3}{5}}} \quad (3.51)$$

Si on prend pour longueur caractéristique l'échelle de Kolmogorov, η , le nombre d'Ohnesorge, Oh , s'écrit :

$$Oh_\eta = \sqrt{\frac{\mu^2}{\rho \eta \sigma}} \quad (3.52)$$

On peut réécrire l'équation (3.51) en utilisant ce nombre adimensionnel :

$$k_i = k_\eta (\alpha Oh_\eta)^{\frac{6}{5}} \quad (3.53)$$

Il est important de noter que les équations (3.51) et (3.53) font appel à une constante α que nous imaginons volontiers proche de un mais qu'il serait intéressant d'évaluer expérimentalement ou numériquement. Il s'agirait par exemple de vérifier l'exposant $\frac{6}{5}$ sur une gamme de nombre d'Ohnesorge. Dans cet objectif, nous avons développé un outil capable de tracer des spectres d'énergies d'interface. Il est basé sur une décomposition de la géométrie de l'interface sur la base des harmoniques sphériques. Le principe de calcul du spectre d'énergie interfaciale est présenté dans l'annexe A. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'exploiter cet outil.

Conclusion sur la hiérarchie des échelles

Si le nombre d'Ohnesorge, calculé avec l'échelle de Kolmogorov, est très petit devant un, alors les plus petites déformations de l'interface sont plus grandes que les plus petites structures turbulentes. Pour des écoulements satisfaisant cette condition, on est certain que les déformations des interfaces de l'ordre de l'échelle de Kolmogorov sont d'origine numérique. Il est judicieux de les supprimer. Pour ce faire, nous proposons un modèle de diffusion de courbure.

3.3.3 Un modèle de diffusion de courbure

Simuler numériquement l'ascension d'une bulle nécessite de capturer l'équilibre versatil des forces de traînée, de portance et d'Archimède. Les deux premières dépendent fortement de la géométrie de la bulle (périmètre frottant par exemple en 2D). Dans un but de réaliser une sorte de Simulation des Grandes Echelles (SGE) en diphasique -Simulation des Grandes Interfaces-, on souhaite conserver une bonne géométrie de la bulle même dans le cas d'un maillage eulérien relativement grossier.

Idée de départ

Avec une méthode Front-tracking qui utilise des marqueurs pour suivre l'interface, il suffit *a priori* d'augmenter le nombre de marqueurs pour améliorer la description de l'interface. Cependant, de cette façon, le maillage lagrangien qui décrit l'interface devient plus riche que le maillage eulérien sous-jacent et on manque par conséquent de degrés de liberté pour le déplacement des marqueurs. Ceci conduit à une instabilité numérique en accordéon (voir fig. 3.17(b)). Physiquement, ces accordéons devraient être rappelés par la tension de surface et dissipés par la viscosité. Lorsqu'on raffine le maillage lagrangien sans ajouter aucune modélisation, ils ne le sont pas car, numériquement, les forces superficielles sont calculées sur le maillage eulérien et donc, la tension de surface agit seulement à l'échelle du maillage eulérien (voir fig. 3.19). Autrement dit, le couplage entre le maillage lagrangien et eulérien ne fonctionne que pour les périodes spatiales deux fois supérieures à la taille des mailles eulériennes. Ainsi, l'amplitude de ces hautes fréquences, sur lesquelles ne joue aucun mécanisme de rappel, peut donc augmenter par ajout des erreurs numériques jusqu'à la divergence du calcul. Afin d'éviter ces instabilités et de permettre le raffinement du maillage lagrangien, il faut agir sur les hautes fréquences des déformations de l'interface comme l'auraient fait la tension de surface et la viscosité. La difficulté principale réside dans le fait qu'il ne nous faut pas agir sur les fréquences macroscopiques qui, elles, subissent l'action de la viscosité et de la tension de surface. Par ailleurs, il est inutile d'essayer d'appliquer directement une force qui jouerait le rôle de la tension de surface sur l'interface. En effet, cette dernière n'ayant pas de masse, il n'est pas possible de déterminer son déplacement à partir d'un bilan de quantité de mouvement.

En résumé, on ne cherche pas un modèle qui agit de la même façon que la tension de surface et la viscosité mais simplement un modèle qui fournit les mêmes effets. Puisque leurs effets combinés conduisent à la minimisation de l'énergie de surface, c'est-à-dire à la minimisation de la surface dans le cas d'une tension de surface constante, on cherche un mécanisme de rappel qui tende à minimiser la surface. Enfin, il est primordial d'être conservatif en volume. Nous veillerons donc à respecter cette contrainte. Le modèle présenté ici répond aux exigences décrites précédemment : lissage conservatif des hautes fréquences d'une surface.

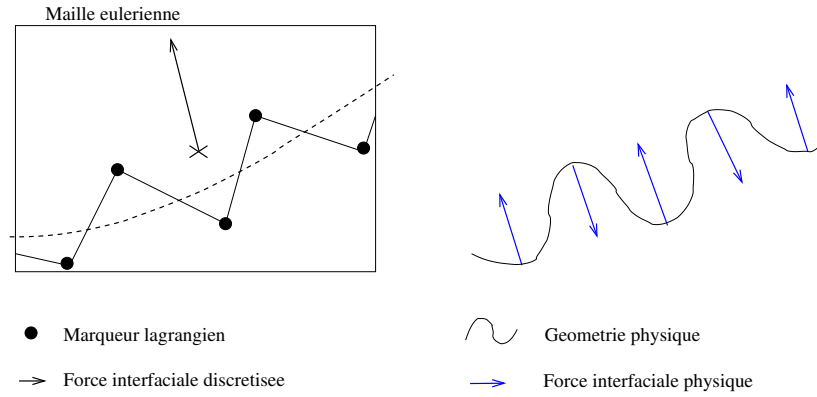


FIG. 3.19 – Instabilités numériques lors d'un raffinement lagrangien. Du fait de la discrétisation des forces superficielles à l'échelle de la maille eulérienne, numériquement, on n'agit que sur la géométrie moyenne de la bulle : aucun mécanisme de rappel permet d'éviter le développement d'instabilité en accordéon (à gauche). Physiquement, la tension de surface exerce une force de rappel qui tend à minimiser la surface et, l'action des forces visqueuses dissipe l'énergie cinétique des phases issue du transfert avec l'énergie d'interface. Ces deux actions conjuguées évitent le développement d'instabilité.

Principe en continu

On appelle Γ le lieu géométrique qui décrit une interface **fermée** de surface S . Soit M un point de l'interface, \mathbf{OM} le vecteur position, v la vitesse (correspondant au déplacement de notre lissage), κ la courbure et \mathbf{n} la normale à l'interface. Comme seul le déplacement normal à l'interface a un sens, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial t} = v \mathbf{n} \quad (3.54)$$

On choisit comme vitesse de déplacement

$$v = -\alpha \Delta_s \kappa \quad (3.55)$$

où α est une constante positive et Δ_s désigne le laplacien de surface (voir annexe C où les dérivées de surface sont définies). On montre qu'au premier ordre la variation temporelle de la surface s'écrit :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \int_{\Gamma} \kappa v \, d\Gamma \quad (3.56)$$

Ce qui, en utilisant l'expression de la vitesse (équation (3.55)) et en faisant une intégration par partie, conduit à :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha \int_{\Gamma} \|\nabla_s \kappa\|^2 d\Gamma \quad (3.57)$$

Par conséquent, le déplacement que nous venons de définir assure la décroissance de la surface. Nous allons montrer qu'il est équivalent à un filtre d'ordre 4, ce qui permet de ne pas (ou très peu) filtrer les basses fréquences. Bien que les définitions précédentes soient tout à fait générale et ne présupposent pas de la dimension de l'espace de travail, on se ramène ici à une interface 1D. Soit x la coordonnée horizontale, on définit l'interface de hauteur h par

$$h(x, t) = A(t) e^{jkx} \quad (3.58)$$

où k correspond à la pulsation spatiale. Au premier ordre par rapport à l'amplitude A que l'on suppose suffisamment faible, l'équation (3.55) fournit

$$A'(t) = -\alpha k^4 A(t) \quad (3.59)$$

soit

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha k^4 t} \quad (3.60)$$

On a bien construit un filtre d'ordre 4 qui lisse les hautes fréquences et qui n'affecte que très peu les basses fréquences. En effet, les effets du filtre sur les basses fréquences ($k \rightarrow 0$) sont très vite négligeables devant la décroissance visqueuse en $e^{-\nu k^2 t}$.

Formulation conservative du filtre

Afin d'obtenir une formulation qui conserve le volume, on introduit le flux, ϕ , défini par :

$$\phi = \alpha \nabla_s \kappa \quad (3.61)$$

On voit qu'alors la vitesse (équation (3.55)) s'écrit :

$$v = -\nabla_s \cdot \phi \quad (3.62)$$

Soit C , le bord de S (partie de Γ), la variation de volume V engendrée par ce déplacement s'écrit :

$$V = \int_S v \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_S \nabla_s \cdot \phi d\Gamma \quad (3.63a)$$

Comme le flux, ϕ , est tangent à la surface, le théorème de la divergence surfacique (voir paragraphe C.10 de l'annexe C) permet de transformer la précédente intégrale de surface en intégrale de contour :

$$V = - \oint_C \phi \cdot \tau dC \quad (3.63b)$$

Cette dernière relation assure bien la conservation du volume d'une interface fermée.

Discrétisation du filtre

Il s'agit de préciser (en 2D pour plus de clarté) les définitions discrètes des différentes grandeurs utilisées par ce filtre et de préciser si les données sont définies au niveau des marqueurs ou au centre des segments qui les joignent.

Au sommet i , on calcule :

- la courbure κ_i ,
- la distance entre le sommet $i - 1$ et le sommet $i + 1$ b_i ,
- la variation de volume engendrée

$$\delta V_i = \left(\phi_{i-\frac{1}{2}} - \phi_{i+\frac{1}{2}} \right),$$

- le déplacement associé au lissage

$$d_i = \frac{1}{2} \frac{\delta V_i}{b_i}.$$

Au centre du segment $i + \frac{1}{2}$, on calcule :

- la longueur associée $l_{i+\frac{1}{2}}$,
- le flux

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \alpha \frac{\kappa_{i+1} - \kappa_i}{l_{i+\frac{1}{2}}}.$$

La discrétisation précédente a été pensée pour la méthode de Front-tracking que nous utilisons. Elle ne peut pas être appliquée directement sous cette forme précise à d'autres méthodes. Cependant, l'idée ne présuppose aucune méthode, et la formulation continue est *a priori* adaptée à chacune d'entre elles.

Stabilité numérique du filtre

On reste en 2D. On cherche la CFL de notre filtre en fonction du paramètre α . On suppose que les abscisses, x_i , des marqueurs de l'interface régulièrement espacés de Δ_x :

$$x_i = i \Delta_x$$

La hauteur discrète de l'interface (équivalent de l'équation (3.58)) est

$$h_i^n = A^n e^{\frac{j\pi}{m\Delta_x} x_i} \quad (3.64)$$

où A^n est un coefficient réel positif représentant l'amplitude, m un entier non nul, $j^2 = -1$ et l'exposant n représente le temps. En utilisant le schéma d'Euler explicite et des différences finies centrées pour les calculs des opérateurs de dérivée surfacique, l'équation (3.55) devient au premier ordre par rapport à l'amplitude A^n :

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta_t} = -\alpha \frac{h_{i-2}^n - 4h_{i-1}^n + 6h_i^n - 4h_{i+1}^n + h_{i+2}^n}{\Delta_x^4} \quad (3.65)$$

Ce qui fournit en utilisant la forme particulière (3.64)

$$h_i^{n+1} = A^n \left[1 - 4 \frac{\alpha \Delta_t}{\Delta_x^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{m} \right) \right)^2 \right] e^{\frac{j\pi}{m\Delta_x} x_i} \quad (3.66)$$

ou encore :

$$A^{n+1} = A^n \left[1 - 4 \frac{\alpha \Delta_t}{\Delta_x^4} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{m} \right) \right)^2 \right] \quad (3.67)$$

La condition de stabilité étant équivalente à

$$A^{n+1} < A^n, \quad (3.68)$$

la stabilité est assurée pour tout Δ_t vérifiant pour tout entier m non nul :

$$\alpha \Delta_t < \frac{\Delta_x^4}{4 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{m} \right) \right)^2} \quad (3.69)$$

Par conséquent, il suffit que :

$$\alpha \Delta_t < \frac{\Delta_x^4}{16} \quad (3.70)$$

Réglage de l'amortissement des hautes fréquences

L'objet de ce paragraphe est de répondre à la question : quel degré de lissage veut-on pour l'interface? Ce lissage a été introduit pour jouer le rôle de la tension de surface et de la viscosité sur les hautes fréquences. On est donc tenté de fixer les paramètres de sorte que le filtre agisse effectivement comme la tension de surface et la viscosité. Malheureusement, les hautes fréquences que nous voulons amortir ont une origine essentiellement numérique. Il n'est donc pas forcément judicieux de vouloir les amortir avec les bonnes constantes de temps physiques. On peut imaginer par exemple un écoulement suffisamment peu visqueux pour que l'amortissement physique soit très inférieur au bruit numérique. Ce qui conduirait nécessairement à l'instabilité du calcul. Au contraire, dans le cas d'écoulement très visqueux, amortir les hautes fréquences avec des constantes de temps physiques aurait un impact non négligeable et non souhaité sur les basses fréquences (l'ordre 4 du filtre proposé permet malgré tout dans la plupart des cas de ne pas trop perturber les basses fréquences et on explique

au paragraphe suivant comment encore diminuer l'effet sur les basses fréquences). Pour ces raisons, nous avons choisi d'amortir les hautes fréquences d'un pourcentage fixe indépendant de la viscosité et de la tension de surface. Ceci ne signifie pas que l'on renonce à donner un contenu physique. On considère que localement le système désire retourner à l'équilibre le plus vite possible (*i.e.* on veut supprimer les plus hautes fréquences spatiales) et ceci, dans les cas qui nous intéressent (écoulement eau/air), est parfaitement justifié. En effet, l'amortissement introduit par notre filtre est inférieur à l'amortissement visqueux mais suffit à supprimer les hautes fréquences sans pour autant affecter significativement les basses fréquences.

Le pas de temps dont il est question ici n'a rien à voir avec le pas de temps physique de la simulation. Il s'agit d'un pas de temps de relaxation qui correspond à l'équation de diffusion artificielle de la courbure qui permet de lisser l'interface. Il est donc très lié au paramètre α et on peut se contenter de déterminer le produit $\alpha\Delta_t$. En accord avec l'équation (3.70), on pose :

$$\alpha\Delta_t = \frac{\Delta_x^4}{20} \quad (3.71)$$

On cherche N_{it} le nombre d'itérations nécessaires pour amortir p pour cent de l'amplitude de la plus basse fréquence sous-maille. En utilisant l'égalité précédente et l'équation (3.67), on a :

$$A^{n+N_{it}} = A^n \left[1 - \frac{1}{5} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \right)^2 \right]^{N_{it}} \quad (3.72)$$

On veut que

$$A_{hf}^{n+N_{it}} < \frac{100-p}{100} A_{hf}^n$$

où l'indice hf indique qu'on agit sur les amplitudes des hautes fréquences. Ainsi, le nombre d'itérations doit vérifier :

$$N_{it} > \frac{\ln\left(\frac{100-p}{100}\right)}{\ln\left[1 - \frac{1}{5} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{m_{hf}}\right) \right)^2\right]} \quad (3.73)$$

avec \ln logarithme népérien et

$$m_{hf} = \frac{\Delta_x^{euler}}{2\Delta_x},$$

où Δ_x^{euler} représente la taille des mailles eulériennes. On vérifie bien que le nombre d'itérations augmente avec le rapport $\frac{\Delta_x^{euler}}{\Delta_x}$. On peut d'ailleurs faire un développement limité pour m_{hf} grand, on a alors :

$$N_{it} > \ln\left(\frac{100}{100-p}\right) \frac{20}{\pi^4} m_{hf}^4 \quad (3.74)$$

Effet sur les basses fréquences

Afin de diminuer encore l'impact du lissage sur les basses fréquences, nous avons testé l'utilisation d'un deuxième filtre. Pour que le flux ϕ (défini par (3.61)) ne soit pas de composante basse fréquence, nous lui avons soustrait sa valeur moyenne $\bar{\phi}$ définie numériquement par :

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=i-N}^{i+N} \phi_j \quad (3.75)$$

L'effet est bien celui espéré : on ne modifie pas le lissage des hautes fréquences mais on diminue l'effet parasite sur les basses fréquences.

Test du filtre sur le mode propre fondamental d'une bulle 2D

On a vérifié théoriquement et pratiquement que l'utilisation du filtre ne remet pas en cause l'existence d'une solution d'équilibre numérique (*i.e.* absence de courant parasite). On considère la simulation de référence suivante : une bulle d'air de 3,5 mm de diamètre dans une boîte carrée remplie d'eau de 14 mm de côté discrétisé par 160 mailles. La fréquence théorique est

$$f_{th} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n(n^2 - 1)\sigma}{(\rho_{air} + \rho_{eau}) r^3}} \quad (3.76)$$

où σ est la tension superficielle, r le rayon de la bulle, ρ la masse volumique et n le mode considéré (ici $n = 2$). L'application numérique fournit $f_{th} = 43,9$ Hz. La simulation donne une fréquence de référence : $f_{ref} = 43,5$ Hz. Soit moins d'un pour cent d'erreur qu'on attribue au confinement. Comme le prévoit la théorie, la décroissance temporelle de l'énergie d'interface est bien exponentielle. Le facteur d'amortissement de référence fournit par la simulation est $a_{ref} = 2,95$ Hz. On compare à cette simulation de référence quatre simulations grossières (*i.e.* avec deux fois moins de mailles eulériennes soit 80x80 mailles) avec :

1. un marqueur lagrangien par maille,
2. deux marqueurs lagrangiens par maille sans utiliser notre filtre,
3. deux marqueurs lagrangiens par maille en utilisant notre filtre,
4. quatre marqueurs lagrangiens par maille en utilisant notre filtre.

On observe les résultats suivants pour ces quatre simulations :

1. on peut calculer la fréquence des oscillations mais cette dernière présente de fortes variations temporelles, on ne retrouve pas la décroissance exponentielle,
2. le calcul explose très rapidement,
3. la fréquence des oscillations est 43,2 Hz soit moins d'un pour cent d'erreur par rapport à la simulation de référence et moins de deux pour cent d'erreur par rapport à la fréquence théorique, le facteur d'amortissement est égal à 2,74 Hz (moins élevé que la simulation de référence),
4. on trouve la même fréquence d'oscillation que dans le cas précédent et un facteur d'amortissement de 3,06 Hz (plus élevé que la référence).

De façon complémentaire, on a testé le filtre seul (sans le couplage avec l'équation de Navier-Stokes) et vérifié que la décroissance de l'énergie d'interface du fait du filtre était très inférieure (beaucoup moins rapide) à la décroissance réelle. Et la différence est encore accrue lorsqu'on filtre le flux comme proposé au paragraphe précédent (eq. (3.75)). Par conséquent, il est préférable de le faire et les résultats précédents ont été obtenus en filtrant le flux. En résumé, notre méthode permet, sur ce cas test, de diviser le nombre de mailles eulériennes par deux dans chaque direction sans perte notable d'information alors qu'avec le même nombre de degré de liberté la simulation réalisée sans notre méthode n'est même pas exploitable.

3.3.4 Conclusion sur la méthode de raffinement lagrangien

L'étude des effets de la sous-résolution montre l'importance de la description de la géométrie des interfaces. Une mauvaise description conduit à un volume et un périmètre erronés ainsi qu'à une mauvaise évaluation des forces interfaciales. Ces erreurs qui ne sont pas détectées par des tests *a priori* perturbent énormément la dynamique des bulles et empêchent de prédire correctement leur trajectoire. Pour améliorer la description géométrique des interfaces sans avoir à raffiner le maillage de l'ensemble du domaine de calcul, nous proposons une

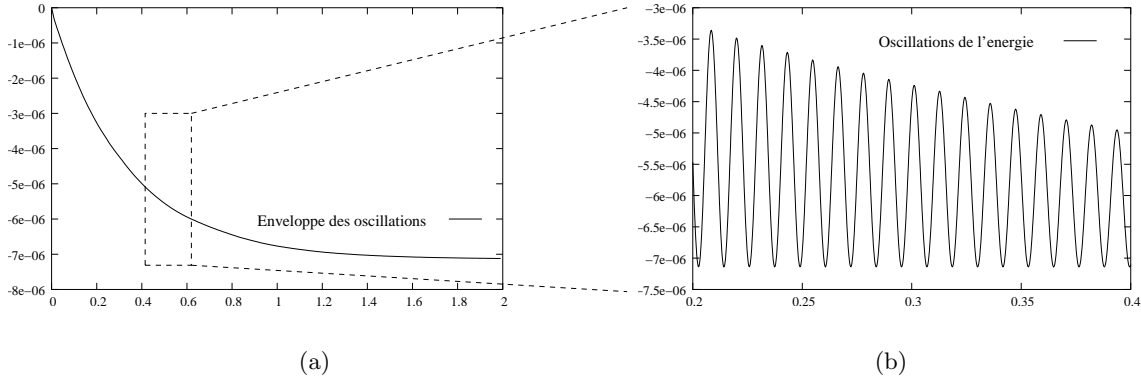


FIG. 3.20 – Oscillations de l'énergie d'interface (4 marqueurs par maille)

méthode de raffinement du maillage lagrangien conservative en volume⁹. Cette méthode est basée sur la diffusion de la courbure. Elle se comporte comme un filtre passe-bas et permet de supprimer les fréquences parasites (*i.e.* d'origine numérique) des oscillations de courbure sans altérer les variations physiques de la courbure. Nous l'avons validée sur un cas simple et elle est maintenant classiquement utilisée dans Trio-U. Nous avons bien sûr testé cette méthode sur le calcul qui nous a conduit à la développer (voir paragraphe 3.3.1). Cependant, dans ce cas, il faut aussi modéliser l'ensemble des termes sous-maille car l'ajout de marqueurs lagrangiens ne suffit pas à lui seul à décrire les phénomènes physiques de l'ascension d'une bulle. Les résultats obtenus avec les effets combinés des modèles que nous avons développés et l'utilisation d'un maillage lagrangien raffiné sont commentés dans le chapitre 7 (voir aussi figure 7.2 de ce même chapitre). Dans le chapitre suivant, on met en évidence les termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques et on propose des fermetures pour ces termes.

3.4 Conclusion sur les améliorations apportées

Les trois améliorations que nous avons apportées à la méthode de front-tracking permettent de tenir plus rigoureusement compte des transferts de quantité de mouvement à travers l'interface. En effet,

- la modélisation du tenseur des contraintes visqueuses moyen que nous avons implémentée permet de mieux évaluer la mise en mouvement ou l'entraînement d'une des deux phases par l'autre,
- grâce au schéma en temps de type Runge-Kutta d'ordre 3, la position des interfaces, par exemple, est plus précisément calculée,
- la méthode de raffinement lagrangien améliore la description géométrique des interfaces et donc, en particulier, la prise en compte des transferts entre l'énergie cinétique des phases et l'énergie d'interface.

Ces améliorations nous ont permis de réaliser des SND originales et pertinentes pour l'étude des interactions entre interfaces et turbulence. On décrit les SND réalisées dans le chapitre suivant.

⁹En fait, cette méthode n'est nullement dédiée au front-tracking est peut-être adapté à une méthode qui n'utilise pas de maillage lagrangien.

Les simulations réalisées

APRÈS une brève justification de l'intérêt de calculs 2D, nous présentons dans ce chapitre les calculs que nous avons choisis de réaliser afin d'étudier les interactions entre interfaces et turbulence avec la méthode précédemment décrite. Cependant, nous ferons peu de phénoménologie dans ce chapitre car nous exploiterons les résultats de ces SND dans la deuxième partie de ce mémoire avec pour principal objectif la réalisation de tests *a priori* pour développer le concept ISS. Nous nous efforçons ici de décrire les cas de calcul en précisant leurs intérêts, de quelle façon ils sont complémentaires et comment nous les avons validés (résultat analytique, convergence en maillage, comparaison avec l'expérience). Afin d'améliorer le confort du lecteur, nous avons préféré présenter les outils nécessaires à l'exploitation de ces SND au moment où ils sont utilisés. Les trois premières simulations choisies (l'interaction bulle/tourbillon contrarotatif, la montée d'une bulle à contre-courant et la cavité diphasique) sont 2D, seule la quatrième (l'interaction d'une bulle avec une turbulence de type turbulence de grille) est tridimensionnelle et décrit réellement un écoulement turbulent.

4.1 Le 2D et la turbulence

Au début de ce travail de thèse, la méthode telle que nous l'avons décrite dans le paragraphe 2.2 n'existait pas encore en trois dimensions, elle était en cours de développement. Par conséquent, nous avons commencé par des études 2D. Par la suite, devant le coût des simulations 3D, nous avons continué à faire des études 2D. Il s'agissait alors d'un choix. Il est essentiellement motivé par le temps des simulations 3D qui interdit, encore aujourd'hui et dans la majeure partie des cas, de faire des études paramétriques. On peut alors s'interroger sur la pertinence de ce choix pour étudier les interactions entre interfaces et turbulence dans la mesure où on reproche particulièrement aux configurations bidimensionnelles de ne pas avoir les mêmes propriétés que l'espace dans lequel nous vivons et donc d'être non physique. Ce reproche est basé sur la phénoménologie de la turbulence. En effet, on caractérise la turbulence par le comportement des structures cohérentes [5]. Dans les cas tridimensionnels, l'évolution de ces structures tourbillonnaires est principalement pilotée par deux mécanismes :

- leur étirement par le champ de vitesse,
- leur diffusion grâce à la viscosité.

Le premier de ces mécanismes n'existe pas en 2D. Contrairement à la turbulence, les interfaces n'ont pas réellement de comportement spécifique suivant que l'on suppose être en 2D ou en 3D. Seules des topologies particulières comme le tore se rencontrent dans des géométries tridimensionnelles (et artificiellement dans des géométries axisymétriques) mais n'ont aucune chance d'arriver dans un cas bidimensionnel (sauf si la topologie particulière est choisie comme condition initiale). Comme dans ce travail on ne s'intéresse pas à ces topologies, le seul véritable inconvénient du 2D nous semble être l'absence du phénomène d'étirement des structures cohérentes. Cependant, nous avons déjà précisé dans l'introduction que l'on se place à un niveau de modélisation très local où ni les inclusions ni les grosses structures ne sont des entités. Par exemple, on ne regarde pas comment la présence des bulles modifie les propriétés statistiques de la turbulence mais comment localement la présence d'une interface agit sur le champ de vitesse. Réciproquement, on ne regarde pas comment la turbulence modifie l'agitation de la bulle mais comment le champ de vitesse local modifie la géométrie d'une portion de sa surface. Avec cet angle d'attaque, on ne s'attend pas à ce que les interactions entre les structures cohérentes soient prépondérantes. En forçant le trait, les modèles que nous cherchons à développer ne sont pas en proche interface des modèles de turbulence. La plupart des termes à fermer que nous mettons en évidence dans le chapitre 5 sont d'ailleurs spécifiques au diphasique (ils sont nuls loin des interfaces) et existent pour des écoulements laminares. On peut donc tout à fait faire un premier travail de hiérarchisation et de modélisation de ces termes sur des écoulements 2D. Malgré tout, il faut au minimum que la modélisation du terme sous-maille issu du terme convectif que l'on retrouve en monophasique tienne compte des phénomènes physiques spécifiques au 3D. Nous avons donc choisi de faire des simulations 2D pour faire des études paramétriques et de vérifier nos résultats sur un grand nombre de types d'écoulements. Puis nous avons développé un cas d'étude 3D véritablement turbulent pour étendre nos résultats au cas où les structures interagissent entre elles en plus d'interagir avec l'interface.

4.2 Interaction bulle/tourbillons contrarotatifs

La turbulence est généralement caractérisée par la présence de structures tourbillonnaires. C'est pourquoi, on a choisi de schématiser l'ensemble des structures turbulentes par deux tourbillons contrarotatifs. On étudie l'influence de ces deux tourbillons allant à la rencontre d'une bulle (voir figure 4.1)¹. La formule utilisée pour initialiser le champ de vitesse correspondant à un tourbillon isentropique, \mathbf{V} , est la suivante [45]

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{w}{2\pi} e^{0.5(1 - (\frac{r}{R_t})^2)} \begin{pmatrix} -y + y_T \\ x - x_T \end{pmatrix} \quad \text{où } r^2 = (x - x_t)^2 + (y - y_t)^2 \quad (4.1)$$

où w , R_t , x_t et y_t correspondent respectivement à la vitesse angulaire, au rayon et aux coordonnées du centre du tourbillon. La norme de la vitesse d'un tel tourbillon est constante sur les cercles dont le centre est confondu avec celui du tourbillon. Une rapide étude de fonction établit que la vitesse maximale est atteinte pour $r = R_t$ et qu'elle vaut $V_{max} = \frac{w}{2\pi} R_t$. Il en découle que si le paramètre à fixer est la vitesse maximale alors, w et R_t doivent varier de façon inversement proportionnelle. Afin d'étudier la différence de comportement des termes sous-maille que nous mettons en évidence dans le chapitre 5, en fonction de la taille et de l'énergie des tourbillons, nous avons fait varier les paramètres précédents. Les trois combinaisons que nous avons retenues, sont récapitulées dans le tableau 4.1. Pour les cas $N0$ et $N1$, les caractéristiques des fluides sont celles que l'on attribue généralement à un écoulement

¹Sur la figure 4.1, les tourbillons sont très proches de la bulle. Initialement, ils sont à 2 mm de la bulle dont le rayon mesure 1,5 mm.

eau/air. Elles sont rappelées dans le tableau 4.2. La tension de surface est $\sigma = 0,07 \text{ N.m}^{-1}$. Comme son nom l'indique, on a choisi pour le cas *Solide* une masse volumique, une viscosité cinématique et une tension de surface très forte pour simuler une interaction fluide structure et mettre ainsi en évidence les différences avec une interface véritablement déformable. Pour tous ces cas tests, le maillage est de 200 par 216 mailles. Ceci conduit à une taille des mailles égale à 3.10^{-5} m .

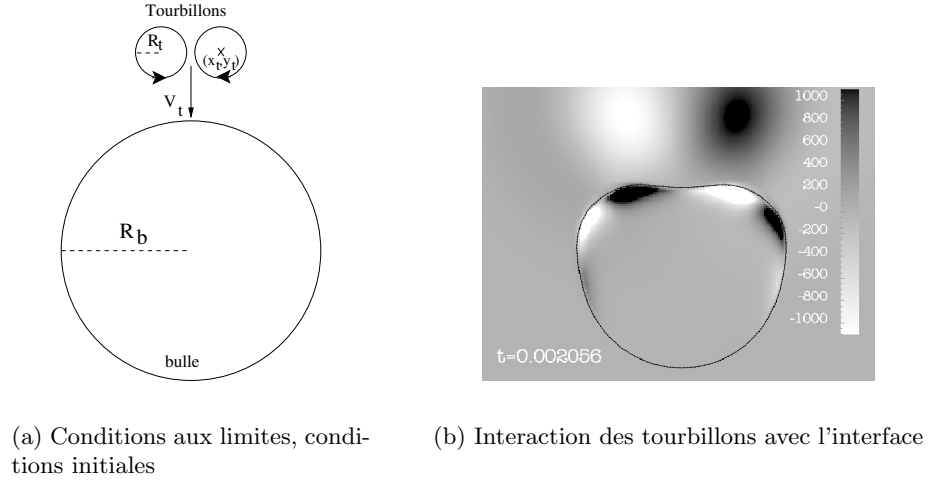


FIG. 4.1 – Conditions aux limites, conditions initiales et interaction des tourbillons avec l'interface

	$\omega_{max}(t = 0)$	$R_t(t = 0)$	$V_M(t = 0)$	$\eta(t = 0)$	V_t
<i>N0</i>	30000	4.10^{-4}	12.52	10^{-5}	2.54
<i>N1</i>	600	8.10^{-4}	0.77	6.10^{-5}	0.2
<i>Solide</i>	30000	4.10^{-4}	12.52	10^{-5}	2.54

TAB. 4.1 – Etude paramétrique sur les caractéristiques des tourbillons contrarotatifs

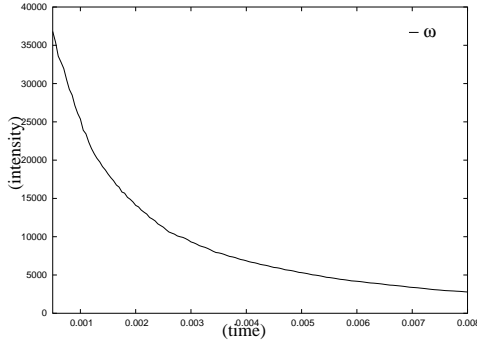
	$\rho \text{ (kg.m}^{-3} \text{)}$	$\mu \text{ (kg.m}^{-1}\text{s}^{-1} \text{)}$	$\nu \text{ (m}^2\text{s}^{-1} \text{)}$
air	1.3	2.10^{-5}	$1.54 \cdot 10^{-5}$
eau	1000	10^{-3}	10^{-6}
rapport air/eau	$1.3 \cdot 10^{-3}$	2.10^{-2}	15.4

TAB. 4.2 – Paramètres physiques de tous les calculs

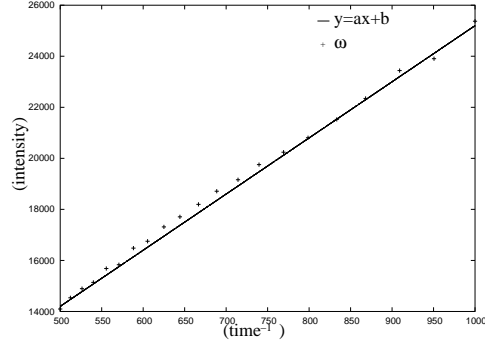
4.2.1 Validation

Pour valider ces trois simulations, nous avons eu recours à différents moyens. Tout d'abord, on s'assure du bon comportement monophasique de la simulation, c'est-à-dire de l'évolution des tourbillons avant qu'ils ne rencontrent l'interface. Sans faire d'hypothèse particulière, on peut montrer que l'enstrophie $D = \frac{1}{2} \langle (\nabla \times \mathbf{u})^2 \rangle$ décroît comme l'inverse du temps au carré [57]. Dans notre cas, on peut (avant que les tourbillons interagissent avec l'interface)

en déduire que le maximum de la vorticité décroît comme l'inverse du temps. La figure 4.2 assure que c'est bien le cas pour nos simulations. Ensuite, il faut vérifier le bon comportement



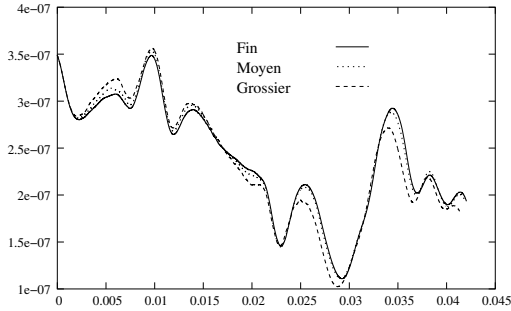
(a) Maximum de vorticité en fonction du temps



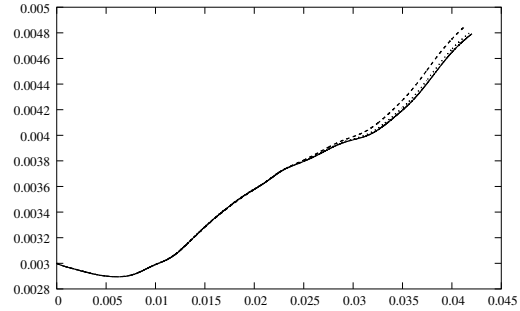
(b) Maximum de vorticité en fonction de l'inverse du temps

FIG. 4.2 – Evolution du maximum de vorticité

diphasique de la simulation, c'est-à-dire principalement les déformations de l'interface. Dans le cas N0, l'interface est très peu déformée. On peut donc utiliser des résultats analytiques sur les fréquences propres d'une inclusion dans le cadre théorique des petites déformations. On calcule ces fréquences propres dans le paragraphe suivant et dans celui qui lui succède on vérifie que la bulle oscille bien à ces fréquences. Dans le cas N1, l'hypothèse des petites déformations n'est plus satisfaite (la bulle est trop déformée). On procède alors à une étude de convergence en maillage. Les figures 4.3(a) (pour l'évolution de l'énergie cinétique) et 4.3(b) (pour l'évolution de la coordonnée verticale du centre de gravité de la bulle) montrent que le maillage retenu est suffisamment fin.



(a) Evolution temporelle de l'énergie cinétique



(b) Evolution temporelle de la coordonnée verticale du centre de gravité de la bulle

FIG. 4.3 – Etude de convergence en maillage (le trait plein correspond au calcul de référence, les pointillés à un maillage une fois et demi plus grossier et les tirets à un maillage deux fois plus grossier)

4.2.2 Fréquences propres

Nous allons établir la formule des fréquences propres des oscillations d'une bulle. Nous pourrions alors vérifier si on les retrouve dans les simulations de déformations de l'interface

causées par une paire de tourbillons contrarotatifs. Si on retrouve ces fréquences, on aura un critère de validité de plus de notre simulation. Ce problème de validation de simulation est un problème difficile auquel nous nous heurtons en permanence. En effet, valider nécessite en général des résultats expérimentaux, or, c'est parce qu'on ne dispose pas de résultats expérimentaux (pour des raisons d'échelles de nos cas d'études et des perturbations par les instruments de mesures) que l'on a recours à des SND. L'utilisation de résultats analytiques sur quelques grandeurs macroscopiques (ici, les modes propres de l'énergie d'interface) est alors très utile. De plus, identifier les modes propres prépondérants nous renseigne sur l'interaction bulle/tourbillons et on pourra éventuellement faire intervenir ces modes propres dans une formulation sous-maille régissant les déformations de l'interface. Les calculs qui suivent sont en 2D (on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ)). Ils s'inspirent des calculs 3D de Lemonnier et Jamet [55] qui s'appuient sur les travaux de Rayleigh et de Lamb [51, p.475, équation 10]. Considérons une oscillation harmonique de la bulle suivant l'un de ses modes propres

$$r = a + \epsilon \cos(n\theta) \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.2)$$

où ϵ est l'amplitude de l'oscillation et φ est une phase arbitraire. L'analyse montre que les potentiels vitesse correspondants sont de la forme (en notant l pour le liquide et g pour le gaz),

$$\phi_g = k_g \cos(n\theta) r^n \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.3a)$$

$$\phi_l = k_l \frac{\cos(n\theta)}{r^n} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.3b)$$

La condition aux limites en $r = a$, $\mathbf{v}_i = \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = \frac{\partial \phi_l}{\partial t}$ où \mathbf{v}_i désigne la vitesse de l'interface qui vaut dans ce cas et à l'ordre 1 : $\mathbf{v}_i = \frac{\partial r}{\partial t} = \omega \epsilon \cos(n\theta) \cos(\omega t + \varphi)$, permet de déterminer les constantes k_g et k_l ,

$$\phi_g = -\frac{\epsilon \omega a}{n} \cos(n\theta) \frac{r^n}{a^n} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.4a)$$

$$\phi_l = \frac{\epsilon \omega a}{n} \cos(n\theta) \frac{a^n}{r^n} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.4b)$$

Pour trouver la pulsation propre de ce mode, on cherche une condition sur les potentiels que l'on vient d'exprimer. Cette condition nous est fournie par le théorème de Bernoulli pour les fluides barotropes,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \text{constante} \quad (4.5)$$

Comme \mathbf{u}^2 est d'ordre 2 en ϵ et que dans le cas du cercle pour lequel $\frac{\partial \phi_k}{\partial t} = 0$ le saut de pression est $\frac{\sigma}{a} = p_l - p_g$ (d'après la formule (4.8)), on a le saut des potentiels en fonction du saut de la pression,

$$\rho_g \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \rho_l \frac{\partial \phi_l}{\partial t} + \frac{\sigma}{a} = p_l - p_g \quad (4.6)$$

Soit en remplaçant ϕ_g par (4.4a) et ϕ_l par (4.4b) dans l'équation précédente (4.6), toujours à l'ordre 1, on a :

$$p_l - p_g - \frac{\sigma}{a} = \epsilon \omega^2 a \cos(n\theta) \sin(\omega t + \varphi) \left(\frac{\rho_g + \rho_l}{n} \right) \quad (4.7)$$

Il nous reste donc à exprimer le saut de pression. La relation de Laplace s'écrit

$$p_l - p_g = \frac{\sigma}{R} \quad \text{où } \sigma \text{ est la tension superficielle et } \frac{1}{R} \text{ la courbure,} \quad (4.8)$$

On calcule la courbure grâce à la formule,

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.9)$$

Après calcul des dérivées à l'ordre 1 à partir de l'équation (4.2), on trouve,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \epsilon \cos(n\theta) \sin(\omega t + \varphi) (1 - n^2) \quad (4.10)$$

Finalement, en combinant (4.10) et (4.8), on remplace $p_l - p_g$ dans (4.7), on obtient,

$$\epsilon \omega^2 a \cos(n\theta) \sin(\omega t + \varphi) \left(\frac{\rho_l + \rho_g}{n} \right) = \frac{1}{a^2} \epsilon \cos(n\theta) \sin(\omega t + \varphi) (n^2 - 1)$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{n(n^2-1)\sigma}{(\rho_g + \rho_l)a^3} \\ f_n &= \frac{\omega_n}{2\pi} \end{aligned}} \quad (4.11)$$

4.2.3 Comportement macroscopique

Afin de mieux comprendre de quelle façon l'énergie franchit l'interface, on examine l'évolution temporelle de l'énergie cinétique. On entend ici par énergie cinétique la somme des contributions de chaque maille, en particulier, il s'agit de ne pas confondre l'énergie cinétique du gaz (définie comme précédemment) avec celle de la bulle (définie par exemple à partir de la vitesse de son barycentre). On cherche à comprendre comment la bulle interagit avec les échelles de la turbulence : existe-t-il un effet dissipatif sur les petites structures, une réorganisation des structures vers de plus grandes échelles ?

Nous avons établi au paragraphe 4.2.2 la formule des fréquences des modes propres d'une bulle. Nous allons ici vérifier que l'on retrouve ces mêmes fréquences dans les oscillations de l'énergie cinétique. Dans une première approximation on peut considérer que l'énergie totale du système (eau et bulle) est uniquement constituée par son énergie cinétique et son énergie d'interface (tension superficielle). Par conséquent, une diminution d'énergie cinétique se traduit par une augmentation de l'énergie d'interface (tension superficielle) : il y a échange (et pertes durant cet échange) entre ces deux types d'énergie. On observe que leurs fréquences d'oscillations sont les mêmes et que l'énergie mécanique (qui correspond à leur somme) n'oscille pas (fig.4.4). Or, l'énergie liée à la tension superficielle, $E_p = L_\sigma \sigma$ où L_σ est la longueur de l'interface et σ la tension superficielle, est directement reliée aux déformations de l'interface. Ainsi, on s'attend à retrouver dans l'évolution temporelle de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, les modes propres de la bulle.

On observe l'évolution de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Les fréquences fondamentales sont les mêmes, de telle sorte que l'énergie mécanique ne présente pas d'oscillation (fig. 4.4). En identifiant la fréquence correspondant au premier maximum du spectre de l'énergie cinétique du gaz (fig. 4.5), on trouve une fréquence d'environ 52 Hz. Il est intéressant de constater une oscillation de l'énergie cinétique du liquide et de la vitesse du barycentre (fig. 4.6) à cette même fréquence qui correspond à la fréquence propre du mode 3 ($f_3 = 52,2 \text{ Hz}$) de la bulle (fig. 4.7), donnée par l'équation (4.11). Et, les autres pics de l'énergie cinétique du gaz (fig. 4.5) correspondent aux modes propres suivants (tab. 4.3 et fig. 4.7). Cela conforte la validité des calculs effectués dans la mesure où l'écart mesure/théorie est toujours inférieur à l'erreur que l'on est susceptible d'avoir commise en effectuant la FFT (Fast Fourier Transform). Enfin, si on retrouve le troisième mode dans l'oscillation de la vitesse du barycentre mais pas les suivants, c'est sans doute parce que le mouvement du barycentre est moins sensible à ces modes en l'occurrence déjà moins présents. D'autre part, les modes pairs

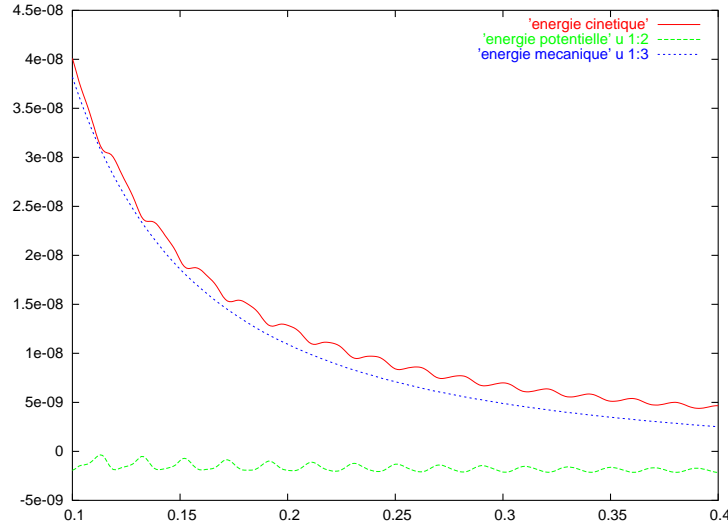


FIG. 4.4 – Echange entre énergie cinétique et énergie potentielle
Ordonnée : Energie (Joule), Abscisse : temps (s)

correspondent à des oscillations symétriques par rapport au centre de la bulle et n'affectent donc pas le barycentre.

Dans ce paragraphe, nous avons conforté la validité des calculs effectués en retrouvant certains modes propres de la bulle. Cette analyse peut aussi servir à interpréter un des aspect du phénomène *two-way coupling* d'un point de vue échange d'énergie. Les interfaces emmagasinent de l'énergie sous forme potentielle *via* leur déformation et la tension de surface puis elles la rétrocèdent sous forme d'énergie cinétique aux phases. Le bon accord entre les fréquences propres de la bulle et la fréquence de l'énergie cinétique du liquide implique que les hautes fréquences de l'énergie cinétique *turbulente* (soit des tourbillons contrarotatif dans ce cas très schématisé) sont susceptibles d'être transformées en basses fréquences lors de leur interaction avec l'inclusion. Ce phénomène peut être attribué au terme correspondant aux forces interfaciales dans l'équation d'énergie. Il signifie que lorsque dans une étape future (qui dépasse le cadre de ce mémoire) on voudra mettre sous-maille des déformations interfaciales, l'échelle de temps, t_p , associée au premier mode propre non résolu p

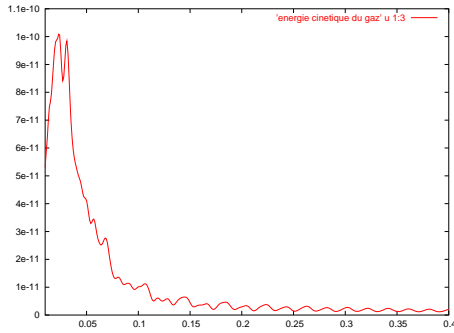
$$t_p = 2\pi \sqrt{\frac{(\rho_l + \rho_g)R^3}{p(p^2 - 1)\sigma}} \quad (4.12)$$

sera sans doute d'une grande importance.

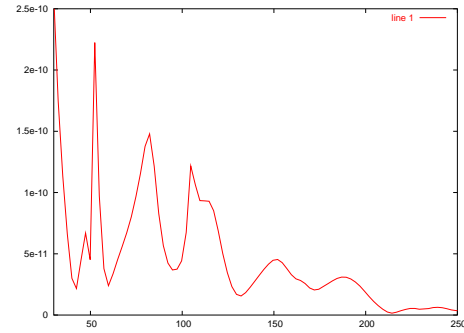
Dans le chapitre 5, nous verrons comment nous avons utilisé ces SND pour de nombreux *a priori* tests. Nous avons évalué et hiérarchisé les différents termes à modéliser en faisant varier des paramètres (comme la masse volumique et la tension de surface) puis nous avons testé plusieurs modèles.

numéro du mode propre	fréquence du spectre (Hz)	fréquence propre théorique, f (Hz)	écart mesure/théorie (Hz)	incertitude de la FFT (Hz)
3	52	52,2	0,2	2,7
4	82	82,5	0,5	6,8
5	105	116,6	11,6	13,6
6	152	154,3	2,3	23,8
7	187	195,1	8,1	38,1

TAB. 4.3 – Comparaison des pics de fréquences du spectre avec les fréquences propres
On calcule l'erreur commise lorsqu'on effectue la FFT (Fast Fourier Transform) à partir de la période d'échantillonnage du signal d'origine, $T_e = 10^{-3}$ s, et de la fréquence théorique, f , grâce à la formule suivante $\epsilon_{FFT} = f^2 T_e$.

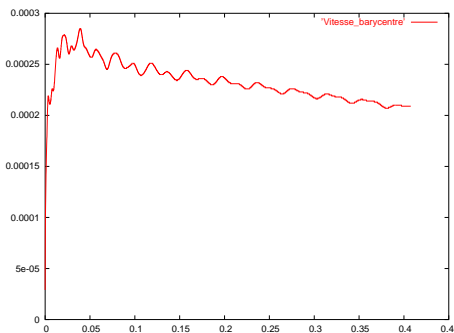


(a) Evolution temporelle (Ordonnée : énergie cinétique (J), abscisse : temps (s))

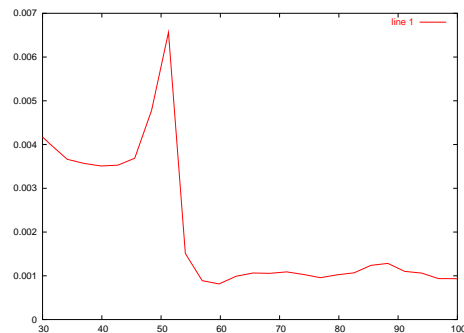


(b) Représentation spectrale (Ordonnée : amplitude (J), abscisse : fréquence (Hz))

FIG. 4.5 – Energie cinétique du gaz



(a) Evolution temporelle (Ordonnée : vitesse (m/s), abscisse : temps (s))



(b) Représentation spectrale (Ordonnée : amplitude (m/s), abscisse : fréquence (Hz))

FIG. 4.6 – Vitesse du centre de gravité

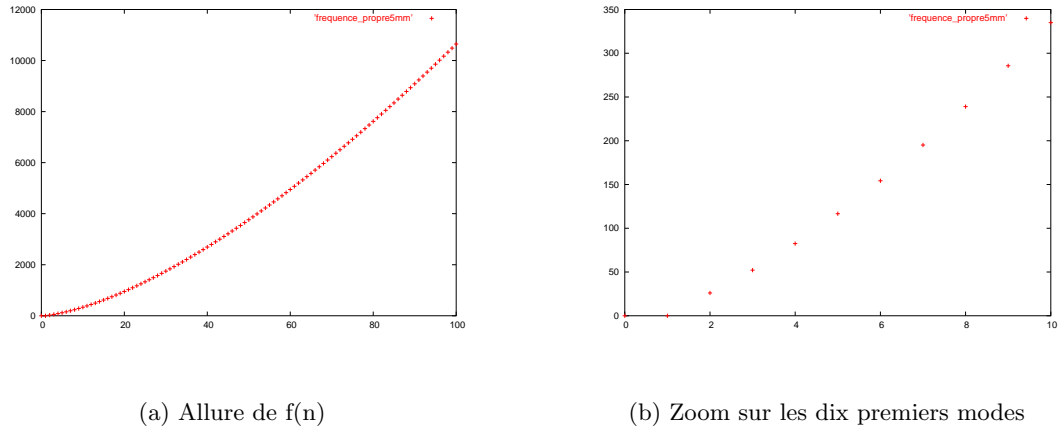


FIG. 4.7 – Fréquence des différents modes propres, $\sigma = 0.07 \text{ N.m}^{-1}$, $R=5 \text{ mm}$ (Ordonnée : fréquence (f en Hz), abscisse : numéro du mode propre (n))

4.3 Montée d'une bulle à contre-courant

Précisons d'abord que le cas n'est pas turbulent. En effet, pour des raisons de coût numérique l'étude a été réalisée en 2D. De plus, la vitesse d'ascension de la bulle est trop faible pour donner naissance à un sillage pleinement turbulent (même dans un cas tridimensionnel). La géométrie et les conditions aux limites du problème sont décrites sur la figure 4.8(a). L'idée consiste à piéger une bulle déformable dans le domaine de calcul afin d'obtenir un régime établi mais non stationnaire (voir fig. 4.8(a) pour le motif final de la trajectoire). Le principe *a priori* simple (on cherche simplement à équilibrer les normes des forces de flottabilité et de traînée) a nécessité un calibrage délicat du fait de la versatilité de l'équilibre (fortement dépendant de la forme de la bulle). En choisissant d'initialiser le calcul avec une bulle en forme d'ellipse dont on a fait pivoter le grand axe, on a renforcé le caractère déterministe de la trajectoire de la bulle (la trajectoire devient indépendante du bruit numérique sur les conditions initiales). Nous avons obtenu une convergence en maillage satisfaisante avec 375×375 mailles pour un domaine de 5 cm sur 5 cm (voir fig. 3.10). Le volume de la bulle est de $1,78 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$. Sur la figure 4.8(b), le dégradé de gris représente la norme de la vitesse (il permet de visualiser le sillage).

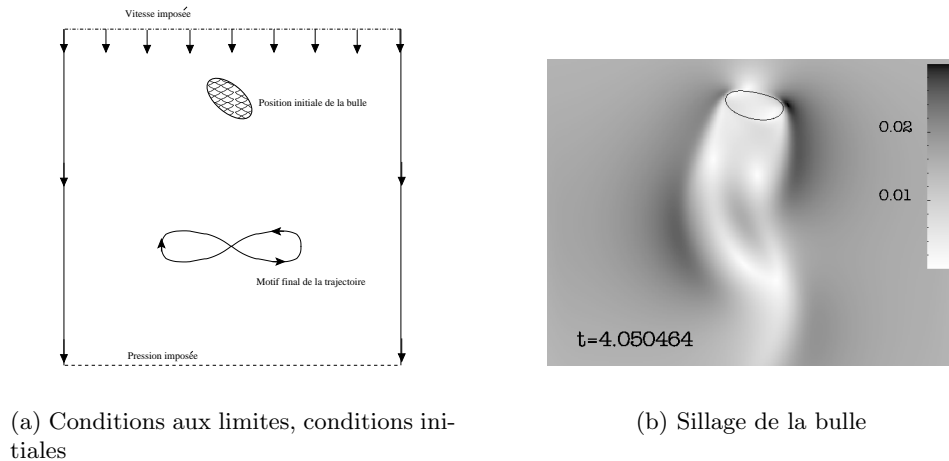


FIG. 4.8 – Conditions aux limites, conditions initiales et allure du sillage

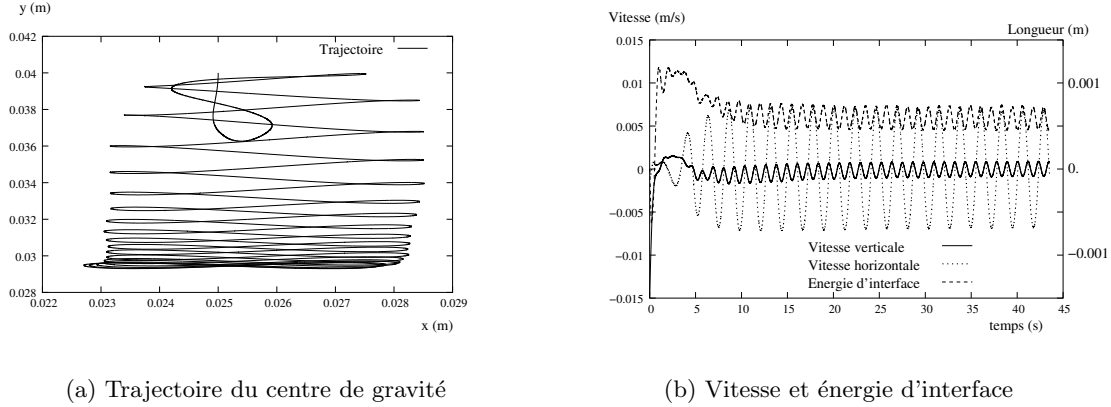


FIG. 4.9 – Trajectoire, vitesse et énergie d'interface de la bulle

La différence et l'intérêt de cette SND par rapport à la précédente sont la présence de gravité. Du fait des forces de flottabilité, la bulle présente une vitesse de glissement par rapport au liquide environnant. Comme dans la simulation précédente (*Interaction bulle/tourbillons contrarotatifs*), on retrouve un mécanisme d'échange entre l'énergie cinétique et l'énergie d'interface de la bulle. Sur la figure 4.9(b), on remarque que la variation du périmètre de la bulle (soit son énergie d'interface puisque la tension de surface σ est supposée constante, cf chapitre 1) et la variation de la vitesse verticale de son centre de gravité ont la même fréquence d'oscillations et sont en opposition de phase. Cette fréquence correspond naturellement à celle des zigzags de sa trajectoire (fig. 4.9(a)). Pour comprendre cette dynamique de la bulle et l'intégrer dans des modèles sous-maille, on propose de faire des études de sous-résolutions qui complètent les résultats des tests *a priori*. En effet, les tests *a priori* permettent de hiérarchiser l'importance des différents termes sous-maille mais, si un terme de faible amplitude relative brise une symétrie spatiale par exemple, il peut provoquer des changements conséquents. En sous-résolvant ce calcul, on voit de façon pragmatique ce que l'on perd (dans un cas sous-résolu, la bulle monte-t-elle plus ou moins vite, les zigzags de sa trajectoire sont-ils plus ou moins prononcés ?) et on peut essayer de comprendre quels modèles ou quels traitements numériques permettraient de corriger ces défauts. Dans le paragraphe 3.3, l'exploitation de cette simulation dans un cas sous-résolu montre que la mauvaise description de la géométrie de l'interface est responsable des défauts constatés sur sa trajectoire. Ce constat nous a conduit à développer une technique conservative en volume de raffinement du maillage lagrangien. Dans le cadre de la modélisation ISS, ce cas nous donne aussi des critères simples de la validité des fermetures : la position de la bulle et sa vitesse terminale. Nous les utilisons dans le chapitre 7.

4.4 Cavité diphasique

La cavité diphasique est notre dernière étude 2D. Au départ, on souhaitait simuler le cas très étudié de l'écoulement à surface libre cisailée [31] (écoulement stratifié ou canal diphasique). Malheureusement, on ne dispose pas de condition de périodicité pour le maillage lagrangien et la conception d'un tel calcul sans cette condition est assez délicate. C'est la raison pour laquelle, nous avons élaboré l'idée d'une cavité diphasique (fig. 4.10). Les caractéristiques des phases sont celles de l'eau et de l'air (voir tab. 4.2). La tension de surface est artificiellement élevée pour éviter les phénomènes d'arrachement pour lesquels on ne dispose pas de critère physique ($\sigma = 0,07 \text{ N.m}^{-1}$). On note δ l'épaisseur de la couche limite à l'extrémité de la paroi d'entrée. Elle s'exprime en théorie [84] à partir de la vitesse d'entrée, V_e , la longueur de

la paroi d'entrée, L_e et la viscosité cinématique μ :

$$\delta = 1,73 \sqrt{\frac{L_e \nu_g}{V_e}} \quad (4.13)$$

Avec notre choix de paramètres, l'application numérique fournit $\delta = 10^{-3} \text{ m}$. Comme les zones de fort cisaillement (la région de développement de la couche de mélange et la région de proche interface) nécessite un maillage beaucoup plus fin, nous avons utilisé un maillage raffiné verticalement. Afin d'être dans les conditions d'instabilités de la couche de mélange, les paramètres géométriques et la vitesse d'entrée (fig. 4.10(a)) doivent vérifier certaines conditions. La configuration que nous avons retenue est décrite par le tableau 4.4. On a vérifié le bon comportement de la couche de mélange en comparant la taille des structures tourbillonnaires obtenues au mode le plus amplifié, $\lambda_a = 14\delta$, calculé par Michalke [67].

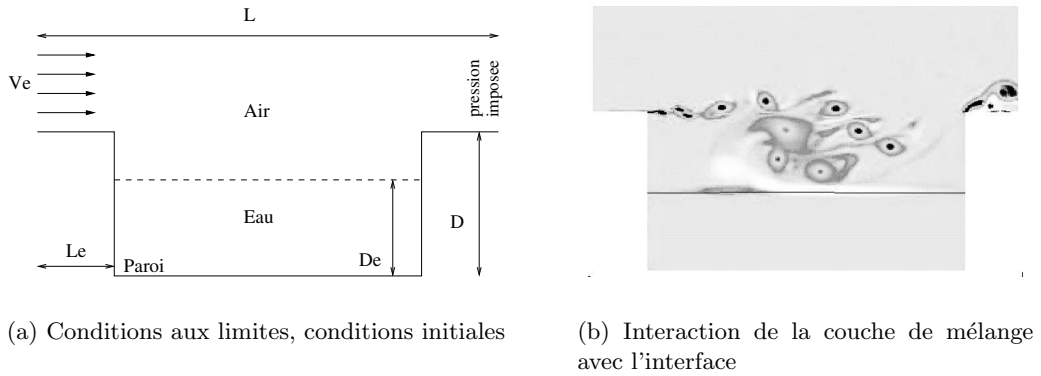


FIG. 4.10 – Conditions aux limites, conditions initiales et interaction de la couche de mélange avec l'interface

$\frac{L}{\delta}$	$\frac{L}{D}$	$Re_\delta = \frac{V_e \delta}{\nu_g}$
$6,67 \cdot 10^2$	2,67	260

TAB. 4.4 – Paramètres géométriques du calcul de la cavité diphasique

Tout comme le canal diphasique, la cavité permet d'étudier une interface cisailée qui interagit avec des structures tourbillonnaires plus nombreuses, de tailles et d'énergie plus variées que dans le cas de la bulle et des tourbillons contrarotatifs. Une autre différence majeure est le rapport entre le rayon de courbure de l'interface et le rayon des structures tourbillonnaires (proche de un dans le cas de la bulle et très grand devant un pour la cavité). Enfin, la phase initialement en mouvement est ici la phase gazeuse. Ce dernier point nous a permis de nuancer l'intérêt de l'utilisation d'une moyenne de Favre pour la vitesse (dans un cas incompressible par phase). En effet, dans le cas où le transfert de quantité de mouvement à lieu de la phase lourde vers la phase légère (typiquement le cas de la bulle et des tourbillons contrarotatifs), un des avantages de la moyenne de Favre est de limiter, par un choix judicieux des variables filtrées calculées, la diffusion numérique de quantité de mouvement à travers l'interface. Mais, quand, comme dans le cas de la cavité, le transfert a lieu dans l'autre sens (de la phase légère vers la phase liquide) la moyenne de Favre augmente encore cette diffusion numérique. Sans préjuger de la nature de la phase porteuse de la quantité de mouvement, on ne peut donc pas trancher sur l'utilisation de la moyenne de Favre. Nous en discutons dans le chapitre 5. L'inconvénient de cette SND est l'utilisation de techniques de raffinement de maillage motivé par l'existence de zones très cisailées. En toute rigueur, ce raffinement nous

empêche de supposer la permutation des opérations discrètes de filtrage et de dérivation (voir chapitre 5).

4.5 Interaction d’une bulle avec une “turbulence de grille”

Cette SND est une partie vraiment originale de notre travail. En effet, l’essentiel de la littérature concernant les SND des écoulements diphasiques est consacré à deux types d’études :

- Le premier type se focalise sur les interfaces déformables mais pas réellement sur la turbulence. Par exemple, Bunner et Tryggvason [10] étudient les effets de la déformation des bulles sur les propriétés des écoulements. Dans leurs simulations, les structures tourbillonnaires sont essentiellement produites par le sillage des bulles. La pseudo-turbulence induite par ces sillages n’a pas les mêmes propriétés qu’une turbulence pleinement développée dont le spectre d’énergie cinétique présente une zone inertielle.
- Dans le second type, la turbulence est pleinement développée mais les interfaces ne sont pas physiquement déformées. Par conséquent, aucune interaction complexe entre les fluctuations de vitesse et les déformations interfaciales ne peut exister. Dans une grande partie des études de cette catégorie, la taille des inclusions est plus petite que l’échelle de Kolmogorov et même lorsqu’elles sont plus grandes, elles sont supposées indéformables. Par exemple, Merle *et al.* [66] simulent une bulle sphérique fixée au centre d’un écoulement turbulent de tuyau.

Dans l’interaction d’une bulle avec une turbulence de grille que nous avons simulée, la bulle est fortement déformée et la turbulence tout à fait établie. Pour ce calcul, deux SND sont nécessaires (voir fig. 4.11). La première, s_1 , est monophasique. Elle correspond à un calcul classique de Turbulence Homogène Isotrope (THI) dans une boîte périodique dans les trois directions. La deuxième, s_2 , est diphasique. Tout d’abord, chaque simulation atteint séparément un état statistiquement stationnaire. Puis, on utilise une frontière de s_1 pour imposer la vitesse comme condition d’entrée à s_2 . Afin que cette condition d’entrée pénètre dans le domaine de s_2 , on impose un mouvement de translation uniforme à tout le domaine de s_1 . Cette vitesse de translation est choisie de telle sorte qu’elle corresponde à la vitesse d’ascension de la bulle. Ceci permet d’équilibrer approximativement les forces de traînée et de flottabilité et de maintenir la bulle dans le domaine de calcul le plus longtemps possible. La turbulence ainsi injectée dans s_2 est alors en décroissance spatiale libre. Tout se passe donc comme si la bulle (présente dans s_2) interagissait avec une turbulence de grille. Nous avons attaché une importance particulière à fournir des conditions d’entrée réaliste. On décrit de quelle manière dans le premier paragraphe. Puis on explique comment on a dimensionné et validé le calcul des deux simulations couplées.

4.5.1 Turbulence Homogène Isotrope Entretienue

L’objectif est de fournir des conditions d’entrée réalistes pour les écoulements turbulents. De façon classique, on peut décider de faire *mûrir* une Turbulence Homogène Isotrope (THI), de la figer à un instant donné et de se servir du champ de vitesse figé comme entrée du deuxième calcul. Cependant on ne dispose alors que d’un nombre fini de champs d’entrée. L’idée proposée ici est d’entretenir une THI en forçant l’énergie cinétique à une valeur donnée et de se servir du champ de vitesse sur une frontière du domaine comme condition d’entrée du deuxième calcul. Pour forcer l’énergie cinétique à une grandeur constante, on multiplie brutalement tout le champ de vitesse par la valeur adéquate. Cette méthode d’entretien relativement rudimentaire

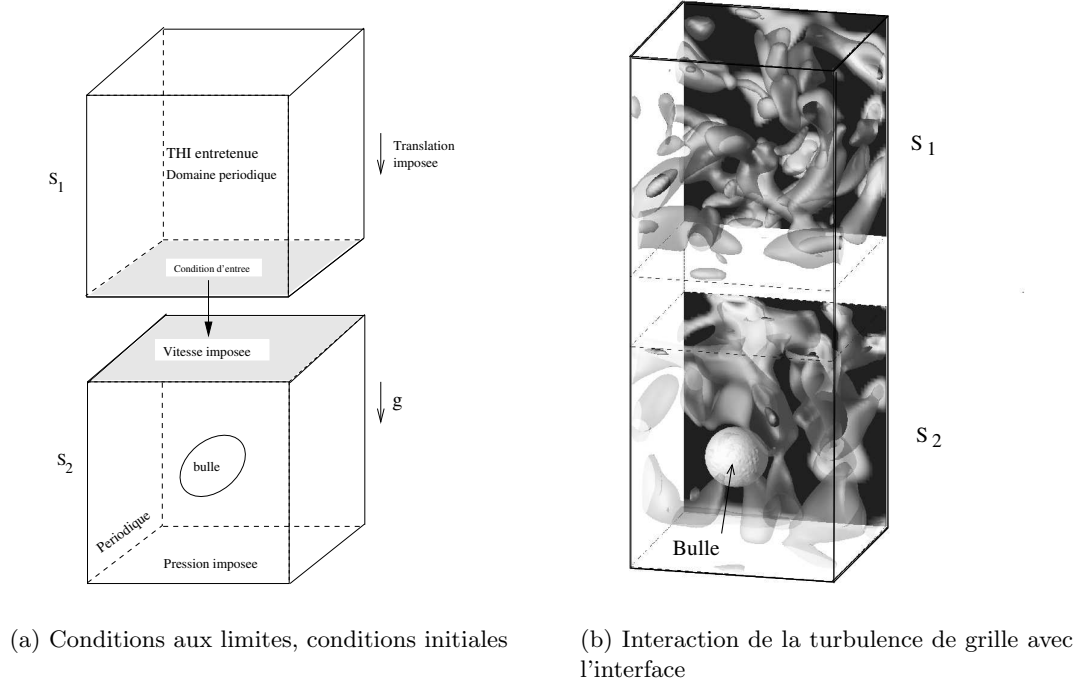


FIG. 4.11 – Conditions aux limites, conditions initiales et interaction de la turbulence de grille avec l'interface

est pratique lorsque l'on ne dispose pas de méthode spectrale permettant de faire un forçage sélectif suivant le nombre d'onde. Ce forçage linéaire a été proposé par Lundgren [60] et ses propriétés ont récemment été étudié par Rosales et Meneveau [79]. Nos résultats (présentés dans le prochain paragraphe) sont cohérents avec leurs travaux.

Principe

Ecrivons les équations de Navier-Stokes de façon très formelle :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (4.14)$$

Pour faciliter le raisonnement et simplifier les écritures, on discrétise temporellement l'équation précédente avec un schéma d'Euler explicite :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = R(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) \quad (4.15)$$

L'énergie cinétique du domaine de calcul V est définie par :

$$Ec^n = \frac{\rho}{2} \int_V \|\mathbf{u}^n\|^2 dV \quad (4.16)$$

L'idée consiste simplement à poser :

$$\mathbf{u}^{n+1, final} = \sqrt{\frac{Ec^n}{Ec^{n+1}}} \mathbf{u}^{n+1} \quad (4.17)$$

Il est évident qu'alors $Ec^{n+1} = Ec^n$ pour tout n . Il est par ailleurs intéressant de remarquer que l'algorithme précédent peut s'écrire de façon équivalente :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta_t} &= R(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) + F \\ F &= \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta_t} \frac{\sqrt{Ec^{n+1}} - \sqrt{Ec^n}}{\sqrt{Ec^{n+1}}} \\ Ec^{n+1} &= \frac{\rho}{2} \int_V \|\mathbf{u}^n + \Delta_t R(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n)\|^2 dV\end{aligned}\quad (4.18)$$

Ce qui se réécrit en continu :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + F(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (4.19)$$

Les premiers tests ont montré qu'il était nécessaire de forcer la vitesse à être à moyenne nulle. En appelant V le volume total du domaine de calcul, on a la formule suivante pour la moyenne volumique :

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{u} dV \quad (4.20)$$

L'algorithme finalement implémenté est

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}_{NS} - \bar{\mathbf{u}}_{NS} \\ \mathbf{u}^{n+1, final} &= \sqrt{\frac{Ec^n}{Ec^{n+1}}} \mathbf{u}^{n+1}\end{aligned}\quad (4.21)$$

où \mathbf{u}_{NS} est le résultat de la résolution des équations de Navier-Stokes et l'énergie cinétique Ec étant calculée après soustraction de la moyenne (4.20).

Quelques définitions

Moyenne statistique On note entre $\langle . \rangle$ la moyenne statistique qui correspond à une moyenne sur l'ensemble des réalisations. On décompose toute grandeur physique, f , comme suit :

$$f = \langle f \rangle + f'' \quad (4.22)$$

Lorsque l'écoulement est homogène, l'hypothèse d'ergodicité permet de confondre la moyenne statistique et la moyenne volumique (équation (4.20)) quand le volume V tend vers l'infini ou encore la moyenne statistique et la moyenne temporelle quand la durée de prise de moyenne tend vers l'infini. Puisqu'en réalité, la durée et le volume de prise de moyenne sont finis, on moyenne souvent à la fois de façon temporelle et volumique pour estimer la moyenne statistique. En THI, la moyenne statistique de la vitesse est nulle : $\mathbf{u} = \mathbf{u}''$.

Spectre d'énergie cinétique On note \mathbf{x} la variable de l'espace physique et \mathbf{k} la variable de l'espace spectral. La transformée de Fourier d'une grandeur f s'écrit :

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.23)$$

On utilise la transformée de Fourier inverse

$$f(\mathbf{x}) = \int \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (4.24)$$

qui fournit en particulier pour la fonction tridimensionnelle de Dirac, $\delta(\mathbf{k})$:

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.25)$$

Soit U_{ij} le tenseur de corrélation de vitesse du deuxième ordre :

$$U_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \quad (4.26)$$

En utilisant la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, le spectre de densité d'énergie cinétique moyenne s'écrit :

$$E(k, t) = \frac{\rho}{2} \int_{\|\mathbf{k}\|=k} \hat{U}_{ii}(\mathbf{k}, t) dS(\mathbf{k}) \quad (4.27)$$

Le tenseur spectral \hat{U}_{ij} peut aussi être vu comme le tenseur des corrélations de vitesse dans l'espace de Fourier. En effet calculons :

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_j(\mathbf{k}_2, t) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2)} \langle u_i(\mathbf{x}_1, t) u_j(\mathbf{x}_2, t) \rangle d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}_1} U_{ij}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \int e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} U_{ij}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \\ &= \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \hat{U}_{ij}(\mathbf{k}_2, t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Cette dernière formulation est importante pour l'estimation numérique du spectre d'énergie. En effet, on calcule en discret (l'exposant d rappelle qu'on travaille en discret) :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ii}^d(\mathbf{k}, t) &= \left| \hat{u}_i^d(\mathbf{k}, t) \right|_{\mathbb{C}}^2 \\ E^d(k, t) &= \frac{\rho}{2} \sum_{\|\mathbf{k}\|=k} \hat{U}_{ii}^d(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

De cette façon, on s'assure bien que :

$$Ec(t) = \sum_k E^d(k, t) \quad (4.30)$$

On a omis ici l'opérateur de moyenne statistique, il s'agit donc du spectre d'énergie et non du spectre moyen comme défini en continu. Cependant, dans le cas d'une turbulence pleinement développée et entretenue (*i.e.* dont les propriétés statistiques n'évoluent plus), comme la moyenne statistique peut, grâce à l'hypothèse d'ergodicité, être calculée comme une moyenne temporelle, spectre et spectre moyen sont presque égaux.

Echelle intégrale L'échelle intégrale ou macro-échelle de Taylor, Λ , est une évaluation grossière de la durée ou de la distance en deçà de laquelle la vitesse fluctuante $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ serait parfaitement corrélée avec elle-même et totalement décorrélée d'elle-même au-delà. On construit cette échelle à partir des fonctions de corrélations doubles en deux points. La fonction de corrélation longitudinale f et la fonction de corrélation transversale g ,

$$f_i(r, t) = \frac{\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_i, t) \rangle}{\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle} \quad (4.31a)$$

$$g_{ij}(r, t) = \frac{\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_j, t) \rangle}{\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle} \quad (4.31b)$$

où \mathbf{e}_i correspond au vecteur unité dans la direction i (on ne somme pas ici sur les indices répétés) et $i \neq j$, permettent de construire respectivement l'échelle intégrale longitudinale et transversale :

$$\Lambda_i^f(t) = \int_0^\infty f_i(r, t) dr \quad (4.32a)$$

$$\Lambda_{ij}^g(t) = \int_0^\infty g_{ij}(r, t) dr \quad (4.32b)$$

En THI isovolume (*i.e.* en incompressible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), ces dernières sont liées par la relation de Kármán et Howarth :

$$\Lambda^f = 2\Lambda^g \quad (4.33)$$

Numériquement, on remplace, lors de l'évaluation, la moyenne statistique par la moyenne spatiale et en arrêtant l'intégrale infinie à la longueur du domaine de calcul (dans la direction en question).

Enstrophie, facteur de dissymétrie et critère Q On définit respectivement l'enstrophie, D , les facteurs de dissymétrie, S_i (*skewness* en anglais) et le critère Q

$$D(t) = \frac{1}{2} \left\langle (\nabla \times \mathbf{u})^2 \right\rangle \quad (4.34a)$$

$$S_\alpha(t) = - \frac{\left\langle \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^3 \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right\rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{on ne somme pas sur les indices répétés}) \quad (4.34b)$$

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} (\Omega_{ij} \Omega_{ij} - D_{ij} D_{ij}) \quad (4.34c)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u}) \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Encore une fois, numériquement on évalue ces grandeurs (D et S) en remplaçant la moyenne statistique $\langle \cdot \rangle$ par la moyenne spatiale $\overline{\cdot}$. Le critère Q représente l'équilibre local entre le cisaillement et la vorticité. Et on ne s'intéresse qu'aux grandeurs positives (*i.e.* quand la vorticité est supérieure au cisaillement). Il est un indicateur pratique des structures cohérentes, en ce sens que, contrairement au rotationnel, il ne s'active pas dans le cas de cisaillement pur (en proche paroi par exemple).

Validation

On présente ici les évolutions des différentes grandeurs définies ci-dessus dans le cas d'une THI en décroissance libre et celui d'une THI entretenue grâce à la méthode présentée précédemment. On vérifie ainsi que l'on parvient bien à maintenir l'écoulement à une énergie cinétique donnée mais aussi l'ensemble de ces caractéristiques statistiques. Les résultats présentés ont été obtenus à partir d'un calcul sur une boîte de $(2\pi)^3$ discrétisée par 16x16x16 points. On a choisi une viscosité nulle pour imposer une valeur du nombre de Reynolds théoriquement infinie. Le schéma en temps est un schéma de Runge-Kunta d'ordre 3 et le

schéma en espace est un schéma centré. Le modèle de turbulence utilisé est celui de la fonction de structure [57]. La figure 4.12 montre que la longueur caractéristique des tourbillons contenant le plus d'énergie à $t = 0$ est $l_0 = \frac{2\pi}{5}$. Comme on peut le voir sur la figure 4.14(a), l'énergie cinétique initiale (calculée avec $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$) est de 1,5 J. Par conséquent, le temps de retournement des gros tourbillons, t_{ref} ,

$$t_{ref} = \frac{l_0}{\sqrt{Ec^0}} \quad (4.35)$$

est d'environ une seconde, ce qui permet de confondre temps physique et grandeur adimensionnalisée.

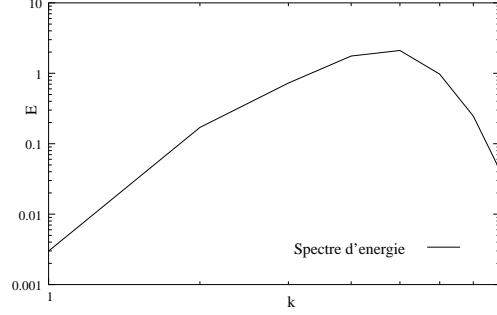


FIG. 4.12 – Spectre d'énergie du champ de vitesse initial

L'évolution temporelle de l'énergie cinétique (Fig. 4.14(a)) permet de vérifier que :

- on impose bien de façon exacte sa conservation (dans le cas de la THI entretenue),
- l'énergie cinétique décroît (après un régime transitoire) bien comme une fonction puissance (dans le cas de la THI en décroissance libre).

Le temps de calcul, qui est tel que l'énergie cinétique a perdu plus de trois décades, est par ce fait assuré d'être suffisamment long. On vérifie (Fig. 4.14(b)) qu'après un régime transitoire assez long, l'enstrophie de la THI entretenue oscille autour de 6 s^{-2} : elle est donc bien conservée. L'évolution des spectres d'énergie (Fig. 4.14(c)) montre dans les deux cas une bonne adéquation avec le spectre théorique (la fameuse pente en $k^{-\frac{5}{3}}$ de la turbulence pleinement développée). La THI entretenue conserve son spectre alors que la THI en décroissance libre voit l'aire sous la courbe de son spectre (image de son énergie cinétique) diminuer.

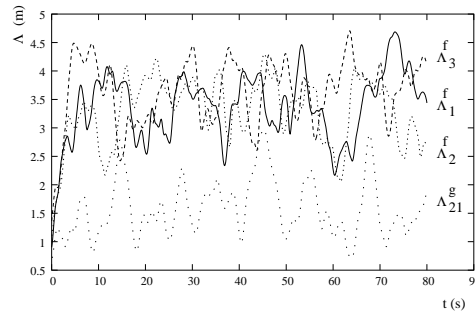


FIG. 4.13 – Evolution temporelle de l'échelle intégrale (THI entretenue)

Après un régime transitoire, l'échelle intégrale (Fig. 4.13) fluctue fortement autour de sa valeur moyenne constante et proche de π (pour les corrélations longitudinales). On retrouve un bon accord avec la relation de Kármán et Howarth entre corrélations doubles longitudinales et transversales (équation (4.33)). Enfin, on a vérifié l'isotropie en évaluant les produits $\langle u_i u_j \rangle$ et la figure 4.15 montre un champ qualitativement homogène et isotrope dont les isovaleurs sont identiques à celles de l'initialisation du calcul.

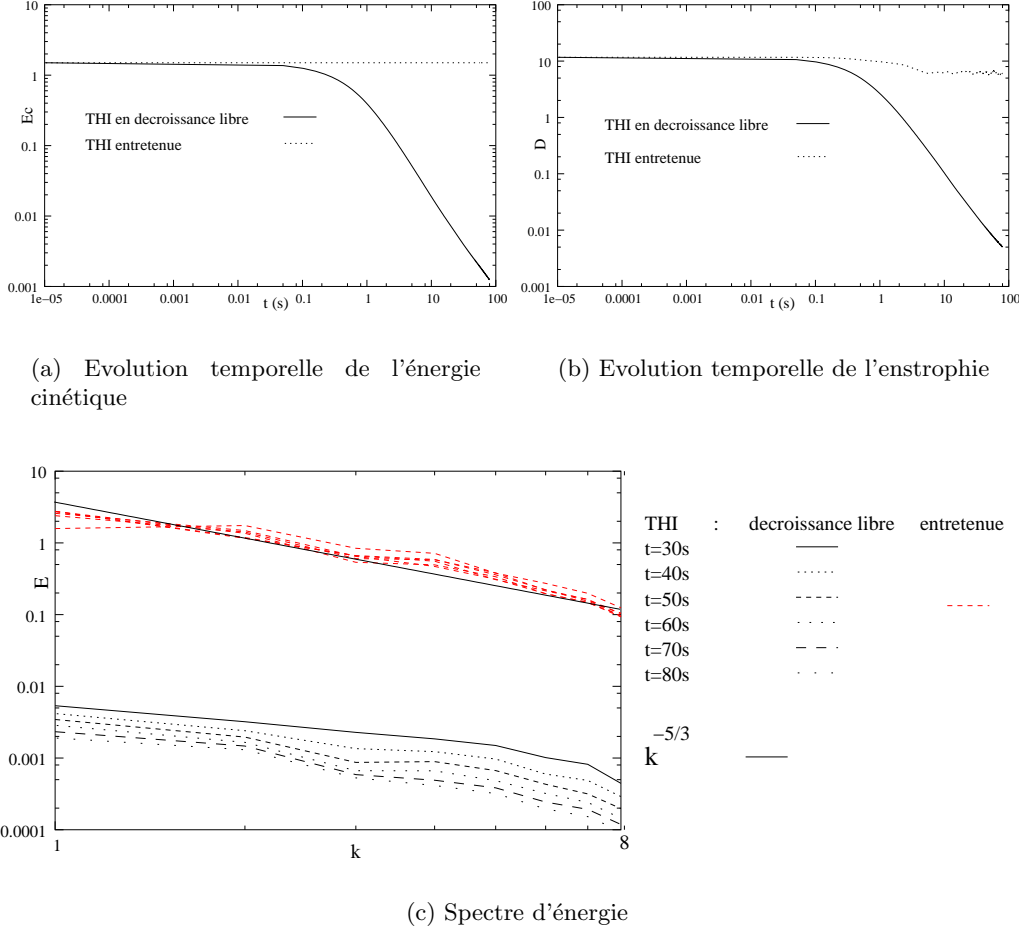


FIG. 4.14 – Comparaison des amplitudes du spectre d'énergie cinétique entre THI en décroissance libre et THI entretenue

4.5.2 Interaction

Grandeurs caractéristiques

En supposant que les plus petites échelles sont complètement isotropes, qu'elles ne sont ni influencées par le mouvement moyen ni les grandes échelles et qu'elles sont en équilibre avec ces dernières, Kolmogorov évalue la micro-échelle visqueuse (ou échelle de Kolmogorov) η , caractéristique des plus petites échelles dynamiquement actives dans l'écoulement, par analyse dimensionnelle

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.36)$$

où ν représente la viscosité cinématique et ε le taux de dissipation visqueuse par unité de masse. Avec le même genre de considérations, on peut évaluer ce taux de dissipation moyen par

$$\varepsilon = \frac{u_0^3}{l_0} \quad (4.37)$$

où u_0 correspond à la vitesse caractéristique des grosses structures et l_0 à leur taille caractéristique. Comme les grosses structures sont porteuses de l'essentiel de l'énergie cinétique, E_c , on peut approximer u_0 par $u_0^2 \approx e_c$ où e_c est la densité massique d'énergie cinétique turbulente. Finalement, on peut en combinant les équations (4.36) et (4.37) relier l'énergie

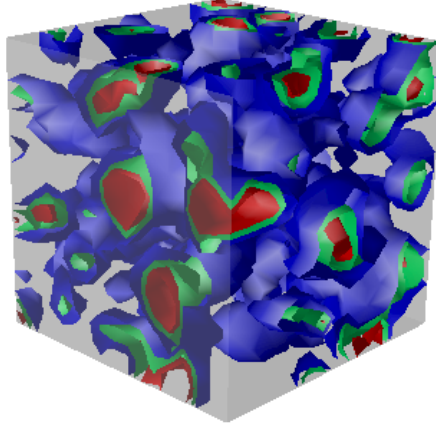


FIG. 4.15 – Isovaleurs (0,1-0,5-1) du critère Q au temps final de la THI entretenue

cinétique à l'échelle de Kolmogorov :

$$e_c \approx \nu^2 \left(\frac{l_0}{\eta^4} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.38)$$

On s'intéresse à l'énergie cinétique car c'est sur cette grandeur que notre méthode agit directement (voir section (4.5.1)). Dans l'objectif de réaliser une SND de spectre le plus large possible, on choisit $\eta = 2\Delta$ où Δ représente le pas du maillage eulérien et vaut $\Delta = l/N$ avec l comme taille d'un côté du domaine et N comme nombre de maille dans une direction. En approchant en plus l_0 par l , on a alors :

$$e_c \approx \left(\frac{\nu}{l} \right)^2 \left(\frac{N}{2} \right)^{\frac{8}{3}} \quad (4.39)$$

Avec un maillage 128x128x128 de côté de longueur $l = 0,0126 \text{ m}$ et $\nu = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, on a $e_c \approx 0,3 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ mais ayant constaté que les différentes approximations faites sous-évaluaient la densité d'énergie, nous avons choisi $e_c = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Franck Nicoud dans son cours *Eléments de simulation numérique directe en mécanique des fluides* (ENSEEIH 1996-97) rappelle cette relation empirique (proposée dans la littérature) entre le nombre de Reynolds et le nombre total de points, N_{tot} ,

$$N_{tot} \approx 1,7 Re_t^{9/4} \quad (4.40)$$

où le nombre de Reynolds de la turbulence vaut, lui, $Re_t = u_0 l_0 / \nu$. Dans notre cas, la valeur du nombre de Reynolds turbulent étant de 483, la relation (4.40) implique que 1,8 millions de points sont nécessaires. Notre maillage 128x128x128, soit 2,1 millions de points, est *a priori* suffisant. Le temps de retournement des gros tourbillons (défini par la relation (4.35)), t_{ref} , est de 0,0126 s.

Dans ce qui suit, l'indice b caractérise la bulle et l le liquide environnant. Les masses volumiques et les viscosités dynamiques sont respectivement :

$$\begin{aligned} - \rho_b &= 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ et } \mu_b = 0,000282 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \\ - \rho_l &= 851 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ et } \mu_l = 0,0222 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

La pesanteur, \mathbf{g} , est prise égale à $9,81 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. La tension de surface : $\sigma = 0,5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Le rayon de la bulle, D_b , est 3,55 mm (ce qui fait 38 mailles par diamètre de bulle). Sa vitesse terminale, V_T , est environ $0,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans une simple colonne où le liquide est initialement au repos,

cette vitesse est atteinte au bout d'un régime transitoire d'une durée d'environ $0,4\text{ s}$. Pour conserver la bulle dans le domaine, on la fait monter à contre-courant. Ainsi, la bulle n'aura pas de mouvement moyen alors que les structures turbulentes auront en moyenne un mouvement de translation de $0,19\text{ m.s}^{-1}$. Avec cette seule vitesse de translation, il faudrait environ 70 millisecondes pour traverser le domaine. On calcule, à partir des grandeurs précédentes, du temps de relaxation de la bulle T_b , de l'échelle intégrale de temps Λ_T et d'espace Λ_L , les nombres adimensionnels qui caractérisent cette SND :

$Re_b = \frac{V_T D_b}{\nu_l}$	$We = \frac{\rho_l e_c D_b}{\sigma}$	$Mo = \frac{g \mu_l^4}{\rho_l \sigma^3}$	$Bo = \frac{\rho_l g D_b^2}{\sigma}$	$\frac{\eta}{D_b}$	$\frac{\Lambda_L}{D_b}$	$\frac{\Lambda_T}{T_b}$
25,8	6	$2,2 \cdot 10^{-8}$	0,21	0.06	1.4	0.5

TAB. 4.5 – Nombres adimensionnels

Résolution numérique

Pour le découpage du domaine, la structure du code impose que :

- les deux problèmes couplés soient résolus par le même nombre de processeurs,
- les deux voisinages de chaque face périodique appartiennent à un seul et même processeur,
- les deux voisinages de chaque face de la frontière couplée appartiennent à un seul et même processeur.

Si on décide par ailleurs de répartir la charge de calcul de façon équilibrée et de minimiser la taille des joints (on appelle joints les mailles qui appartiennent à deux processeurs différents, ils correspondent à des zones de recouvrement), avec huit processeurs, on aboutit nécessairement au découpage présenté par la figure 4.16. Sur cette dernière, chaque couleur représente un processeur différent. Chacun d'entre eux a à sa charge deux fois (une pour chaque problème) un maillage de $64 \times 64 \times 64$ noeuds. On utilise :

- un schéma temporel Runge-Kutta d'ordre 3 (implémenté dans le cadre de ce travail de thèse et décrit dans le chapitre précédent),
- et un schéma centré d'ordre 2 pour la convection.

Validation

THI Nous avons déjà vérifié le bon comportement de notre méthode sur une SGE très grossière. Nous validons ici les propriétés physiques de notre condition d'entrée. La figure 4.17(a) fait clairement apparaître l'échelle de Kolmogorov. Pour confirmer que l'on résout bien toutes les échelles énergétiquement actives de l'écoulement, on a estimé l'échelle de Kolmogorov à partir des résultats du calcul. Comme on maintient l'énergie cinétique constante, on ne peut pas calculer la dissipation comme une réelle variation d'énergie cinétique. On utilise donc la variation que l'on aurait eue sans notre méthode d'entretien. On trouve qu'en moyenne le taux de dissipation visqueuse par unité de masse, ε , vaut $8,7\text{ m}^2.\text{s}^{-3}$. L'échelle de Kolmogorov, η , se déduit de la relation (4.36), on trouve $2,1 \cdot 10^{-4}\text{ m}$. On rappelle que le pas du maillage Δ vaut $9,8 \cdot 10^{-5}\text{ m}$. L'échelle de Kolmogorov est donc supérieure à deux fois la taille d'une maille. La figure 4.17(a) nous permet aussi de vérifier que l'on retrouve la pente de $-5/3$ prévue par la théorie et ce même après plusieurs temps de retournement des plus grosses structures, ce qui permet d'être assuré du bon comportement de notre rudimentaire méthode d'entretien. Le défaut majeur (mais auquel nous nous attendions) de la méthode

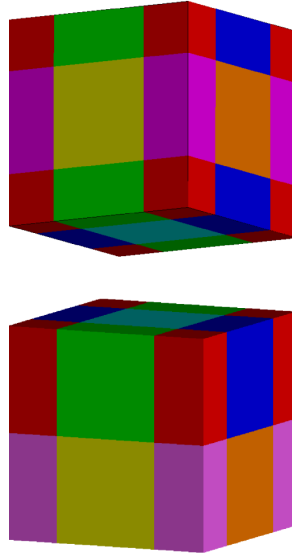
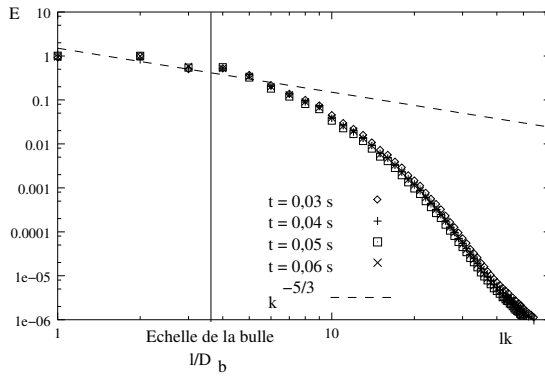
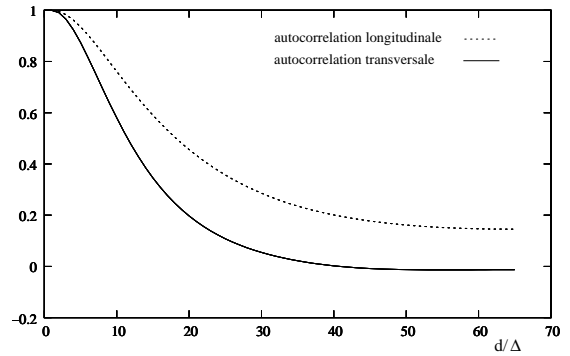


FIG. 4.16 – Découpage des deux problèmes

est de faire apparaître des structures aux fréquences spatiales les plus basses (période de la taille du domaine de calcul). C'est ce que montre le spectre d'énergie (fig. 4.17(a)), puisque le maximum d'énergie est atteint aux plus basses fréquences, et aussi les courbes d'auto-corrélations (fig.4.17(b)), puisqu'elles ne décroissent pas jusqu'à atteindre une valeur nulle. Tous ces résultats sont cohérents avec l'analyse de ces méthodes de forçage linéaire faite par Rosales et Meneveau [79]. Ces caractéristiques de notre condition d'entrée seront à garder à l'esprit au moment de l'interprétation des résultats mais elles n'handicapent *a priori* pas notre étude, focalisée sur l'interaction de la bulle avec les structures turbulentes et non sur la THI elle même.

(a) Spectre d'énergie cinétique à différents temps (l est la taille du domaine)

(b) Autocorrélations longitudinale et transversale en fonction de la distance adimensionnée par le pas d'espace

FIG. 4.17 – Spectre et autocorrélations

Turbulence de grille Nous avons vu que la simulation de la THI entretenue, s_1 , sert de condition à la limite pour la simulation de l'ascension de la bulle s_2 . Comme s_2 est situé en aval de s_1 , la turbulence décroît spatialement dans le domaine de calcul s_2 . La situation est donc similaire au cas où on se trouverait à l'aval d'une grille. Cependant, notre simulation ne

reproduit pas exactement une turbulence de grille car la méthode de forçage linéaire que nous avons utilisé pour entretenir la THI crée des structures cohérentes de la taille du domaine de calcul. Il est donc important de caractériser la turbulence qui va interagir avec la bulle avant d'étudier les interactions entre les structures turbulentes et l'interface. Dans cet objectif, nous avons réalisé un autre calcul où les deux SND sont monophasiques : la simulation s_1 correspond toujours à la THI entretenue mais la simulation s_2 ne contient plus de bulle. Dans s_2 , on étudie la décroissance spatiale de l'intensité turbulente longitudinale. La direction longitudinale correspond à la direction où on impose une vitesse de translation uniforme, c'est-à-dire l'axe z . La vitesse longitudinale est donc w . On a calculé l'intensité turbulente en faisant une moyenne spatiale du carré des fluctuations de la vitesse longitudinale. On fait une moyenne spatiale sur chaque plan défini par l'équation $z = n \Delta$ (où n est un entier et Δ est le pas du maillage). Les fluctuations de la vitesse longitudinale sont simplement la vitesse longitudinale, w , moins la vitesse de translation uniforme (elle vaut $0,19 m.s^{-1}$). La figure 4.18 représente le profil de l'intensité turbulente longitudinale à différents instants. Après une zone de transition (où l'on peut considérer que l'intensité turbulente est à peu près constante), on vérifie que l'intensité turbulente est globalement en décroissance spatiale. Cependant, l'intensité turbulente longitudinale est localement croissante : les différents profils présentent des maxima locaux. Ils sont certainement dus à la présence des structures cohérentes liées à la méthode de forçage linéaire et dont la taille correspond à peu près à la taille du domaine de calcul. Du fait de leur taille, la moyenne spatiale ne permet pas de les traiter de façon *statistique* et on les voit se déplacer au cours du temps sur le profil d'intensité turbulente à la vitesse de translation de l'écoulement moyen. Pour mesurer la décroissance spatiale de

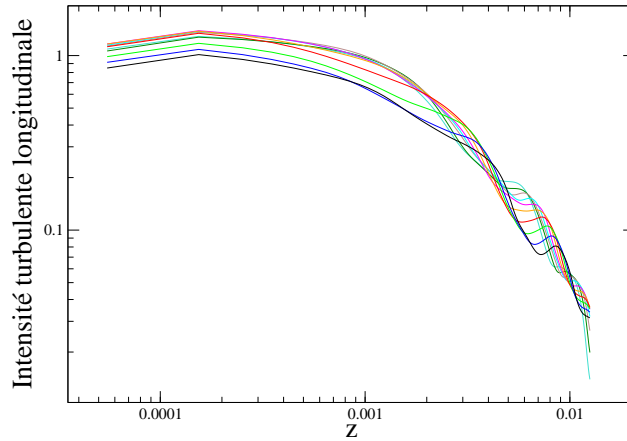
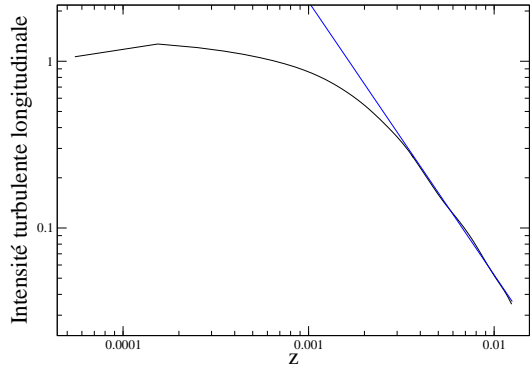


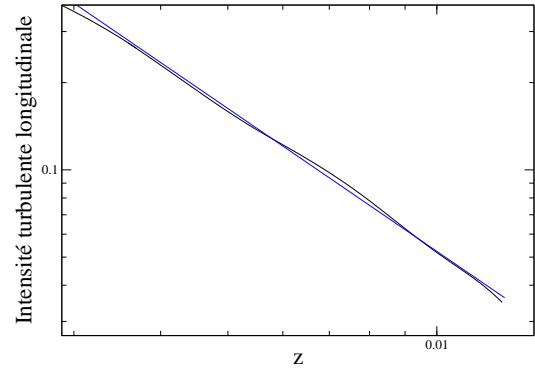
FIG. 4.18 – Evolution temporelle de la moyenne spatiale de l'intensité turbulente longitudinale

l'intensité turbulente, il faut donc aussi moyenner en temps les profils instantanés obtenus. On obtient alors le profil de la figure 4.19(a) qui, après une zone de transition, présente une partie rectiligne en échelle logarithmique. Ceci confirme que la décroissance de l'intensité turbulente longitudinale suit une loi puissance du type $u'^2 \propto z^{-\alpha}$ [14, Chapitre 8, p. 276-287]. Malgré de légères traces des grosses structures cohérentes, la courbe est très proche d'une loi puissance avec $\alpha = 1,63$ (fig. 4.19(b)). Cette valeur est relativement élevée. On trouve plus couramment dans la littérature des valeurs de l'exposant, α , comprises entre 1,2 et 1,5 (voir par exemple [42]). Cependant, Chassaing [14] distingue deux phases de décroissance : la phase initiale et la phase finale. Dans la phase initiale la valeur de l'exposant est proche de 1 et dans la phase finale de 2 voir 2,5 suivant les approches. De plus, la décroissance spatiale d'une turbulence de grille artificiellement simulée grâce à une méthode de forçage linéaire n'a, à notre connaissance, encore jamais été étudiée. Il est probable que la méthode de forçage induise des propriétés particulières à la turbulence, jouant ainsi sur les mécanismes de reconditionnement spectral et en particulier sur la décroissance de l'intensité turbulente. Bien que l'on retrouve une loi puissance, cette analyse ne permet pas de valider la simulation réalisée car on ne

dispose pas de données de références réellement adaptées à notre étude. Malgré tout, cette analyse permet de commencer à caractériser la turbulence qui interagit avec la bulle. Dans une perspective qui dépasse les objectifs de ce mémoire, il serait intéressant d'étudier comment la présence de la bulle modifie les propriétés de la turbulence. Par exemple, on pourra comparer la décroissance spatiale de l'intensité turbulente sans la présence de bulle (c'est l'étude que nous venons de faire) avec la décroissance spatiale de l'intensité turbulente en présence de la bulle (étude que nous ne ferons pas).



(a) Profil complet de l'intensité turbulente longitudinale



(b) Zoom sur la partie où la décroissance de l'intensité turbulente longitudinale suit une loi puissance ($u'^2 \propto z^{-\alpha}$)

FIG. 4.19 – Décroissance spatiale de la moyenne temporelle de l'intensité turbulente longitudinale

Ascension de la bulle : cas laminaire Pour valider la simulation s_2 dans le cas laminaire (*i.e.* avant de la coupler avec la simulation s_1 de la THI entretenue), on a fait une étude de convergence en maillage. La figure 4.20 montre qu'un maillage de 96 mailles dans chaque direction suffit pour retrouver la bonne position du centre de gravité de la bulle durant toute la durée de sa mise en mouvement (jusqu'à ce qu'elle ait atteint sa vitesse terminale et un régime stationnaire).

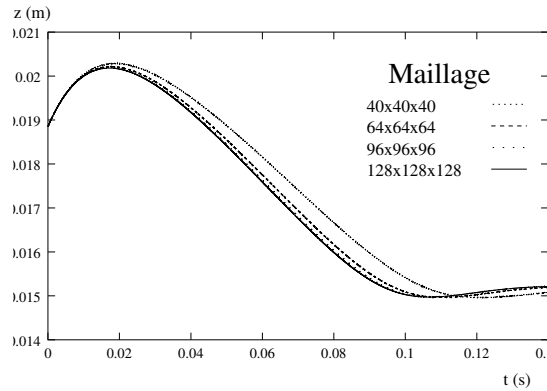


FIG. 4.20 – Evolution temporelle de la coordonnée verticale du centre de la bulle. Cette étude de convergence en maillage montre que 96 points dans chaque direction sont suffisants pour retrouver la bonne position du centre de gravité de la bulle.

Ascension de la bulle : cas turbulent Pour valider le couplage lui même, nous avons eu l'idée de faire une étude paramétrique en faisant varier la valeur de la tension de surface. Nous avons alors pu vérifier grossièrement que le nombre de Weber² critique (*i.e.* à partir duquel des phénomènes de rupture apparaissent) se situait autour de 10. Comme la bulle a tendance à se déplacer vers le bas du domaine où l'intensité turbulente est beaucoup moins intense, ce nombre de Weber (autour de 10) est la borne inférieure de ce que Risso et Fabre [78] appelle la troisième catégorie où une unique structure tourbillonnaire peut être responsable d'une grosse déformation sur une bulle initialement sphérique. Nous avons aussi constaté que les ruptures dépendaient du temps de séjour de la bulle dans le champ turbulent et nos résultats (voir figure 4.21) semblent en bon accord avec les mécanismes identifiés par Risso et Fabre [78].

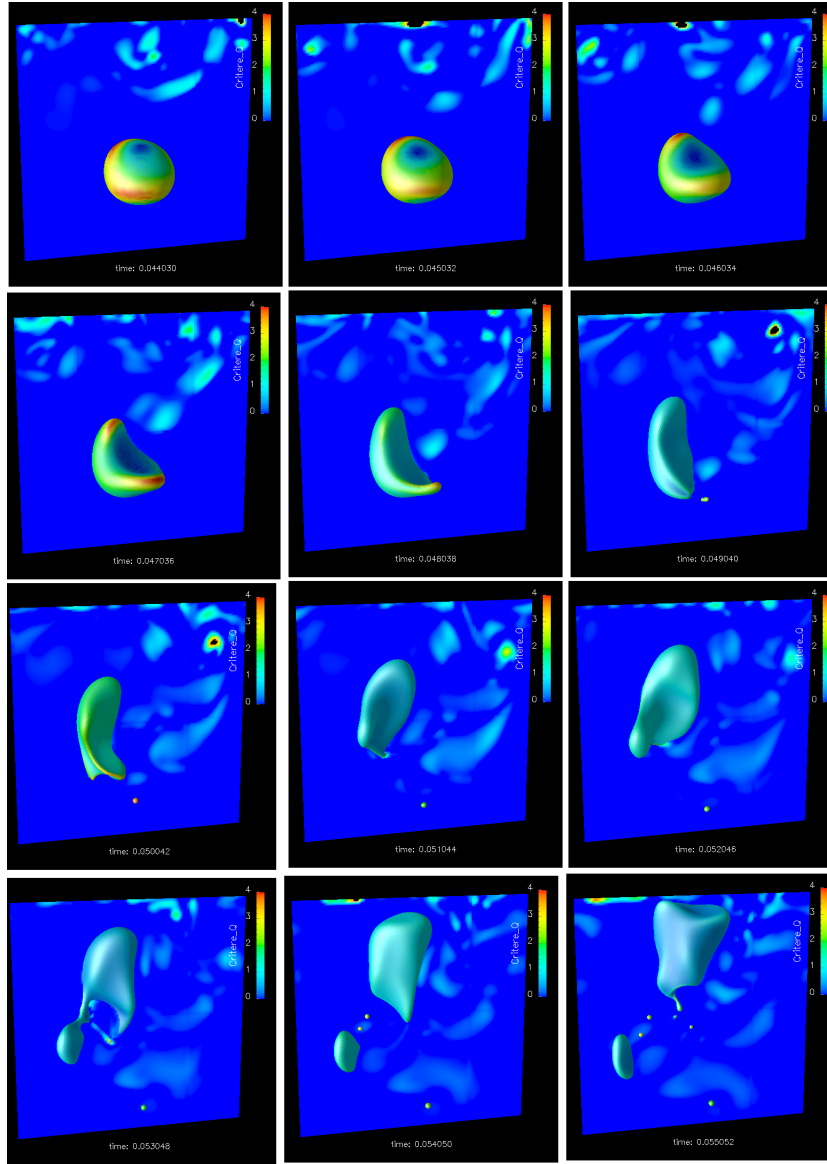


FIG. 4.21 – Ruptures provoquées par les structures turbulentes $We = 60$

²Puisqu'on se place dans le repère de la bulle, on estime la vitesse relative entre les deux phases par la racine carrée de la densité massique d'énergie cinétique turbulente e_c .

4.6 Conclusion

Ce chapitre conclut la première partie de ce mémoire. Les développements numériques et les modélisations physiques que nous avons effectués au cours de ce travail de thèse (chapitre 3) ont contribué à perfectionner notre méthode mixte front-tracking/VOF (chapitre 2) basée sur le formalisme monofluide (chapitre 1). Grâce à cette méthode de SND fiable, nous avons réalisé quatre calculs complémentaires et représentatifs des écoulements diphasiques et turbulents :

- L’interaction bulle/tourbillons contrarotatifs nous a permis de faire des études paramétriques et de constater l’importance des modes propres de la bulle.
- La montée d’une bulle à contre-courant ajoute l’influence de la gravité. Du fait des forces de flottabilité, la bulle présente alors une vitesse de glissement par rapport au liquide environnant. Nous verrons que la description géométrique de l’interface est alors déterminante pour prédire correctement la trajectoire en zigzag de la bulle.
- La cavité diphasique diffère des cas précédents par le rapport entre la taille des structures tourbillonnaires et le rayon de courbure de l’interface. Son autre intérêt est que le transfert de quantité de mouvement va de la phase légère vers la phase lourde.
- L’interaction entre une bulle et une turbulence type turbulence de grille est le seul cas dont la géométrie est tridimensionnelle et dont l’écoulement est réellement turbulent. Il nous permettra d’étendre les résultats des cas précédents.

Pour chacun de ces cas, nous avons validé nos résultats à partir :

- de développements analytiques,
- d’études de convergence en maillage et,
- de comparaison avec des études expérimentales.

D’un point de vue phénoménologique, nous avons interprété l’interaction entre turbulence et interfaces en terme d’échange énergétique. Nous allons maintenant exploiter les résultats de ces SND dans le but de développer le concept ISS. Pour ce faire, nous avons essentiellement réalisé des tests *a priori*. Ils consistent à filtrer explicitement les résultats des SND afin d’évaluer les termes sous-maille spécifiques au diphasique et de tester les modèles classiques ainsi que ceux que nous avons développés.

Deuxième partie

Simulation des Grandes Echelles

SGE diphasique avec une vision continue des interfaces

DANS CE CHAPITRE, on précise la façon dont on va filtrer les équations monofluides et en particulier le problème du traitement de la discontinuité. On présente ensuite rapidement les propriétés d'un filtre de type SGE ainsi que les principaux modèles utilisés dans les situations monophasiques. On filtre alors analytiquement les équations monofluides afin de mettre en évidence les termes sous-maille spécifiques aux situations diphasiques. Des tests *a priori* nous permettent, dans un premier temps, de négliger certains de ces termes puis, dans un second temps, de développer des modèles pour les termes prépondérants. Les modèles ainsi développés nécessitent une dernière fermeture pour déterminer la position de la discontinuité à partir de la fonction indicatrice de phase filtrée c'est-à-dire, pour retrouver une vision discontinue de l'interface à partir de grandeur continue.

5.1 Introduction

Traditionnellement, lorsque l'on formalise la Simulation des Grandes Echelles (SGE), on a recours à un filtre défini comme un produit de convolution. Pour que cette opération de filtrage ait de bonnes propriétés (comme par exemple celle de commuter avec les opérateurs de dérivations), on choisit généralement un noyau de convolution indépendant du temps et de l'espace. Cependant, en procédant ainsi sur des écoulements où sont présents des discontinuités comme des flammes, des chocs ou des interfaces, on s'aperçoit qu'en plus de la partie turbulente, le saut lié à la discontinuité contribue aux fluctuations sous-maille. Ceci est problématique car, dans la mesure où les modèles dont on dispose font l'hypothèse que les fluctuations sous-maille sont d'origine turbulente, ils sont *a priori* incapables de modéliser la contribution du saut qui peut dans certains cas être prépondérante. Cette problématique a été mise en évidence par Sagaut et Germano dans [81]. Afin de pouvoir utiliser les modèles de turbulence en accord avec leurs hypothèses fondatrices, ces auteurs préconisent de recourir à des filtres décentrés et ils montrent comment on peut adapter les modèles classiques à ces filtres. Pour des raisons de faisabilité numérique, nous proposons, dans le cadre des écoulements diphasiques, la démarche inverse : on applique un filtre centré et on développe des modèles spécifiques pour tenir compte de termes sous-maille non turbulents et provenant essentiellement de la présence d'une discontinuité. Pour cette raison, il est alors abusif de

parler de SGE, car bien que notre souci soit une modélisation des fluctuations sous-maille, ces dernières ne sont pas uniquement d'origine turbulente. En réalité, il vaut d'ailleurs mieux parler de la partie non résolue d'un champ hydrodynamique que des fluctuations de ce même champ. Cette partie non résolue existe bien en laminaire et en deux dimensions d'espace, deux régimes d'écoulements pour lesquels les phénomènes d'étirement des structures tourbillonnaires intervenant dans la cascade d'énergie cinétique turbulente n'existent pas. Ainsi, nous proposons d'utiliser le formalisme de la SGE (originellement dédié aux fluctuations turbulentes) pour étudier et modéliser la partie non résolue des champs hydrodynamiques qui se concentre essentiellement près des discontinuités.

Filtrer à cheval sur la discontinuité, en plus de créer des fluctuations sous-maille d'origine non turbulente, lisse cette discontinuité en une zone de fort gradient d'épaisseur $2r$, si r désigne l'épaisseur du filtre. Or, les méthodes numériques utilisées pour simuler des discontinuités ont été développées avec l'objectif initial de Simulation Numérique Directe (SND). Par conséquent, on dispose de nombreuses méthodes performantes pour la simulation de discontinuité mais très peu sont capables de simuler l'évolution d'une zone de transition car, il faut alors parvenir à ne pas diffuser la zone de transition¹. D'où la nécessité, une fois modélisées les fluctuations sous-maille principalement dues à la présence de la discontinuité, de revenir à un problème discontinu équivalent (on appelle problème discontinu équivalent un problème filtré dont la discontinuité n'est pas épaissie, elle est susceptible d'être moins riche en fréquences mais elle reste infiniment mince). Cette nécessité est accrue par le fait que la modélisation des fluctuations dues à la discontinuité est facilitée par la localisation de cette discontinuité. Le passage à un problème discontinu équivalent fait donc partie de la modélisation des fluctuations sous-maille non turbulentes.

En résumé, on peut considérer qu'il existe deux grandes façons (voir figure 5.1) d'aboutir à un problème filtré (*i.e.* moins riche fréquentiellement que le problème d'origine) contenant une discontinuité au vrai sens du terme (*i.e.* elle est non épaissie et reste infiniment mince) :

- La première consiste à appliquer un filtre décentré (ou conditionnel) tel que l'opération de filtrage ne traverse jamais la discontinuité. On suppose alors que l'on connaît (et connaîtra dans le cas sous-résolu) la géométrie précise de la discontinuité. L'avantage de cette méthode est de faire apparaître uniquement des fluctuations sous-maille d'origine turbulente. Ce qui rend licite l'utilisation des modèles classiques de SGE. L'inconvénient de cette méthode est l'utilisation de filtres dépendants de l'espace qui interdit théoriquement de permuter les opérations de filtrage et de dérivation. Ceci fait donc apparaître de nouveaux termes qu'il faut modéliser.
- La deuxième, celle que nous proposons ici, comprend deux étapes. Une étape où tout le problème, y compris la discontinuité, est filtré classiquement. Et, une autre étape où on se ramène à un problème discontinu équivalent. L'avantage de cette méthode est d'explicitement les termes sous-maille liés à la sous-résolution de la discontinuité. Elle permet en particulier de préciser la notion de discontinuité filtrée (mais pas épaissie!). Dans le cas d'une interface liquide-gaz supposée infiniment mince et très déformée (*i.e.* grands extrema et fortes variations de courbures), l'interface filtrée est toujours infiniment mince mais plus lisse que l'interface non filtrée (*i.e.* les extrema et les variations de courbures ont diminués). La difficulté réside alors dans la modélisation des termes sous-maille d'origine non turbulente et dans la localisation précise de la discontinuité équivalente.

Selon nous, ces deux méthodes sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles demandent le même effort de modélisation et conduisent (si l'on fait les mêmes hypothèses) aux mêmes résultats.

¹Seules les méthodes à interfaces diffuses (voir paragraphe 2.1.3) sont capables de simuler l'évolution d'une zone de transition. Elles reposent sur des considérations thermodynamiques qui permettent d'introduire un mécanisme de retour à l'équilibre de la zone de transition. Cet équilibre est notamment caractérisé par l'épaisseur de la zone de transition.

Leur différence réside dans la façon dont elles regroupent ou séparent les termes sous-maille qu'il faudra modéliser. La première méthode qui utilise un filtrage conditionnel suppose que l'on traite différemment la sous-résolution du champ de vitesse et celle de la géométrie de l'interface. Plus proche du formalisme monofluide, la deuxième méthode qui filtre à cheval sur l'interface traite de façon identique la vitesse et la fonction indicatrice de phase qui, filtrée, représente la géométrie de l'interface sous-résolue. Nous avons choisi l'approche où on filtre à cheval sur la discontinuité, notamment parce qu'elle nous semble plus proche de ce qui se passe numériquement. En effet, on peut rapprocher le dialogue² entre maillage eulérien et maillage lagrangien de la méthode front-tracking et le passage d'une description continue à une description discontinue des interfaces. Le maillage eulérien où on fait des bilans sur des volumes de contrôle qui contiennent éventuellement l'interface correspond à une vision continue de l'interface alors que le maillage lagrangien est clairement une représentation discontinue de l'interface.

Dans ce chapitre, on se concentre sur la première étape de cette approche où tout le problème y compris la discontinuité est filtré classiquement. Après l'opération de filtrage, l'interface n'est plus discontinue, elle est devenue une zone continue de transition où la masse volumique, par exemple, varie rapidement mais continûment.

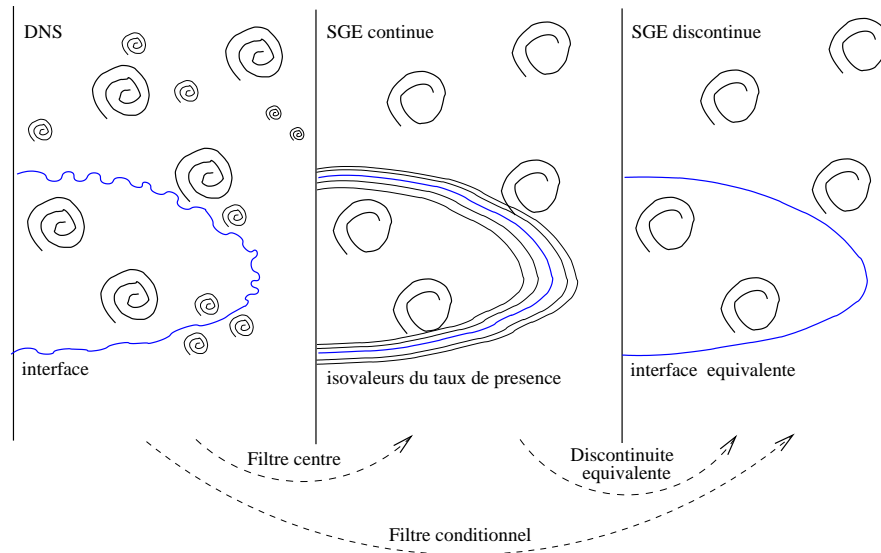


FIG. 5.1 – Représentation schématique des structures tourbillonnaires et de l'interface résolues (respectivement, lors d'une SGE continue, SGE discontinue).

5.2 Moyenne et séparation d'échelles

5.2.1 Définition

Dans le cas de la simulation des grandes échelles, l'opérateur G associé est la plupart du temps assimilé à un filtre passe-haut en espace, bien que dans la pratique cette définition théorique soit quelque peu abusive (voir plus loin). On obtient alors la définition mathématique

²On appelle dialogue les échanges d'information entre les deux maillages. Typiquement, la vitesse est calculée sur le maillage eulérien, puis, elle est interpolée aux positions des marqueurs du maillage lagrangien.

suivante de G

$$\bar{\phi}(x, t) = G \star \phi(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} G(\bar{\Delta}(x, t), x - x', t - t') \phi(x', t') dx' dt' \quad (5.1)$$

où $\phi = \phi(x, t)$ est une variable quelconque du champ hydrodynamique (dépendant du temps et de l'espace), $\bar{\Delta}$, est la longueur de coupure du filtre et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Cette forme est la plus générale possible pour la définition des filtres associés à l'approche SGE. $\bar{\phi}$ est la partie résolue de ϕ . On définit la partie non résolue, ϕ' , comme le complément du champ local instantané, ϕ :

$$\phi' = \phi - \bar{\phi} = (1 - G) \star \phi \quad (5.2)$$

Cette partie non résolue est parfois appelée fluctuations. En effet, la partie résolue, $\bar{\phi}$, varie de façon significative sur des échelles de longueur supérieure à la taille du filtre, $\bar{\Delta}$, tandis que la longueur caractéristique des variations de la partie non résolue, ϕ' , est *a priori* très inférieure à la taille du filtre. Cependant, rien ne suppose dans le formalisme de cette décomposition que les fluctuations soient turbulentes. Les modèles que nous avons développés en utilisant ce formalisme veulent rendre compte de l'action de la partie non résolue des champs sur leur partie résolue mais, dans ISS, contrairement à la SGE monophasique, la partie non résolue n'est pas nécessairement d'origine turbulente. Les opérateurs de dérivation (spatiale ou temporelle) ne commutent *a priori* pas avec l'opérateur G ainsi défini. On peut d'ailleurs exprimer l'erreur de commutation pour un filtre variant spatialement uniquement ($\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(x)$) sur un domaine borné

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, G \right] (\phi) = \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{\Delta}} \star \phi \right) \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x} + \int_{\partial\Omega} G(\bar{\Delta}(x), x - x') \phi(x') \cdot \mathbf{n}(x') dx' \quad (5.3)$$

où $\mathbf{n}(x')$ est le vecteur unitaire sortant de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω , et où on définit le commutateur comme suit :

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} - \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \quad (5.4)$$

Cet opérateur possède les propriétés suivantes :

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] = -[\mathcal{G}, \mathcal{F}] \quad \text{anti-symétrie} \quad (5.5a)$$

$$[\mathcal{F} \circ \mathcal{G}, \mathcal{H}] = [\mathcal{F}, \mathcal{H}] \circ \mathcal{G} + \mathcal{F} \circ [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \quad \text{Identité de Germano} \quad (5.5b)$$

$$[\mathcal{F}, [\mathcal{G}, \mathcal{H}]] + [\mathcal{G}, [\mathcal{H}, \mathcal{F}]] + [\mathcal{H}, [\mathcal{F}, \mathcal{G}]] = 0 \quad \text{Identité de Jacobi} \quad (5.5c)$$

Pour simplifier les développements théoriques, on se restreint généralement aux filtres de longueur de coupure constante spatialement et temporellement ce qui assure la permutation entre l'application du filtre et les opérateurs de dérivation. On considérera toujours être dans ce cas. En pratique, on utilise généralement la taille des mailles du problème discret comme longueur de coupure de manière à optimiser la résolution sur le maillage considéré. L'expression la plus couramment utilisée est

$$\bar{\Delta} \approx \Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (5.6)$$

où Δx , Δy et Δz sont les tailles de maille dans les différentes directions de l'espace. En toute généralité, la longueur de coupure ainsi obtenue n'est ni isotrope, ni homogène, ce qui induit nécessairement une erreur de commutation lors de la dérivation des équations. On suppose aussi théoriquement que le filtre respecte la propriété de linéarité. Soit $Cste$ une constante, ϕ et ψ deux variables quelconques du champ hydrodynamique, la propriété de linéarité s'écrit :

$$\overline{Cste \phi + \psi} = Cste \bar{\phi} + \bar{\psi} \quad (5.7)$$

Elle est vérifié de fait avec la définition (5.1). Les filtres de type SGE vérifient aussi la conservation des constantes :

$$\int_{-\infty}^t \int_{\Omega} G(\bar{\Delta}(x, t), x - x', t - t') dx' dt' = 1 \quad (5.8)$$

En revanche, un filtre ne vérifie pas *a priori* la propriété d'idempotence, c'est-à-dire qu'en général :

$$\overline{\overline{\phi}\psi} \neq \overline{\phi} \overline{\psi} \quad (5.9)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\phi}} &\neq \overline{\phi} \\ \overline{\phi'} &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.2.2 Quelques exemples de filtre

On décrit ici les trois types de filtre les plus couramment utilisés [80]. On applique chacun d'entre eux à la fonction indicatrice de phase afin d'avoir une première représentation d'une interface étalée. On suppose pour cela être en 1D avec une seule interface située en $x = 0$. Ces filtres sont purement théoriques. Ils ne sont applicables que dans le cas d'un filtrage explicite. En pratique, la véritable longueur de coupure du filtre dépend non seulement de l'espace et du temps *via* les irrégularités de la discrétisation, mais aussi de la modélisation, de l'ordre du schéma numérique, d'une éventuelle dissipation artificielle, ...

Filtre porte (spectral)

Le filtre porte est aussi appelé filtre passe-bas ou en anglais *spectral or sharp cutoff filter*. Il se caractérise dans l'espace spectral par sa fonction de transfert, \hat{G} :

$$\hat{G}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < k_c = \frac{\pi}{\Delta} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.11a)$$

Son noyau de convolution dans l'espace physique, G , est :

$$G(x) = \frac{\sin(k_c x)}{k_c x} \quad (5.11b)$$

La fonction de transfert du filtre porte et respectivement son noyau de convolution sont représentés par les figures 5.2(a) et 5.2(b). L'application du filtre porte à la fonction indicatrice de phase, χ , donne la fonction représentée par la figure 5.3. On constate que cette fonction n'admet pas zéro pour minimum, ni un pour maximum. Ce n'est donc *a priori* pas une bonne façon de filtrer la fonction indicatrice de phase. Comme on souhaite appliquer le même filtre à l'équation de transport de l'interface (1.16b) et à l'équation bilan de quantité de mouvement (1.16c), on exclut l'utilisation de ce type de filtre. L'utilisation de ce type de filtre est de toute façon généralement réservée aux méthodes spectrales (on est alors déjà dans le bon espace).

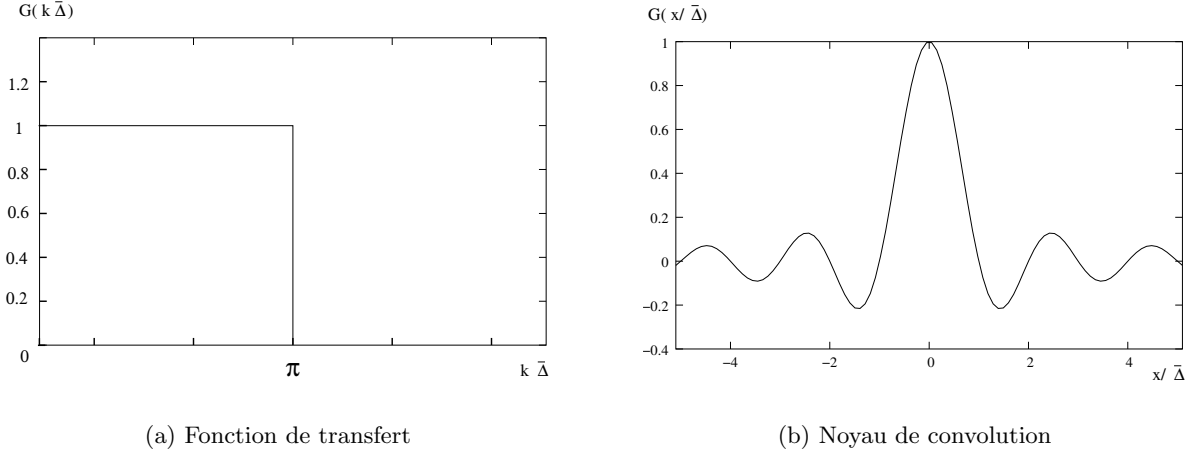


FIG. 5.2 – Fonction de transfert et noyau de convolution associés au filtre porte

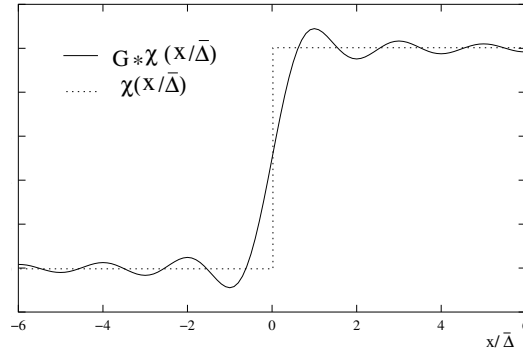


FIG. 5.3 – Fonction indicatrice de phase filtrée par un filtre porte

Filtre gaussien

La fonction de transfert et le noyau de convolution du filtre gaussien sont respectivement

$$\hat{G}(k) = \exp\left(-\frac{\bar{\Delta}^2 k^2}{4\gamma}\right) \quad (5.12a)$$

$$G(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi \bar{\Delta}^2}} \exp\left(-\frac{\gamma x^2}{\bar{\Delta}^2}\right) \quad (5.12b)$$

où γ est une constante souvent prise égale à 6. Les fonctions précédentes sont respectivement représentées par les figures 5.4(a) et 5.4(b). En appliquant un filtre gaussien à la fonction indicatrice de phase, on retrouve une courbe semblable à celle représentant la variation réelle de la masse volumique (voir les figures 5.5 et 1.1). Cependant, les épaisseurs des zones de transition ne sont absolument pas comparables et celle obtenue après filtrage est tout à fait artificielle.

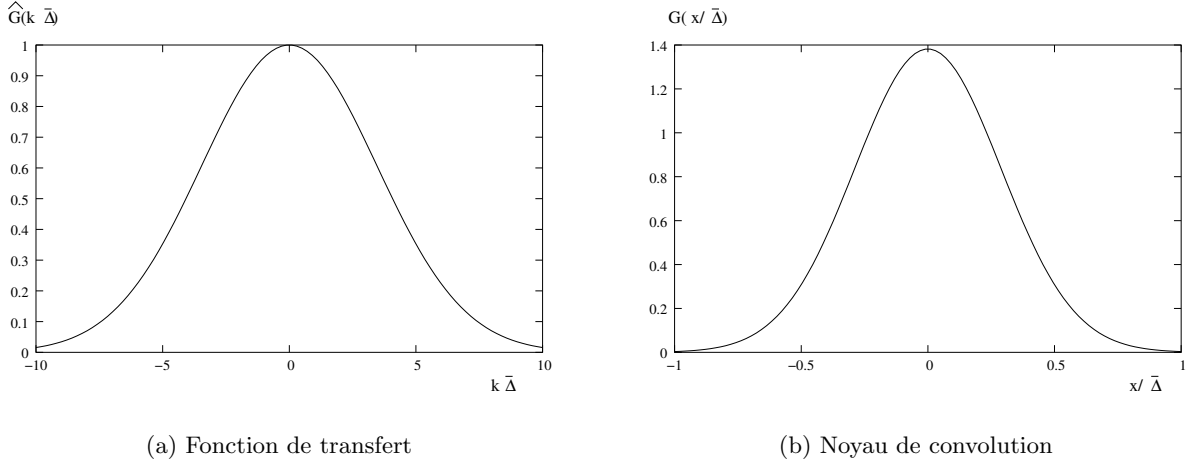


FIG. 5.4 – Fonction de transfert et noyau de convolution associés au filtre gaussien

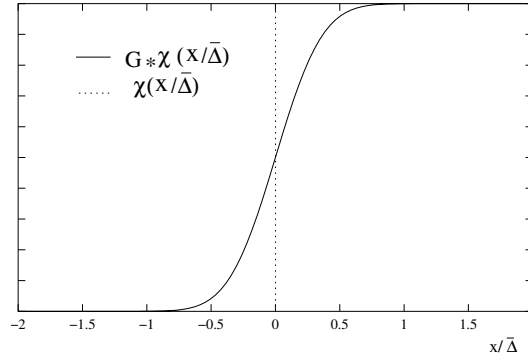


FIG. 5.5 – Fonction indicatrice de phase filtrée par un filtre gaussien

Filtre boîte (spatial)

Le filtre boîte est aussi appelé filtre chapeau ou *box or top-hat filter* en anglais. Sa fonction de transfert et son noyau de convolution du filtre sont respectivement

$$\hat{G}(k) = \frac{\sin\left(k\frac{\bar{\Delta}}{2}\right)}{k\frac{\bar{\Delta}}{2}} \quad (5.13a)$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}} & \text{si } |x| < \frac{\bar{\Delta}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.13b)$$

Les fonctions précédentes sont respectivement représentées par les figures 5.6(a) et 5.6(b). En 1D, la fonction indicatrice de phase filtrée par un filtre boîte est linéaire par morceaux (fig. 5.7). Au paragraphe 5.9, nous verrons que c'est un peu moins simple en deux ou trois dimensions dès lors que l'interface est courbe.

Comparaison des filtres porte, gaussien et boîte

Les trois filtres présentés ne font pas intervenir le temps. Ils correspondent donc tous à une prise de moyenne volumique. Il est évident que le filtre porte n'est pas une application

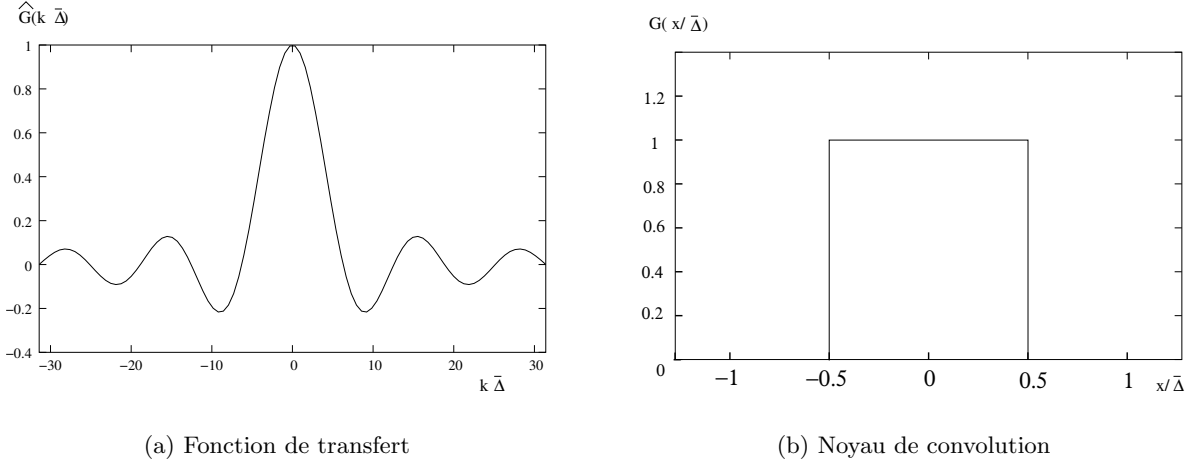


FIG. 5.6 – Fonction de transfert et noyau de convolution associés au filtre boîte

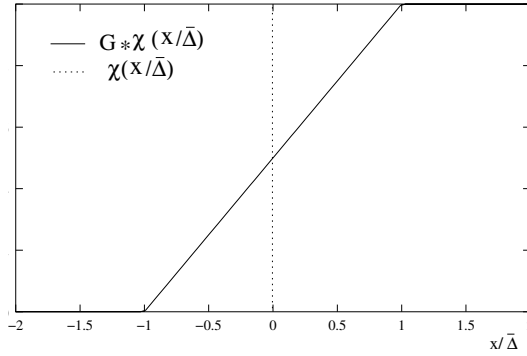


FIG. 5.7 – Fonction indicatrice de phase filtrée par un filtre boîte

positive alors que les filtres gaussien et boîte en sont. Le filtre boîte est à support compact dans l'espace physique et à support non compact dans l'espace de Fourier. C'est l'inverse pour le filtre porte qui est à support compact dans l'espace spectral et à support non compact dans l'espace physique. Le filtre gaussien est lui non local dans les espaces spectral et physique. Parmi les trois filtres présentés, seul le filtre porte vérifie la propriété d'idempotence (attention, il ne la vérifie que dans l'espace spectral). Les filtres gaussien et boîte sont dits *smooth* car il y a un recouvrement fréquentiel entre la partie résolue, $\bar{\phi}$, et la partie non résolue, ϕ' .

Après avoir vérifié que l'utilisation d'un filtre boîte ou gaussien ne changeait pas nos conclusions, nous travaillerons essentiellement avec un filtre boîte. En effet, il nous paraît être le plus simple et il nous permettra de faire des calculs analytiques.

Le choix de la taille du filtre

Le choix de la taille du volume de la prise de moyenne est important. De façon imagée, il détermine la distance à laquelle se place l'observateur. Plus précisément il conditionne la physique contenue dans la partie résolue $\bar{\phi}$. Nous avons vu dans l'introduction qu'une grande partie des études ont adopté une modélisation statistique de type RANS. Ces modélisations sont basées sur des moyennes statistiques. Elles consistent à effectuer une moyenne sur de nombreuses réalisations et non sur un volume de contrôle. Cependant, en utilisant l'hypothèse d'ergodicité, on peut estimer les moyennes statistiques par des moyennes temporelles ou spa-

tiales. La taille du volume de contrôle est alors théoriquement infiniment grande. Les inclusions (bulles ou gouttes) sont alors nécessairement plus petites que le volume de prise de moyenne. Les interfaces appartiennent à la partie non résolue. Le formalisme de la SGE est *a priori* plus souple et on peut choisir la taille relative du filtre par rapport aux inclusions. Deux choix limites sont envisageables : soit la taille du filtre est plus grande que toutes les inclusions, soit elle est plus petite que toutes les inclusions. Chacun de ces choix nécessite bien sûr des modèles spécifiques puisque la partie non résolue dont on veut tenir compte diffère d'un choix à l'autre. Dans ce mémoire, on se limite à une taille de filtre très inférieure à la taille des inclusions de telle sorte que leur géométrie macroscopique soit bien décrite. On entend par là que les petites déformations interfaciales, elles, peuvent être inférieures à la taille du filtre. Dans le paragraphe 3.3.2, on a précisé dans quelles conditions les plus petites fluctuations turbulentes étaient très inférieures aux plus petites déformations interfaciales. La figure 5.1 illustre le choix de la taille du filtre. Elle représente les champs non filtrés sur l'image de gauche et seulement leur partie résolue (pour notre choix de taille de filtre) sur les deux images de droite. Dans le cas des écoulements diphasiques et turbulents complexes, la taille des inclusions peut énormément varier. Notre choix de taille de filtre peut alors s'avérer trop petit et une prise de moyenne sur un volume plus grand que les plus petites inclusions est nécessaire pour faire suffisamment baisser le coût numérique. En ce sens, le travail de modélisation fait dans ce mémoire n'est qu'une étape d'un travail beaucoup plus vaste. Notre travail se concentre sur la modélisation des interactions entre la partie non résolue du champ de vitesse et les interfaces. D'autres travaux se focalisent sur la possibilité de simuler les interfaces plus grandes que la taille du filtre et de modéliser l'action des inclusions plus petites que la taille du filtre [37, 61]. Une des difficultés est alors de développer un critère afin de distinguer les grandes (plus grandes que la taille du filtre) des petites (plus petites que la taille du filtre) interfaces à partir de la seule connaissance du taux de présence. Une modélisation de l'ensemble des phénomènes nécessiterait une synthèse des différentes approches. Cette synthèse devra tenir compte de l'ensemble des échelles intermédiaires, c'est-à-dire des inclusions qui sont à la fois trop petites pour être simulées et trop grandes pour être modélisées par les approches statistiques actuelles.

5.3 Quelques modèles monophasiques classiques

Dans ce paragraphe, on ne présente que les modèles et les techniques classiques pour les écoulements monophasiques que nous avons utilisés et adaptés pour le développement du concept ISS. Pour avoir plus de détail sur leurs propriétés ou une liste plus exhaustive des modèles existants, on consultera *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows* de P. Sagaut [80]. Afin de rendre plus clair notre travail sur les équations monofluides et de souligner les différences qui existent avec le cas monophasique, nous allons appliquer un filtre de type SGE (décrit précédemment) à l'équation de conservation de la quantité de mouvement des équations de Navier-Stokes en incompressible

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (5.14)$$

où ν est la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Appliquons un filtre de type SGE en incompressible ($\rho = \text{constante}$) à cette équation (5.14). On considère que le filtre commute avec toutes les dérivées. On obtient :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla \cdot (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.15)$$

Ainsi en introduisant le tenseur de sous-maille $\boldsymbol{\tau}$ dans (5.15) on obtient :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\nu [\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}]) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5.16a)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad (5.16b)$$

Il ne manque plus que l'étape de modélisation proprement dite. Elle consiste à trouver une fermeture permettant de calculer le tenseur de sous-maille, $\boldsymbol{\tau}$, à partir des grandeurs résolues. Sagaut [80] distingue deux stratégies de modélisation :

1. La modélisation fonctionnelle consiste à modéliser l'action des échelles sous-maille sur les échelles résolues et non le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ lui même. Pour cela, on introduit par exemple un terme dissipatif ou dispersif qui a le même effet mais pas nécessairement la même structure.
2. La modélisation structurelle consiste à trouver la meilleure approximation du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ exprimer à partir de $\bar{\mathbf{u}}$.

La modélisation structurelle est beaucoup plus formelle que la modélisation fonctionnelle. Elle ne nécessite pas de connaître la nature des interactions entre les échelles résolues et non résolues. Elle est efficace dès lors que les corrélations entre ces deux types d'échelles sont suffisamment fortes et simples. Nous verrons que les conditions d'écoulement que nous considérons nous placent dans cette situation. On optera donc pour une modélisation structurelle.

5.3.1 Modélisation fonctionnelle

Tous les modèles qui appartiennent à cette catégorie, reposent plus ou moins sur une hypothèse du type :

Les échelles sous-maille ont un impact essentiellement énergétique sur les échelles résolues. Par conséquent, le seul bilan des transferts d'énergie entre ces deux types d'échelles suffit à décrire l'action des échelles sous-maille.

Les plus classiques de ces modèles sont basés sur le concept de viscosité turbulente. Ce concept est fondé sur l'hypothèse :

Le mécanisme de transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles non résolues est analogue au mécanisme moléculaire représenté par le terme de diffusion.

Cette hypothèse revient à supposer que le comportement des échelles sous-maille est similaire au mouvement brownien superposé au mouvement des échelles résolues. En théorie des gaz, l'agitation moléculaire dissipe l'énergie de l'écoulement par le biais de la viscosité moléculaire. Par conséquent, le mécanisme de cascade énergétique peut être modélisé par un terme dont la structure mathématique est celle de la diffusion moléculaire mais dans lequel la viscosité moléculaire est remplacée par une viscosité sous-maille noté, ν_t . Comme Boussinesq l'a proposé, ce choix de fermeture s'écrit

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}^d) = \nabla \cdot (\nu_t [\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}]) \quad (5.17)$$

où $\boldsymbol{\tau}^d$ représente la partie déviatorique de $\boldsymbol{\tau}$, *i.e.*

$$\tau_{ij}^d = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}. \quad (5.18)$$

Le tenseur sphérique complémentaire $\frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}$ est ajouté au terme de pression (comme on ne discutera pas ce terme, on n'introduit pas de nouvelle notation et on confondra cette pression

modifiée avec la pression filtrée). Pour la plupart des auteurs, ce terme ne nécessite pas de modélisation mais, cette décomposition est nécessaire car le tenseur $\nu_t (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}})$ est de trace nulle et ne peut donc modéliser qu'un tenseur de trace nulle. En remplaçant dans (5.16a) on trouve l'équation que l'on résout effectivement :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot ((\nu + \nu_t) [\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}]) \quad (5.19)$$

Il resterait à préciser l'expression de ν_t . Elles sont extrêmement nombreuses, citons le modèle de WALE (Wall Adapting Local Eddy-viscosity) tel qu'il est décrit dans l'article de Nicoud et Ducros [72]. Ce modèle est une évolution de celui de Smagorinsky. Le modèle de Smagorinsky est basé sur le tenseur des contraintes, très fort en proche paroi alors que la turbulence y est absente. Le modèle de WALE se base sur la vorticité qui, elle, est un bon indicateur d'activité turbulente

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ \bar{\Omega}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ z_{ij}^d &= \bar{D}_{ik} \bar{D}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\bar{D}_{mn} \bar{D}_{mn} - \bar{\Omega}_{mn} \bar{\Omega}_{mn}) \\ \nu_t &= (C_\Omega \Delta)^2 \frac{\left(z_{ij}^d z_{ij}^d \right)^{\frac{3}{2}}}{\left(z_{ij}^d z_{ij}^d \right)^{\frac{5}{4}} + (\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij})^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

où C_Ω est une constante et Δ une échelle de longueur. L'approche MILES (*Monotone Integrated Large Eddy Simulation*) utilise aussi la fermeture (5.17). Mais la modélisation ou la diffusion est alors implicite. En effet, cette approche utilise la dissipation introduite par le choix de la discrétisation du terme convectif qui joue alors le rôle de modèle sous-maille [36].

5.3.2 Modélisation structurelle

Techniques de déconvolution

Pour fermer le tenseur sous-maille τ , on peut chercher à reconstruire formellement le champ de fluctuation de vitesse en inversant l'opérateur de filtrage. Ces techniques sont générales et échappent au seul champ d'application de la mécanique des fluides. Comme nous l'avons d  j signalé, elles ne nécessitent pas de connaître les mécanismes d'interaction entre les échelles résolues et non résolues. Pour procéder à la reconstruction, on peut par exemple utiliser un développement de Taylor (pour les autres techniques de déconvolution ou plus de détail sur celle-ci, on se r  f  rera encore une fois à [80]). On rappelle les différentes étapes de calcul en 1D dans le cas d'un filtre porte dans le domaine spatial. Dans ce cas très particulier, on peut définir l'opération de filtrage comme suit :

$$\bar{\phi}(y) = \frac{1}{\Delta} \int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}} \phi(x) dx \quad (5.20)$$

Pour une grandeur physique supposée infiniment dérivable, on peut faire un développement de Taylor :

$$\phi(x) = \phi(y) + (x-y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{(x-y)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{(x-y)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + O(\Delta^4) \quad (5.21)$$

Comme y est au centre de l'intervalle d'intégration, les termes impairs ont une contribution nulle et on peut écrire l'opération de filtrage

$$\bar{\phi} = \left(\mathcal{I} + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + O(\bar{\Delta}^4) \right) \phi \quad (5.22)$$

où \mathcal{I} représente l'opérateur identité. En inversant formellement l'opérateur de filtrage, on a :

$$\phi = \left(\mathcal{I} - \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + O(\bar{\Delta}^4) \right) \bar{\phi} \quad (5.23)$$

D'où on déduit :

$$\phi' = -\frac{\bar{\Delta}^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + O(\bar{\Delta}^4) \quad (5.24)$$

La précision de la reconstruction dépend du taux de convergence de la série de Taylor. Pruett *et al.* [76] prouvent que le développement en série converge vite pour des filtres classiques comme les filtres gaussiens et boîte. Comme le filtre implicite a peu de chance de correspondre exactement à un filtre porte, on peut trouver des procédures dynamiques permettant d'optimiser la valeur de la constante à mettre devant la dérivée seconde. On propose le jeu d'écriture suivant³. Comme $\phi' = \phi - \bar{\phi}$, on a :

$$\bar{\phi}' = \bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}} \quad (5.25)$$

Or, d'après (5.24) une bonne estimation de ϕ' est :

$$\phi' = C \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} \quad (5.26)$$

En appliquant l'opérateur de moyenne à l'équation (5.26) et en utilisant (5.25), on détermine C :

$$C = \frac{\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}}{\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2}} \quad (5.27)$$

On obtient donc finalement pour ϕ' :

$$\phi' = \frac{\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}}{\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2}} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} \quad (5.28)$$

Les tests *a priori* (il n'y alors pas de filtre implicite) que nous avons faits montrent que la reconstruction (5.28) est effectivement plus exacte que (5.24). Elle revient en fait à combiner la déconvolution à partir des séries de Taylor et la technique de déconvolution itérative [93, 94]. Cette dernière repose sur

$$G^{-1} = (\mathcal{I} - (\mathcal{I} - G))^{-1} \quad (5.29a)$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} (\mathcal{I} - G)^p \quad (5.29b)$$

qui conduit à la reconstruction de la variable ϕ

$$\phi = \bar{\phi} + (\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}) + (\bar{\phi} - 2\bar{\bar{\phi}} + \bar{\bar{\bar{\phi}}}) + \dots \quad (5.29c)$$

³Les procédures dynamiques sont très couramment utilisées. Comme beaucoup de modèles en SGE, on en trouve de très nombreuses variantes. Nous n'avons jamais rencontré celle proposée ici ni, de façon générale, de procédures dynamiques pour les techniques de reconstruction.

ou encore de façon équivalente

$$\phi' = (\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}) + (\bar{\phi} - 2\bar{\bar{\phi}} + \bar{\bar{\bar{\phi}}}) + \dots \quad (5.29d)$$

Notre proposition de reconstruction dynamique (5.28) pondère le premier terme de la déconvolution itérative $\bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}}$ par le rapport du premier terme de la série de Taylor $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2}$ avec ce même terme filtré $\frac{\partial^2 \bar{\bar{\phi}}}{\partial y^2}$.

Hypothèse de similarité d'échelle

Rappelons que l'on cherche à fermer le terme sous-maille issu de la convection :

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5.30)$$

Si, de façon très classique, on décompose le champ de vitesse de la façon suivante

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (5.31)$$

la décomposition de Leonard [56] de τ s'écrit

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \\ L_{ij} &= \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ C_{ij} &= \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} \\ R_{ij} &= \overline{u'_i u'_j} \end{aligned} \quad (5.32)$$

où L_{ij} est le terme de Leonard, C_{ij} le terme croisé et R_{ij} le terme de Reynolds. On peut alors s'intéresser aux différentes façons de modéliser ces différents termes. L'intérêt réside dans le fait que le terme de Leonard ne nécessite pas de travail de fermeture. Remarquons aussi que l'équation (5.31) permet d'écrire $\bar{u}' = \bar{u} - \bar{\bar{u}}$. Par conséquent, tout comme le terme de Leonard, la partie $\overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j}$ de C_{ij} est directement évaluable et ne nécessite pas de fermeture. Germano [34] propose la décomposition suivante qui n'utilise que des invariants galiléens :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mathcal{L}_{ij} + \mathcal{C}_{ij} + \mathcal{R}_{ij} \\ \mathcal{L}_{ij} &= \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ \mathcal{C}_{ij} &= \overline{u'_i \bar{u}_j} - \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ \mathcal{R}_{ij} &= \overline{u'_i u'_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \end{aligned} \quad (5.33)$$

Parce qu'elle n'utilise que des invariants galiléens, cette décomposition est dite consistante. Le modèle de similarité d'échelles le plus simple initialement proposé par Bardina *et al.* [4] revient à fermer le tenseur de sous-maille, τ , par le terme de Leonard de la décomposition réinterprétée par Germano :

$$\tau_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5.34)$$

Les auteurs de ce type de modélisation les interprètent physiquement par une hypothèse de similarité d'échelles. Elle consiste à supposer que la structure statistique des tenseurs construits à partir des échelles sous-maille est similaire à celle de leurs équivalents évalués grâce aux plus petites échelles résolues. Cette hypothèse revient à découper en trois le spectre d'énergie : les plus grandes échelles résolues, les plus petites échelles résolues (celles qui servent à évaluer le tenseur sous-maille) et les échelles non résolues. La similarité de structure peut s'expliquer de deux façons différentes. Premièrement, les échelles non résolues et les plus petites

échelles résolues subissent de façon similaire l'influence des plus grandes échelles résolues. Deuxièmement, la signature fréquentielle des structures cohérentes est suffisamment large pour qu'elles agissent à la fois dans les trois zones considérées. L'action de ces structures peut donc expliquer les fortes corrélations des champs suivant leur niveau de décomposition. Liu *et al.* [58] généralisent l'hypothèse de similarité d'échelles en partageant le spectre en un nombre arbitraire de zones et en reformulant l'hypothèse pour deux zones consécutives. On considère alors que la structure statistique des tenseurs construits à partir des plus grandes échelles sous-maille est identique à celle de leurs équivalents évalués à partir des plus petites échelles résolues (voir figure 5.8). Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement avec succès dans le cas d'un jet turbulent [58]. Cependant, il est important de bien noter que ces interprétations physiques ne s'appuient pas sur la nature des interactions entre les différentes échelles. En particulier, il ne présuppose pas les mécanismes de cascade énergétique. Pour mesurer leur généralité, on propose de les interpréter à partir des techniques de déconvolution présentées précédemment. Si on reprend la technique de déconvolution itérative ou celle basée sur les séries de Taylor, on trouve qu'à l'ordre le plus bas $\phi \approx \bar{\phi}$. En utilisant cette approximation dans l'expression du tenseur sous-maille τ , on retrouve (5.34). On peut utiliser le même argument d'une autre façon. Le terme croisé, \mathcal{C}_{ij} , et l'équivalent du tenseur de Reynolds, \mathcal{R}_{ij} , de la décomposition consistante (*i.e.* la décomposition (5.33) proposée par Germano qui ne fait intervenir que des invariants galiléens) s'expriment à partir de la partie non résolue du champ de vitesse, \mathbf{u}' . D'après (5.24), cette partie est en $\mathcal{O}(\bar{\Delta}^2)$. Le terme de Leonard est donc prépondérant devant ces deux autres termes et, en les négligeant, on retrouve à nouveau (5.34). En résumé, l'ordre 0 des techniques de déconvolution nous semble naturellement conduire aux modèles dits de similarité d'échelles. Ces modèles ne sont donc pas associés à des mécanismes d'interaction spécifiques au 3D ou au monophasique. On peut espérer les adapter pour le développement du concept ISS. D'ailleurs, de nombreux tests *a priori* réalisés à partir de données issues de SND ont montré que ce modèle est très bien corrélé avec le tenseur sous-maille même pour des écoulements anisotropes [39]. De plus, il modélise aussi le phénomène de cascade inverse. Malgré tout, ces modèles ont l'inconvénient d'avoir une contribution nulle lorsque le filtre est un filtre de Reynolds et ils ont tendance à ne pas être suffisamment dissipatif. Pour remédier à ce dernier point, certains auteurs ont développé des modèles mixtes.

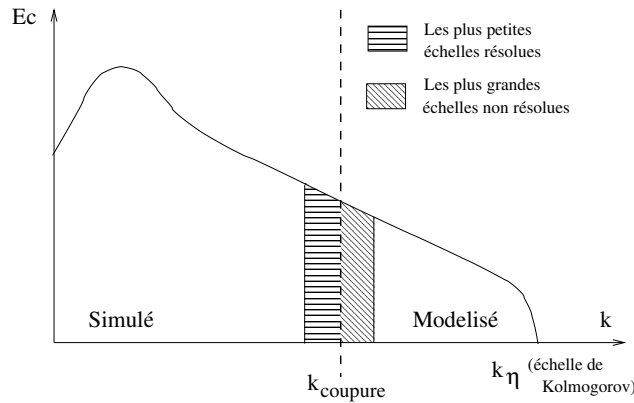


FIG. 5.8 – Décomposition spectrale basée sur l'hypothèse de similarité d'échelle

Modèles mixtes

La modélisation fonctionnelle et la modélisation structurelle ont chacune leurs avantages et inconvénients ce qui semble les rendre complémentaires :

- La modélisation fonctionnelle prend bien en compte le niveau du transfert d'énergie

des échelles résolues vers les échelles non résolues mais, elle ne sait pas reproduire la structure du tenseur sous-maille, c'est-à-dire ses vecteurs propres.

- La modélisation structurelle prédit correctement la structure du tenseur sous-maille (même pour des écoulements anisotropes ou non établis) mais, elle est beaucoup moins efficace pour dissiper le bon niveau d'énergie.

Les modèles mixtes combinent les deux approches. En se basant sur la décomposition de Leonard, Bardina *et al.* [4] proposent le modèle mixte suivant

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \\ C_{ij} &= C_M (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) \\ R_{ij}^d &= -2 \nu_S \overline{D}_{ij} \end{aligned} \quad (5.35)$$

où R_{ij}^d désigne la partie déviatorique du tenseur R_{ij} , C_M est une nouvelle constante et

$$\overline{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (5.36a)$$

$$\nu_S = C_S \Delta^2 (2 \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}})^{\frac{1}{2}} \quad (5.36b)$$

avec Δ une échelle de longueur fournie par la discrétisation numérique et C_S la constante de Smagorinsky. Signalons que depuis cette proposition de Bardina, de nombreux auteurs l'ont déclinée en plusieurs variantes. Cependant, elles consistent essentiellement à évaluer différemment la viscosité turbulente ce qui nous le verrons n'est pas très significatif dans notre cas. Un inconvénient de cette modélisation est dû au fait que le terme de Leonard et le terme croisé ne sont pas des invariants galiléens. Comme le mentionne Germano [34], il est intéressant de noter que le modèle mixte défini par le système d'équations (5.35) s'adapte facilement à la décomposition consistante (5.33). En effet, en posant $C_M=1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \\ \mathcal{C}_{ij}^d + \mathcal{R}_{ij}^d &= -2 \nu_S \overline{D}_{ij} \end{aligned} \quad (5.37)$$

On remarque trivialement que la modélisation fonctionnelle est appliquée à la somme des parties déviatoriques de l'équivalent du tenseur de Reynolds, \mathcal{R}_{ij}^d , et, du terme croisé, \mathcal{C}_{ij}^d . La modélisation structurelle est utilisée pour le tenseur de Leonard, \mathcal{L}_{ij} , qui ne nécessite pas de fermeture.

5.4 Equations monofluides filtrées

5.4.1 Discussion sur l'intérêt d'une moyenne de Favre

Equation de bilan de quantité de mouvement et hypothèse d'incompressibilité

Le choix du type de moyenne est en fait le choix de l'inconnue principale : désire-t-on raisonner en quantité de mouvement $\rho \mathbf{u}$ ou en vitesse \mathbf{u} ? En monophasique, lorsque ρ est supposée constante, ces deux choix sont équivalents. En diphasique, même avec ρ constante par phase, il n'y a plus équivalence. La différence vient du fait que

$$\overline{\rho \mathbf{u}} \neq \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.38)$$

dès que l'interface est contenue dans le volume de prise de moyenne. En effet, comme ρ est discontinue à l'interface et que l'interface rend anisotrope la vitesse, la masse volumique et la

vitesse sont corrélées. Le paragraphe 5.8 illustre sur un cas analytique simple l'existence de ces corrélations. Dans le contexte des écoulements compressibles, on introduit généralement la moyenne de Favre [28] pour ne pas avoir à modéliser cette corrélation. Cette moyenne, notée $\tilde{\cdot}^f$, est définie par :

$$\tilde{\mathbf{u}}^f = \frac{\overline{\rho \mathbf{u}}}{\bar{\rho}} \quad (5.39)$$

L'introduction de cette moyenne est très séduisante car elle permet de ne pas faire apparaître de terme sous-maille associé au terme d'accélération lorsque l'on filtre l'équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \overline{\rho \mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad (5.40a)$$

$$= \frac{\partial \overline{\rho \tilde{\mathbf{u}}^f}}{\partial t} \quad (5.40b)$$

Cependant, si la moyenne de Favre présente un avantage certain pour traiter l'équation de bilan de quantité de mouvement filtrée, elle présente un désavantage tout aussi certain pour traiter l'hypothèse d'incompressibilité. En effet, en supposant que l'opérateur $\overline{\cdot}$ commute avec les opérateurs de différenciation⁴, l'hypothèse d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.41)$$

reste équivalente pour la vitesse filtrée $\bar{\mathbf{u}}$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.42)$$

Par contre, avec la moyenne de Favre, on trouve

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f &= \nabla \cdot \left(\frac{\overline{\rho \mathbf{u}}}{\bar{\rho}} \right) \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{u}}) - \frac{\nabla \bar{\rho}}{\bar{\rho}^2} \cdot \overline{\rho \mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\overline{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})} - (\rho_g - \rho_l) \nabla \chi_g \cdot \frac{\overline{\rho \mathbf{u}}}{\bar{\rho}} \right) \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\overline{\nabla \rho \cdot \mathbf{u}} + \bar{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} - (\rho_g - \rho_l) \overline{\nabla \chi_g} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f \right) \\ &= \frac{\rho_g - \rho_l}{\bar{\rho}} \left(\overline{\nabla \chi_g \cdot \mathbf{u}} - \overline{\nabla \chi_g} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f \right) \\ &= \frac{[\rho]}{\bar{\rho}} (\delta_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \delta_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f) \end{aligned} \quad (5.43)$$

où on a utilisé les égalités $\rho = (\rho_g - \rho_l)\chi_g + \rho_l$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \chi_g = -\delta_{\sigma} \mathbf{n}$ et où on a posé $[\rho] = \rho_l - \rho_g$ pour représenter le saut de masse volumique. Comme nous venons de le voir pour la masse volumique, l'interface rend anisotrope le champ de vitesse. Ceci explique l'existence de corrélation entre la vitesse et la normale et donc le fait que le membre de droite de l'équation (5.43) n'est pas nul. On peut alors se demander si on peut le négliger ou s'il est nécessaire de le modéliser. Le problème est que ce terme est le seul à intervenir dans cette nouvelle équation associée à l'hypothèse d'incompressibilité⁵. On doit donc comparer sa contribution à zéro ! Par conséquent, non seulement on ne peut pas négliger ce terme mais en plus sa modélisation doit être extrêmement précise car on s'attend à ce que même de petites erreurs sur la fermeture de ce terme influencent significativement le comportement de

⁴On rappelle que ceci est vrai dès que $\bar{\Delta}$ ne dépend ni de l'espace ni du temps. Voir paragraphe 5.2.1.

⁵Incompressible est ici un abus de langage puisque le nouveau champ de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}^f$ n'est plus à divergence nulle. Mais on se rappelle ainsi l'origine de cette équation.

l'équation 5.43. En effet, ce terme qui s'apparente à un terme de changement de phase n'agit pas sur le volume global d'une inclusion mais sur sa forme ou sa vitesse. Pour comprendre le mécanisme, on peut imaginer une bulle avec un phénomène d'évaporation dans sa partie supérieure et un phénomène de condensation dans sa partie inférieure de telle sorte que le volume de la bulle reste constant. De cette façon, la position du centre de gravité de la bulle se déplacera vers le haut.

Pour résumer, la moyenne de Favre fait apparaître un terme sous-maille difficile à modéliser dans l'équation de l'hypothèse d'incompressibilité et la moyenne classique dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. Il paraît donc difficile de savoir *a priori* s'il faut préférer l'une ou l'autre de ces deux moyennes. Au début de ce travail de thèse, nous nous étions concentré sur l'équation de bilan de quantité de mouvement. Comme lorsqu'on travaille sur cette équation isolée la moyenne de Favre apparaît clairement préférable, notre choix s'était naturellement porté sur elle [47]. Nous avons alors développé des modèles similaires à ceux que nous présentons dans la suite de ce mémoire. Après les avoir implémentés, nous avons essayé de faire de nombreux tests *a posteriori* afin d'évaluer les capacités de ces modèles. Tous nos essais d'implémentation se sont révélés instables : tous les calculs explosaient très rapidement. Sans avoir bien compris les raisons de cette instabilité, il nous semble que chacun des termes sous-maille pris séparément ont une grosse contribution mais que de nombreuses compensations ont lieu lorsqu'on les ajoute. Il en résulte que les instabilités sont certainement dues à une mauvaise compensation des termes du fait de leur discrétisation. Notre conclusion est que si sur le papier la moyenne de Favre est séduisante, elle est pratiquement difficile à utiliser dans notre contexte où on est à la fois incompressible par phase et en présence d'une forte discontinuité de masse volumique. Finalement, nous avons choisi de raisonner en vitesse et non en quantité de mouvement, c'est-à-dire d'utiliser une moyenne classique et non une moyenne de Favre.

La problématique que nous avons étudiée dans ce paragraphe est très particulière. Elle est due au fait que

- le meilleur choix d'inconnue pour l'hypothèse d'incompressibilité est la vitesse filtrée classiquement $\bar{\mathbf{u}}$,
- alors que pour l'équation de bilan de quantité de mouvement, il s'agit de la vitesse filtrée avec la moyenne de Favre $\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^f$.

Nos motivations justifiant le choix d'une moyenne classique ne sont donc pas transposables à d'autres cas. En particulier, il faudra réexaminer ce choix en présence de changement de phase puisque le champs de vitesse monofluide n'est alors plus à divergence nulle. Pour l'équation en température comme on travaille toujours en $\rho c_p T$, une moyenne inspirée de la moyenne de Favre

$$\tilde{T}^f = \frac{\overline{\rho c_p T}}{\bar{\rho} c_p} \quad (5.44)$$

semble préférable à la moyenne classique [97].

Equation de transport de l'interface

L'équation de transport de la fonction indicatrice de phase χ_k vient de l'équation de bilan de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (5.45)$$

En effet, en posant $\chi = \chi_g$ et $[\rho] = \rho_l - \rho_g$, la masse volumique s'écrit $\rho = \rho_l - [\rho]\chi$ et l'équation précédente devient :

$$-[\rho] \frac{\partial \chi}{\partial t} - [\rho] \nabla \cdot (\chi \mathbf{u}) = 0 \quad (5.46)$$

En divisant par le saut de masse volumique et en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité, on retrouve l'équation de transport de la discontinuité :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = 0 \quad (5.47)$$

En filtrant cette équation, on trouve :

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi} = 0 \quad (5.48)$$

En ajoutant puis soustrayant le produit des moyennes de la vitesse et de la normale, on fait apparaître leur corrélation :

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi} + (\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}) = 0 \quad (5.49)$$

Le terme $\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}$ est le terme sous-maille associé à l'équation de transport de l'interface dans le cas d'une moyenne classique. Voyons ce qu'il en est avec une moyenne de Favre. L'avantage de la moyenne de Favre est de ne pas introduire de terme sous-maille pour l'équation de bilan de masse filtrée. En effet, on a :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^f) = 0 \quad (5.50)$$

Comme avec les notations précédentes $\bar{\rho} = \rho_l - [\rho]\bar{\chi}$, en utilisant l'expression de $\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^f)$ (équation (5.43)) puis en divisant par $-[\rho]$, cette équation se réécrit :

$$\begin{aligned} -[\rho] \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} - [\rho] \nabla \bar{\chi} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f + \bar{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^f) &= 0 \\ -[\rho] \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} - [\rho] \nabla \bar{\chi} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f - [\rho] (\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi} - \tilde{\mathbf{u}}^f \cdot \nabla \bar{\chi}) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}}^f \cdot \nabla \bar{\chi} + (\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi} - \tilde{\mathbf{u}}^f \cdot \nabla \bar{\chi}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

Le terme $\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi} - \tilde{\mathbf{u}}^f \cdot \nabla \bar{\chi}$ est le terme sous-maille associé à l'équation de transport de l'interface dans le cas d'une moyenne de Favre. Il est tout à fait identique à celui obtenu dans le cas d'une moyenne classique. En conclusion, ces deux moyennes sont donc équivalentes pour l'écriture de l'équation filtrée du transport de la discontinuité (équation (5.49) pour la moyenne classique et (5.51) pour la moyenne de Favre).

Pour des raisons de clarté de présentation, dans toute la suite de ce mémoire, on présentera les équations filtrées seulement dans le cas d'une moyenne classique (le champ de vitesse filtré est alors $\bar{\mathbf{u}}$). Les équations filtrées dans le cas d'une moyenne de Favre s'obtiennent de façon identique. Elles ne diffèrent des équations filtrées dans le cas d'une moyenne classique que par les points discutés ci-dessus.

5.4.2 Equations filtrées

L'objectif de ce paragraphe est d'établir les équations monofluides filtrées en mettant en évidence les termes qu'il sera nécessaire de modéliser pour que le système soit fermé (*i.e.* exprimé uniquement à partir des inconnues que nous auront choisies).

Dans le paragraphe précédent, nous avons choisi, comme nouvelle inconnue en vitesse, la vitesse filtrée $\bar{\mathbf{u}}$. Elle sera l'une des nouvelles inconnues du système d'équations filtrées que nous allons établir. Les deux autres inconnues sont la pression filtrée \bar{p} et la fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}_k$ où k désigne arbitrairement la phase liquide ($k = l$) ou gazeuse ($k = g$). Les deux fonctions indicatrices de phase étant reliées par $\chi_g + \chi_l = 1$, grâce aux propriétés de linéarité et de conservation des constantes des filtres de type SGE, on a aussi :

$$\bar{\chi}_g + \bar{\chi}_l = 1 \quad (5.52)$$

Lorsque l'on sera amené à choisir l'une des fonctions indicatrices de phase, on prendra $\chi = \chi_g$ et on notera α la fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ (aussi appelée taux de présence ou taux de vide). Parmi les différents filtres présentés précédemment, on choisit de travailler avec le plus simple : le filtre boîte. On suppose de plus que son support est indépendant du temps et de l'espace. On peut alors définir cet opérateur de moyenne volumique $\bar{\cdot}$ par :

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{V} \int_{V_x} \phi(y) dy \quad (5.53a)$$

On définit aussi l'opérateur de moyenne surfacique associé $\bar{\cdot}^s$:

$$\bar{\phi}^s(x) = \begin{cases} \frac{\int_{V_x} \phi(y) \delta_\sigma(y) dy}{\int_{V_x} \delta_\sigma(y) dy} & \text{si l'aire interfaciale, } \int_{V_x} \delta_\sigma(y) dy, \text{ est non nulle,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.53b)$$

Le volume V_x des formules précédentes est bien entendu fini (*i.e.* le noyau de convolution correspondant est à support compact). Dans le chapitre 1, nous avons établi les équations du formalisme monofluide. On applique l'opérateur de moyenne volumique à ces équations, on l'applique donc en particulier à cheval sur l'interface ce qui est licite puisque les équations sont valables partout (au sens des distributions). De plus, comme le volume sur lequel on filtre est constant en espace et en temps, l'opération de filtrage commute avec l'opération de dérivation (voir paragraphe 5.2.1). Après avoir appliqué le filtre aux équations, on introduit les inconnues principales que nous avons choisies :

- la pression filtrée $\bar{p} = \overline{\chi_g p_g + \chi_l p_l}$,
- le taux de présence $\alpha = \bar{\chi}_g$ et,
- la vitesse filtrée $\bar{\mathbf{u}} = \overline{\chi_g \mathbf{u}_g + \chi_l \mathbf{u}_l}$.

Ce jeu d'écriture permet de mettre en évidence les termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques et turbulents. On obtient :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.54a)$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k + \tau_{interf} = 0 \quad (5.54b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\tau}_{temp})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\tau}_{conv}) &= -\nabla \bar{p} \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\tau}_{diff}) \\ &+ \bar{\rho} \mathbf{g} - \sigma \bar{\kappa}^s \bar{\mathbf{n}}^s \bar{\delta}_\sigma - \boldsymbol{\tau}_{superf} \end{aligned} \quad (5.54c)$$

où

$$\tau_{interf} = \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k \quad (5.55a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{temp} = \overline{\rho \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.55b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{conv} = \overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad (5.55c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{diff} = \overline{\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})} - \bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.55d)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{superf} = \overline{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\sigma} - \sigma \bar{\kappa}^s \bar{\mathbf{n}}^s \bar{\delta}_\sigma \quad (5.55e)$$

Précisons l'origine de chacun de ces termes sous-maille :

- τ_{interf} est le terme sous-maille lié à l'équation de transport de l'indicatrice filtrée. Il est dû aux corrélations entre la vitesse et la normale à l'interface. Ces corrélations existent car l'interface rend anisotrope le champ de vitesse.
- τ_{temp} est le tenseur sous-maille lié au terme d'accélération dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. Il est dû aux corrélations entre la vitesse et la masse volumique. La masse volumique est discontinue à l'interface : elle représente donc sa géométrie tout comme la fonction indicatrice de phase (on rappelle d'ailleurs que $\rho(\mathbf{x}, t) = (\rho_g - \rho_l)\chi(\mathbf{x}, t) + \rho_l$). Comme nous venons de le voir, le champ de vitesse devient anisotrope près de l'interface : il est corrélé avec sa géométrie. Ceci explique donc l'existence de corrélations entre la vitesse et la masse volumique.
- τ_{conv} est le tenseur sous-maille lié au terme convectif de l'équation de bilan de quantité de mouvement. Il est le seul terme sous-maille qui existe aussi en monophasique incompressible. Cependant, en monophasique incompressible, comme la masse volumique est constante, ce terme est réduit à $\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}}$ alors que, dans notre cas, il s'agit de corrélation triple entre la masse volumique et le produit tensoriel du champ de vitesse. Nous avons déjà expliqué l'existence des corrélations entre la masse volumique et la vitesse. Les corrélations vitesse vitesse sont dues à la présence d'une partie non résolue du champ de vitesse ($\overline{\mathbf{u}} \neq \mathbf{u}$) ou autrement dit à la présence de fluctuations ($\mathbf{u}' \neq 0$).
- τ_{diff} est le tenseur sous-maille lié au terme visqueux. Il est lié aux corrélations entre la vitesse et la viscosité. Comme pour la masse volumique, elles sont dues au fait que la viscosité est discontinue à l'interface.
- τ_{superf} est le tenseur sous-maille lié aux forces superficielles. Il correspond aux corrélations entre la normale et la courbure moyenne. Ces corrélations sont dues à l'existence de déformations interfaciales non résolues ($\overline{\mathbf{n}} \neq \mathbf{n}$) ou autrement dit à des fluctuation sous-maille de la normale à l'interface ($\mathbf{n}' \neq 0$).

Tous les terme que nous avons mis en évidence sont spécifiques au diphasique sauf le terme sous-maille lié au terme convectif. Ces termes spécifiques sont dus à la présence d'une discontinuité (fonction indicatrice de phase, masse volumique, viscosité). Dès que l'on est suffisamment loin de l'interface (*i.e.* dès que l'interface n'appartient plus au volume de prise de moyenne), ces termes sont nuls (voir fig. 5.9).

5.5 Hiérarchie des termes sous-maille

Nous avons mis en évidence quatre termes sous-maille dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. Afin de réduire le travail de modélisation, on propose de hiérarchiser ces termes. Cette hiérarchie permettra de savoir s'il est possible de négliger la contribution de certains de ces quatre termes par rapport aux autres termes de l'équation de bilan de quantité de mouvement. Ceci est tout à fait justifié parce que l'on travaille sur une seule équation et que ce qui nous intéresse est la contribution globale de l'ensemble de ces quatre termes sous-maille sur cette équation. Cependant, afin de compléter cette analyse, on examine aussi la contribution énergétique de chacun des termes sous-maille. Il est important de la considérer car, nous l'avons vu, l'essentiel des modèles de type SGE sont construits sur des raisonnements de transferts d'énergie. Il faut donc vérifier que les termes sous-maille prépondérants dans l'équation de bilan de quantité de mouvement sont aussi ceux dont la contribution énergétique est la plus importante. En effet, suivant la localisation du maximum d'un terme sous-maille, il n'est pas exclu que ce dernier soit négligeable dans l'équation de bilan de quantité de mouvement mais ait une forte action dans l'équation d'énergie. Il serait alors délicat de justifier le fait que l'on néglige un tel terme sous-maille. Nous vérifierons ne pas être dans cette situation.

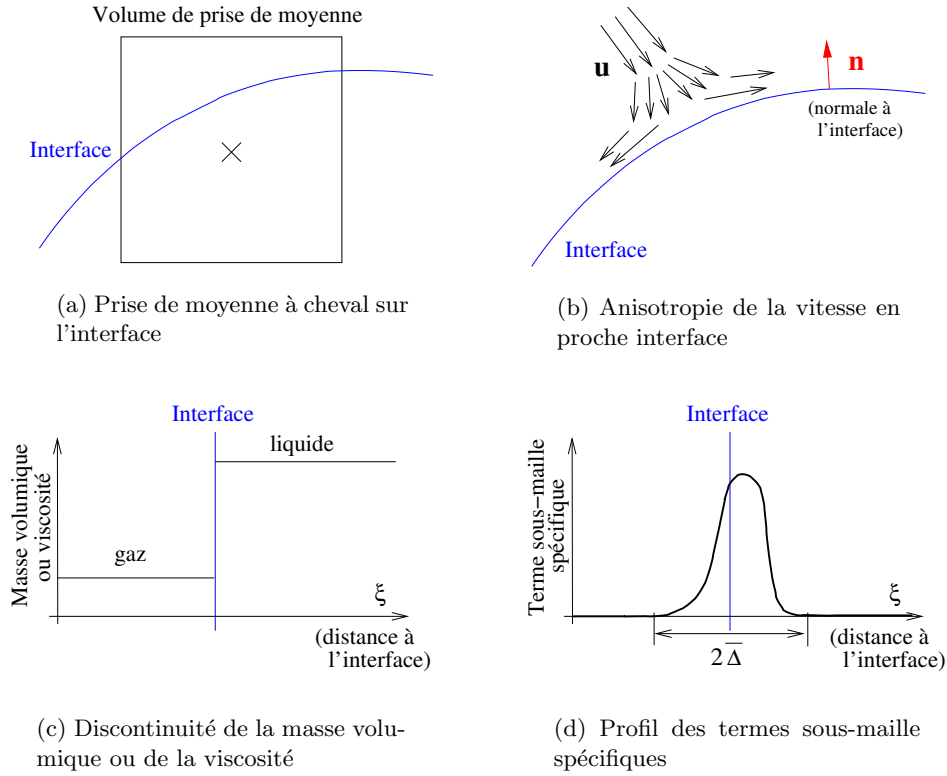


FIG. 5.9 – Origine des termes sous-maille spécifiques

De façon pratique, pour réaliser ce classement des termes sous-maille suivant leur contribution dans l'équation de bilan de quantité de mouvement et dans l'équation d'énergie, nous avons effectué des tests *a priori* à partir des SND que nous avons réalisées (voir chapitre 4). Ces tests *a priori* consistent à filtrer (de façon discrète) les champs locaux instantanés des SND et ainsi évaluer les différents termes sous-maille. Nous avons choisi :

- le maximum de la norme de chacun des termes de l'équation de bilan de quantité de mouvement ou de l'équation d'énergie comme critère de comparaison et,
- le terme convectif comme référence (*i.e.* c'est le terme convectif qui sert à adimensionnaliser les autres termes).

Signalons que ce travail de posttraitement est relativement complexe car il est nécessaire d'implémenter les opérateurs de différenciation et l'opérateur de filtrage. De plus, il faut être capable de gérer des fichiers de données issus de calculs parallèles (dans le cas de l'interaction de la bulle et de la turbulence de grille). Ces fichiers ne sont pas organisés comme lors de calculs séquentiels, mais c'est surtout la grande quantité de données (quatre millions de points) qui nécessite des traitements spécifiques avant de pouvoir être visualisée.

5.5.1 Discrétisation de l'opération de filtrage

Pour ces tests *a priori*, l'opération de filtrage s'écrit de façon discrète :

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2N+1} \sum_{p=-N}^N \phi(\mathbf{x}_{i+p}) \quad (5.56)$$

En notant Δ le pas du maillage de la SND, le lien entre N et la taille du noyau de convolution $\bar{\Delta}$ est

$$2N + 1 = \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta} \right)^d \quad (5.57)$$

où d est la dimension de l'espace et $\bar{\Delta}$ est nécessairement un multiple impair de Δ . La figure 5.10 illustre la situation où la taille du noyau de convolution $\bar{\Delta}$ est trois fois plus grande que le pas du maillage Δ dans le cas bidimensionnel (on a alors $N = 4$).

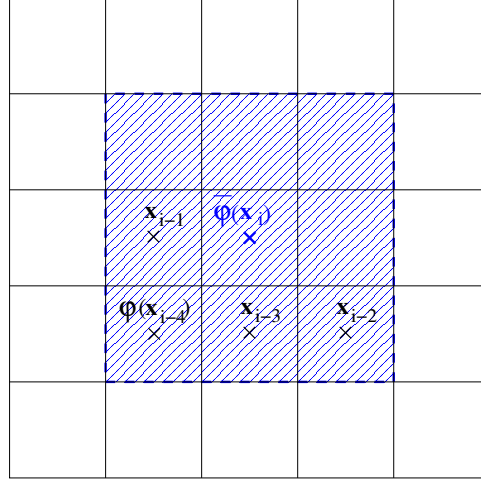


FIG. 5.10 – Discretisation de l'opération de filtrage

5.5.2 Discretisation des dérivées spatiales et temporelle

Dérivées spatiales

La discrétisation des dérivées spatiales est simplement une discrétisation centrée d'ordre 2. Soit ϕ une grandeur physique quelconque, on évalue sa dérivée suivant la direction horizontale, x , par exemple, avec :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta_x} \quad (5.58)$$

Dérivée temporelle

La dérivée temporelle n'intervient que pour le terme sous-maille lié à l'accélération, $\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}$. Comme pour des raisons de coût de stockage de données, on ne peut pas disposer de tous les pas de temps de calcul, on ne peut pas estimer la dérivée temporelle par différenciation. Nous avons donc choisi pour l'estimer de diviser le terme sous-maille par son temps caractéristique de variation. Comme ce terme est non nul uniquement en proche interface, son temps caractéristique de variation nous semble correspondre au temps nécessaire à l'interface pour traverser la maille de calcul. Ainsi, on propose l'estimation suivante

$$\left(\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t} \right)_i = \frac{(\tau_{temp})_i}{\frac{\Delta}{\|\mathbf{u}\|_i}} \quad (5.59)$$

où l'indice $_i$ signifie qu'il s'agit d'une évaluation sur la maille i et la taille des mailles Δ est supposée constante. Cette estimation a été comparée à une vraie différentiation en temps sur deux pas de temps consécutifs. Bien qu'elle surestime légèrement la dérivée du terme sous-maille, elle est tout à fait satisfaisante et nous l'avons utilisée pour les tests *a priori*.

5.5.3 Exploitation des SND réalisées

Hierarchie des termes sous-maille dans l'équation de bilan de quantité de mouvement

Les tests *a priori* pour hiérarchiser les termes sous-maille dans l'équation de quantité de mouvement ont été conduits sur toutes les SND présentées dans le chapitre 4. Le premier résultat est que tous les cas d'écoulements simulés conduisent à la même hiérarchie. En effet, l'importance relative des termes sous-maille spécifiques est plus dépendante de la taille du filtre (*i.e.* du degré de sous-résolution) que du cas d'écoulement. Nous avons donc choisi de présenter uniquement les résultats obtenus dans le cas de l'interaction entre la bulle et les deux tourbillons contrarotatifs. Le tableau 5.1 précise les différentes tailles de filtres testées en les comparant à la taille de la maille de la SND Δ , au rayon des tourbillons contrarotatifs (dans le cas de référence N0) R_T et au rayon de la bulle R_b . Les figures 5.11 représente l'évolution temporelle du maximum de la norme de chacun des termes sous-maille dans le cas de référence NO et dans le cas N1 pour les deux plus petites tailles de filtres. Le tableau 5.2 récapitule les résultats de ces figures et ceux obtenus avec les deux plus grandes tailles de filtre. Il classe les différents termes suivant leur contribution relative pour les différentes tailles de filtres. Dans le tableau 5.2, le terme sous-maille associé à l'accélération est encadré car il intervient dans une dérivée temporelle et on s'attend de ce fait à ce que sa modélisation soit délicate. Les modèles que l'on cherche à développer dans le cadre d'ISS correspondent aux deux tailles de filtre les plus petites parmi les quatre présentées (*FiPt* et *FiMoy*). D'après l'importance relative des termes sous-maille pour ces tailles de filtre, on choisit de négliger les termes sous-maille liés au terme visqueux et aux forces interfaciales devant ceux liés à l'accélération et à la convection. La figure 5.12 compare le terme convectif et le terme sous-maille qui lui est associé dans le cas du filtre *FiPt*. Bien que moins intense, on voit que le terme sous-maille est comparable au terme convectif.

Filtre	$\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}$	$\frac{\bar{\Delta}}{R_T}$	$\frac{\bar{\Delta}}{R_b}$
<i>FiPt</i> (petit)	5	0.19	0.1
<i>FiMoy</i> (moyen)	21	0.75	0.4
<i>FiGd</i> (grand)	41	1.5	0.8
<i>FiEn</i> (énorme)	201	7.5	4

TAB. 5.1 – Les quatre tailles de filtre. Δ est la taille de la maille d'origine, $\bar{\Delta}$ la taille du noyau de convolution du filtre, R_T le rayon des tourbillons contrarotatifs et R_b le rayon de la bulle.

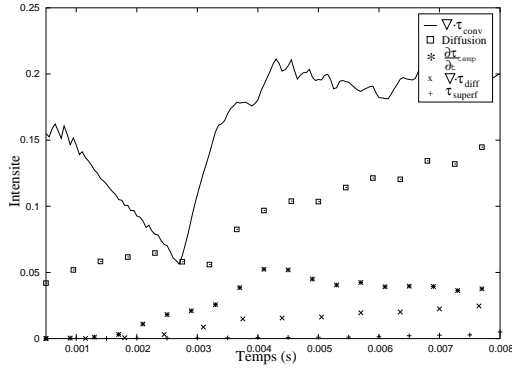
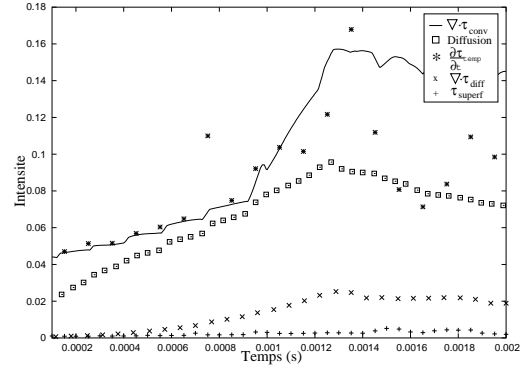
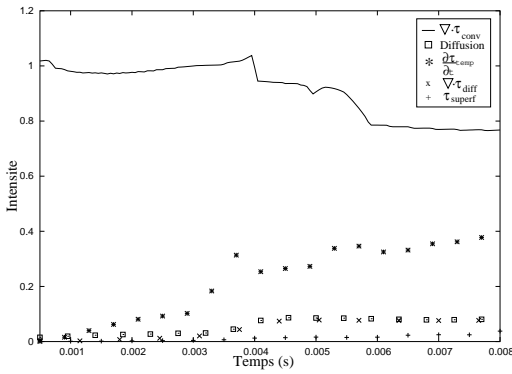
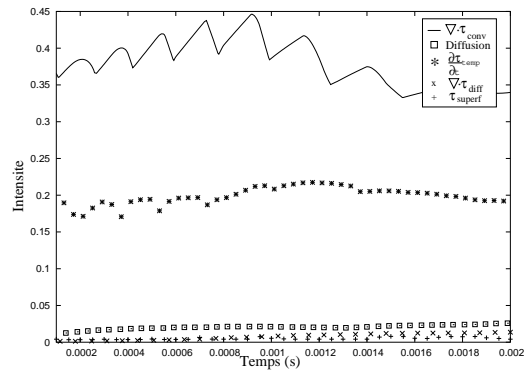
(a) Cas N0 avec le filtre *FiPt*(b) Cas N1 avec le filtre *FiPt*(c) Cas N0 avec le filtre *FiMoy*(d) Cas N1 avec le filtre *FiMoy*

FIG. 5.11 – Evolution temporelle du maximum de la norme des différents termes sous-maille dans l'équation de bilan de quantité de mouvement dans le cas de l'interaction d'une bulle avec deux tourbillons contrarotatifs.

Catégorie	<i>FiPt</i>	<i>FiMoy</i>	<i>FiGd</i>	<i>FiEn</i>
Important	$\nabla \cdot \overline{\rho u \otimes u + p}$	$\nabla \cdot \overline{\rho u \otimes u + p}$ $\nabla \cdot \tau_{conv}$	$\nabla \cdot \overline{\rho u \otimes u + p}$ $\nabla \cdot \tau_{conv}$	$\nabla \cdot \overline{\rho u \otimes u + p}$ $\nabla \cdot \tau_{conv}$
Moyen	$\nabla \cdot \tau_{conv}$ $\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}$	$\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t}$	$\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t}$	
Petit	$\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \tau_{diff}$	$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}$ $\nabla \cdot \tau_{diff}$	$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}$ $\nabla \cdot \tau_{diff}$ τ_{superf}	$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}$ $\nabla \cdot \tau_{diff}$
Négligeable	τ_{superf}	τ_{superf}		τ_{superf} $\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t}$

TAB. 5.2 – Hiérarchie des termes sous-maille de l'équation de bilan de quantité de mouvement pour quatre tailles différentes de filtre. \mathbf{S} est le tenseur des contraintes visqueuses

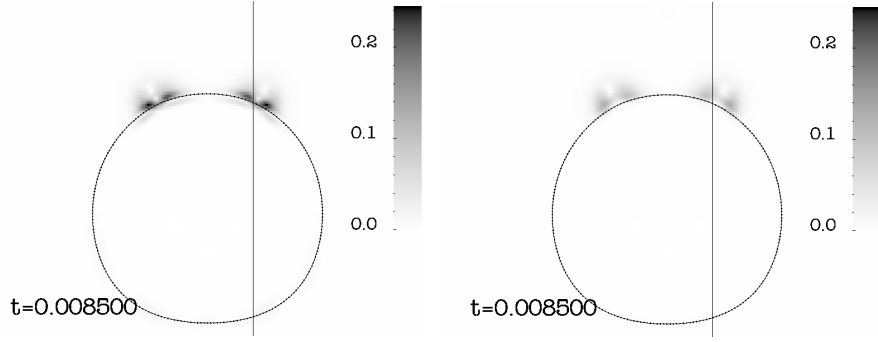


FIG. 5.12 – Comparaison des intensités du terme convectif (à gauche) et du terme sous-maille qui lui est associé (à droite) avec le filtre $FiPt$

Hierarchie des contributions énergétiques

Jusqu'à présent, nous n'avons jamais considéré l'équation d'énergie. En effet, dans les hypothèses générales que l'on considère (écoulement isotherme sans changement de phase), l'équation d'énergie se déduit de l'équation de bilan de quantité de mouvement : elle est en quelque sorte redondante. Cependant, elle permet des analyses et raisonnements physiques utiles à tout travail de modélisation. L'équation d'énergie qui nous intéresse est l'équation d'énergie filtrée : celle qui décrit l'évolution de $\frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}^2$. On l'établit en faisant le produit scalaire de l'équation de bilan de quantité de mouvement filtrée (équation (5.54c)) par le vecteur vitesse filtré, $\bar{\mathbf{u}}$. En notant, en accord avec le chapitre 4, $\bar{e}_c = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^2$, en décomposant les termes en divergence en une partie conservative et une partie non conservative ainsi qu'en utilisant $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}) = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\rho} \bar{e}_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{e}_c \bar{\mathbf{u}}) &= \nabla \cdot (\bar{p} \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \bar{\mathbf{S}} : \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \sigma \bar{\kappa}^s (\bar{\mathbf{n}}^s \cdot \bar{\mathbf{u}}) \bar{\delta}_\sigma \\
 &\quad - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{conv} \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{diff} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\
 &\quad + \boldsymbol{\tau}_{conv} : \nabla \bar{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\tau}_{diff} : \nabla \bar{\mathbf{u}} - \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{temp}}{\partial t} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\tau}_{superf} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (5.60)
 \end{aligned}$$

La première ligne correspond à l'équation d'énergie diphasique classique : elle contient trois termes conservatifs (le terme de transport, celui lié aux forces de pression et la partie conservative de la diffusion) et trois termes non conservatifs (la partie non conservative de la diffusion, le travail des forces de pesanteur et celui des forces superficielles). Les deux dernières lignes concernent l'action des différents termes sous-maille pour les transferts d'énergie : l'avant dernière regroupe leur partie conservative et la dernière leur partie non conservative⁶. Par conséquent, on focalise notre attention sur cette dernière ligne car on désire hiérarchiser l'action non conservative des différents termes sous-maille afin de vérifier que, même d'un point de vue énergétique, on peut négliger les termes sous-maille liés à la diffusion et aux forces interfaciales. Lorsque l'on étudiera le comportement des modèles que nous proposons, on étudiera aussi leur action sur l'énergie.

La figure 5.13 montre l'évolution temporelle des contributions des différents termes sous-maille dans l'équation d'énergie dans le cas de l'interaction d'une bulle et d'une turbulence de grille. On constate que les deux termes prépondérants sont les termes sous-maille liés à l'accélération et à la convection. Les deux autres termes sous-maille, *i.e.* celui lié à la diffusion et celui lié aux forces superficielles sont négligeables. Ce résultat est en accord avec celui obtenu sur l'équation de bilan de quantité de mouvement.

⁶En fait, seule l'action des termes sous-maille liés à la convection et à la diffusion se décompose en une partie conservative et en une partie non conservative.

Nous n'avons pensé à une analyse en énergie qu'à la fin de ce travail de thèse et nous avons seulement eu le temps de faire les tests *a priori* sur le cas le plus complet : l'interaction d'une bulle et d'une turbulence de grille. Cependant, comme cette analyse confirme les résultats sur l'équation de bilan de quantité de mouvement, il serait vraiment étonnant que les autres SND conduisent à d'autres conclusions.

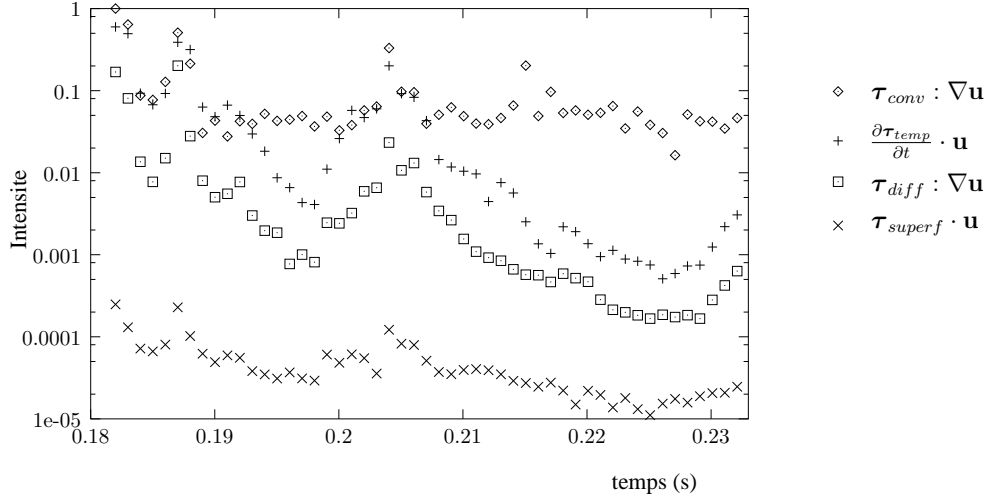


FIG. 5.13 – Comparaison des contributions énergétiques des termes sous-maille de l'équation de bilan de quantité de mouvement

5.5.4 Conclusion sur la hiérarchisation des termes sous-maille

Les tests *a priori* que nous avons réalisés à partir de SND sur différents types d'écoulements (ne concernant cependant pas des interfaces très fortement déformées ou de petites tailles), nous ont permis d'établir les hiérarchies suivantes pour l'importance relative des termes sous-maille dans l'équation de bilan de quantité de mouvement et dans l'équation d'énergie [46, 95] :

$$\|\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{conv})\| > \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{temp}}{\partial t} \right\| \gg \|\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{diff})\| \gg \|\boldsymbol{\tau}_{superf}\| \quad (5.61a)$$

$$|\boldsymbol{\tau}_{conv} : \nabla \mathbf{u}| > \left| \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{temp}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} \right| \gg |\boldsymbol{\tau}_{diff} : \nabla \mathbf{u}| \gg |\boldsymbol{\tau}_{superf} \cdot \mathbf{u}| \quad (5.61b)$$

Par conséquent, on choisit de négliger les termes sous-maille liés au terme visqueux et aux forces interfaciales devant ceux liés à l'accélération et à la convection. Cependant, lorsqu'une interface est très déformée et qu'une grande part de ces déformations est non résolue, il est probable que l'on ne puisse pas négliger le terme sous-maille lié aux forces superficielles $\boldsymbol{\tau}_{superf}$ [100]. De la même façon, dans des situations où la vitesse de glissement est importante (la couche limite de proche interface est alors très mince), il est possible que l'on ne puisse pas négliger le terme sous maille lié au terme visqueux. On suppose ne pas être dans ces situations et on néglige ces deux termes sous-maille $\boldsymbol{\tau}_{diff}$ et $\boldsymbol{\tau}_{superf}$.

5.6 Modèles proposés

L'importance relative des différents termes sous-maille nous a conduits à ne retenir que la contribution des termes lié à la convection $\boldsymbol{\tau}_{conv}$ et lié à l'accélération $\boldsymbol{\tau}_{temp}$. Le terme lié à

la convection existe aussi en monophasique et nous avons vu qu'il a fait l'objet de nombreux travaux de modélisation. Les modèles les plus courants reposent sur l'hypothèse de la viscosité turbulente.

5.6.1 Examen de l'hypothèse de viscosité turbulente

Afin de vérifier si on peut faire l'hypothèse de viscosité turbulente en diphasique, on compare le terme visqueux et le terme sous-maille lié au terme convectif suivant une coupe verticale dont la localisation est précisée par la figure 5.12 (trait plein noir de l'image de gauche). Cette comparaison peut être faite directement sur l'équation de bilan de quantité de mouvement ou sur la contribution de ces termes dans l'équation d'énergie. La figure 5.14 compare les composantes horizontale et verticale des deux termes tels qu'ils apparaissent dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. On voit qu'ils sont très mal corrélés et en particulier que les changements de signe ne se font pas aux mêmes endroits. On peut compléter cette analyse en examinant l'équation d'énergie. La contribution énergétique du terme sous-maille lié au terme convectif dans l'équation d'énergie correspond à sa partie non conservative $\boldsymbol{\tau}_{conv} : \nabla \mathbf{u}$. On la compare à la dissipation $\mu \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u}$, figure 5.15(a). Pour la moyenne de Favre (le terme sous-maille est alors noté $\boldsymbol{\tau}_{fconv}$) comme pour la moyenne classique, on remarque que le terme sous-maille issu du terme convectif est parfois dissipatif (contribution positive) parfois anti-dissipatif (contribution négative) (fig. 5.15(b)). La nécessité d'un terme anti-dissipatif est due au fait que, dans un cas sous-résolu, la diffusion d'énergie cinétique à travers l'interface est surestimée. La quantité de mouvement de la phase initialement la plus agitée (la phase liquide dans le cas de l'interaction bulle/tourbillons contrarotatifs, la phase gazeuse dans le cas de la cavité diphasique) est transmise trop rapidement et trop intensément à l'autre phase. La moyenne de Favre permet de réduire cette erreur mais uniquement dans le cas où le transfert a lieu de la phase lourde vers la phase légère. Comme le terme visqueux est nécessairement dissipatif, une modélisation basée sur l'hypothèse de la viscosité turbulente n'est pas satisfaisante même d'un point de vue strictement énergétique car elle ne peut pas corriger cette surestimation du transfert de quantité de mouvement, au contraire.

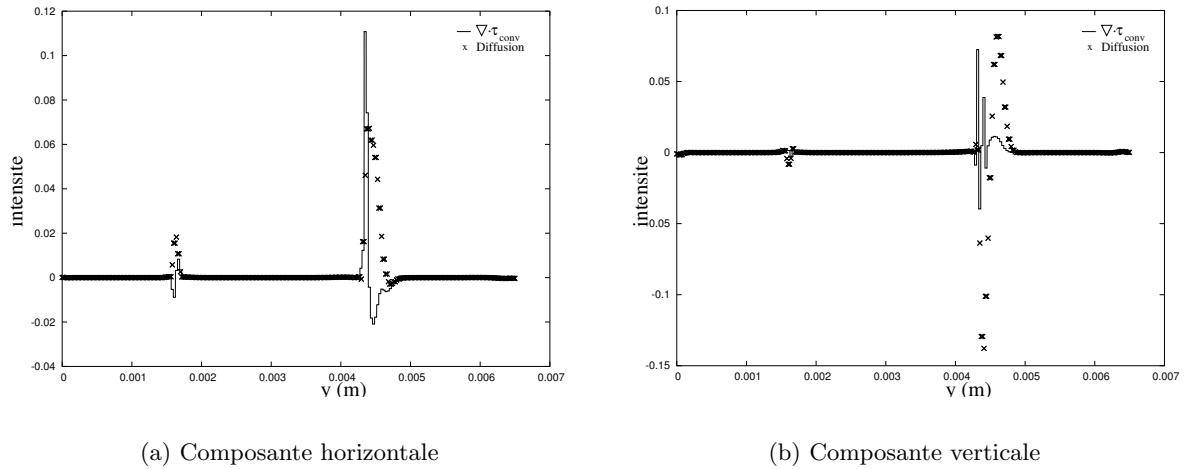


FIG. 5.14 – Comparaison des composantes du terme visqueux et du terme sous-maille issu du terme convectif

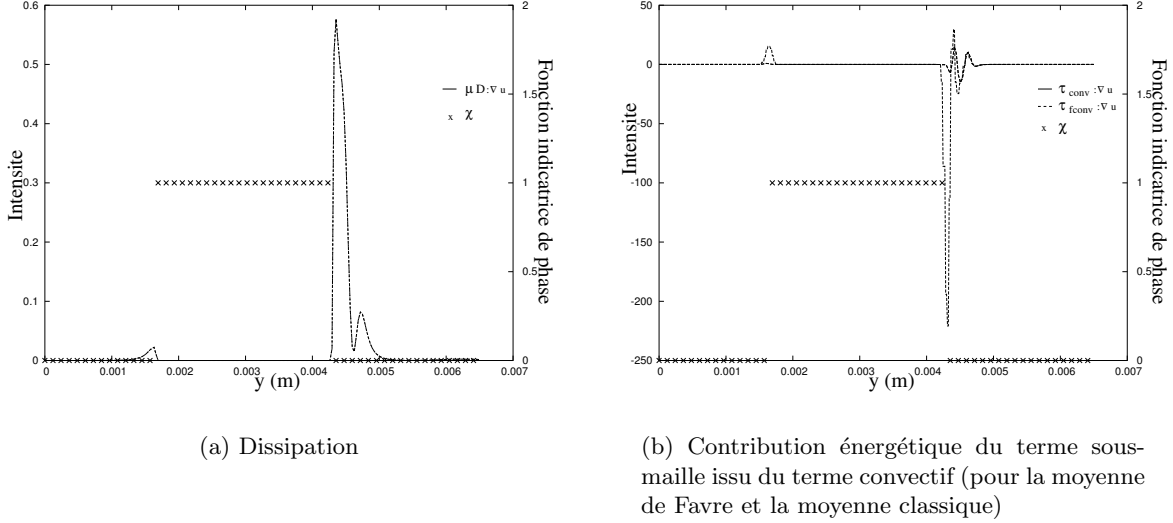


FIG. 5.15 – Comparaison des contributions énergétiques du terme visqueux (à gauche) et du terme sous-maille issu du terme convectif (à droite)

5.6.2 Modélisation structurelle

Application de la décomposition consistante de Germano

L'hypothèse de viscosité turbulente n'étant pas satisfaisante dans notre cas, nous avons utilisé le formalisme de la modélisation structurelle. Ecrivons la décomposition de Leonard revisitée par Germano [34] pour les trois termes que nous voulons modéliser.

- Pour le terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface, on a :

$$\tau_{interf} = \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k \quad (5.62a)$$

La décomposition consistante de ce terme s'écrit :

$$\tau_{interf} = \mathcal{L}_{interf} + \mathcal{C}_{interf} + \mathcal{R}_{interf} \quad (5.62b)$$

$$\mathcal{L}_{interf} = \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k \quad (5.62c)$$

$$\mathcal{C}_{interf} = \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi'_k} - \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \bar{\chi}'_k + \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\mathbf{u}'} \cdot \nabla \bar{\chi}_k \quad (5.62d)$$

$$\mathcal{R}_{interf} = \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \chi'_k} - \bar{\mathbf{u}'} \cdot \nabla \bar{\chi}'_k \quad (5.62e)$$

- Pour le terme sous-maille issu du terme d'accélération de l'équation de bilan de quantité de mouvement, on a :

$$\tau_{temp} = \overline{\rho \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.63a)$$

La décomposition consistante de ce terme s'écrit :

$$\tau_{temp} = \mathcal{L}_{temp} + \mathcal{C}_{temp} + \mathcal{R}_{temp} \quad (5.63b)$$

$$\mathcal{L}_{temp} = \overline{\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\bar{\rho}} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \quad (5.63c)$$

$$\mathcal{C}_{temp} = \overline{\rho' \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho'} \bar{\bar{\mathbf{u}}} + \overline{\bar{\rho} \mathbf{u}'} - \bar{\bar{\rho}} \bar{\mathbf{u}'} \quad (5.63d)$$

$$\mathcal{R}_{temp} = \overline{\rho' \mathbf{u}'} - \bar{\rho'} \bar{\mathbf{u}'} \quad (5.63e)$$

- Pour le terme sous-maille issu du terme convectif de l'équation de bilan de quantité de mouvement, on a :

$$\tau_{conv} = \overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad (5.64a)$$

La décomposition consistante de ce terme s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_{conv} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{conv} + \boldsymbol{\mathcal{C}}_{conv} + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{conv} \quad (5.64b)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{conv} = \overline{\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad (5.64c)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{conv} = & \overline{\rho' \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho}' \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \\ & \overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho}' \bar{\mathbf{u}}' \otimes \bar{\mathbf{u}} + \overline{\bar{\rho} \mathbf{u}' \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}' \otimes \bar{\mathbf{u}} + \\ & \overline{\rho' \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}'} - \bar{\rho}' \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}' + \overline{\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}'} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}' + \\ & \overline{\bar{\rho} \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}' \otimes \bar{\mathbf{u}}' \end{aligned} \quad (5.64d)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_{conv} = \overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \bar{\rho}' \bar{\mathbf{u}}' \otimes \bar{\mathbf{u}}' \quad (5.64e)$$

Dans chacun des cas, on propose de ne retenir que le terme de Leonard qui ne nécessite pas de fermeture. On note avec un exposant m les modèles de chacun des termes sous-maille. Finalement, on peut résumer nos hypothèses de modélisation par :

$$\tau_{interf}^m = \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k \quad (5.65a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{temp}^m = \overline{\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.65b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{conv}^m = \overline{\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad (5.65c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{diff}^m = 0 \quad (5.65d)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{superf}^m = 0 \quad (5.65e)$$

Il est important de remarquer que l'on n'a pas utilisé les modèles mixtes : on n'a pas introduit de viscosité turbulente pour modéliser la somme du terme croisé et du terme de Reynolds. En fait, leur contribution est apparue négligeable dans les tests *a priori* que nous avons réalisés. Cependant, il est probable qu'il soit nécessaire d'ajouter ce type de modélisation pour résoudre effectivement les équations filtrées. Les équations de la SND filtrée sont alors :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.66a)$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k + \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k = 0 \quad (5.66b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = & -\nabla \bar{p} \\ & + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \\ & + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \\ & + \nabla \cdot (\bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}})) \\ & + \bar{\rho} \mathbf{g} - \sigma \bar{\kappa}^s \bar{\mathbf{n}}^s \bar{\delta}_\sigma \end{aligned} \quad (5.66c)$$

Ainsi défini, le problème est fermé. Les équations sont valables dans tout l'espace et dégénèrent naturellement en un problème extérieur loin de l'interface (soit à une distance supérieure à la taille du filtre) : les équations de Navier-Stokes de la SGE monophasique avec l'hypothèse de similarité d'échelle. On pourrait s'arrêter à cette étape et développer une méthode numérique capable de résoudre ces équations. Cependant, les modèles proposés pour les termes spécifiques aux interfaces ont le défaut de ne pas s'annuler aussi vite que les termes qu'ils modélisent lorsque l'on s'éloigne de l'interface (voir paragraphe 5.8). Autrement dit, le fait d'appliquer deux fois le filtre (au lieu d'une) épaissit artificiellement la zone de transition (on appelle zone de transition la région de l'espace où la fonction indicatrice filtrée, $\bar{\chi}_g$, n'est pas constante). Pour remédier à ce problème, on propose une nouvelle décomposition consistante dans laquelle on ne filtre qu'une fois la fonction indicatrice ou les grandeurs qui en dépendent comme la masse volumique.

Proposition d'une nouvelle décomposition consistante

Dans chacun des termes croisés précédents, \mathcal{C}_{interf} , \mathcal{C}_{temp} et \mathcal{C}_{conv} , on peut isoler le terme qui ne fait apparaître que des fluctuations de la fonction indicatrice de phase. On les notes respectivement $\mathcal{C}_{interf}^\chi$, \mathcal{C}_{temp}^χ et \mathcal{C}_{conv}^χ . Nous avons pris soin de les écrire en premier lorsque nous avons explicité les termes croisés. En notant avec un exposant n les nouveaux termes de la décomposition que nous proposons, ils s'écrivent de façon générique :

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L} + \mathcal{C}^\chi \quad (5.67a)$$

$$\mathcal{C}^n = \mathcal{C} - \mathcal{C}^\chi \quad (5.67b)$$

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \quad (5.67c)$$

Le terme de Reynolds est inchangé et on soustrait au terme croisé le terme ne faisant intervenir que des fluctuations de la fonction indicatrice de phase pour l'ajouter au terme de Leonard. Reprécisons nos notations pour chacun des trois termes.

- Pour le terme croisé de l'équation de transport de l'interface, on a :

$$\mathcal{C}_{interf} = \mathcal{C}_{interf}^\chi + \mathcal{C}_{interf}^n \quad (5.68a)$$

$$\mathcal{C}_{interf}^\chi = \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k'} - \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\chi_k'} \quad (5.68b)$$

Ce qui donne pour la nouvelle décomposition :

$$\mathcal{L}_{interf}^n = \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k} - \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\chi_k} \quad (5.68c)$$

$$\mathcal{C}_{interf}^n = \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \chi_k} - \overline{\mathbf{u}'} \cdot \nabla \overline{\chi_k} \quad (5.68d)$$

- Pour le terme croisé du terme lié à l'accélération dans l'équation de bilan de quantité de mouvement, on a :

$$\mathcal{C}_{temp} = \mathcal{C}_{temp}^\chi + \mathcal{C}_{temp}^n \quad (5.69a)$$

$$\mathcal{C}_{temp}^\chi = \overline{\rho' \mathbf{u}} - \overline{\rho'} \overline{\mathbf{u}} \quad (5.69b)$$

Ce qui donne pour la nouvelle décomposition :

$$\mathcal{L}_{temp}^n = \overline{\rho \mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} \quad (5.69c)$$

$$\mathcal{C}_{temp}^n = \overline{\rho \mathbf{u}'} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}'} \quad (5.69d)$$

- Pour le terme croisé du terme lié à la convection dans l'équation de bilan de quantité de mouvement, on a :

$$\mathcal{C}_{conv} = \mathcal{C}_{conv}^\chi + \mathcal{C}_{conv}^n \quad (5.70a)$$

$$\mathcal{C}_{conv}^\chi = \overline{\rho' \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \overline{\rho'} \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} \quad (5.70b)$$

Ce qui donne pour la nouvelle décomposition :

$$\mathcal{L}_{conv}^n = \overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} \quad (5.70c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{conv}^n = & \overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}} - \overline{\rho'} \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}} + \overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}} + \\ & \overline{\rho' \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}'} - \overline{\rho'} \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}'} + \overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}'} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}'} + \\ & \overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \end{aligned} \quad (5.70d)$$

$$(5.70e)$$

Ces nouvelles décompositions respectent bien sûr la propriété d'invariance galiléenne puisque les changements ne concernent pas la vitesse mais uniquement la fonction indicatrice de phase. En conservant le principe de modélisation $\tau^m = \mathcal{L}$, les nouveaux modèles (nm) des termes sous-maille associés à cette décomposition sont :

$$\tau_{interf}^{nm} = \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\chi_k} - \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\chi_k} \quad (5.71a)$$

$$\tau_{temp}^{nm} = \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} \quad (5.71b)$$

$$\tau_{conv}^{nm} = \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} \quad (5.71c)$$

Le système (5.66) devient :

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.72a)$$

$$\frac{\partial \overline{\chi_k}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\chi_k} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\chi_k} - \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\chi_k} = 0 \quad (5.72b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}}) &= -\nabla \overline{p} \\ &+ \frac{\partial \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} \\ &+ \nabla \cdot (\overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} - \overline{\rho} \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}}) \\ &+ \nabla \cdot (\overline{\mu} (\nabla \overline{\mathbf{u}} + \nabla^T \overline{\mathbf{u}})) \\ &+ \overline{\rho} \mathbf{g} - \overline{\sigma \kappa^s \mathbf{n}^s \delta_\sigma} \end{aligned} \quad (5.72c)$$

Ce dernier système n'est pas fermé. En effet, il fait appel à une vision discontinue des interfaces (nécessité de connaître χ_k) mais, il permet uniquement de construire une interface continue (transport de $\overline{\chi_k}$). Pour fermer ce système, il faut donc trouver le lien entre interface continue et interface discontinue. On explicite ce lien en fonction de la courbure de l'interface au paragraphe 5.9. Une fois ce lien trouvé ou modélisé, le système est fermé et on peut développer une méthode numérique capable de le résoudre. Cependant, on sait avec l'expérience de la SND que le transport d'une interface étalée pose des problèmes tels que la conservation de la masse ou la nécessité d'un grand nombre de mailles dans l'épaisseur de l'interface (épaisseur susceptible d'augmenter au cours des simulations numériques du fait de la diffusion numérique). D'autre part, nous disposons d'une méthode de suivi d'interface efficace. On souhaite donc résoudre les équations précédentes à l'aide de notre méthode mixte Front-tracking/VOF. Pour ce faire, il est nécessaire de revenir au formalisme discontinu, c'est-à-dire de re-raidir l'interface. Pour passer d'une zone continue de transition à une discontinuité équivalente, il faut préciser les relations de saut à l'interface. Nous le ferons grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés dans le paragraphe 6.4.

5.7 Tests *a priori* des modèles proposés

Le défaut des modèles τ^m sera illustré dans le paragraphe 5.8. On ne présente ici que les résultats des modèles que nous avons retenus, τ^{nm} . De plus, comme les résultats sont similaires dans chacune des simulations, on se contente de les illustrer à partir de notre cas test le plus complet : l'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille. Comme on ne peut pas non plus présenter les résultats à chacun des pas de temps, on a choisi un pas de temps particulier. Il correspond au temps physique de 0,19 s⁷. Nous avons bien sûr pris soin de vérifier qu'il était représentatif de l'ensemble de nos données. La position de la bulle, sa géométrie et le champ de vitesse de l'ensemble du domaine sont représentés par la figure 5.16. On y voit qu'une

⁷Nous avons choisi cet instant car il se trouve au milieu de la période d'interaction d'une structure cohérente avec la bulle. Cette interaction commence approximativement à 0,18 s et se termine à 0,20 s.

structure cohérente est en train de déformer légèrement la bulle en l'aplatissant par le haut. La structure cohérente est la zone verticale de forte vitesse (tache rouge orange) qui se termine juste avant le dessus de la bulle (fig. 5.16(a) et 5.16(b)). La déformation de la bulle correspond à la zone de faible courbure (tache bleue sur la figure 5.16(d)). L'instant choisi correspond donc bien à un moment digne d'intérêt, c'est-à-dire à un moment où la turbulence et l'interface interagissent.

Dans les paragraphes qui suivent, on compare *a priori* les modèles que nous avons proposés (respectivement τ_{interf}^{nm} , τ_{temp}^{nm} et τ_{conv}^{nm}) et la contribution réelle des termes sous-maille liés à l'équation de transport de l'interface, à l'accélération et à la convection dans l'équation de bilan de quantité de mouvement (respectivement τ_{interf} , τ_{temp} et τ_{conv}). Pour ce faire, on procède comme pour hiérarchiser les termes sous-maille. En particulier, on utilise les discrétisations des opérations de filtrage et de dérivation présentées respectivement au paragraphe 5.5.1 et 5.5.2.

Pour les termes sous-maille de l'équation de bilan de quantité de mouvement (τ_{temp} et τ_{conv}), on étudiera les modèles tels qu'ils apparaissent dans ces équations mais aussi chacune de leur composante ainsi que leur contribution dans l'équation d'énergie.

5.7.1 Comparaison des modèles proposés et des contributions réelles des termes sous-maille

Les figures 5.17, 5.18 et 5.19 représentent une coupe (dans le même plan et au même instant que la figure 5.16) des termes sous-maille τ_{interf} , τ_{temp} et τ_{conv} (à gauche, figure (a)) ainsi que des modèles associés τ_{interf}^{nm} , τ_{temp}^{nm} et τ_{conv}^{nm} (à droite, figure (b)). Les champs des figures 5.18 et 5.19 ont été adimensionnalisés par le maximum de $\|\nabla \cdot (\tau_{conv})\|$. On retrouve le fait que les termes sous-maille associés à l'équation de transport de l'interface, τ_{interf} , et à l'accélération de l'équation de bilan de quantité de mouvement, τ_{temp} , sont non nuls uniquement au voisinage de l'interface (fig. 5.17 et 5.18). Le terme sous-maille lié à la convection de l'équation de bilan de quantité de mouvement est le seul terme qui existe dans le cas monophasique : il est non nul même loin des interfaces (fig. 5.19)⁸. Comme on est en présence d'un phénomène de décroissance spatiale de la turbulence, ce terme est plus intense en haut du domaine qu'en bas. Du fait de l'existence de corrélations entre la masse volumique ρ et de la vitesse \mathbf{u} , ce terme est plus important en proche interface. L'ensemble des termes sous-maille sont maximums dans la zone d'interaction entre interface et turbulence (près de la déformation de l'interface sur le dessus de la bulle). Ces visualisations montrent déjà que les modèles proposés sont satisfaisants pour les trois termes sous-maille que nous avons retenus. En effet, même s'il s'agit de représentations assez grossières (on n'examine pas dans le détail de régions précises), les modèles ont le bon comportement et il faut se concentrer pour distinguer les différences entre la visualisation du modèle et celle de la contribution réelle.

Pour affiner cette première analyse, on trace les corrélations entre chacun des termes sous-maille et le modèle correspondant. Cela signifie que, de façon générique, on a $f(\tau)$ en abscisse et $f(\tau^{nm})$ en ordonnée où f désigne suivant le cas l'identité, la projection suivant une composante, la dérivée par rapport au temps, la divergence... Dans chaque cas, on adimensionnalise par le maximum de la valeur absolue de $f(\tau)$ afin que l'axe des abscisses s'étale toujours au plus de moins un à plus un. Plus le graphe, qui résulte de ce tracé, est proche d'une droite d'équation $y = Cx$, où C est une constante, plus le modèle est bon. En effet, on peut alors écrire de façon générique $\tau^{nm} = C\tau$ et donc approcher de façon satisfaisante le terme sous-

⁸La zone du bord du domaine (sur une épaisseur de trois mailles) est artificiellement mise à zéro car on n'a pas implémenté les opérations de filtrage et de dérivation au bord. Ceci n'est en rien gênant car les problèmes qui nous intéressent sont en proche interface et donc loin des bords.

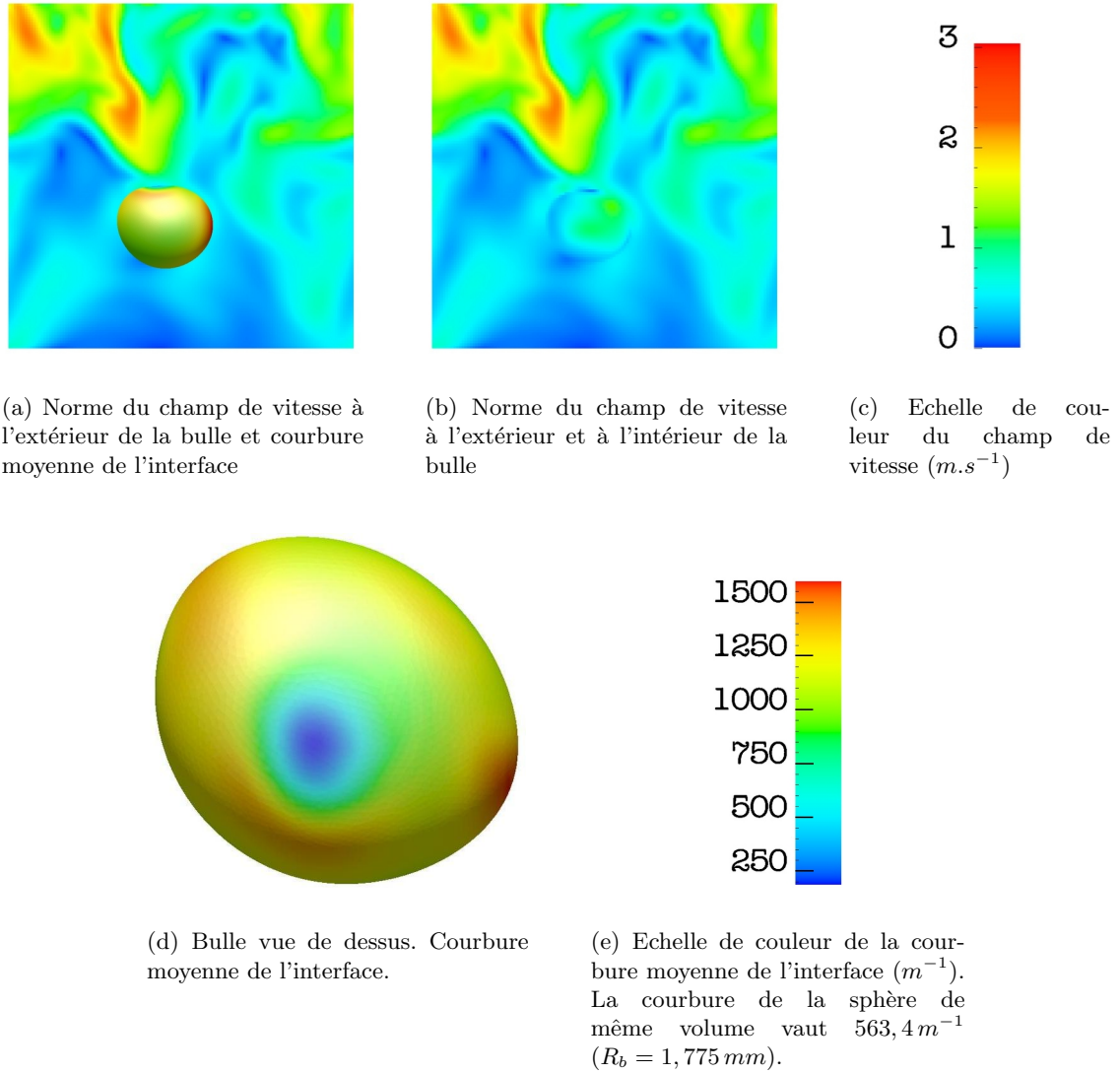


FIG. 5.16 – La position de la bulle, sa géométrie et le champ de vitesse à l'instant choisi pour les tests *a priori*. La gravité est dans le plan de coupe (soit le plan de la feuille). Elle est dirigée du haut vers le bas tout comme l'écoulement moyen.

maille τ par le modèle correctement pondéré : $\frac{1}{C}\tau^{nm}$. Pour faciliter la lecture des figures, on a aussi tracé la droite d'équation $y = x$.

Dans ce paragraphe, on étudie les corrélations entre terme sous-maille et modèle correspondant sous la forme où ils apparaissent dans les équations c'est-à-dire $\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t}$ et $\nabla \cdot (\tau_{conv})$ pour les termes liés respectivement à l'accélération à la convection de l'équation de bilan de quantité de mouvement. Les corrélations entre le terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface et le modèle correspondant sont représentées sur la figure 5.20. Ces corrélations sont les meilleures des trois termes sous-maille que nous avons retenus : dans ce cas, la stratégie de modélisation que nous proposons semble vraiment excellente. On est vraiment très proche d'une droite dont la pente est supérieure à 0,9. Précisons, de plus, que, bien que nous ne l'ayons pas évoqué, il n'est *a priori* pas possible de négliger ce terme sous-maille. En effet, le produit $\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}$ est inférieur à $1 s^{-1}$ et le terme sous-maille $\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}$ approche $0,1 s^{-1}$ (voir fig. 5.17). On modélise donc une dizaine de pourcents. Sur la figure 5.21, on visualise chacune des composantes de la dérivée temporelle du modèle proposé en fonction de la dérivée temporelle du terme sous-maille associé à l'accélération de l'équation de bilan de quantité de

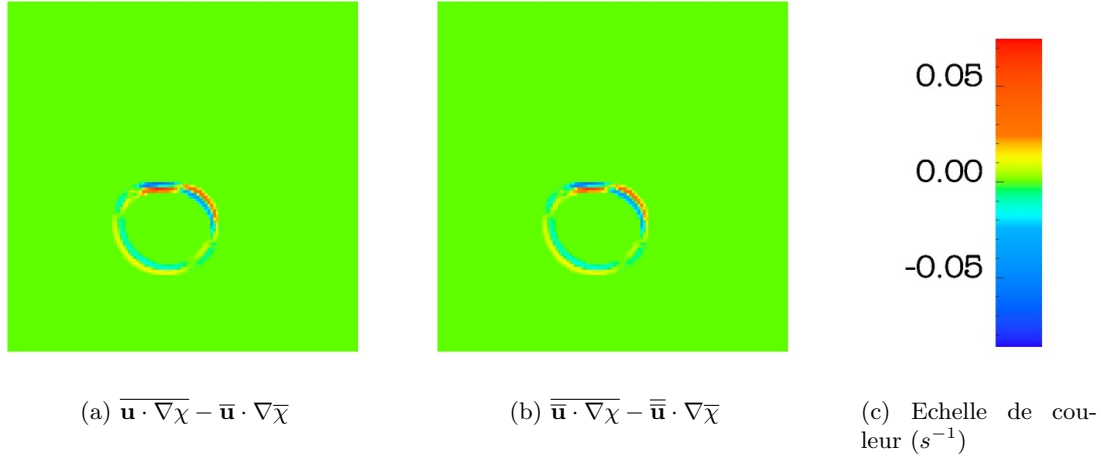


FIG. 5.17 – Comparaison du modèle proposé et du terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface

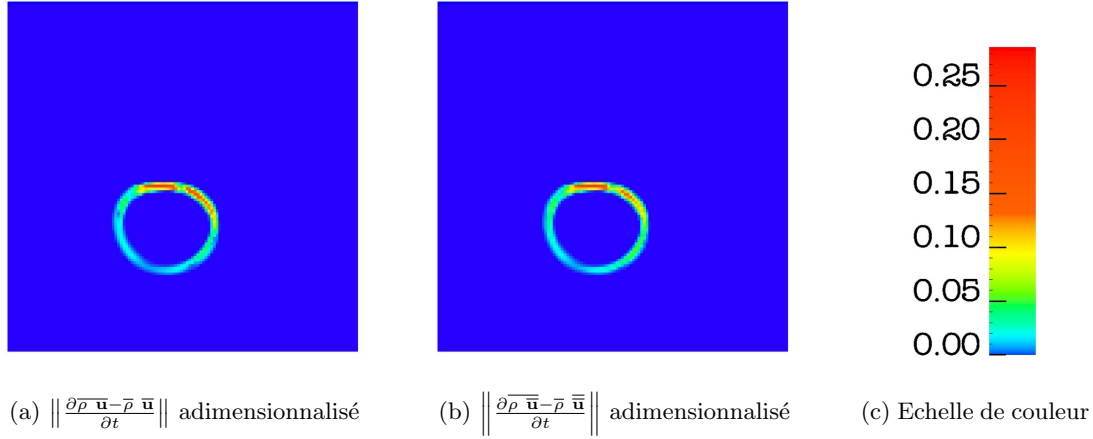


FIG. 5.18 – Comparaison du modèle proposé et du terme sous-maille lié à l'accélération. Les champs sont adimensionnalisés par le maximum de la norme du tenseur sous-maille lié à la convection.

mouvement. Les corrélations sont beaucoup moins bonnes que précédemment. On constate qu'elles sont meilleures suivant la direction longitudinale (direction de l'écoulement et de la décroissance spatiale de la turbulence) que suivant les directions transversales. Dans le cas de la direction longitudinale, les corrélations sont très bonnes : on est très proche d'une droite de pente 1. Dans le cas des directions transversales, même si le modèle reste acceptable, il est difficile de parler de droite pour approcher le nuage de points lorsque la dérivée temporelle des composantes du terme sous-maille est positive. Le modèle reste par contre très satisfaisant lorsque le terme sous-maille est négatif avec une pente d'environ 0,8. On ne comprend pas cette différence de comportement du modèle suivant le signe de la dérivée temporelle du terme sous-maille. La différence de comportement suivant les directions peut, elle, s'interpréter en constatant que la direction que nous avons appelée longitudinale correspond aussi à la direction normale à l'interface. En effet, du fait du sens de l'écoulement, les interactions entre interface et turbulence ont principalement lieu sur le dessus de la bulle. A cet endroit, la direction normale est grossièrement confondue avec la direction longitudinale de l'écoulement. On peut donc relire les figures précédentes et dire que le modèle est plus efficace suivant la direction normale que suivant la direction tangentielle. De plus, nous avons montré que le

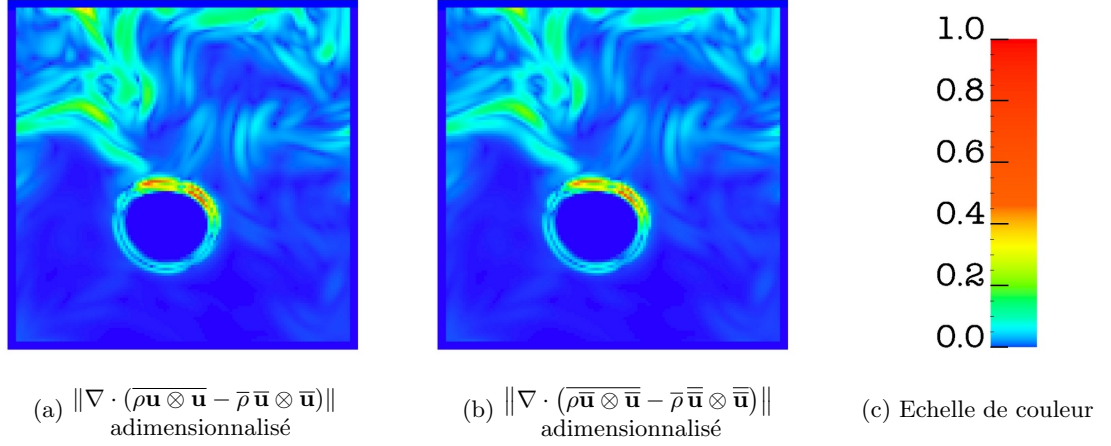


FIG. 5.19 – Comparaison du modèle proposé et du terme sous-maille lié à la convection. Les champs sont adimensionnalisés par le maximum de la norme de la divergence du tenseur sous-maille lié à la convection.

modèle que nous proposons peut se justifier par des techniques de reconstructions basées sur des développements de la vitesse en série de Taylor mais, il faut alors que le champ de vitesse soit suffisamment régulier. Or, justement, la vitesse normale est continue et dérivable mais les vitesses tangentielles sont seulement continues, elles ne sont pas dérivables. Il paraît donc relativement logique que le modèle proposé soit plus efficace dans la direction normale que dans la direction tangentielle. Une autre façon de voir que les directions tangentes sont logiquement plus délicates à traiter revient à convenir d'une part que le mécanisme d'interaction entre interface et turbulence consiste essentiellement à diminuer l'intensité turbulente suivant la direction normale pour la redistribuer suivant les directions tangentes et d'autre part qu'il est plus facile de modéliser une diminution de quantité de mouvement qu'une redistribution. La figure 5.22 étudie le terme sous-maille lié au terme convectif, on y a tracé chacune des composantes de $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{conv})$ (en abscisse) et $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{conv}^{nm})$ (en ordonnée) puisque c'est sous cette forme qu'il apparaît dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. Le modèle apparaît très bien corrélé au terme sous-maille correspondant. La pente de la droite approchant le mieux le nuage de points (la constante C précédente) est environ 0,7. Sur la figure 5.22(c) correspondant à la composante suivant la direction z , on distingue deux branches distinctes en haut à gauche. La moins raide a une pente proche de 0,7, l'autre est supérieure à 0,8. Ces deux branches sont dues à un comportement différent suivant la direction longitudinale (direction de l'écoulement moyen et de la décroissance spatiale) ou les directions transverses que nous venons d'interpréter et dont nous reparlerons en étudiant chaque composante du tenseurs $\boldsymbol{\tau}_{conv}$.

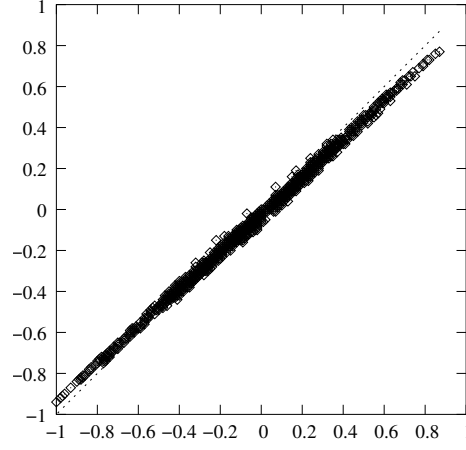
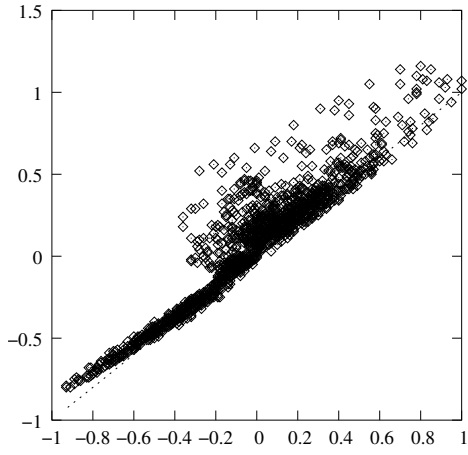
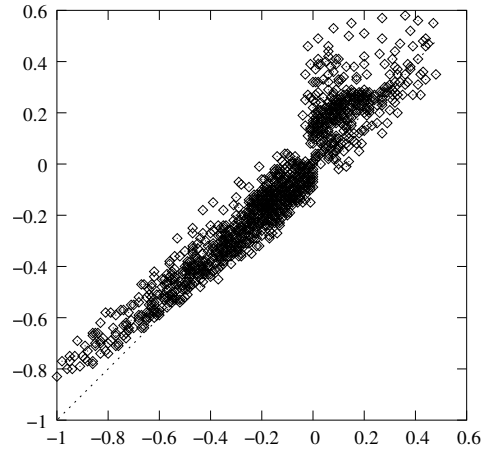


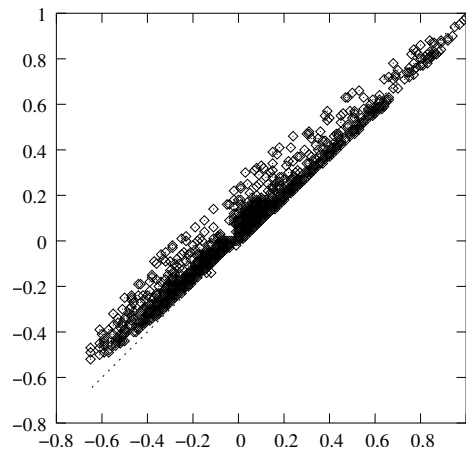
FIG. 5.20 – Corrélation entre le modèle proposé et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface. Abscisse : $\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi - \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}$; ordonnée : $\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi - \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}$.



(a) Abscisse : $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} - \bar{\rho} \bar{u}}{\partial t}$; Ordonnée : $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} - \bar{\rho} \bar{u}}{\partial t}$



(b) Abscisse : $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} - \bar{\rho} \bar{v}}{\partial t}$; Ordonnée : $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} - \bar{\rho} \bar{v}}{\partial t}$



(c) Abscisse : $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{w} - \bar{\rho} \bar{w}}{\partial t}$; Ordonnée : $\frac{\partial \bar{\rho} \bar{w} - \bar{\rho} \bar{w}}{\partial t}$

FIG. 5.21 – Corrélation entre la dérivée temporelle du modèle proposé et la contribution réelle du terme sous-maille lié à l'accélération

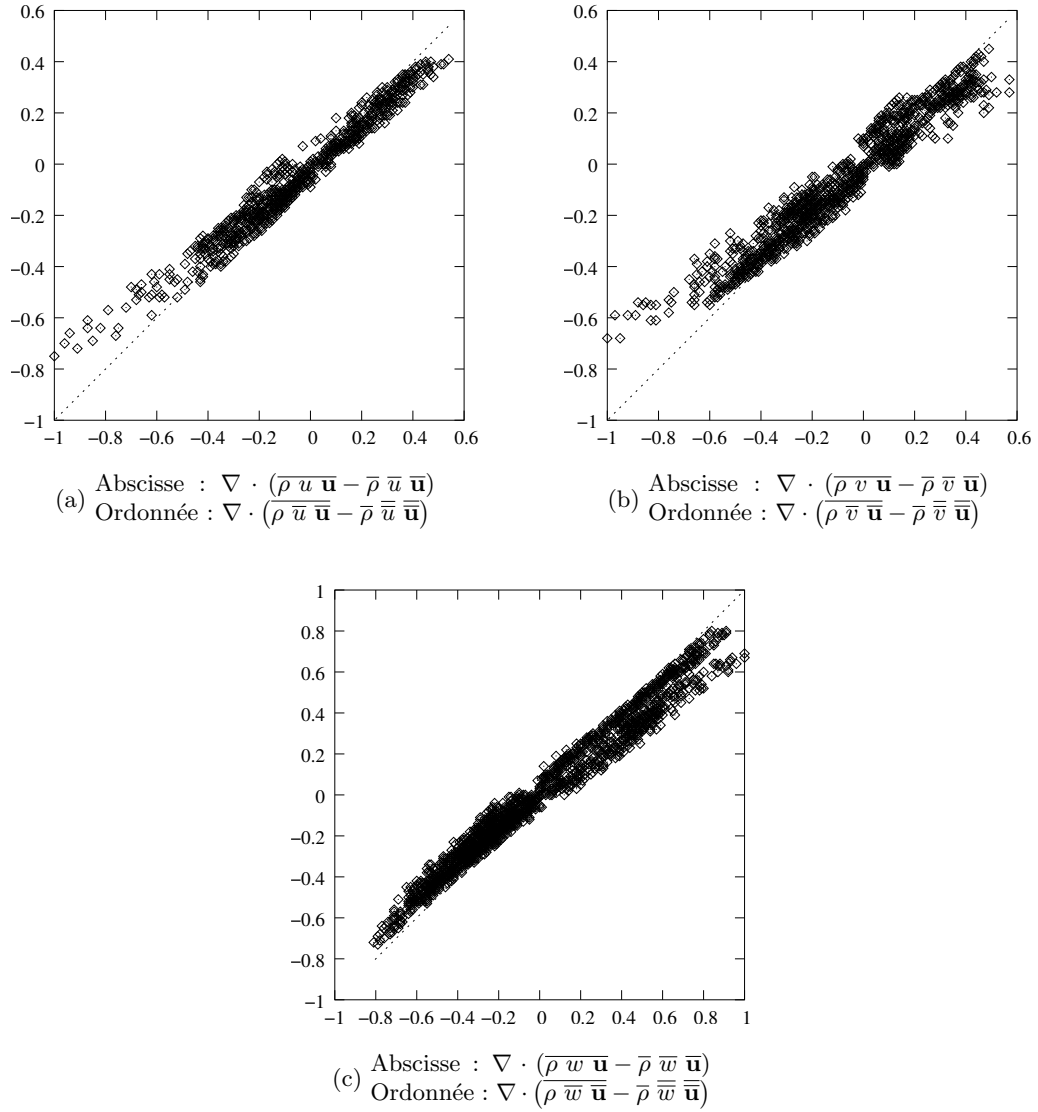


FIG. 5.22 – Corrélation entre la divergence du modèle proposé et la contribution réelle du terme sous-maille lié à la convection. On étudie ici le terme sous-maille directement sous la forme qu'il prend dans l'équation de bilan de quantité de mouvement $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{conv})$ et non sous sa forme tensorielle $\bar{\rho} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$.

5.7.2 Corrélation entre les composantes des modèles proposés et celles des termes sous-maille correspondants

Dans ce paragraphe, on étudie directement les termes sous-maille liés à l'accélération ainsi qu'à la convection et non sous leur forme d'apparition dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. Les figures 5.23(a) et 5.23(b) confirment que le modèle du terme sous-maille associé à l'accélération est, quant à lui, assez mal corrélé dans les directions transverses. Suivant la direction normale (fig. 5.23(c)), le modèle et le terme sous-maille sont très bien corrélés avec une pente supérieure à 0,9. Pour le tenseur sous-maille lié à la convection (fig. 5.24), le modèle est très bon pour toutes les composantes. On peut toujours bien approcher le nuage de points par une droite dont la pente est supérieure à 0,7. On retrouve quand même une différence suivant les directions. Les corrélations sont les moins bonnes lorsqu'une seule direction tangentielle intervient (fig. 5.24(a) et 5.24(d)) : la pente est alors égale à 0,7. Elles sont les meilleures lorsque seule la direction normale intervient (fig. 5.24(f)) : la pente est alors égale à 0,9. Cette différence suivant les directions normale ou tangentielle peut s'interpréter comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent. Et, pour les mêmes raisons, lorsque les composantes du tenseur font intervenir une composante tangentielle et une composante normale (fig. 5.24(c) et 5.24(e)), le modèle est moins bon que dans le cas purement normal et meilleur que dans le cas purement tangentiel (avec une pente d'environ 0,8). Cependant, il est plus difficile d'expliquer que le modèle est meilleur lorsque les deux composantes tangentielles interviennent en même temps (fig. 5.24(b)) que lorsqu'elles interviennent séparément (la pente est à nouveau d'environ 0,8). Ceci nous semble pouvoir être dû au fait que la redistribution de la quantité de mouvement normale à l'interface vers les directions tangentielles est globalement satisfaisante. Autrement dit que les erreurs commises dans un sens dans une direction tangente sont compensées par des erreurs commises dans l'autre sens dans l'autre direction tangente. Globalement, on redistribue bien la quantité de mouvement suivant les directions tangentes mais en surestimant la redistribution suivant une direction tangentielle et en la sous-estimant dans l'autre.

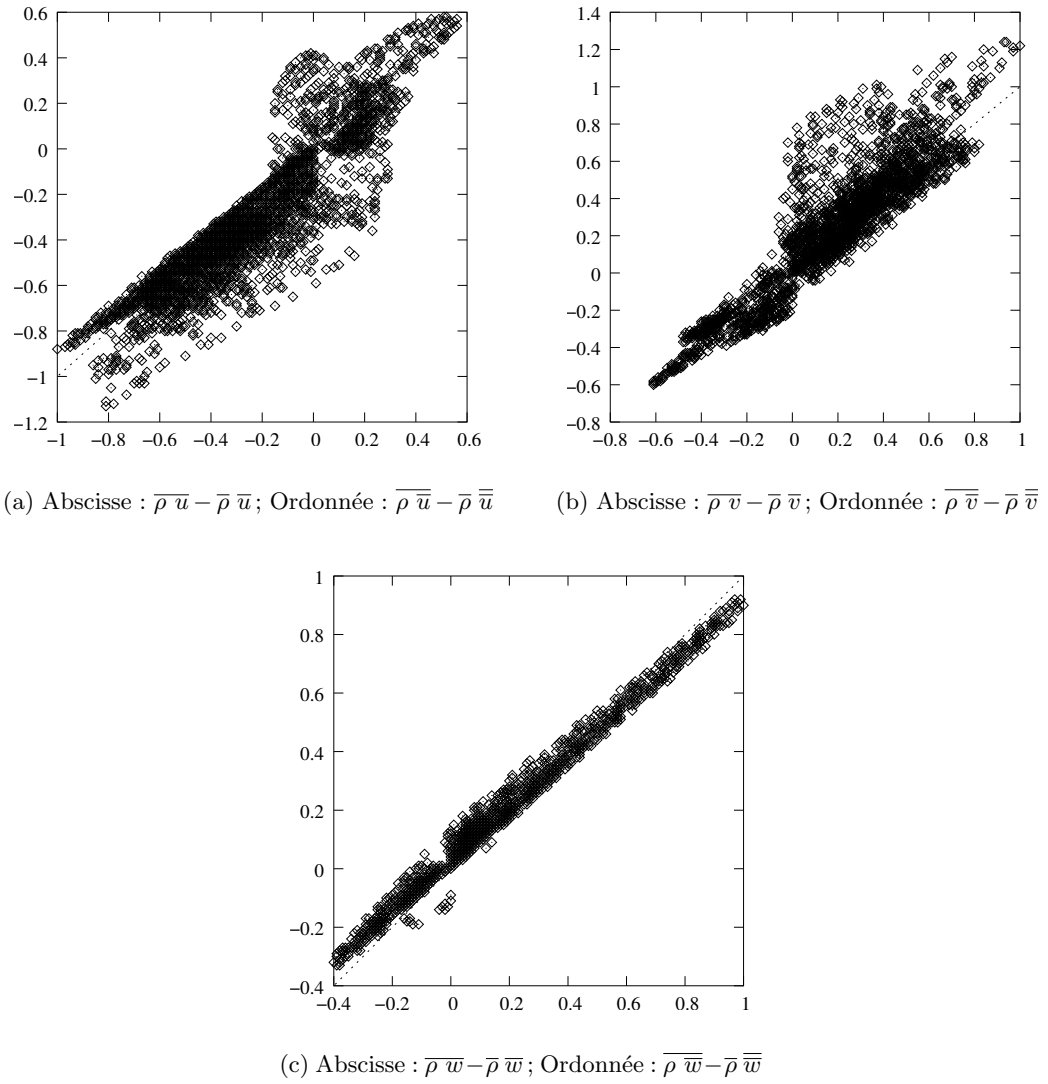


FIG. 5.23 – Corrélation entre le modèle proposé et les composantes du tenseur sous-maille lié à l'accélération

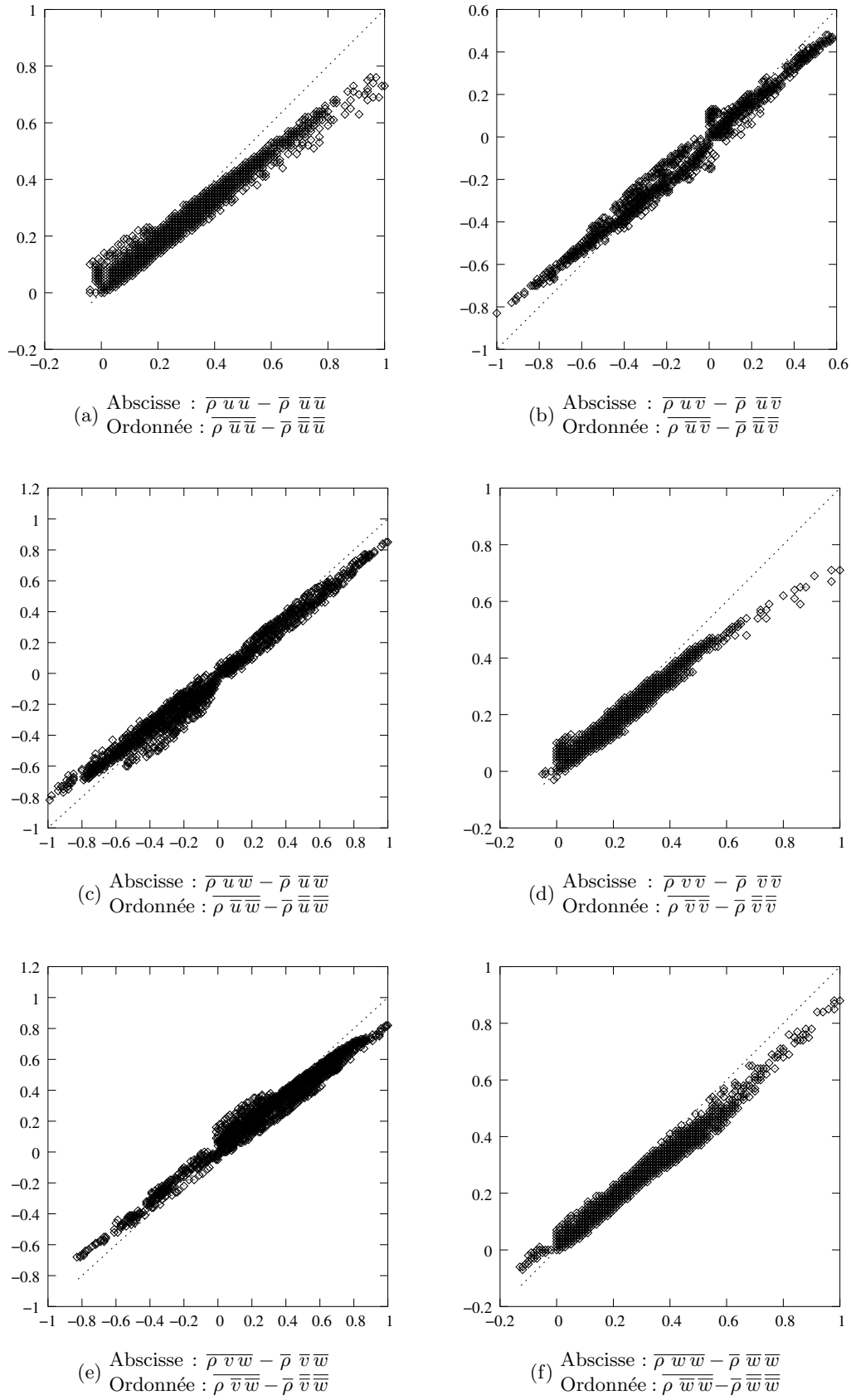


FIG. 5.24 – Corrélation entre le modèle proposé et les composantes du tenseur sous-maille lié à la convection

5.7.3 Corrélation entre la contribution énergétique des modèles proposés et celle des termes sous-maille associés

Dans ce paragraphe, on vérifie que la contribution énergétique des modèles (voir équation (5.60) du paragraphe 5.5.3) est bonne en traçant respectivement :

- $\frac{\partial \tau_{temp}^{nm}}{\partial t} \cdot \bar{\mathbf{u}}$ en fonction de $\frac{\partial \tau_{temp}}{\partial t} \cdot \bar{\mathbf{u}}$ (fig. 5.25) et,
- $\tau_{conv}^{nm} : \nabla \bar{\mathbf{u}}$ en fonction de $\tau_{conv} : \nabla \bar{\mathbf{u}}$ (fig. 5.26).

Dans les deux cas, le modèle est très bien corrélé à la contribution réelle du terme sous-maille avec une pente supérieure à 0,8.

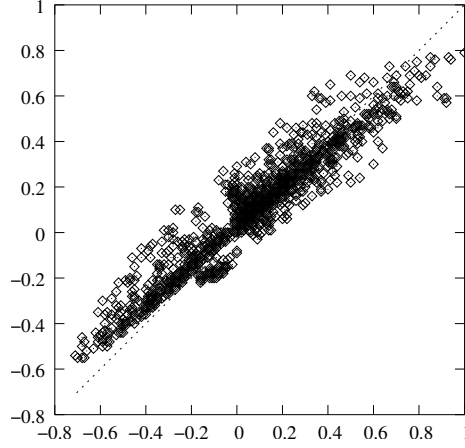


FIG. 5.25 – Corrélation entre la contribution énergétique du modèle proposé et du terme sous-maille lié à l'accélération. Abscisse : $\frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \cdot \bar{\mathbf{u}}$; ordonnée : $\frac{\partial \tau_{temp}^{nm}}{\partial t} \cdot \bar{\mathbf{u}}$.

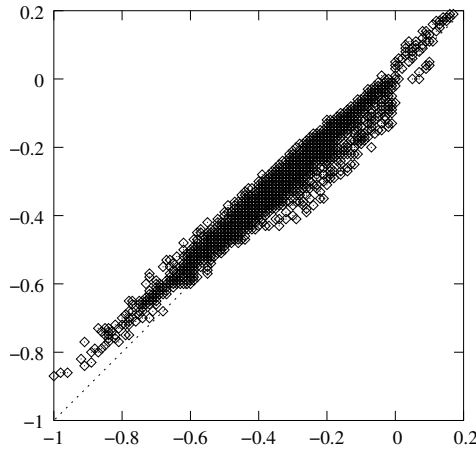


FIG. 5.26 – Corrélation entre la contribution énergétique non conservative du modèle proposé et du terme sous-maille lié à la convection. Abscisse : $(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \nabla \bar{\mathbf{u}}$; ordonnée : $\tau_{conv}^{nm} : \nabla \bar{\mathbf{u}}$.

5.7.4 Conclusion sur ces tests *a priori*

Nous avons étudié en détail le comportement des modèles proposés. Nous avons vérifiés

1. que la contribution de nos modèles dans les équations approchaient très précisément celle des termes sous-maille qu'ils remplaçaient,

2. que nos modèles étaient très bien corrélés aux termes qu'ils modélisent, et,
3. que leur interprétation en terme énergétique donnaient des résultats tout aussi bons.

De plus, Shen et Yue [88] ont montré sur des tests *a priori* et *a posteriori* que les modèles de similarité d'échelles sur lesquels nous nous sommes basés sont particulièrement adaptés pour la turbulence de surface libre. Dans leur cas, le terme sous-maille lié à l'accélération de l'équation de bilan de quantité de mouvement n'existe pas mais le terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface existe. C'est particulièrement intéressant car nous n'avons trouvé nulle part ailleurs dans la littérature de modélisation de ce terme. Même si leur étude se limite aux interfaces très peu déformées (la surface libre est supposée très proche du plan $z=0$), elle est cependant une garantie supplémentaire de la potentialité des modèles de similarité d'échelles pour tenir compte des interactions entre interface et turbulence.

Nous allons maintenant illustrer le défaut des modèles que nous n'avons pas retenus. Puis, nous filtrerons analytiquement la fonction indicatrice de phase dans le cas d'une interface courbe afin de pouvoir déterminer la position de la discontinuité à partir de la seule fonction indicatrice de phase filtrée. On rappelle que ce lien entre une vision continue et une vision discontinue des interfaces est nécessaire pour finir de fermer la modélisation que nous avons choisie.

5.8 Illustration des modèles continus proposés dans la zone de transition

On se propose de comparer les modèles τ_{temp}^m et τ_{temp}^{nm} avec le terme sous-maille qu'ils représentent, τ_{temp} , sur un exemple 2D très simple où l'interface est plane. Rappelons l'expression de chacun de ces termes :

$$\tau_{temp} = \overline{\rho \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.73a)$$

$$\tau_{temp}^m = \overline{\bar{\rho} \mathbf{u}} - \bar{\bar{\rho}} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.73b)$$

$$\tau_{temp}^{nm} = \overline{\rho \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.73c)$$

On suppose l'interface localisée en $x = 0$. Comme la masse volumique ρ est constante loin de l'interface, les termes τ_{temp}^m , τ_{temp}^{nm} et τ_{temp} sont nuls pour x suffisamment grand. On choisit le champ de vitesse linéaire à divergence nulle

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u = \frac{x}{T} \\ v = -\frac{y}{T} \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

où T est une constante de temps arbitraire. Les lignes de courant de ce champ de vitesse sont représentées sur la figure 5.27. La masse volumique ne dépendant pas de y , le problème est en réalité 1D ($\tau_{temp} \cdot \mathbf{e}_y = 0$) et on s'intéresse donc uniquement à $\tau_{temp} \cdot \mathbf{e}_x$. Dans ce cas précis, l'opérateur de filtrage s'écrit pour toute fonction, ϕ ,

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{2\Delta} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} \phi(w) dw \quad (5.75)$$

où Δ est l'épaisseur du filtre. On prend pour les valeurs numériques $T = 1 \text{ s}$, $\rho_l = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_g = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et on pose $X = \frac{x}{\Delta}$. Pour les fonctions indicatrices, on a (voir fig.5.28(a)) :

$$\bar{\chi}(X) = \frac{1}{2} ((X+1) \chi(X+1) - (X-1) \chi(X-1)) \quad (5.76a)$$

$$\bar{\bar{\chi}}(X) = \frac{(X+2)^2}{8} \chi(X+2) - \frac{X^2}{4} \chi(X) + \frac{(X-2)^2}{8} \chi(X-2) \quad (5.76b)$$

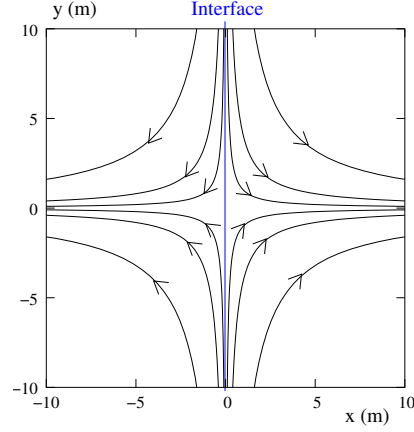


FIG. 5.27 – Lignes de courant

Pour le terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface et les modèles correspondants, on a (voir fig. 5.28(b)) :

$$\tau_{temp}(X) \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\rho_l - \rho_g}{4} (X+1)(X-1) (\chi(X+1) - \chi(X-1)) \quad (5.77a)$$

$$\tau_{temp}^m(X) \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\rho_l - \rho_g}{24} \left((X-1)(X+2)^2 \chi(X+2) - 2X^3 \chi(X) + (X+1)(X-2)^2 \chi(X-2) \right) \quad (5.77b)$$

$$\tau_{temp}^{nm}(X) = \tau_{temp}(X) \quad (5.77c)$$

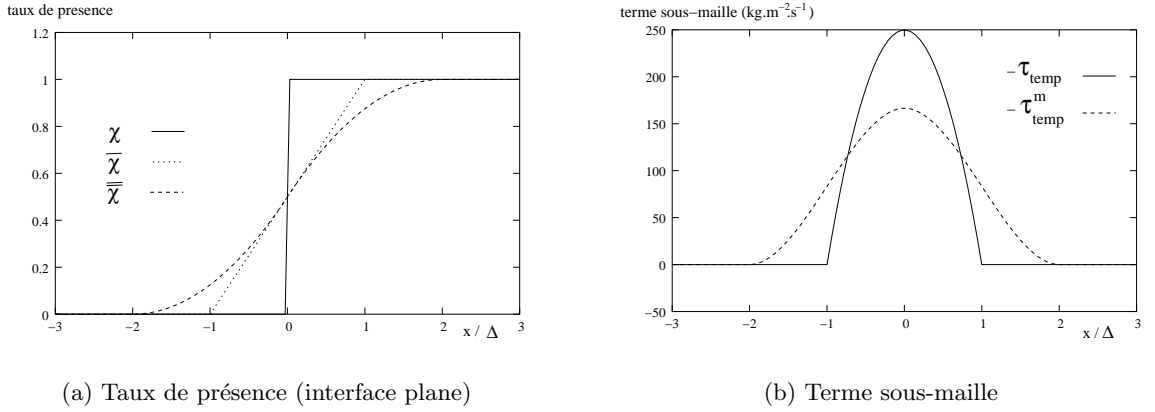


FIG. 5.28 – Epaississement de l'interface

La figure 5.28(b) illustre bien le défaut du modèle initial τ_{temp}^m . Il conduit à un épaississement de l'interface. En particulier, il est non nul à des endroits où le terme qu'il modélise est nul (ici pour $X \in [-2, -1] \cup [1, 2]$). Il n'est cependant pas absurde. En effet, dans ce cas (interface plane et vitesse linéaire) ainsi que dans le cas d'une interface plane et d'une vitesse quadratique, l'intégrale du terme sous-maille et celle associée à son modèle sont rigoureusement égales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{temp}^m(X) dX = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{temp}(X) dX \quad (5.78)$$

Ainsi, si on raisonne en faisant un bilan sur l'épaisseur de la zone de transition (*i.e.* la zone où τ_{temp}^m est non nul), le modèle est excellent : il a la même contribution que le terme exact. Ceci

est dû à la propriété du filtre volumique choisi de laisser inchangées les fonctions affines et de ne faire que décaler d'une constante les fonctions quadratiques. En proche interface, le champ de vitesse est très bien approché par des polynômes au plus d'ordre 2. Par conséquent, les modèles dits de similarité d'échelles réinterprétés sous forme intégrale sont très satisfaisants.

Le nouveau modèle τ_{temp}^{nm} est dans ce cas (interface plane et vitesse linéaire) tout à fait exact (équation (5.77c)) car

- la reconstruction d'une interface plane à partir de la fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ est triviale : il suffit de considérer l'isovaleur 0,5 (fig. 5.28(a)) et
- le filtre choisi laisse inchangées les fonctions affines : $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ (si \mathbf{u} est une fonction linéaire de l'espace).

Nous verrons dans le paragraphe suivant que le lien entre la position de la discontinuité et la fonction indicatrice de phase filtrée est beaucoup plus compliqué dans le cas d'une interface courbe.

5.9 Calcul analytique de l'indicatrice de phase moyennée

Pour fermer le système (5.72), nous avons vu qu'il faut préciser le lien entre l'indicatrice de phase moyennée et la position de la discontinuité. Nous avons mentionné que dans le cas d'une interface plane, la discontinuité était simplement localisée à l'isovaleur 0,5 de l'indicatrice de phase moyennée. On cherche ici à calculer analytiquement l'indicatrice de phase moyennée dans le cas d'une interface courbe. Une fois ce calcul fait, on saura relier la position de la discontinuité à une isovaleur de l'indicatrice de phase moyennée (différente de 0,5 pour une interface courbe) : le système (5.72) sera alors fermé. L'indicatrice de phase moyennée n'est autre que le taux de présence. Il s'agit donc de calculer le volume d'une phase contenu dans le volume de contrôle défini par le filtre. Pour calculer analytiquement l'indicatrice de phase moyennée $\bar{\chi} = \alpha$, on approchera d'abord la surface par sa sphère osculatrice puis par un sphéroïde dont les deux rayons de courbure principaux sont ceux de la surface. Lorsqu'on représente une surface par sa sphère osculatrice, on ne distingue pas ces deux directions principales, on appellera donc cette étude : approche isotrope. La deuxième étude qui tient compte de l'anisotropie de la surface est nommée approche anisotrope.

5.9.1 Approche isotrope

On suppose ici que la bulle (ou la goutte) est une sphère de rayon R_b . On applique un filtre lui aussi sphérique de rayon r . On note e le rapport de ces deux rayons $e = \frac{r}{R_b}$. La situation ainsi définie est parfaitement isotrope et α ne dépend donc que de la distance entre le centre de l'inclusion et celui du filtre. On note (Oz) l'axe passant par ces deux centres et on fixe l'origine à l'intersection de cet axe et de la surface de l'inclusion, on oriente l'axe de façon à ce qu'il sorte de l'inclusion (voir fig. 5.29(a)). Le volume de chaque calotte sphérique est :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi R_b^3}{3} (2 - 3\cos\Theta + \cos^3\Theta) \\ V_2 &= \frac{\pi r^3}{3} (2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta) \end{aligned}$$

Le volume d'intersection des deux sphères est donc :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi R_b^3}{3} (2 - 3\cos\Theta + \cos^3\Theta + e^3(2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta)) \quad (5.79)$$

On utilise alors la relation qui lie les deux angles Θ et θ

$$R_b \sin \Theta = r \sin \theta \quad (5.80)$$

et celle qui lie ces angles à la distance du centre du filtre à la surface de l'inclusion, z :

$$z = R_b(\cos \Theta - 1) + r \cos \theta \quad \text{pour } z \in [-r, r] \quad (5.81)$$

Après quelques opérations, on trouve avec $Z = \frac{z}{R_b}$:

$$\cos \Theta = \frac{Z^2 + 2Z + 2 - e^2}{2(Z + 1)} \quad (5.82a)$$

$$\cos \theta = \frac{Z^2 + 2Z + e^2}{2e(Z + 1)} \quad (5.82b)$$

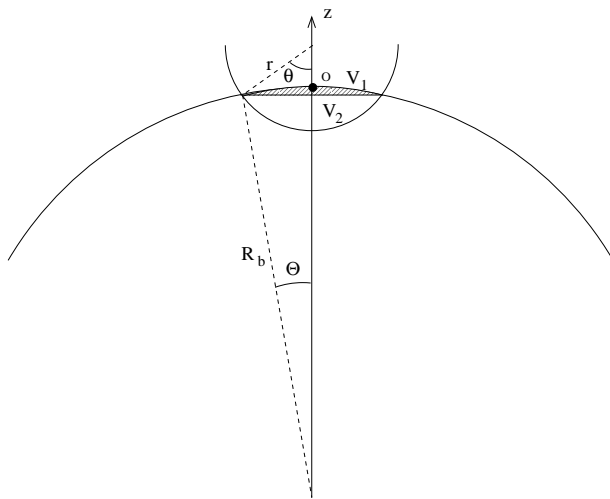
En remplaçant dans l'expression de V (eq. (5.79)) que l'on divise par le volume du filtre, on a :

$$\alpha(e, Z) = \frac{Z^4 + 4Z^3 - 6e^2 Z^2 + 4e^2(2e - 3)Z}{16e^3(Z + 1)} + \frac{1}{Z + 1} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}e \right) \quad \text{pour } Z \in [-e, e] \quad (5.83)$$

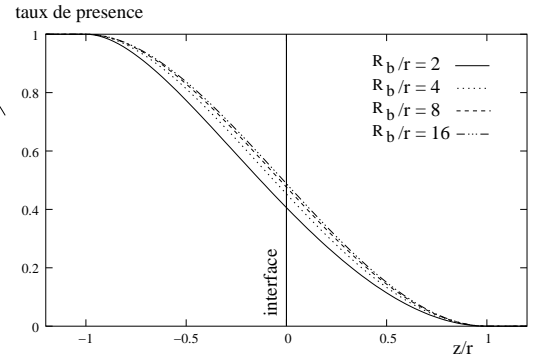
Pour une interface plane, $R_b \rightarrow \infty$ et donc $e \rightarrow 0$, on a bien en $\alpha(z = 0) = \frac{1}{2}$. D'autre part, on a

$$1 - \alpha(e, Z) = \alpha(-e, Z), \quad (5.84)$$

ce qui assure que la relation (eq. (5.83)) est utilisable avec une courbure signée. La figure 5.29(b) trace le taux de présence en fonction de la distance à l'inclusion pour des gouttes ou bulles de rayon de courbure différent. Le profil du taux de présence est d'autant plus dissymétrique que le rayon de courbure de l'inclusion se rapproche de la taille caractéristique du filtre. Par exemple, pour une taille de filtre deux fois plus petites que le rayon de courbure ($\frac{R_b}{r} = 2$), l'isovaleur du taux de présence vaut 0,4 à l'interface. Si on considère qu'elle se trouve à l'isovaleur 0,5 alors, on fait une erreur d'un huitième du rayon de courbure sur sa position.



(a) Notations géométriques (approche isotrope)



(b) Taux de présence en fonction de la courbure

FIG. 5.29 – Taux de présence (interface sphérique)

5.9.2 Approche anisotrope

On procède de la même façon que précédemment mais on ne fait pas l'hypothèse de la sphère osculatrice. Plutôt que de d'approcher la surface par une sphère dont le rayon est égal au rayon de courbure moyen de l'interface, on l'approche par une surface dont la courbure, κ_ϕ , varie linéairement, en fonction de ϕ (l'angle autour de l'axe z), entre les deux courbures principales, κ_1 et κ_2 :

$$\kappa_\phi = \frac{1}{R_\phi} = \frac{2}{\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) \phi + \kappa_1 \quad \text{pour } \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Sur $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, on construit κ_ϕ par symétrie. Si les deux courbures principales ne sont pas de même signe, la courbure de la surface approchée, k_ϕ , passe par zéro. Ce qui correspond bien à une interface localement plane et justifie que l'on puisse faire l'hypothèse d'une variation linéaire de la courbure. En particulier, cette hypothèse de variation linéaire est impossible avec le rayon de courbure, car ce dernier change de signe en passant par l'infini. La figure 5.30 représente des exemples de surfaces ainsi définies.

On se place en coordonnées cylindriques, (l, ϕ, z) . Les notations sont définies par la figure 5.31. Comme précédemment, on distingue les deux parties de l'espace séparées par le plan passant par z_p et orthogonal à l'axe z . Le taux de présence correspond à l'intégrale suivante :

$$\alpha(z_f, r, R_1, R_2) = 4 \int_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{z=z_f-r}^{z=z_p} \int_{l=0}^{l=\sqrt{r^2-(z-z_f)^2}} l \, dl \, dz + \int_{z=z_p}^{z=0} \int_{l=0}^{l=\sqrt{R_\phi^2-(R_\phi+z)^2}} l \, dl \, dz \right) d\phi \quad (5.85)$$

En définissant l'angle θ comme dans le cas isotrope (voir figure 5.31), on a avec les nouvelles notations :

$$z_p = z_f - r \cos \theta \quad (5.86)$$

$$\cos \theta = \frac{z_f^2 + 2z_f R_\phi + r^2}{2r(z_f + R_\phi)} \quad (5.87)$$

$$R_\phi = \frac{1}{\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \phi + \frac{1}{R_1}} \quad (5.88)$$

Après quelques manipulations et l'aide de Maple, on obtient pour $z \in [-r, r]$:

$$\alpha(z, r, R_1, R_2) = \frac{1}{16r^3} (r-z)^2 \left(z + 2r + \frac{3}{z} \left((r+z)^2 \frac{\ln\left(1 + \frac{z}{R_2}\right) - \ln\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}{z \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)} - r^2 \right) \right) \quad (5.89)$$

Cette fonction présente des singularités en $z = 0$ et $R_1 = R_2$. Des développements limités montrent qu'elle est en réalité bien définie et continue pour ces valeurs. En particulier, on retrouve le résultat isotrope quand $R_1 = R_2$.

5.9.3 Conclusion sur le calcul de la fonction indicatrice de phase filtrée

A partir d'une fonction indicatrice de phase filtrée, on sait estimer la courbure moyenne d'une surface [8]. Les calculs précédents permettent de déterminer en fonction de la courbure

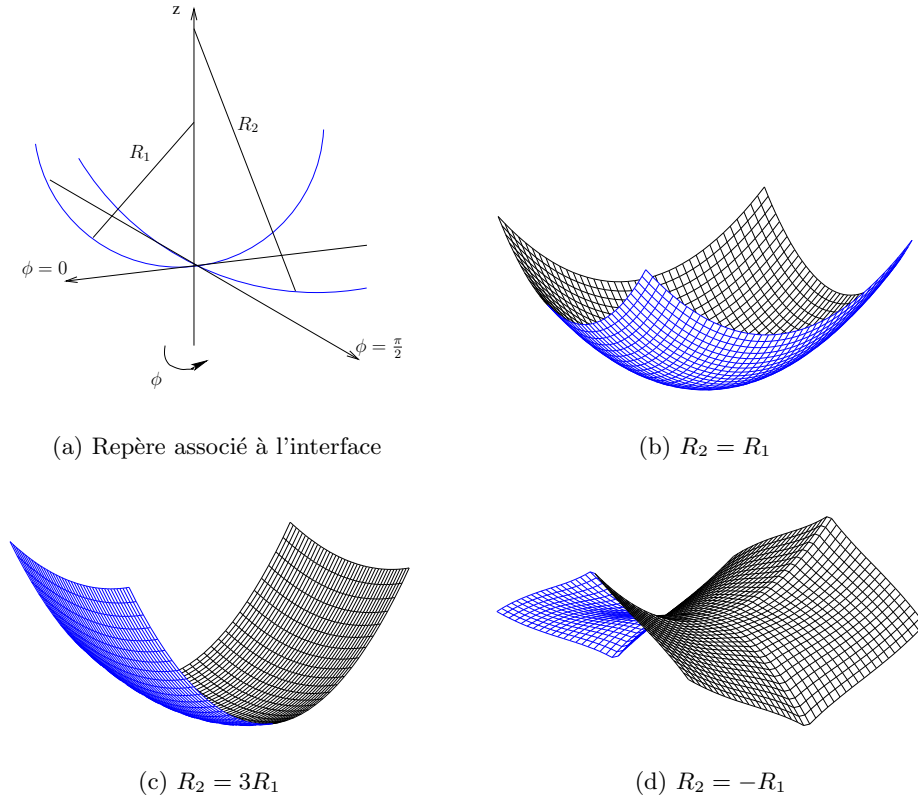
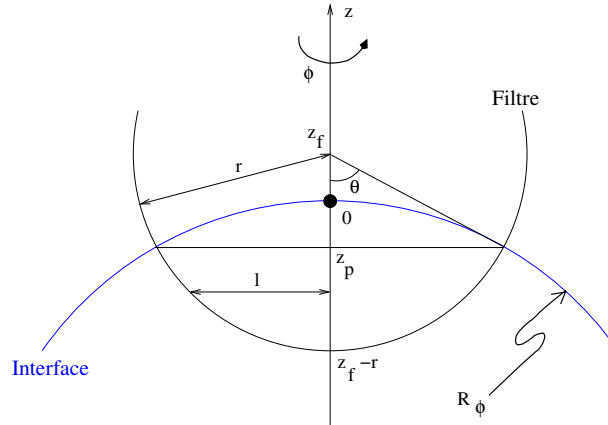
FIG. 5.30 – Description d'une surface par ses rayons de courbure principaux ($R_1 = 1$)

FIG. 5.31 – Notations géométriques (approche anisotrope)

et de la taille du filtre à quelle isovaleur de la fonction indicatrice de phase filtrée se situe l'interface (il suffit d'appliquer les formules 5.83 et 5.89 en $z = 0$). Nous avons donc fait le lien entre une vision continue et une vision discontinue des interfaces : on dispose d'une méthode fine (*i.e.* qui tient compte de la courbure) de reconstruction d'interfaces discontinues à partir d'une fonction indicatrice de phase filtrée (*i.e.* continue). Nous avons vu que plus une interface est courbe, plus l'isovaleur de la fonction indicatrice de phase filtrée où se trouve l'interface est éloignée de 0,5 (la valeur de 0,5 est exacte dans le cas d'une interface plane). Nous verrons dans le chapitre suivant que l'on ne peut pas considérer la position de l'interface comme indépendante de la courbure en la situant systématiquement à l'isovaleur 0,5 de la fonction indicatrice filtrée (on est alors non conservatif en masse). Cependant, plutôt que de développer une véritable méthode de reconstruction des interfaces, on désire utiliser notre

méthode de front-tracking. Nous allons donc transformer le système (5.72) où les interfaces sont continues en un système équivalent où les interfaces sont discontinues. La dépendance de la position de l'interface en fonction de la courbure interviendra naturellement dans la réécriture de l'équation de transport de la fonction indicatrice de phase filtrée en équation de transport pour une interface discontinue.

5.10 Conclusion sur la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces

Dans ce chapitre, nous avons précisé notre stratégie afin de traiter le problème de la discontinuité lorsque l'on filtre les équations. Nous avons fait une présentation rapide de la théorie de la SGE ainsi que de quelques modèles très connus et très utilisés en SGE monophasique. Nous avons alors filtré analytiquement les équations monofluides pour mettre en évidence les termes sous-maille spécifiques au cas diphasique. Puis, grâce aux champs locaux instantanés fournis par les SND que nous avons réalisées, nous avons effectué des tests *a priori* qui nous ont permis de hiérarchiser l'importance relative des différents termes sous-maille et de ne retenir que les termes prépondérants. Enfin, nous avons adapté les modèles de similarité d'échelles à notre problème en proposant une nouvelle décomposition consistante. À partir de tests *a priori* détaillés, nous avons montré le grand potentiel de ces modèles. Afin de pouvoir utiliser réellement ces modèles, nous avons déterminé la position de la discontinuité en fonction de la fonction indicatrice de phase filtrée. Cette étape est cependant délicate et il est probable qu'il soit plus efficace de directement travailler avec une vision discontinue des interfaces.

Dans le chapitre suivant, nous allons chercher l'équivalent du système (5.72) qui suppose une vision continue des interfaces dans le cas où elles sont considérées comme des surfaces de discontinuité. Pour établir ce système équivalent, nous utiliserons le lien que nous avons explicité entre la fonction indicatrice de phase filtrée et la position de l'interface.

SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces : ISS

Nous disposons maintenant d'un système fermé pour la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces. Cependant, la résolution de ce système nécessite de localiser la position de la discontinuité pour estimer les termes sous-maille. De plus, il faudrait pour résoudre numériquement ce système développer une méthode de type interface diffuse. Or, pour que ces méthodes soient intéressantes (non diffusives avec un coût numérique acceptable), il faut minimiser la discrétisation des profils des grandeurs dans la zone de transition en introduisant des mécanismes physiques de relaxation ce qui implique un important travail théorique préalable. Il est donc intéressant de formuler directement le problème avec une vision discontinue des interfaces afin de pouvoir utiliser la méthode numérique dont nous disposons. Cet intérêt pragmatique se double d'un intérêt théorique : quelles conditions de saut vérifient les champs filtrés ? Pour répondre à cette question, on va utiliser les outils de la SND qui permettent d'expliquer les conditions de saut du formalisme monofluide à partir d'une modélisation continue des interfaces. Ces outils sont principalement les développements asymptotiques raccordés (DAR). Nous présenterons d'abord rapidement ces outils puis nous les appliquerons aux équations de la SGE diphasique.

6.1 Intérêt d'une formulation discontinue

6.1.1 Intérêt théorique

En appliquant le filtre à cheval sur la discontinuité, on l'a transformée en une zone continue de transition. Cependant, dans ce cas et contrairement au modèle d'interface diffuse [41], le profil des grandeurs à travers cette zone de transition ne peut pas s'interpréter physiquement. Puisque le système d'équations que nous avons établi est issu d'un formalisme discontinu, il semble judicieux de le comparer au système dont on est parti et donc de revenir à une vision discontinue des interfaces. En particulier, on désire savoir quelles conditions de saut vérifient les grandeurs filtrées et en quoi elles diffèrent des conditions de saut des grandeurs d'origine. De façon générale, on part de deux sous-domaines couplés à leur frontière commune et on cherche à déterminer le couplage qu'il faut appliquer si l'on sous-résout.

6.1.2 Intérêt pratique

L'allure des termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques (par exemple, celui issu de l'accélération dans l'équation de bilan de quantité de mouvement) est représentée sur la figure 5.9(d). Si on désire résoudre numériquement le système (5.72), il faut donc être capable de capturer ce type de profil à l'intérieur de la zone de transition. Ceci pose deux problèmes. Le premier problème consiste à ne pas diffuser ce profil de façon à ce que l'épaisseur sur laquelle le terme est non nul reste bornée. Pour éviter ce problème de diffusion, les méthodes à interface diffuse introduisent, grâce à des considérations thermodynamiques, des mécanismes physiques de relaxation vers un profil d'équilibre. Une autre solution est de développer des schémas numériques non diffusifs. Mais, dans les deux cas, la solution n'est pas immédiate. Le deuxième problème est le coût numérique nécessaire à la discrétisation de ce profil. En effet, les termes sous-maille varient fortement sur une petite épaisseur, ce qui impose *a priori* une taille de mailles trop faible pour être compatible avec l'objectif initial de SGE. L'intérêt du formalisme discontinu est de supprimer ces deux problèmes en ramenant la zone de transition à une surface infiniment mince. Il n'y a alors plus de problème de diffusion, car on peut utiliser les méthodes numériques de SND capables de gérer les discontinuités. Il n'est plus question de mailler finement la zone de transition, car on a transformé les forces volumiques de la zone de transition en forces surfaciques. Enfin, les modèles que nous avons proposés nécessitent de localiser précisément l'interface. Bien que nous ayons déterminé le lien entre zone de transition et position de la discontinuité au paragraphe 5.9, la reconstruction d'une interface en fonction de la courbure risque d'être un problème numérique conséquent. Au contraire, il est facile à partir de la formule (5.83) de reconstruire le profil de la fonction indicatrice de phase filtrée à partir de la position de la discontinuité.

Dans ce chapitre, on présente les outils qui permettent de déterminer un système discontinu équivalent à un problème continu dont les grandeurs varient continûment dans la zone de transition. On les utilise pour déterminer les conditions de saut à l'interface dans le cadre de la SGE pour les écoulements diphasiques. On aboutit ainsi à un système d'équations directement utilisable par n'importe quelle méthode de SND basée sur le formalisme discontinu.

6.2 Présentation des méthodes pour le passage d'une vision continue à une vision discontinue des interfaces

Physiquement, une interface entre deux phases est une zone de transition où, la masse volumique, par exemple, varie continûment. Pourtant, comme l'épaisseur de cette zone de transition est très petite, on représente généralement les interfaces par des surfaces de discontinuité et on détermine les conditions de saut à imposer aux interfaces de façon à respecter la physique à l'échelle moléculaire. Les équations du formalisme monofluide que nous avons décrites au chapitre 1, peuvent être obtenues de cette façon [2]. En les filtrant pour établir un système de la SGE diphasique, on retombe sur une zone volumique de transition dont l'épaisseur est deux fois la taille du filtre. Pour des raisons de coût numérique, on a intérêt en SGE à ce que la taille de la maille soit aussi proche que possible de la taille du filtre. Ainsi, comme pour la SND, on désire ne pas avoir à décrire la physique de cette zone de transition et on cherche les conditions de saut qu'il faut imposer aux interfaces pour tenir compte de cette physique dans une représentation discontinue.

Nous allons décrire les deux méthodes que nous avons utilisées pour déterminer les équations du concept ISS. Nous les illustrerons par des exemples connus en SND afin de

faire un parallèle avec notre démarche.

6.2.1 Analyse générique des processus interfaciaux

Principe de la méthode

La méthode que l'on présente rapidement ici est décrite en détail dans l'ouvrage de Edwards *et al.* [23]. Cette analyse distingue deux types de représentations des interfaces suivant la distance où se place l'observateur. Edwards parle de représentation *macroscopique* lorsque l'observateur n'est pas capable de distinguer les longueurs de l'ordre de l'épaisseur de la zone de transition et voit alors un champ, $\tilde{\phi}$, discontinu à l'interface. Il parle de représentation *microscopique* lorsque l'observateur ne voit pas d'interface mais une zone volumique de transition et un champ, $\bar{\phi}$, qui varie continûment. Les champs $\bar{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ ne diffèrent que dans la zone de transition (*i.e.* à proximité de l'interface) comme l'illustre la figure 6.1. Le lien entre les champs microscopique et macroscopique se fait grâce à la notion de grandeur en excès. La valeur en excès d'une grandeur est l'intégrale de la différence entre les représentations microscopique et macroscopique dans la zone interfaciale et par unité de surface. On la note $(\bar{\phi})^{ex}$

$$\int_A (\bar{\phi})^{ex} dS = \int_V (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dV \quad (6.1a)$$

où V est le volume de contrôle défini dans la zone interfaciale et A la portion d'interface incluse dans ce volume. Lorsque le rapport de l'épaisseur de la zone de transition¹ δ et de l'échelle de grandeur macroscopique, par exemple le rayon de courbure de l'interface R_b , tend vers zéro, on a deux autres définitions équivalentes pour les champs surfaciques $(\bar{\phi})^{ex}$. On peut définir la grandeur en excès à partir du flux de la grandeur $\bar{\phi}$ à travers la frontière ∂V du volume de contrôle V . En notant ∂A le contour de la surface A incluse dans ce volume, on a :

$$\int_{\partial A} (\bar{\phi})^{ex} d\mathbf{L} = \int_{\partial V} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) d\mathbf{S} \quad (6.1b)$$

La relation suivante est encore vérifiée

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) d\xi_3 \quad (6.1c)$$

où ξ_3 représente la distance signée à l'interface. Dans l'annexe B, on discute de l'équivalence de ces trois définitions dans le cas d'une interface sphérique (voir aussi [23]). Graphiquement, cette grandeur en excès est représentée par la partie hachurée de la figure 6.1. Elle est associée à l'interface et permet d'exprimer les conditions de saut des grandeurs macroscopiques.

L'avantage de cette approche réside dans son caractère générique. Une fois les règles pour déterminer les équations des grandeurs en excès établies, on peut les appliquer à des équations de bilan générique comme le font Edwards *et al.* [23]. Elle permet donc de connaître rapidement la forme générale des conditions de saut. En revanche, puisque les valeurs en excès dépendent des grandeurs microscopiques, les conditions de saut que l'on obtient ne sont pas fermées. Cette analyse nécessite donc une étape de modélisation supplémentaire pour fermer le problème. Bien que moins générique, la méthode des développements asymptotiques raccordés inclut l'étape de modélisation et aboutit à un problème fermé.

¹La zone de transition est la zone où les grandeurs microscopique et macroscopique diffèrent.

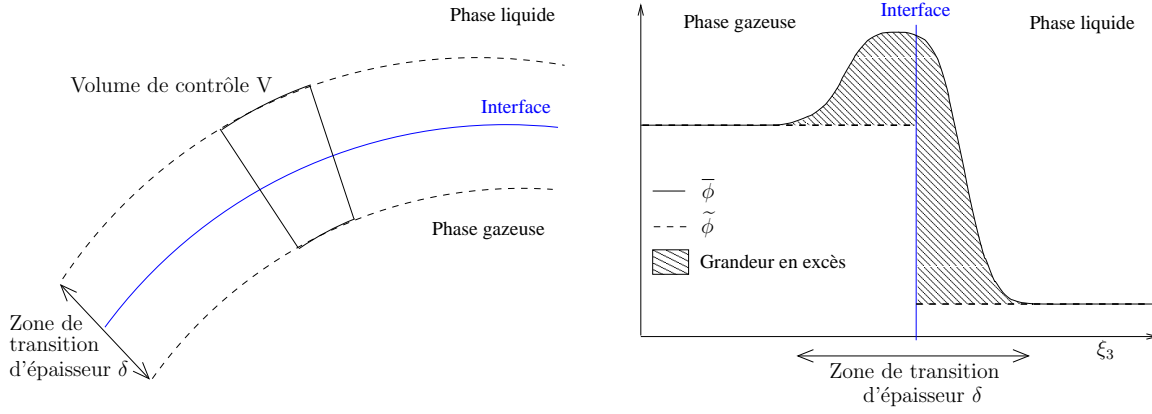


FIG. 6.1 – Définition du volume de contrôle associé à la zone de transition interfaciale et d'une grandeur en excès

Origine volumique de la tension de surface

Pour illustrer la méthode générique d'analyse des processus interfaciaux, on présente le cas de la tension interfaciale. Dans le cadre d'un modèle d'interface diffuse, on peut montrer que l'équation de bilan de quantité de mouvement se met sous la forme suivante

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = -\nabla \cdot (\bar{p}\mathbf{I} + \lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) \quad (6.2)$$

où $\bar{\rho}$ est la masse volumique du fluide, \bar{p} sa pression, $\bar{\mathbf{u}}$ sa vitesse, λ le coefficient de capillarité interne supposé constant pour des raisons de simplicité et où $d/dt \equiv \partial/\partial t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla$ est la dérivée convective. Le tenseur non sphérique $\lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}$ est le tenseur de Korteweg qui permet de comprendre l'origine volumique de la tension de surface comme on le montre par la suite. On s'intéresse au système à l'équilibre. L'équilibre est caractérisé par une vitesse nulle. L'équation de bilan de quantité de mouvement se met alors sous la forme :

$$\nabla \cdot (\bar{p}\mathbf{I} + \lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) = 0 \quad (6.3)$$

Cette équation est l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre pour l'échelle microscopique. L'application de la méthode présentée sur des équations génériques par Edwards *et al.* [23] à cette équation particulière est relativement immédiate et on peut trouver directement le résultat. On choisit ici de détailler les différentes étapes de raisonnement afin d'illustrer la philosophie de la méthode. Puisque, loin des interfaces, la masse volumique est constante par phase, le champ macroscopique de la pression, \tilde{p}_k , vérifie dans chacune des phases ($k = l$ dans la phase liquide et $k = g$ dans la phase gazeuse) à l'équilibre :

$$\nabla \cdot (\tilde{p}_k \mathbf{I}) = 0 \quad (6.4)$$

Cette équation est l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre pour l'échelle macroscopique. Soit V le volume de contrôle représenté par la figure 6.2. On décompose ce volume de contrôle de la façon suivante :

$$V = \bar{V}_I \oplus \bar{V}_{II} \oplus A \quad (6.5)$$

Le volume \bar{V}_I est associé à la phase liquide ($k = l$) et \bar{V}_{II} à la phase gazeuse ($k = g$). A représente la surface de l'interface comprise dans le volume V . On note ∂V la frontière du volume V et $\partial \bar{V}_I$ (respectivement $\partial \bar{V}_{II}$) la frontière du volume \bar{V}_I (respectivement \bar{V}_{II}).

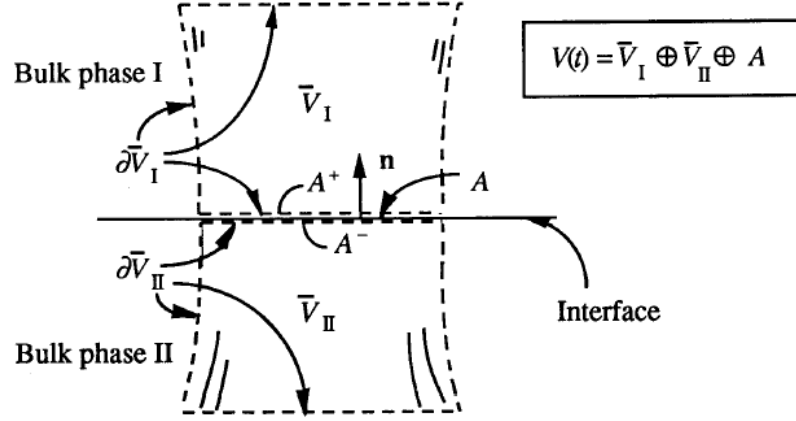


FIG. 6.2 – Décomposition du volume de contrôle en trois parties : une partie interfaciale et deux volumes de contrôle phasique d'après Edwards *et al.* [23]

En utilisant le théorème de la divergence surfacique, l'intégration de l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'échelle microscopique (6.3) fournit :

$$\int_{\partial V} (\bar{p}\mathbf{I} + \lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.6)$$

De même, l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'échelle macroscopique (6.4) de la phase liquide (respectivement de la phase gazeuse) est intégrée sur le volume de contrôle \bar{V}_I (respectivement \bar{V}_{II}). En utilisant à nouveau le théorème de la divergence surfacique, on trouve respectivement :

$$\int_{\partial \bar{V}_I} \tilde{p}_l \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.7a)$$

$$\int_{\partial \bar{V}_{II}} \tilde{p}_g \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.7b)$$

Remarquons que la somme des flux à travers les frontières $\partial \bar{V}_I$ et $\partial \bar{V}_{II}$ correspond au flux à travers la frontière ∂V auquel il faut retrancher le flux à travers la surface A^+ pour $\partial \bar{V}_I$ et le flux à travers la surface A^- pour $\partial \bar{V}_{II}$:

$$\int_{\partial \bar{V}_I} \tilde{p}_l \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} - \int_{A^+} \tilde{p}_l \mathbf{I} \cdot d\mathbf{A}^+ + \int_{\partial \bar{V}_{II}} \tilde{p}_g \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} - \int_{A^-} \tilde{p}_g \mathbf{I} \cdot d\mathbf{A}^- = \int_{\partial V} \tilde{p} \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.8)$$

Par conséquent, en additionnant les deux équations (6.7a) et (6.7b) et en utilisant la normale à l'interface sortante de la phase gazeuse, \mathbf{n} (voir fig. 6.2), on trouve

$$\int_{\partial V} \tilde{p} \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = \int_A (\tilde{p}_l - \tilde{p}_g) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A [\tilde{p}] \mathbf{n} dA \quad (6.9)$$

où $[\tilde{p}] = \tilde{p}_l - \tilde{p}_g$ représente le saut de pression au niveau de l'interface. En soustrayant l'équation précédente (6.9) à l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'échelle microscopique intégrée sur le volume V (6.6), on a :

$$\int_{\partial V} (\bar{p}\mathbf{I} + \lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial V} \tilde{p} \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = - \int_A [\tilde{p}] \mathbf{n} dA \quad (6.10)$$

D'après la définition des grandeurs en excès (6.1b), on reconnaît dans le membre de gauche de l'équation précédente le flux du tenseur des contraintes le long de la courbe ∂A :

$$\int_{\partial V} \left((\bar{p} - \tilde{p}) \mathbf{I} + (\lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho} - 0) \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial A} \left((\bar{p})^{ex} \mathbf{I} + (\lambda \nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho})^{ex} \right) \cdot d\mathbf{L} \quad (6.11)$$

Le membre de droite de l'expression précédente se réécrit en utilisant le théorème de la divergence surfacique (voir paragraphe C.10 de l'annexe C)

$$\int_{\partial A} \left((\bar{p})^{ex} \mathbf{I} + (\lambda \nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p})^{ex} \right) \cdot d\mathbf{L} = \int_A \nabla_s \cdot \left(\mathbf{P} \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{I}) + \mathbf{P} \cdot (\lambda \nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p})^{ex} \right) dA \quad (6.12)$$

où $\nabla_s \cdot$ est l'opérateur de divergence surfacique et \mathbf{P} est le projecteur sur la surface². Ces deux opérateurs sont définis respectivement au paragraphe C.5.2 et par l'équation (C.23) dans l'annexe C. Puisqu'à l'équilibre, $\nabla \bar{p}$ est un vecteur normal à l'interface, on peut écrire :

$$\nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p} = \|\nabla \bar{p}\|^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (6.13)$$

De plus, $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0$, donc l'équation (6.11) devient :

$$\int_{\partial V} ((\bar{p} - \tilde{p}) \mathbf{I} + (\lambda \nabla \bar{p} \otimes \nabla \bar{p} - 0)) \cdot d\mathbf{S} = \int_A \nabla_s \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{P}) dA \quad (6.14)$$

En égalant le membre de droite de cette dernière expression à celui de l'équation (6.10), on trouve :

$$- \int_A [\tilde{p}] \mathbf{n} dA = \int_A \nabla_s \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{P}) dA \quad (6.15)$$

Ce résultat étant valable pour toute portion A de l'interface, on a finalement :

$$- [\tilde{p}] \mathbf{n} = \nabla_s \cdot ((\bar{p})^{ex} \mathbf{P}) \quad (6.16)$$

Par définition de la courbure moyenne κ et du projecteur sur la surface \mathbf{P} , on a l'égalité :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{P} = \kappa \mathbf{n} \quad (6.17)$$

Enfin, à l'équilibre, la pression \bar{p} est indépendante des coordonnées tangentielles à l'interface, elle ne dépend que de la distance à l'interface³. Par conséquent, à l'équilibre, le gradient surfacique, ∇_s , de la grandeur en excès de la pression est nul :

$$\nabla_s (\bar{p})^{ex} = 0 \quad (6.18)$$

Ainsi, en notant la tension de surface

$$\sigma \hat{=} (\bar{p})^{ex} \quad (6.19)$$

et en décomposant le membre de droite de l'équation (6.16), on retrouve la relation de Laplace :

$$- [\tilde{p}] \mathbf{n} = \sigma \kappa \mathbf{n} \quad (6.20)$$

A partir d'une description continue de la physique des interfaces, nous avons montré comment l'analyse générique des processus interfaciaux permet, en faisant des bilans sur des volumes de contrôle, de déterminer la forme générale des conditions de saut d'un problème discontinu équivalent. Sans refaire toutes les étapes du raisonnement précédent, nous utiliserons la philosophie de cette méthode pour trouver les conditions de saut des équations de la SGE diphasique à partir de la description continue que nous avons établie au chapitre précédent.

²Le projecteur sur la surface \mathbf{P} correspond à l'opérateur identité pour les champs surfaciques tangents. C'est la raison pour laquelle il est parfois noté \mathbf{I}_s .

³Le fait que la pression soit indépendante des coordonnées tangentielles est cohérent avec l'hypothèse que le gradient de masse volumique est un vecteur normal.

6.2.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés

Principe de la méthode

La méthode des développements asymptotiques raccordés permet de trouver les solutions approchées d'équations différentielles où deux échelles de longueurs d'ordre de grandeur très différent interviennent. Lorsque l'on adimensionnalise les équations, le rapport de ces deux échelles de longueur fait apparaître un petit paramètre que l'on notera ϵ . Dans notre cas, la petite échelle de longueur correspond à la taille du filtre, c'est-à-dire la taille de l'interface épaissie (car filtrée). Elle est donc égale à l'épaisseur de la zone de transition entre les deux phases monophasiques. On la note δ . Toujours dans notre cas, la grande échelle de longueur est le rayon de la sphère osculatrice de la bulle. On le note R_b . Finalement, on a : $\epsilon = \frac{\delta}{R_b}$. La première étape de la méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à séparer le domaine en différentes sous-régions : les régions *extérieures* où les grandeurs varient lentement et une région *intérieure* où les grandeurs varient rapidement. Les régions extérieures sont bien sûr les parties monophasiques du domaine et la région intérieure correspond à la zone de transition qui se situe en proche interface. Un bon exemple de grandeur dont les variations sont soit lentes, soit rapides, suivant la région où l'on se trouve, est la masse volumique. En effet, on la suppose constante dans les régions extérieures et elles varient rapidement dans la région intérieure (voir fig. 5.3, 5.5 et 5.29(b) du chapitre précédent). Dans la deuxième étape de cette méthode, on effectue, dans la région intérieure, un changement de variable suivant la direction normale afin de tenir compte des variations rapides des grandeurs physiques. Cela revient à dilater la direction normale et donc, à lui donner une importance prédominante par rapport aux directions tangentielles. Les équations différentielles sont alors écrites à différents ordres à l'aide d'un développement asymptotique en ϵ . On les résout séparément dans chacune des régions, extérieures et intérieure. La dernière étape consiste à raccorder les solutions obtenues dans les différentes régions grâce aux conditions de raccord (on les explicite au paragraphe 6.4.5) valable quand ϵ tend vers zéro [104]. Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, la zone de transition tend vers une surface de discontinuité. Les solutions des régions extérieures sont les solutions approchées de ce nouveau problème discontinu. On l'appelle problème discontinu équivalent car il ne diffère du précédent que dans la zone de transition. Ainsi, à partir de la résolution d'une équation différentielle simplifiée dans la région intérieure, on dérive analytiquement les conditions de saut à appliquer entre les solutions des problèmes des régions extérieures.

Un exemple simple

Cette méthode nous permettra d'exprimer les conditions de saut des grandeurs filtrées à appliquer à l'interface. On disposera alors d'un système d'équations pour la SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces. Avant d'appliquer cette méthode à l'étude complexe des écoulements diphasiques et turbulents, on la présente sur un exemple simple pour illustrer les différentes étapes que nous venons de décrire. On se place dans le système de coordonnées généralisées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) lié à l'interface discontinue équivalente. (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Dans l'annexe C, on définit plus complètement ce système de coordonnées. L'interface est située en $\xi_3 = 0$, la phase gazeuse (indice g) pour $\xi_3 < 0$ et la phase liquide (indice l) pour $\xi_3 > 0$. On suppose que le champ de vitesse filtrée est monodimensionnel,

stationnaire, qu'il dépend uniquement de ξ_3 et qu'il est la solution du système suivant :

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi_3}(\xi_3, \epsilon) \sqrt{\xi_3^2 + \epsilon^2} - \bar{u}(\xi_3, \epsilon) = 0 \quad (6.21a)$$

$$\bar{u}(1, \epsilon) = 1 \quad (6.21b)$$

Dans le cas de système très simple, on trouve facilement la solution exacte :

$$\bar{u}(\xi_3, \epsilon) = \frac{\xi_3 + \sqrt{\xi_3^2 + \epsilon^2}}{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad (6.22)$$

Première étape : définition des différentes régions La région intérieure est ici le voisinage de l'origine. Les régions extérieures sont de part et d'autre du plan $\xi_3 = 0$ pour ξ_3 suffisamment grand.

Deuxième étape : changement de variable et développement en ϵ Comme on s'attend à des variations d'ordre 1 dans la région intérieure, on effectue le changement de variable suivant :

$$\xi \hat{=} \frac{\xi_3}{\epsilon} \quad (6.23a)$$

$$\bar{u}(\xi_3, \epsilon) = \check{\bar{u}}(\xi, \epsilon) \quad (6.23b)$$

En introduisant cette nouvelle variable ξ dans l'équation (6.21a), on trouve :

$$\frac{d\check{\bar{u}}}{d\xi}(\xi, \epsilon) \sqrt{\xi^2 + 1} - \check{\bar{u}}(\xi, \epsilon) = 0 \quad (6.24)$$

Pour résoudre cette équation, on cherche généralement la solution sous la forme d'un développement en ϵ :

$$\check{\bar{u}}(\xi, \epsilon) = \check{\bar{u}}^0(\xi) + \epsilon \check{\bar{u}}^1(\xi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.25)$$

A l'ordre 0, l'équation (6.24) s'écrit pour la région intérieure :

$$\frac{d\check{\bar{u}}^0}{d\xi}(\xi) \sqrt{\xi^2 + 1} - \check{\bar{u}}^0(\xi) = 0 \quad (6.26)$$

En faisant le changement de fonction inconnue $\check{\bar{u}}^0(\xi) = e^{f(\xi)}$, on se ramène à :

$$\frac{df}{d\xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (6.27)$$

Il faut alors faire appel à de vieux souvenirs

$$\frac{d\text{Argsh}}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (6.28a)$$

$$\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad (6.28b)$$

où $\text{Argsh} = \text{sh}^{-1}$ avec $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Finalement, en notant c^0 la constante d'intégration de l'ordre 0, on a :

$$\check{\bar{u}}^0(\xi) = c^0(\xi + \sqrt{1 + \xi^2}) \quad (6.29)$$

Pour résoudre l'équation dans les régions extérieures, on cherche également la solution sous la forme d'un développement en ϵ mais sans faire de changement de variable :

$$\bar{u}(\xi_3, \epsilon) = \bar{u}^0(\xi_3) + \epsilon \bar{u}^1(\xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.30)$$

A l'ordre 0, l'équation (6.24) s'écrit pour les régions extérieures :

$$\frac{d\bar{u}^0}{d\xi_3}(\xi_3) |\xi_3| - \bar{u}^0(\xi_3) = 0 \quad (6.31)$$

Avec le même changement de fonction inconnue que pour la région intérieure, on trouve respectivement pour les phases gazeuses et liquides :

$$\bar{u}_g^0(\xi_3) = \frac{c_g^0}{\xi_3} \quad (6.32a)$$

$$\bar{u}_l^0(\xi_3) = c_l^0 \xi_3 \quad (6.32b)$$

A cette étape de la méthode, parmi les trois constantes d'intégration que nous avons introduites, seule celle correspondant à la solution dans la région extérieure liquide, c_l^0 , peut être déterminée. En effet, on ne dispose que d'une condition aux limites, $\bar{u}(1, \epsilon) = 1$, et elle concerne la région extérieure liquide. Elle fournit $c_l^0 = 1$. Les autres constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions de raccord.

Troisième étape : application des conditions de raccord L'interface étant située en $\xi_3 = 0$, le principe de raccord s'écrit (voir paragraphe 6.4.5) :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \bar{u}^0 = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \bar{u}^0 \quad (6.33)$$

En l'appliquant d'abord côté liquide ($\xi_3 > 0$), on trouve que $c^0 = 0$ ce qui implique côté gaz ($\xi_3 < 0$) $c_g^0 = 0$. Finalement, on a les solutions suivantes :

$$\bar{u}^0(\xi) = 0 \quad \text{pour la région intérieure} \quad (6.34a)$$

$$\bar{u}_g^0(\xi_3) = 0 \quad \text{pour la région extérieure gazeuse } (\xi_3 < 0) \quad (6.34b)$$

$$\bar{u}_l^0(\xi_3) = \xi_3 \quad \text{pour la région extérieure liquide } (\xi_3 > 0) \quad (6.34c)$$

En faisant tendre ϵ vers zéro, on se ramène à un problème discontinu (la zone de transition est d'épaisseur nulle). La méthode des développements asymptotiques raccordés nous a permis de montrer, dans ce cas précis, qu'à l'ordre 0 le champ de vitesse est continu en valeur et discontinu en dérivée :

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} \bar{u}_l^0 - \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^-} \bar{u}_g^0 = 0 \quad (6.35a)$$

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} \frac{d\bar{u}_l^0}{d\xi_3} - \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^-} \frac{d\bar{u}_g^0}{d\xi_3} = 1 \quad (6.35b)$$

A l'ordre 1, les solutions dans les régions extérieures sont nulles, la solution dans la région intérieure est :

$$\bar{u}^1(\xi) = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}}{2} \quad (6.36)$$

La solution approchée (définie comme la somme des solutions intérieure et extérieures moins la valeur du raccord entre les solutions), \bar{u}_{app} est alors :

$$\bar{u}_{app}(\xi_3, \epsilon) = \frac{\xi_3 + \sqrt{\xi_3^2 + \epsilon^2}}{2} \quad (6.37)$$

La figure 6.3 représente les solutions extérieures liquide et gazeuse, approchée et exacte pour $\epsilon = 0, 1$. On constate que les solutions extérieures sont de très bonnes approximations de la solution exacte dès que l'on est suffisamment loin de l'interface.

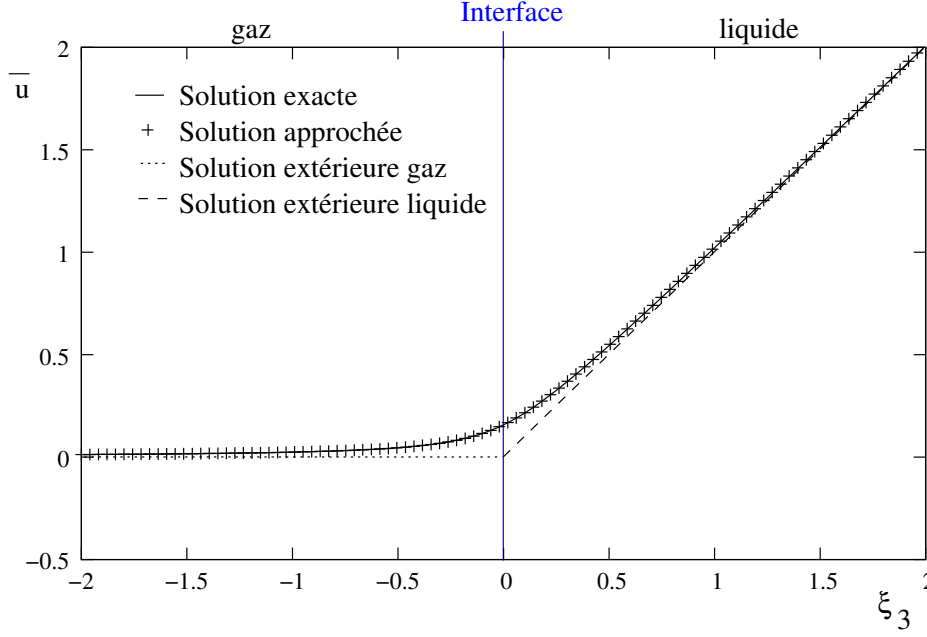


FIG. 6.3 – Solutions d'un problème discontinue équivalent obtenues grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés

Finalement, en définissant le champ de vitesse du problème discontinu \tilde{u} comme l'ordre 0 du champ de vitesse des régions extérieures \bar{u}^0

$$\tilde{u} = \bar{u}^0, \quad (6.38)$$

on a établi le système discontinu équivalent suivant

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi_3}(\xi_3) |\xi_3| - \tilde{u}(\xi_3) = 0 \quad \text{pour } \xi_3 \neq 0 \quad (6.39a)$$

$$\tilde{u}(1) = 1 \quad (6.39b)$$

$$[\tilde{u}] = 0 \quad \text{pour } \xi_3 = 0 \quad (6.39c)$$

où $[\tilde{u}]$ représente le saut de vitesse.

Origine volumique de la tension de surface

L'exemple précédent est formel, l'équation différentielle dont on est parti était adimensionnée. Or, une des étapes préliminaires essentielles de la méthode des développements asymptotiques raccordés est l'étape d'adimensionnalisation. Afin d'illustrer cette étape ainsi que les similitudes entre l'analyse générique des processus interfaciaux et la méthode des développements asymptotiques raccordés, on reprend l'exemple de l'origine volumique de la tension de surface. Avant d'adimensionnaliser l'équation (6.3), on la réécrit sous une forme équivalente mais plus simple à analyser mathématiquement. On montre facilement que :

$$\nabla \cdot (\nabla \bar{\rho} \otimes \nabla \bar{\rho}) = \nabla \left(\frac{\|\nabla \bar{\rho}\|^2}{2} \right) + (\Delta \bar{\rho}) \nabla \bar{\rho} \quad (6.40)$$

En supposant comme précédemment que λ est une constante, l'équation (6.3) peut donc se réécrire sous la forme suivante :

$$\nabla \bar{p} + \lambda \left(\nabla \left(\frac{\|\nabla \bar{\rho}\|^2}{2} \right) + (\Delta \bar{\rho}) \nabla \bar{\rho} \right) = 0 \quad (6.41)$$

La résolution de cette équation d'équilibre pour une interface plane⁴ fournit l'ordre de grandeur de la tension de surface (définie par la relation (6.19))

$$\sigma \sim \lambda \frac{[\bar{\rho}]}{\delta} \quad (6.42)$$

où $[\bar{\rho}] = \rho_l - \rho_g$ représente le saut de masse volumique et δ l'épaisseur de la zone de transition. L'ordre de grandeur de la pression s'exprime naturellement en fonction de la tension de surface, σ , et du rayon de courbure de la sphère osculatrice à l'interface, R_b :

$$\bar{p} \sim \frac{\sigma}{R_b} \quad (6.43)$$

En remplaçant, dans l'expression précédente, la tension de surface par son ordre de grandeur donné par l'équation (6.42), on trouve :

$$\bar{p} \sim \lambda \frac{[\bar{\rho}]}{R_b \delta} \quad (6.44)$$

En adimensionnalisant la pression comme nous venons de le préciser, la masse volumique $\bar{\rho}$ par le saut de masse volumique $[\bar{\rho}]$, et en prenant le rayon de courbure de la sphère osculatrice comme longueur caractéristique (on se sert de cette longueur pour adimensionnaliser les opérateurs de dérivation), on trouve la forme adimensionnée de l'équation (6.41)

$$\nabla \bar{p} + \epsilon \left(\nabla \left(\frac{\|\nabla \bar{\rho}\|^2}{2} \right) + (\Delta \bar{\rho}) \nabla \bar{\rho} \right) = 0 \quad (6.45)$$

avec

$$\epsilon = \frac{\delta}{R_b} \quad (6.46)$$

Pour des raisons de commodité de notation, on note les grandeurs adimensionnalisées comme les grandeurs elles-mêmes. Le paramètre adimensionné ϵ est très petit devant 1. C'est le petit paramètre des développements asymptotiques raccordés.

Comme dans l'exemple précédent, on utilise les coordonnées généralisée (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . On suppose que l'interface est située en $\xi_3 = 0$, la phase gazeuse (indice g) pour $\xi_3 < 0$ et la phase liquide (indice l) pour $\xi_3 > 0$.

Première étape : définition des différentes régions Comme on vient de le préciser, la région intérieure est ici le voisinage de l'origine $-\delta \leq \xi_3 \leq \delta$. Les régions extérieures vérifient respectivement $\xi_3 > \delta$ et $\xi_3 < -\delta$.

Deuxième étape : changement de variable et développement en ϵ Comme on s'attend à des variations d'ordre 1 dans la région intérieure, on effectue le changement de variable suivant :

$$\xi \hat{=} \frac{\xi_3}{\epsilon} \quad (6.47a)$$

$$\bar{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \check{\bar{p}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) \quad (6.47b)$$

$$\bar{\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \check{\bar{\rho}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) \quad (6.47c)$$

⁴On ne présente pas dans ce mémoire la résolution de cette équation d'équilibre pour une interface plane, mais on la trouvera par exemple dans [2].

Les variables du système sont alors elles aussi développées en ϵ :

$$\check{\bar{p}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \check{\bar{p}}^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi) + \check{\bar{p}}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.48a)$$

$$\check{\bar{\rho}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) = \check{\bar{\rho}}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon \check{\bar{\rho}}^1(\xi_1, \xi_2, \xi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.48b)$$

Il est important de noter que la pression et la masse volumique ne commencent pas au même ordre. C'est l'analyse des ordres de grandeur des variations de la pression et de la masse volumique sur la solution, pour une interface plane, de l'équation (6.3) qui permet de connaître *a priori* l'ordre le plus bas en ϵ de ces grandeurs (voir par exemple [2]). En introduisant cette nouvelle variable et ces développements en ϵ dans l'équation (6.45), on trouve dans la direction normale à l'interface :

– à l'ordre -1 en ϵ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^{-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} = 0 \quad (6.49a)$$

– à l'ordre 0 en ϵ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^0 + \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi^2} + (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} = 0 \quad (6.49b)$$

où κ_1 et κ_2 sont les courbures des directions principales ξ_1 et ξ_2 .

En utilisant simplement les règles de dérivation d'un produit,

$$\frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \quad (6.50a)$$

$$\frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} \right) \quad (6.50b)$$

les équations (6.49a) et (6.49b) se réécrivent respectivement

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^{-1} + \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \right) = 0 \quad (6.51a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\bar{p}}^0 + 2 \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} \right) + \kappa \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 = 0 \quad (6.51b)$$

où $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ est la courbure moyenne. Ces équations s'intègrent facilement et on trouve :

$$\check{\bar{p}}^{-1} = c^{-1}(\xi_1, \xi_2) - \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 \quad (6.52a)$$

$$\check{\bar{p}}^0 = c^0(\xi_1, \xi_2) - 2 \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\bar{\rho}}^1}{\partial \xi} - \kappa \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{\partial \check{\bar{\rho}}^0}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (6.52b)$$

De même que pour le problème extérieur, la pression extérieure est développée en ϵ . C'est à nouveau la résolution du problème à l'équilibre pour une interface plane qui permet de connaître l'ordre le plus faible en ϵ du développement de la pression. Pour le problème extérieur, on commence à l'ordre 0 :

$$\bar{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \bar{p}^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \epsilon \bar{p}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.53)$$

A l'ordre 0 en ϵ , l'équation projetée dans chacune des directions ξ_i s'écrit pour le problème extérieur :

$$\frac{\partial \bar{p}^0}{\partial \xi_i} = 0 \quad (6.54)$$

Cette relation indique que la pression est uniforme au sein de chaque phase.

Troisième étape : application des conditions de raccord L'application des conditions de raccord (voir paragraphe 6.4.5) à l'ordre -1 en ϵ fournit $c^{-1} = 0$. A l'ordre 0, et en repassant sous forme dimensionnelle, on a :

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} \bar{p}^0 - \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^-} \bar{p}^0 = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \bar{p}^0 - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \bar{p}^0 = \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi_3} \right)^2 d\xi_3 \quad (6.55)$$

Finalement, puisqu'à l'ordre -1

$$\sigma = (\bar{p}^{-1})^{ex} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{\partial \bar{p}^0}{\partial \xi_3} \right)^2 d\xi_3 \quad (6.56)$$

(voir eq. (6.19) et (6.52a) ainsi que la définition de la grandeur en excès (6.1c)), en posant $\tilde{p} = \bar{p}^0$, on trouve, à l'équilibre, au problème discontinu équivalent trivial suivant

$$\nabla \tilde{p} = 0 \quad \text{pour } \xi_3 \neq 0 \quad (6.57a)$$

$$[\tilde{p}] = \sigma \kappa \quad \text{en } \xi_3 = 0 \quad (6.57b)$$

où la dernière relation n'est autre que la relation de Laplace.

Par rapport à l'analyse générique des processus interfaciaux, la méthode des développements asymptotiques permet d'aller plus loin dans l'étape de fermeture du problème discontinu équivalent. En effet, l'analyse d'Edwards *et al.* [23] nous avait seulement permis d'exprimer le saut de pression du problème discontinu en fonction de la grandeur en excès associée à la pression de l'échelle microscopique. Avec les développements asymptotiques raccordés, on l'a déterminé en fonction des variations de la masse volumique et, en se donnant une loi d'état reliant la pression et la masse volumique, on pourrait fermer complètement le problème.

Analogie avec notre problème

La figure 6.4 trace, à l'ordre -1, l'allure de la pression à l'échelle microscopique. Nous avons vu que la grandeur en excès de la pression qui correspond à l'aire située sous la courbe était en fait la tension de surface. L'allure du terme sous-maille issu de la dérivée temporelle de l'équation de bilan de quantité de mouvement, τ_{temp} , (fig. 5.9(d)) est identique à celle de la pression à l'échelle microscopique (fig. 6.4). On s'attend à ce que la grandeur en excès de ce terme sous-maille intervienne dans l'expression des conditions de saut du problème discontinu équivalent. Puisque les valeurs asymptotiques sont égales de part et d'autre de la discontinuité (le terme sous-maille est nul loin des interfaces), la valeur de la grandeur en excès, qui lui est associée, est indépendante de la localisation de la discontinuité équivalente. On parle alors de grandeur intrinsèque. Lorsque la grandeur en excès dépend de la position de la discontinuité équivalente (c'est le cas pour la masse volumique par exemple), il faut faire intervenir des notions de conservation.

On a expliqué comment l'analyse générique des processus interfaciaux permet de déterminer la forme des conditions de saut que doit respecter le problème discontinu équivalent. Il est intéressant de remarquer que le formalisme monofluide permet, en écrivant les équations au sens des distributions, de reprendre la philosophie d'étude sous la forme de bilan sans écrire explicitement les intégrales. Ainsi, l'équivalent de la relation (6.9) s'obtient immédiatement au sens des distributions grâce au formalisme monofluide. Les deux étapes de bilan d'abord sur chacune des phases (6.7) puis sur le volume incluant l'interface (6.8) ont leur équivalent en formalisme monofluide. Elles correspondent respectivement à la multiplication d'une équation de la phase k par la fonction indicatrice de phase $\tilde{\chi}_k$ et à la sommation

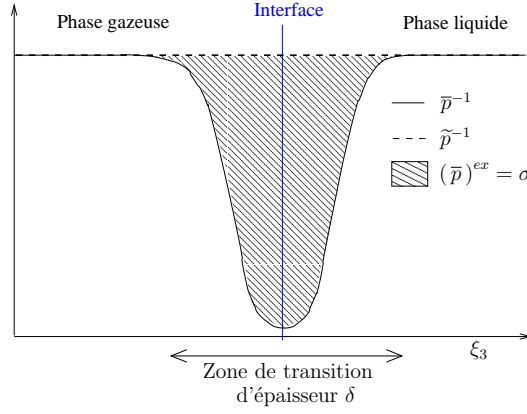


FIG. 6.4 – Allure du profil à l'équilibre de l'ordre -1 des champs de pression macroscopique et microscopique. Définition de la tension de surface comme une grandeur en excès

des équations de chacune des phases. En effet, en multipliant l'équation (6.4) par la fonction indicatrice de phase $\tilde{\chi}_k$, on a dans chaque région extérieure ($k = l$ dans la phase liquide et $k = g$ dans la phase gazeuse) :

$$\nabla \cdot (\tilde{\chi}_k \tilde{p}_k \mathbf{I}) = \tilde{p}_k \nabla \tilde{\chi}_k \quad (6.58)$$

En ajoutant l'équation précédente écrite pour la phase liquide ($k = l$) et celle écrite pour la phase gazeuse ($k = g$), on retrouve bien l'équivalent de la relation (6.9) obtenue grâce à l'analyse générique des processus interfaciaux

$$\nabla \cdot (\tilde{p} \mathbf{I}) = [\tilde{p}] \mathbf{n} \delta_\sigma \quad (6.59)$$

où on a utilisé la propriété $\nabla \chi_g = -\mathbf{n} \delta_\sigma$ (avec δ_σ la fonction de Dirac associée à l'interface) et où $[\tilde{p}] = \tilde{p}_l - \tilde{p}_g$ représente le saut de pression. Il est important de noter que la dernière équation n'apporte aucune information nouvelle. Elle permet uniquement de savoir la forme des relations de saut que l'on cherche à fermer. On n'a pas déterminé à quoi doit être égal le saut de pression, on a simplement mis en évidence que l'on aura besoin de le préciser si on veut résoudre le problème discontinu. Etant donnés deux domaines adjacents où on résout un système d'équations différentielles, le formalisme monofluide permet donc de préciser rapidement quelles relations de saut à la frontière des deux domaines on doit se donner pour fermer le problème.

Dans le paragraphe suivant, on écrit le système SGE diphasique que nous avons établi au chapitre précédent tel qu'il dégénère loin des phases, c'est-à-dire dans les régions extérieures. Puis, à l'aide du formalisme monofluide, on détermine la forme des conditions de saut que l'on cherche à déterminer grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés.

6.3 Objectifs

On cherche ici à résoudre un système équivalent au système établi au chapitre précédent. Pour ce nouveau système, on cherche à ramener la zone continue de transition à une simple discontinuité. *A priori*, on aboutit de cette façon à un problème similaire à celui que l'on aurait directement trouvé en appliquant séparément un filtre dans chacune des phases. Cette dernière façon de faire n'épaissit pas l'interface car aucun des volumes de prise de moyenne ne contient l'interface. Elle est cependant délicate car les volumes de prise de moyenne dépendent alors nécessairement du temps et de l'espace et le filtre ne commute donc plus avec les dérivées. De plus, il est difficile de définir dans ce contexte la notion d'interface filtrée. Ce sont ces

différentes raisons qui nous ont conduits à passer par l'étape précédente en faisant apparaître une zone continue de transition. Les équations que l'on doit résoudre dans chacune des phases loin de la discontinuité se déduisent du système (5.72) en prenant la masse volumique, ρ , et la viscosité, μ , constantes ainsi que $\bar{\delta}_\sigma$ nul puisqu'on est loin des interfaces. Le fait que la masse volumique soit constante dans les phases implique en particulier que le tenseur sous-maille issu de l'accélération est nul loin des interfaces $\frac{\partial \rho \bar{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0$. En notant respectivement la vitesse et la pression solution de ce nouveau problème $\widetilde{\mathbf{u}}_k$ et \widetilde{p}_k , on trouve donc respectivement pour l'équation de continuité et l'équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}}_k = 0 \quad (6.60a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k \widetilde{\mathbf{u}}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k) &= -\nabla \widetilde{p}_k + \nabla \cdot (\mu_k (\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \widetilde{\mathbf{u}}_k)) \\ &\quad + \nabla \cdot \left(\rho_k \left(\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k - \overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.60b)$$

Les équations précédentes correspondent aux équations de la SGE monophasique classique lorsque l'on fait l'hypothèse de similarité d'échelle. On désire résoudre ces équations jusqu'à la position de la discontinuité et non seulement loin de l'interface. Etant données les équations que l'on résout dans deux domaines adjacents, il faut alors trouver (i) la forme des conditions aux limites que l'on doit se donner, (ii) une fermeture de ces conditions aux limites pour que le problème soit fermé, (iii) le lieu où on impose ces conditions aux limites. Le problème ainsi défini est équivalent au problème continu (5.72). Comme nous l'avons illustré sur l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre (voir eq. (6.59)), le formalisme monofluide permet de réaliser l'étape (i), *i.e.* il permet de préciser la forme des conditions aux limites que l'on doit se donner. Dans la suite et afin d'alléger les équations, on adoptera les notations :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_k &\triangleq \widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k - \overline{\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k} \\ \widetilde{\mathbf{S}}_k &\triangleq \mu_k (\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \widetilde{\mathbf{u}}_k) \end{aligned}$$

En multipliant par la fonction indicatrice de phase du problème filtré discontinu, $\widetilde{\chi}_k$, chacune de ces équations et en les sommant, on a une première idée de la forme des conditions de saut qu'il nous faudra fermer

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}} - \sum_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = 0 \quad (6.61a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\rho} \widetilde{\mathbf{u}} \otimes \widetilde{\mathbf{u}}) &= -\nabla \widetilde{p} + \nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{S}}) \\ &\quad + \sum_k \left(\widetilde{p}_k \mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{S}}_k \right) \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \\ &\quad + \nabla \cdot (\widetilde{\rho} \widetilde{\mathcal{L}}) \\ &\quad + \sum_k \rho_k \left(\widetilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \left(\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k - \widetilde{\mathcal{L}}_k \right) \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \right) \end{aligned} \quad (6.61b)$$

où chaque grandeur monofluide $\widetilde{\phi}$ est définie par $\widetilde{\phi} \triangleq \sum_k \widetilde{\chi}_k \widetilde{\phi}_k$. Ce système n'est pas fermé. En effet, on a fait apparaître la forme des relations de saut à l'interface mais, on ne peut pas à ce stade les exprimer en fonction de grandeurs monofluides : les termes de somme sur l'indice k font intervenir les grandeurs phasiques et non les grandeurs monofluides. Dans le cadre de l'analyse générique des processus interfaciaux, cette étape correspond à celle où on a uniquement travaillé sur les équations des régions extérieures. L'étape de fermeture utilise les équations du problème intérieur pour exprimer les conditions de saut en fonction des grandeurs en excès. On rappelle que dans le cas de la SND, on considère :

– l'équation de transport

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (6.62a)$$

- la relation de saut issue du bilan de masse

$$\sum_k \mathbf{u}_k \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (6.62b)$$

- la relation de saut issue du bilan de quantité de mouvement

$$\sum_k (p_k \mathbf{I} - \mathbf{S}_k) \cdot \nabla \chi_k = \sigma \nabla_s \cdot \mathbf{n} \quad (6.62c)$$

Les modèles de SND qui utilisent une représentation continue des interfaces fournissent des conditions de saut équivalente lorsqu'on fait tendre l'épaisseur de la zone de transition vers zéro. L'objectif de ce chapitre est de déterminer les conditions de saut que fournissent les équations de la SGE avec une vision continue des interfaces lorsqu'on fait tendre l'épaisseur de la zone interfaciale vers zéro : quel est l'équivalent des conditions de sauts (6.62) pour les grandeurs filtrées ? Comme on l'a fait apparaître dans le système (6.61), on cherche donc à préciser :

- la vitesse, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, de la discontinuité équivalente, $\widetilde{\chi}_k$

$$\frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \mathbf{v}_{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k = 0 \quad (6.63a)$$

- la relation de saut issue du bilan de masse filtré

$$\sum_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \quad (6.63b)$$

- la relation de saut issue du bilan de quantité de mouvement filtré

$$\sum_k \left(\rho_k \widetilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial t} + \left(\widetilde{p}_k \mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{S}}_k + \rho_k \left(\widetilde{\mathbf{u}}_k \otimes \widetilde{\mathbf{u}}_k - \widetilde{\mathcal{L}}_k \right) \right) \cdot \nabla \widetilde{\chi}_k \right) \quad (6.63c)$$

Trouver une fermeture des expressions (6.63b) et (6.63c) correspond à l'étape (ii) mentionnée ci-dessus. Exprimer la vitesse, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, de la discontinuité équivalente, $\widetilde{\chi}_k$, revient à réaliser l'étape (iii) puisque cette étape consiste à préciser le lieu où on impose les relations de saut. Cette étape est aussi délicate qu'essentielle. Elle est essentielle car un des premiers objectifs d'ISS est bien sûr de prédire précisément la position des interfaces. Son caractère délicat est lié au fait que la position de la discontinuité dépend de la courbure ainsi qu'à l'existence des corrélations entre la vitesse et la normale. Ce sont les deux raisons pour lesquelles, contrairement à la SND, on ne peut pas dans le cadre de la SGE diphasique, transporter l'interface avec la vitesse monofluide. Une grande partie de la suite de ce chapitre est dédiée à la détermination de la vitesse de l'interface filtrée $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$. L'analyse des processus interfaciaux s'appuyant sur la distinction de deux échelles de longueur permet d'exprimer ces sauts en fonction de grandeurs intégrales. Edwards *et al.* ([23, Chapitres 15-16]) appliquent cette méthode d'analyse à des équations bilans génériques (voir paragraphe 6.2.1). Cependant, ils ne proposent pas de fermeture pour les grandeurs intégrales. Chandesris et Jamet [12] reprennent cette philosophie d'étude pour déterminer les conditions aux limites entre un milieu libre et un milieu poreux. Pour fermer les grandeurs intégrales, ils utilisent la méthode des développements asymptotiques raccordés. La méthode des développements asymptotiques raccordés que l'on a décrite au paragraphe 6.2.2 est une méthode classiquement utilisée par la communauté *phase-field* [2] ainsi que par de nombreux autres auteurs [21, 103, 104]. Grâce à cette méthode, à ces conditions de raccord (voir paragraphe 6.4.5) et aux équations de la SGE continue (*i.e.* SND filtrée), on va préciser ces relations de saut ainsi que la vitesse, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, de la discontinuité équivalente $\widetilde{\chi}_k$.

6.4 Application de la méthode des développements asymptotiques raccordés

6.4.1 Adimensionnalisation des équations

Les équations que l'on adimensionnalise sont celles du système de la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces (5.72). Les échelles caractéristiques du problème sont les suivantes :

- R_b , le rayon de la sphère osculatrice,
- V_T , la vitesse terminale de la bulle,
- δ , l'épaisseur de la zone de transition du problème filtré continu, *i.e.* la taille du filtre,
- g_n , la norme du vecteur gravité,
- ρ_l et μ_l la masse volumique et la viscosité dynamique de la phase liquide⁵.

On introduit les variables adimensionnelles suivantes :

- $\nabla = \frac{1}{R_b} \nabla^+$,
- $\mathbf{u} = V_T \mathbf{u}^+$,
- $t = \frac{R_b}{V_T} t^+$,
- $t = \frac{\delta}{V_T} t_{interf}^+$,
- $p = \rho_l V_T^2 p^+$,
- $\rho = \rho_l \rho^+$ et $\mu = \mu_l \mu^+$.

On a introduit deux temps adimensionnels. Ceci est dû au fait que l'on considère **une seule** vitesse caractéristique et **deux** échelles de longueur. Le temps adimensionnel t_{interf}^+ n'intervient que lorsque les échelles de longueur concernées sont caractérisées par l'épaisseur de la zone de transition, δ . Ceci est typiquement le cas du modèle du terme de sous-maille τ_{temp} dans l'équation de bilan de quantité de mouvement (5.72c) et de l'indicatrice filtrée $\bar{\chi}_k$ dans l'équation de transport de l'interface (5.72b). Les nombres adimensionnels nécessaires à l'écriture des équations adimensionnalisées sont :

- $\epsilon = \frac{\delta}{R_b}$,
- $Re = \frac{\rho_l V_T R_b}{\mu_l}$, le nombre de Reynolds de bulle,
- $Fr = \frac{V_T}{\sqrt{g_n R_b}}$, le nombre de Froude,
- $We = \frac{\rho_l V_T^2 R_b}{\sigma}$, le nombre de Weber.

L'équation de bilan de quantité de mouvement (1.16c) s'écrit avec les choix précédents :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^+ \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \nabla^+ \cdot (\rho^+ \mathbf{u}^+ \otimes \mathbf{u}^+) &= -\nabla^+ p^+ \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla^+ \cdot (\mu^+ (\nabla^+ \mathbf{u}^+ + \nabla^{+T} \mathbf{u}^+)) \\ &+ \frac{1}{Fr^2} \rho^+ \mathbf{g}^+ + \frac{\kappa^+}{We} \nabla^+ \chi_g \end{aligned} \quad (6.64)$$

⁵On choisit les grandeurs de la phase liquide pour adimensionnaliser nos équations car les nombres adimensionnels que l'on utilise dans ce mémoire et plus généralement dans la littérature consacrée aux écoulements à bulles, sont basés sur les grandeurs de la phase liquide.

Dans la suite, on omet l'exposant $+$ par souci de clarté. Comme la gravité ne pose pas de problème de modélisation, on se restreint (sans perte de généralité) à l'étude sans gravité. Les équations du système (5.72) s'écrivent avec les choix précédents :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (6.65a)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k + \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k = 0 \quad (6.65b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) &= -\nabla \bar{p} \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})}{\partial t} \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \bar{\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}})) \\ &+ \frac{\kappa}{We} \nabla \bar{\chi}_g \end{aligned} \quad (6.65c)$$

L'apparition du facteur $\frac{1}{\epsilon}$, devant le premier terme du membre de gauche de l'équation de transport de la zone de transition (6.65b) et devant le second terme du membre de droite de l'équation de bilan de quantité de mouvement (6.65c), est due à leur échelle de longueur caractéristique. En effet, puisque ces deux termes n'existent que dans le problème intérieur (ils sont nuls dans les régions extérieures), leur échelle de longueur caractéristique est obligatoirement l'épaisseur de la zone de transition, δ . En revanche, le premier terme du membre de droite de l'équation de bilan de quantité de mouvement existe à la fois dans le problème intérieur et extérieur. Par conséquent, pour ce terme, on a le choix entre l'échelle de longueur macroscopique R_b et l'échelle de longueur microscopique δ . Puisque l'on concentre notre étude sur l'interface, on choisit de considérer que le caractère instationnaire de l'interface est prépondérant devant celui du champ de vitesse. On décide donc d'adimensionnaliser l'accélération en utilisant l'échelle de longueur macroscopique ce qui explique l'absence de facteur $\frac{1}{\epsilon}$ devant ce terme. Comme nous le verrons, ce choix a pour conséquence qu'à l'ordre 0 en ϵ l'interface se déplace alors que le champ de vitesse est stationnaire. Le caractère stationnaire de la vitesse simplifie bien sûr énormément les calculs qui suivent et qui sont déjà relativement fastidieux...

6.4.2 Choix du système de coordonnées

La fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ dont dépendent la viscosité dynamique $\bar{\mu}$ et la masse volumique $\bar{\rho}$ varie rapidement dans la direction normale à l'interface mais pas suivant les directions tangentielles. Pour dilater la direction normale à l'interface, on se place dans le système de coordonnées généralisées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) lié à l'interface discontinue équivalente. (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Dans l'annexe C, on définit ce système de coordonnées et on réécrit les opérateurs gradient et divergence dans cette base.

6.4.3 Problème intérieur

Pour étudier le problème intérieur, une nouvelle variable d'espace est introduite :

$$\xi \hat{=} \frac{\xi_3}{\epsilon}, \quad \text{avec} \quad \epsilon \hat{=} \frac{\delta}{R_b} \quad (6.66)$$

On réécrit le système (6.65) en utilisant cette nouvelle variable d'espace. Ceci a pour conséquence de faire apparaître un facteur $1/\epsilon$ devant les dérivées suivant la direction normale. Soit ϕ une grandeur physique, on pose :

$$\check{\phi}(\xi_1, \xi_2, \xi) = \phi(\xi_1, \xi_2, \frac{\xi_3}{\epsilon}) \quad (6.67)$$

Dans la région intérieure, on cherche les solutions sous la forme :

$$\check{\phi}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) = \check{\phi}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon \check{\phi}^1(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon^2 \check{\phi}^2(\xi_1, \xi_2, \xi) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.68)$$

La fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ dont dépendent la viscosité et la masse volumique varie fortement dans la zone de transition dans la direction normale à l'interface. On fait l'hypothèse que ces variations sont en ξ_3/ϵ . Cela signifie simplement que ces variations sont indépendantes du facteur de dilatation ou encore que le développement en ϵ de $\check{\bar{\chi}}_k$ est réduit à l'ordre 0 : $\check{\bar{\chi}}_k = \check{\bar{\chi}}_k^0$.

Equation de continuité

Dans ce paragraphe et dans ceux qui suivent, on utilise les facteurs d'échelle de chaque direction principale, h_1 et h_2 , ainsi que les courbures principales, κ_1 et κ_2 (voir l'annexe C pour plus de détail). La notation $\check{\bar{u}}(i)$ désigne la composante i du vecteur $\check{\bar{\mathbf{u}}}$ dans le repère associé à l'interface, $\{\mathbf{g}_i\}$ (les directions 1 et 2 sont les directions principales de l'interface et la direction 3 est la direction normale à l'interface, voir annexe C). D'après l'équation (C.40) de l'annexe C, il vient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \check{\bar{\mathbf{u}}} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[h_2 \frac{\partial \check{\bar{u}}(1)}{\partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial \check{\bar{u}}(2)}{\partial \xi_2} + h_1 h_2 \frac{\partial \check{\bar{u}}(3)}{\epsilon \partial \xi} - \check{\bar{u}}(3)(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1) \right. \\ \left. - \epsilon \xi \left(\check{\bar{u}}(1) \frac{\partial \kappa_2}{\xi_1} + \check{\bar{u}}(2) \frac{\partial \kappa_1}{\xi_2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.69)$$

En injectant la relation (6.68) appliquée à $\phi = \bar{u}(i)$ dans l'équation (6.69) multipliée par $h_1 h_2$ et en utilisant le développement limité de h_i au premier ordre ($h_i = 1 - \epsilon \xi \kappa_i + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $i = 1, 2$), on a :

– à l'ordre 0

$$\frac{\partial \check{\bar{u}}^0(3)}{\partial \xi} = 0 \quad (6.70a)$$

– à l'ordre 1 (en utilisant (6.70a))

$$\frac{\partial \check{\bar{u}}^0(1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \check{\bar{u}}^0(2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \check{\bar{u}}^1(3)}{\partial \xi} - \check{\bar{u}}^0(3)(\kappa_1 + \kappa_2) = 0 \quad (6.70b)$$

Equation de bilan de quantité de mouvement

On note :

$$\mathbf{T} \hat{=} \overline{\rho \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \quad (6.71a)$$

$$\mathbf{C} \hat{=} \overline{\rho \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \bar{\bar{\mathbf{u}}} \quad (6.71b)$$

$$\check{\mathbf{T}} \hat{=} \overline{\rho \check{\bar{\mathbf{u}}} - \check{\bar{\rho}} \check{\bar{\mathbf{u}}}} \quad (6.71c)$$

$$\check{\mathbf{C}} \hat{=} \overline{\rho \check{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \check{\bar{\mathbf{u}}} - \check{\bar{\rho}} \check{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \check{\bar{\mathbf{u}}}} \quad (6.71d)$$

Dans les équations précédentes, l'utilisation du symbole \breve pour la masse volumique, ρ , est inutile car il s'agit d'une fonction discontinue, constante de part et d'autre de l'interface. Dans la suite, on notera par exemple \mathbf{C}^0 l'ordre 0 du tenseur \mathbf{C} . Cette définition n'est pas ambiguë car $\overline{\phi^0} = \breve{\phi}^0$. En effet, ϵ est un petit paramètre indépendant des coordonnées d'espace. D'autre part, afin d'alléger les équations, on utilise la notation suivante pour la dérivée partielle par rapport à la composante i :

$$\phi_{,i} \hat{=} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \quad (6.72)$$

En raisonnant comme avec l'équation de continuité, la relation (6.65c) projetée sur \mathbf{g}_1 s'écrit grâce à la formule de la divergence d'un tenseur (C.43a) de l'annexe C :

– à l'ordre 0

$$\left(\breve{\mu} \breve{u}^0(1)_{,3} \right)_3 = 0 \quad (6.73a)$$

– à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \left(\breve{\rho} \breve{u}^0(1) \breve{u}^0(3) \right)_{,3} &= -\frac{\partial \breve{T}^0}{\partial t}(1) - \left(\breve{C}_{13}^0 \right)_{,3} \\ &+ \frac{1}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^1(1)_{,3} + \breve{\mu} \breve{u}^0(3)_{,1} + \kappa_1 \breve{\mu} \breve{u}^0(1) \right)_{,3} \\ &- \frac{\kappa_1}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(1)_{,3} + \xi \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(1)_{,3} \right)_{,3} \right) - \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(1)_{,3} \right) \end{aligned} \quad (6.73b)$$

Grâce à la formule de la divergence d'un tenseur (C.43b), on a pour la relation (6.65c) projetée sur \mathbf{g}_2 :

– à l'ordre 0

$$\left(\breve{\mu} \breve{u}^0(2)_{,3} \right)_3 = 0 \quad (6.74a)$$

– à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \left(\breve{\rho} \breve{u}^0(2) \breve{u}^0(3) \right)_{,3} &= -\frac{\partial \breve{T}^0}{\partial t}(2) - \left(\breve{C}_{23}^0 \right)_{,3} \\ &+ \frac{1}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^1(2)_{,3} + \breve{\mu} \breve{u}^0(3)_{,2} + \kappa_2 \breve{\mu} \breve{u}^0(2) \right)_{,3} \\ &- \frac{\kappa_2}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(2)_{,3} + \xi \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(2)_{,3} \right)_{,3} \right) - \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(2)_{,3} \right) \end{aligned} \quad (6.74b)$$

Grâce à la formule de la divergence d'un tenseur (C.43c), on a pour la relation (6.65c) projetée sur \mathbf{g}_3 :

– à l'ordre 0

$$\left(\breve{\mu} \breve{u}^0(3)_{,3} \right)_3 = 0 \quad (6.75a)$$

– à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \left(\breve{\rho} \breve{u}^0(3) \breve{u}^0(3) \right)_{,3} &= -\frac{\partial \breve{T}^0}{\partial t}(3) - \left(\breve{C}_{33}^0 \right)_{,3} \\ &- \breve{p}_{,3} + \frac{1}{We} \kappa \chi_{g,3} + \frac{2}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^1(3)_{,3} \right)_{,3} \\ &+ \frac{1}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(1)_{,3} \right)_{,1} + \frac{1}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(2)_{,3} \right)_{,2} \\ &- \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{Re} \left(\breve{\mu} \breve{u}^0(3)_{,3} \right) \end{aligned} \quad (6.75b)$$

6.4.4 Problème extérieur

Dans ce problème, on se place loin de la zone interfaciale. L'indicatrice de phase et par suite la masse volumique et la viscosité sont supposées constantes par phase. Les solutions du problème extérieur, $\bar{\mathbf{u}}_k$ et \bar{p}_k , sont recherchées sous la forme :

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \phi_k^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \epsilon \phi_k^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.76)$$

En injectant cette relation dans le système (6.65) et en constatant que l'indicatrice de phase constante fait dégénérer vers zéro certains termes sous-maille, on a :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_k = 0 \quad (6.77a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial t} \bar{\mathbf{u}}_k + \nabla \cdot (\bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k) &= -\nabla \bar{p}_k \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\rho}_k (\bar{\bar{\mathbf{u}}}_k \otimes \bar{\bar{\mathbf{u}}}_k - \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k)) \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\mu}_k (\nabla \bar{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}_k)) \end{aligned} \quad (6.77b)$$

On remarque (sans surprise) que les termes qui dégènèrent vers zéro lorsqu'on se trouve loin de la zone interfaciale sont les termes interfaciaux. Dans l'équation de quantité de mouvement en particulier, il s'agit du terme qui avait un coefficient $\frac{1}{\epsilon}$ en facteur. De façon rassurante, on constate également que ce système correspond aux équations de la SGE monophasique classique lorsque l'on modélise les corrélations de la vitesse par l'hypothèse de similarité d'échelles.

6.4.5 Raccord entre la région intérieure et les régions extérieures

On détermine les conditions de raccord d'une grandeur ϕ (notée $\check{\phi}$ dans la région intérieure) en supposant que, pour les régions extérieures, l'interface est positionnée en $\xi_3 = 0$ et que, dans la région intérieure, on atteint asymptotiquement la valeur des régions extérieures :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \check{\phi} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \phi \quad (6.78)$$

Ceci signifie qu'on suppose le paramètre ϵ suffisamment petit pour que $\xi_3 \rightarrow 0$ alors que $\xi = \frac{\xi_3}{\epsilon} \rightarrow \infty$. Pour écrire les conditions de raccord aux différents ordre, on identifie les coefficients des polynômes en ϵ de $\check{\phi}$ et du développement limité de ϕ en 0. On trouve :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \check{\phi}^0 = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \phi^0 \quad (6.79a)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left(\check{\phi}^1 - \xi \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d\phi^0}{d\xi_3} \right) = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \phi^1 \quad (6.79b)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{\phi}^0}{d\xi} = 0 \quad (6.79c)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{\phi}^1}{d\xi} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d\phi^0}{d\xi_3} \quad (6.79d)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\check{\phi}^2}{d\xi} - \xi \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d^2\phi^0}{d\xi_3^2} \right) = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d\phi^1}{d\xi_3} \quad (6.79e)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d^2\check{\phi}^2}{d\xi^2} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d^2\phi^0}{d\xi_3^2} \quad (6.79f)$$

On trouvera le détail des développements limités justifiant ces conditions de raccord dans la thèse de C. Fouillet [30] et le livre de D. Zwillinger [104].

6.4.6 Relations de saut pour le problème extérieur à l'ordre 0

Conditions de saut sur la vitesse

L'ordre 0 de l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure projetée sur les vecteurs tangents à l'interface (eqs. (6.73a) et (6.74a)) implique que

$$\check{\check{u}}^0(i)_{,3} = \frac{Cte_i}{\check{\check{\mu}}} \quad i = 1, 2 \quad (6.80)$$

avec Cte_1 et Cte_2 deux fonctions indépendantes de ξ . Comme $\check{\check{\mu}}$ est borné par μ_g et μ_l , la condition de raccord (6.79c) implique que $Cte_1 = Cte_2 = 0$ et donc que :

$$\check{\check{u}}^0(i)_{,3} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (6.81)$$

On en déduit que $\check{\check{u}}^0(1)$ et $\check{\check{u}}^0(2)$ sont indépendants de ξ . La condition de raccord (6.79a), nous permet d'en conclure que les composantes tangentielles de la vitesse sont continues à l'ordre 0 :

$$\check{\check{u}}^0(1) = \check{\check{u}}^0(1)|_+ = \check{\check{u}}^0(1)|_- \quad (6.82a)$$

$$\check{\check{u}}^0(2) = \check{\check{u}}^0(2)|_+ = \check{\check{u}}^0(2)|_- \quad (6.82b)$$

L'ordre 0 de l'équation de continuité de la région intérieure (eq. (6.70a)) implique que $\check{\check{u}}^0(3)$ est indépendant de ξ . D'après la condition de raccord (6.79a), on en déduit que la composante normale de la vitesse est continue à l'ordre 0 :

$$\check{\check{u}}^0(3) = \check{\check{u}}^0(3)|_+ = \check{\check{u}}^0(3)|_- \quad (6.82c)$$

Conditions de saut sur les tenseurs

On a vu que $\check{\check{\mathbf{u}}}^0$ est indépendant de ξ (eq. (6.82)). Les relations (6.73b), (6.74b) et (6.75b) se réécrivent donc sous forme dimensionnelle :

$$\left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(1)_{,3} \right)_{,3} + \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,1} \right)_{,3} + \kappa_1 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(1) \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(1) + \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(1) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{13}^0 \right)_{,3} \quad (6.83a)$$

$$\left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(2)_{,3} \right)_{,3} + \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,2} \right)_{,3} + \kappa_2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(2) \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(2) + \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(2) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{23}^0 \right)_{,3} \quad (6.83b)$$

$$-\check{\check{p}}_{,3}^0 + \sigma \overline{\kappa \chi_{g,3}} + 2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(3)_{,3} \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(3) + \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(3) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{33}^0 \right)_{,3} \quad (6.83c)$$

En intégrant les équations précédentes (6.83) sur l'épaisseur de la zone de transition, on trouve :

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(1)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,1} + \kappa_1 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(1) \right) \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(1)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,1} + \kappa_1 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(1) \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(1) d\xi + \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(1) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{13}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(1) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{13}^0 \right) \quad (6.84a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(2)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,2} + \kappa_2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(2) \right) \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^1(2)_{,3} + \check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(3)_{,2} + \kappa_2 \left(\check{\check{\mu}} \check{\check{u}}^0(2) \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\check{T}}^0}{\partial t}(2) d\xi + \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(2) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{23}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\check{\rho}} \check{\check{u}}^0(2) \check{\check{u}}^0(3) + \check{\check{C}}_{23}^0 \right) \quad (6.84b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(2 \left(\check{\bar{\mu}} \check{\bar{u}}^1(3)_{,3} \right) - \check{\bar{p}}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(2 \left(\check{\bar{\mu}} \check{\bar{u}}^1(3)_{,3} \right) - \check{\bar{p}}^0 \right) + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(3) d\xi + \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\check{\bar{\rho}} \check{\bar{u}}^0(3) \check{\bar{u}}^0(3) + \check{C}_{33}^0 \right) - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left(\check{\bar{\rho}} \check{\bar{u}}^0(3) \check{\bar{u}}^0(3) + \check{C}_{33}^0 \right) \quad (6.84c)
\end{aligned}$$

Les conditions de raccord (6.79a) et (6.79d) permettent d'écrire les équations précédentes (6.84) :

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(1)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,1} + \kappa_1 (\bar{\mu} \bar{u}^0(1)) \right) \big|_+ - \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(1)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,1} + \kappa_1 (\bar{\mu} \bar{u}^0(1)) \right) \big|_- \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(1) d\xi + (\bar{\rho} \bar{u}^0(1) \bar{u}^0(3) + C_{13}^0) \big|_+ - (\bar{\rho} \bar{u}^0(1) \bar{u}^0(3) + C_{13}^0) \big|_- \quad (6.85a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(2)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,2} + \kappa_2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(2)) \right) \big|_+ - \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(2)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,2} + \kappa_2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(2)) \right) \big|_- \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(2) d\xi + (\bar{\rho} \bar{u}^0(2) \bar{u}^0(3) + C_{23}^0) \big|_+ - (\bar{\rho} \bar{u}^0(2) \bar{u}^0(3) + C_{23}^0) \big|_- \quad (6.85b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,3}) - \bar{p}^0 \right) \big|_+ - \left(2 (\bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,3}) - \bar{p}^0 \right) \big|_- + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(3) d\xi + (\bar{\rho} \bar{u}^0(3) \bar{u}^0(3) + C_{33}^0) \big|_+ - (\bar{\rho} \bar{u}^0(3) \bar{u}^0(3) + C_{33}^0) \big|_- \quad (6.85c)
\end{aligned}$$

Comme en $\xi_3 = 0$, on a $h_1 = h_2 = 1$ (voir annexe C), les termes de saut faisant intervenir la viscosité dans les relations précédentes s'interprètent à l'aide de l'équation (C.36) de l'annexe C comme le saut du tenseur des contraintes visqueuses contracté avec la normale. Pour travailler sur le terme lié aux forces capillaires $\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi$ de la dernière équation, on introduit la moyenne surfacique. Soit une grandeur $\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ continue y compris à l'interface, on définit la moyenne surfacique restreinte à l'interface, $\overline{\cdot}^\sigma$, sous forme adimensionnalisée dans le système de coordonnées associées à l'interface par

$$\overline{\phi}^\sigma(\xi_1^0, \xi_2^0) \triangleq \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1 = \xi_1^0 - \frac{e}{2}}^{\xi_1 = \xi_1^0 + \frac{e}{2}} \int_{\xi_2 = \xi_2^0 - \frac{e}{2}}^{\xi_2 = \xi_2^0 + \frac{e}{2}} \phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.86)$$

où e représente le rapport $\frac{r}{R_b}$ avec r la taille du filtre⁶. Pour les grandeurs uniquement définies sur l'interface, $\phi(\xi_1, \xi_2)$, on définit naturellement :

$$\overline{\phi}^\sigma(\xi_1^0, \xi_2^0) \triangleq \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1 = \xi_1^0 - \frac{e}{2}}^{\xi_1 = \xi_1^0 + \frac{e}{2}} \int_{\xi_2 = \xi_2^0 - \frac{e}{2}}^{\xi_2 = \xi_2^0 + \frac{e}{2}} \phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.87)$$

La moyenne surfacique restreinte à l'interface, $\overline{\cdot}^\sigma$, est la restriction à l'interface de la moyenne surfacique $\overline{\cdot}^s$ (définie par l'équation (5.53b)) :

$$\overline{\cdot}^\sigma = \overline{\cdot}^s \big|_{\xi_3=0} \quad (6.88)$$

$\overline{\cdot}^\sigma$ n'est défini qu'à l'interface alors que $\overline{\cdot}^s$ est défini partout même si elle est nulle hors de la zone de transition ($|\xi_3| > \frac{\delta}{2}$). La dérivée suivant la direction normale de χ_g est un Dirac.

⁶Comme le paramètre ϵ , e est un petit paramètre adimensionnel mais on ne le fait pas tendre vers zéro car la taille du filtre r ne tend pas vers zéro et le rayon de courbure R_b ne tend pas vers l'infini. Etant donné la définition de e , e^2 représente la surface adimensionnalisée du support du noyau du filtre surfacique.

D'après le paragraphe C.9 de l'annexe C (eq. (C.49)), avec les coordonnées adimensionnalisées et une dilatation dans la direction normale ($\xi_3 = R_b \xi_3^+ = R_b \epsilon \xi$), on a

$$\overline{\kappa \chi_{g,3}}(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi^0) = \frac{\epsilon}{e^3} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi=\xi^0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi^0+\frac{r}{2\delta}} \kappa(\xi_1, \xi_2) (-\delta_\sigma(\xi)) |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi_1 d\xi_2 d\xi \quad (6.89a)$$

$$\approx -\frac{1}{e^2} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \kappa(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \frac{\delta}{r} \int_{\xi=\xi^0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi^0+\frac{r}{2\delta}} \delta_\sigma(\xi) |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi \quad (6.89b)$$

$$= -\overline{\kappa}^\sigma \frac{\delta}{r} \left(h\left(\xi^0 + \frac{r}{2\delta}\right) - h\left(\xi^0 - \frac{r}{2\delta}\right) \right) \quad (6.89c)$$

où h désigne la fonction de heaviside et avec par définition

$$\overline{\kappa}^\sigma \triangleq \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \kappa(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.90)$$

Le passage entre (6.89a) et (6.89b) suppose que les courbures varient faiblement (*i.e.* les courbures sont presque constantes sur la taille du filtre). Cette hypothèse formelle est la raison pour laquelle on a pu, à l'issue des tests *a priori*, faire l'hypothèse de modélisation $\tau_{superf}^m = 0$ (eq. (5.65e)). Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta}{r} \left(h\left(\xi + \frac{r}{2\delta}\right) - h\left(\xi - \frac{r}{2\delta}\right) \right) d\xi = 1 \quad (6.91)$$

l'équation (6.85c) s'écrit finalement sous forme dimensionnelle :

$$\begin{aligned} & (2(\overline{\mu} \overline{u}^0(3)_{,3}) - \overline{p}^0) \big|_+ - (2(\overline{\mu} \overline{u}^0(3)_{,3}) - \overline{p}^0) \big|_- - \sigma \overline{\kappa}^\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \overline{T}^0}{\partial t}(3) d\xi + (\overline{\rho} \overline{u}^0(3) \overline{u}^0(3) + C_{33}^0) \big|_+ - (\overline{\rho} \overline{u}^0(3) \overline{u}^0(3) + C_{33}^0) \big|_- \end{aligned} \quad (6.92)$$

Cette relation est rassurante et intéressante car on retrouve la condition de saut sur le tenseur des contraintes de la SND avec la tension de surface corrigée par la grandeur en excès des corrélations entre la vitesse et la masse volumique. Cette grandeur en excès intervient comme une force superficielle à la manière des forces capillaires. Cependant, contrairement aux forces capillaires, la résultante des forces superficielles liées aux corrélations entre la vitesse et la masse volumique n'est pas nécessairement normale à l'interface.

6.4.7 Vitesse du repère associé à l'interface

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes placés dans le repère associé à l'interface. Dans ce repère, nous avons exprimé chacune des équations à l'ordre 0. Comme dans notre problème l'interface est mobile, ce repère l'est aussi et il nous faut connaître sa vitesse à l'ordre 0 en fonction du champ de vitesse monofluide. L'interface n'étant pas matérielle, l'expression de la vitesse normale suffit. D'après l'équation (6.65b), on a à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \overline{\chi}_g}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n} \chi_{k,3}} + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n} \chi_{k,3}} - \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n} \chi_{k,3}} = 0 \quad (6.93)$$

La dérivée par rapport au temps de l'équation précédente est une dérivée eulérienne : elle correspond à l'évolution du taux de présence en un point fixe de l'espace. Dans cette représentation, $\overline{\chi}_g$ est une fonction de l'espace, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, et du temps, $t : \overline{\chi}_g(\mathbf{x}, t)$. Il est intéressant de relier cette dérivée à la dérivée lagrangienne du taux de présence qui correspond à l'évolution de ce taux lorsque l'on suit l'interface discontinue équivalente. On note \mathbf{v}

la vitesse du repère $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ associé à l'interface (voir annexe C). En notant \mathbf{OM} le vecteur position, cette vitesse s'écrit par définition :

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{OM}}{Dt} \quad (6.94)$$

Elle permet de faire le lien entre la description lagrangienne et la description eulérienne :

$$\frac{D\overline{\chi_g}}{Dt} = \frac{\partial \overline{\chi_g}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla \overline{\chi_g} \quad (6.95)$$

L'adimensionnalisation de cette équation avec les choix présentés dans la section 6.4.1 fournit :

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{D\overline{\chi_g}}{Dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \overline{\chi_g}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \overline{\chi_g} \quad (6.96)$$

Après le changement de variable $\xi \triangleq \frac{\xi_3}{\epsilon}$ (eq. (6.66)), on a à l'ordre 0 :

$$\frac{D\overline{\chi_g}}{Dt} = \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + v_3^0 \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} \quad (6.97)$$

En combinant les équations (6.93) et (6.97), on trouve :

$$v_3^0 \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} = \frac{D\overline{\chi_g}}{Dt} + \check{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}\chi_{k,3}} + \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}\chi_{k,3}} - \overline{\check{\mathbf{u}}^0} \cdot \overline{\mathbf{n}\chi_{k,3}} \quad (6.98)$$

En se rappelant que $\check{\mathbf{u}}^0$ est indépendant de ξ (eq. (6.82))⁷ et que χ_g est indépendant de ξ_1 et ξ_2 , on peut (en supposant que la courbure varie faiblement) décomposer chaque intégrale de volume en une intégrale de surface et une intégrale suivant la direction normale. On a par exemple :

$$\overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}\chi_{g,3}} = \frac{\epsilon}{e^3} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi=\xi^0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi^0+\frac{r}{2\delta}} \check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \chi_g}{\partial \xi} |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi_1 d\xi_2 d\xi \quad (6.99a)$$

$$\approx \frac{1}{e^2} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n} d\xi_1 d\xi_2 \frac{\delta}{r} \int_{\xi=\xi^0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi^0+\frac{r}{2\delta}} \frac{\partial \chi_g}{\partial \xi} |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi \quad (6.99b)$$

$$= \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma \frac{\delta}{r} \int_{\xi=\xi^0-\frac{r}{2\delta}}^{\xi=\xi^0+\frac{r}{2\delta}} (-\delta_\sigma(\xi)) |1 - \epsilon \xi \kappa_1| |1 - \epsilon \xi \kappa_2| d\xi \quad (6.99c)$$

$$= -\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma \frac{\delta}{r} \left(h\left(\xi_0 + \frac{r}{2\delta}\right) - h\left(\xi_0 - \frac{r}{2\delta}\right) \right) \quad (6.99d)$$

D'après l'équation (6.91), on en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}\chi_{g,3}} d\xi = -\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma \quad (6.99e)$$

En raisonnant de la même façon pour les autres termes faisant intervenir $\check{\mathbf{u}}^0$ et \mathbf{n} , ainsi qu'en utilisant l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} d\xi = \chi_g|_+ - \chi_g|_- = -1, \quad (6.100)$$

l'intégration suivant la direction normale de la relation (6.98) conduit à :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\check{\chi}_g}{Dt} d\xi + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma} + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^\sigma - \overline{\mathbf{u}}^0{}^\sigma \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma} \quad (6.101)$$

⁷Le fait que $\check{\mathbf{u}}^0$ est indépendant de ξ implique que $\check{\mathbf{u}}^0 = \overline{\mathbf{u}}^0$ car ces deux fonctions sont identiques au changement de variable $\xi = \frac{\xi_3}{\epsilon}$ près.

Pour parvenir au résultat précédent, on a utilisé le fait que la vitesse v_3^0 est indépendante de ξ_3 . En effet, en utilisant les définitions de \mathbf{v} (6.94) et de \mathbf{g}_3 (C.2) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} &= \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_3}{\partial \xi_3} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} \cdot \mathbf{g}_3 + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial \xi_3} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_3} \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{DOM}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_3} \\ &= \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{D(\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3)}{Dt} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.102)$$

Comme lors d'un calcul, on ne connaît pas la normale, \mathbf{n} , mais seulement la normale moyenne, $\bar{\mathbf{n}}^\sigma$, on propose la modélisation suivante :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} d\xi + \bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma + \overline{\bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}} - \overline{\bar{\mathbf{u}}^{0\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma} \quad (6.103)$$

Cette expression montre que pour estimer la vitesse du repère associé à l'interface on doit corriger la projection sur l'interface du champ de vitesse filtré en tenant compte des corrélations entre la vitesse et la normale ainsi que de la grandeur en excès associée à la variation temporelle du taux de présence. Dans les deux paragraphes suivants, on exprime cette grandeur en excès en fonction de l'évolution de la courbure.

Cas isotrope

On suppose que l'interface peut être approchée par une sphère (*i.e.* les deux rayons de courbures principaux sont supposés égaux). Dans ce cas, $\bar{\chi}_g$ est une fonction de la distance signée à la discontinuité équivalente, ξ_3 , et de sa courbure, κ , (qui dépend du temps) : $\bar{\chi}_g(\xi_3, \kappa(t))$. La dérivée par rapport au temps du taux de présence s'exprime alors en fonction de l'évolution temporelle de la courbure :

$$\frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} = \frac{D\kappa}{Dt} \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial \kappa} \quad (6.104)$$

La dérivée particulière de la courbure est calculée dans l'annexe D, équation (D.30). L'expression du taux de présence en fonction de la courbure moyenne est calculée analytiquement au paragraphe 5.9 (dans le cas où l'interface peut être approximée par une sphère de façon satisfaisante). La dérivation de l'expression (5.83) par rapport au rayon de courbure $\kappa = \frac{2}{R_b}$ puis son intégration sur l'épaisseur du filtre, r , fournit à l'ordre 4 en r :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial \kappa} d\xi = \int_{-r}^{+r} \frac{\partial \alpha(\frac{r\kappa}{2}, \frac{\xi_3\kappa}{2})}{\partial \kappa} d\xi_3 = -\frac{r^2}{10} + \frac{3r^4}{240} \kappa^2 + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.105)$$

On en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} d\xi = -\frac{r^2}{10} \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{r^4}{80} \kappa^2 \frac{D\kappa}{Dt} + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.106)$$

Finalement, en utilisant (6.106) et (D.30) dans l'équation (6.103), on a, en s'arrêtant à l'ordre 2 en r :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) \approx \underbrace{\bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma}_{(i)} + \underbrace{\overline{\bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}} - \overline{\bar{\mathbf{u}}^{0\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}}_{(ii)} + \underbrace{\frac{r^2}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}^0) \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma - 2\nabla_s(\mathbf{v}^0) : \nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma))}_{(iii)} \quad (6.107)$$

Chacun des termes s'interprète comme suit :

- (i) est le produit des moyennes. Il s'agit de la contribution principale (d'ordre 0), celle qui correspond au déplacement moyen de l'interface.
- (ii) est le terme de Leonard de la corrélation sous-maille entre la vitesse et la normale. Il permet d'apporter une correction en ajoutant au terme moyen une estimation des corrélations entre la vitesse et la normale. On remarque que l'étape, où on se ramène à une interface discontinue équivalente, a transformé les moyennes volumiques en moyennes surfaciques. On a donc une sorte d'équivalent de l'hypothèse de similarité d'échelles pour une discontinuité.
- (iii) est une correction pour tenir compte de la variation de la courbure (Annexe D). On remarque que ce terme est défini à partir de la vitesse du repère que l'on cherche à exprimer. Par conséquent, l'expression finale que nous avons obtenue est implicite. Nous verrons dans les tests *a priori* que l'utilisation d'un simple point fixe permet d'évaluer ce terme de façon très satisfaisante. Il est important de noter que le tenseur de courbure (ou le gradient surfacique du vecteur normal $\nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma)$) doit *a priori* avoir ces deux valeurs propres (non nulles) égales. En effet, dans ce paragraphe, on modélise la surface par sa sphère osculatrice ce qui implique que les deux rayons de courbure principaux sont égaux au rayon de cette sphère ou encore (c'est équivalent) que le tenseur de courbure s'exprime comme le produit de la courbure de la sphère et du tenseur de projection \mathbf{P} défini à partir de la normale moyenne, $\bar{\mathbf{n}}^\sigma$ (voir équation (C.23) de l'annexe C). L'estimation numérique du tenseur de courbure montre que cette hypothèse est absolument fautive : les deux directions principales ne sont pas du tout équivalentes. C'est ce que l'on constate d'ailleurs simplement en observant la surface de la bulle. C'est la raison pour laquelle, on approche, dans le paragraphe suivant, la surface en distinguant les deux courbures principales (voir paragraphe 5.9.2).

Cas anisotrope

La surface est ici caractérisée par ses deux rayons de courbures principaux. Dans ce cas, $\bar{\chi}_g$ est une fonction de la distance signée à la discontinuité équivalente, ξ_3 , et des deux rayons de courbure, R_1 et R_2 , (qui dépendent du temps) : $\bar{\chi}_g(\xi_3, R_1(t), R_2(t))$. La dérivée par rapport au temps du taux de présence s'exprime alors en fonction de l'évolution temporelle des deux rayons de courbure :

$$\frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} = \frac{DR_1}{Dt} \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial R_1} + \frac{DR_2}{Dt} \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial R_2} \quad (6.108)$$

En dérivant l'équation (5.89), et en faisant des développements limités en $r = 0$, on trouve (pour $\alpha = 1$ ou 2) :

$$\int_{-r}^r \frac{\partial \bar{\chi}_g}{\partial R_\alpha} d\xi_3 = \frac{1}{10} \frac{r^2}{R_\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{R_\alpha^2} + \frac{r^2}{4} \kappa^2 \right) \right) + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.109)$$

En éliminant R_1 et R_2 pour tout exprimer en fonction de la courbure de Gauss, H , et de la courbure moyenne, κ (cf annexe C), on en déduit :

$$\int_{-r}^r \frac{D\bar{\chi}_g}{Dt} d\xi_3 = -\frac{r^2}{10} \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{r^4}{80} \kappa^2 \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{r^4}{80} \left[(\kappa^2 - 4H) \frac{D\kappa}{Dt} + \frac{\kappa}{4} \frac{D}{Dt} (\kappa^2 - 4H) \right] + \mathcal{O}(r^6) \quad (6.110)$$

La forme choisie de l'expression précédente permet de mettre en évidence que l'on dégénère correctement vers le cas isotrope. En effet, dans le cas isotrope, les deux rayons de courbures sont égaux, $\kappa_1 = \kappa_2$, et, la courbure de Gauss et la courbure moyenne sont alors liées par la relation :

$$\kappa^2 - 4H = 0 \quad (6.111)$$

Par conséquent, le terme entre crochet de l'équation (6.110) tend vers zéro dans le cas isotrope et on retrouve bien la relation (6.106). Le terme d'ordre 2 est lui inchangé par rapport au cas isotrope. On retrouve donc la même équation que précédemment :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) \approx \bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma + \overline{\bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma}^\sigma - \overline{\bar{\mathbf{u}}^0}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma + \frac{r^2}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}^0) \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma - 2\nabla_s(\mathbf{v}^0) : \nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma)) \quad (6.112)$$

Cependant, comme on n'a pas approché ici la surface par une simple sphère (les deux directions principales ne jouent pas le même rôle), il est cohérent de faire jouer tout son rôle (différent suivant la direction de la vitesse tangente) au tenseur de courbure. Pour clarifier notre propos, disons que l'on retrouve les mêmes équations, (6.107) et (6.112), mais que, pour être cohérent avec les approximations de la surface, on a, dans le cas isotrope,

$$\nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma) = \frac{\kappa}{2} (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2) \quad (6.113)$$

et, dans le cas anisotrope :

$$\nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma) = \kappa_1 \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \kappa_2 \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 \quad (6.114)$$

En utilisant l'ordre 4 des équations (6.106) et (6.110) pour exprimer v_3^0 , l'hypothèse d'isotropie entraîne des différences beaucoup plus significatives, mais nous verrons qu'il est inutile d'aller jusqu'à cet ordre.

6.5 Système SGE discontinu fermé

Le système SGE discontinu correspond au système d'équations que vérifient les solutions $\tilde{\chi}_g$, \tilde{p} et \tilde{u} du problème discontinu équivalent. Ce problème discontinu équivaut au problème extérieur des développements asymptotiques raccordés à un ordre donné. Comme notre étude se limite à l'ordre 0, on a par définition :

$$\tilde{\mathbf{u}} \triangleq \bar{\mathbf{u}}^0 \quad (6.115a)$$

$$\tilde{p} \triangleq \bar{p}^0 \quad (6.115b)$$

Pour la définition de $\tilde{\chi}_g$, on dispose d'un degré de liberté. Il correspond au problème classique du choix de la position de l'interface de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Cherchant à privilégier l'usage de grandeurs conservatives afin de simplifier l'expression des équations de bilan, on impose la conservation locale de la masse. Ceci revient à définir la nouvelle fonction indicatrice de phase $\tilde{\chi}_g$ de telle sorte qu'il n'y ait pas de grandeur en excès sur cette fonction

$$\int_A (\tilde{\chi}_g - \overline{\chi_g})^{ex} dA \triangleq \int_V (\tilde{\chi}_g - \overline{\chi_g}) dV = 0 \quad (6.116)$$

où A désigne la surface de l'interface équivalente contenue dans V , un volume de contrôle contenant toute l'épaisseur de la zone de transition. L'aire A étant arbitrairement petite, la contrainte imposée à la discontinuité équivalente s'écrit simplement (voir paragraphe C.9 de l'annexe C pour l'écriture de l'élément de volume dans le système de coordonnées associées à l'interface) :

$$(\tilde{\chi}_g - \overline{\chi_g})^{ex}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{\chi}_g - \overline{\chi_g})(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(1 - \xi\kappa_1)(1 - \xi\kappa_2)d\xi_3 = 0 \quad (6.117)$$

On définit logiquement, pour la discontinuité équivalente, sa normale, $\tilde{\mathbf{n}}$, et sa courbure, $\tilde{\kappa}$:

$$\tilde{\mathbf{n}}\delta_{\tilde{\sigma}} \triangleq -\nabla\tilde{\chi}_g \quad (6.118a)$$

$$\tilde{\kappa} \triangleq \nabla_s \cdot \tilde{\mathbf{n}} \quad (6.118b)$$

Tant que la taille caractéristique du filtre reste inférieure au rayon de courbure local (*i.e.* faible variation de la courbure sur la taille du filtre), on suppose que notre choix pour la localisation de la discontinuité équivalente nous permet de confondre les grandeurs $\overline{\cdot}^\sigma$ et $\widetilde{\cdot}$. En particulier, on considère que :

$$\widetilde{\mathbf{n}} \approx \overline{\mathbf{n}}^\sigma \quad (6.119a)$$

$$\widetilde{\kappa} \approx \overline{\kappa}^\sigma \quad (6.119b)$$

On peut comprendre intuitivement cette approximation en se rappelant que $\widetilde{\cdot}$ est la limite asymptotique de $\overline{\cdot}$ quand l'épaisseur de la zone de transition, δ tend vers zéro et que $\overline{\cdot}^\sigma$ représente la moyenne surfacique. En effet, faire tendre l'épaisseur de la zone de transition vers zéro en maintenant la taille du filtre constant revient moralement à transformer, à l'interface, le filtre volumique $\overline{\cdot}$ en filtre surfacique $\overline{\cdot}^\sigma$.

6.5.1 Equation de transport de l'interface filtrée discontinue

Afin de pouvoir réaliser des simulations de SGE discontinue, il faut établir une équation de transport pour $\widetilde{\chi}_g$ qui ne fait intervenir que les grandeurs filtrées du problème discontinu. La vitesse de la discontinuité équivalente, $\mathbf{v}_{\widetilde{\sigma}}$, est définie par l'équation (6.63a) que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial \widetilde{\chi}_g}{\partial t} + \mathbf{v}_{\widetilde{\sigma}} \cdot \nabla \widetilde{\chi}_g = 0 \quad (6.120)$$

Comme seule la vitesse normale est utile, on suppose

$$\mathbf{v}_{\widetilde{\sigma}} = v_{\widetilde{\sigma}} \widetilde{\mathbf{n}} \quad (6.121)$$

où

$$\nabla \widetilde{\chi}_g = -\widetilde{\mathbf{n}} \delta_{\widetilde{\sigma}} \quad (6.122)$$

La contrainte que nous avons choisie pour la position de la discontinuité équivalente (6.117) implique que cette dernière est presque confondue avec la position originelle de la discontinuité⁸. Les normales filtrées sont elles aussi presque égales : $\overline{\mathbf{n}}^\sigma \approx \widetilde{\mathbf{n}}$. Comme par définition, la vitesse $\mathbf{v}_{\widetilde{\sigma}}$ correspond à la vitesse du repère associé à l'interface, à l'ordre 0, on a (*cf* eq. (6.112))

$$v_{\widetilde{\sigma}} \triangleq v_3^0 = \widetilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\widetilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\widetilde{\mathbf{u}}}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\mathbf{n}}}^\sigma \right) + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s (\mathbf{v}^0) \cdot \widetilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s (\mathbf{v}^0) : \nabla_s (\widetilde{\mathbf{n}}) \right) \quad (6.123a)$$

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\partial \widetilde{\chi}_g}{\partial t} \widetilde{\mathbf{n}}_g \quad (6.123b)$$

où r est la taille du filtre. Finalement, l'équation de transport de l'interface filtrée discontinue s'écrit :

$$\frac{\partial \widetilde{\chi}_g}{\partial t} = \widetilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\widetilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\widetilde{\mathbf{u}}}^\sigma \cdot \overline{\widetilde{\mathbf{n}}}^\sigma \right) + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \widetilde{\chi}_g}{\partial t} \widetilde{\mathbf{n}}_g \right) \cdot \widetilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \widetilde{\chi}_g}{\partial t} \widetilde{\mathbf{n}}_g \right) : \nabla_s (\widetilde{\mathbf{n}}) \right) \quad (6.124)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, cette expression est implicite dans la mesure où on ne connaît la variation temporelle de la fonction indicatrice de phase qu'en fonction d'elle même. Nous verrons dans les tests *a priori* de ce modèle qu'un simple point fixe permet de très bien estimer l'évolution de la fonction indicatrice de phase. Les coefficients 1 (devant les corrélations entre la vitesse et la normale), $\frac{r^2}{10}$ (devant la variation temporelle de la courbure)

⁸Pour que les positions de la discontinuité équivalente et de la discontinuité originelle soient presque confondues, il faut bien sûr que les courbures varient très peu sur la taille du filtre. Nous nous plaçons dans ce cas.

dépendent de la forme supposée du filtre ainsi que des hypothèses et approximations que nous avons faites. Ils nécessitent d'être réévalués dans le cas d'un filtre implicite et constituent des paramètres du modèle que nous proposons. L'intérêt de l'expression (6.123) est de faire apparaître un terme de corrélation entre la vitesse et la normale, et deux autres proportionnels à une fonction puissance de la taille du filtre r . Par conséquent, ces deux corrections tendent bien naturellement vers zéro lorsque la taille du filtre tend vers 0. Enfin, on a tout fait pour que ces termes soient sans effet sur le bilan de masse : une bulle d'un volume donné conservera ce volume tant qu'elle ne subit pas de phénomène de rupture ou de coalescence. Les modèles présentés agissent sur la forme de la bulle. Sa surface frottante est ainsi modifiée : ces modèles agissent donc indirectement sur la vitesse macroscopique de la bulle.

6.5.2 Equation de continuité

Nous avons vu qu'à l'ordre 0 les vitesses sont continues à la traversée de l'interface. Par conséquent, l'équation de continuité du problème discontinu équivalent s'écrit simplement :

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6.125)$$

6.5.3 Equation de bilan de quantité de mouvement

Grâce à la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous avons précisé les relations de saut que vérifient les solutions du problème extérieur. D'après les définitions (6.115), les relations de saut (eq. (6.85)) s'écrivent pour le problème discontinu équivalent à l'ordre choisi (ici l'ordre 0) :

$$\sum_k \left(\tilde{p}_k \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}_k + \rho_k \left(\tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k - \tilde{\mathcal{L}}_k \right) \right) \cdot \nabla \tilde{\chi}_k = - \left(\sigma \kappa \tilde{\mathbf{n}} + \int_{-r}^{+r} \frac{\partial \left(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \right)}{\partial t} d\xi_3 \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (6.126)$$

D'après l'équation (6.63c), il reste à préciser $\sum_k \rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t}$. Ce terme s'exprime grâce à la continuité des vitesses et au transport de la discontinuité

$$\begin{aligned} \sum_k \rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t} &= (\rho_g - \rho_l) \tilde{\mathbf{u}} \frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \\ &= -[\rho] \tilde{\mathbf{u}} \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}} - \tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (6.127) \end{aligned}$$

où $[\rho]$ désigne le saut de masse volumique $\rho_l - \rho_g$. Dans chacune des deux relations de saut précédentes, on retrouve les relations de la SND corrigées par des modèles afin de tenir compte des interactions sous-maille entre interfaces et turbulence. Le saut du tenseur des contraintes n'est plus simplement égal à la tension de surface mais à cette dernière à laquelle on ajoute la grandeur en excès associée aux corrélations entre la vitesse et la variation temporelle de la masse volumique. Le saut de quantité de mouvement se déduit du transport de l'interface qui s'exprime, outre le terme classique de la SND, en fonction des corrélations de la vitesse et de la normale ainsi que de l'évolution temporelle de la courbure.

6.5.4 Système complet

En résumé, nous avons établi le système d'équations suivant

– équation de continuité :

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6.128a)$$

– équation de transport de la discontinuité équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = & \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma \right) \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (6.128b)$$

– équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = & -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}}) + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathcal{L}}) \\ & - [\rho] \tilde{\mathbf{u}} \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma \right) \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \\ & - \left(\sigma \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \left(\overline{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}} - \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \right)}{\partial t} d\xi_3 \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (6.128c)$$

Lorsque la taille du filtre tend vers zéro, $r \rightarrow 0$, ces équations tendent naturellement vers les équations de la SND. En effet, les termes que l'on ne retrouve pas en SND sont soit pondérés par r^2 , soit des corrélations qui tendent vers zéro avec la taille du filtre.

Le système ci-dessus a été établi à partir d'un système continu fermé. Cependant, il est aisé de remplacer chacune des modélisations par le terme sous-maille correspondant. De cette façon, on obtient un système discontinu pour la SGE diphasique non fermé et on peut introduire d'autres modélisations que celles choisies dans ce mémoire. Autrement dit, bien que la méthode des développements asymptotiques raccordés nécessite de partir d'un système fermé, on peut espérer que le résultat que nous avons obtenu reste valable avec d'autres modèles. Ainsi, même si le travail de modélisation réalisé au cours de cette thèse constitue un tout, les résultats peuvent certainement s'utiliser indépendamment.

6.6 Tests *a priori*

L'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés nous a permis d'établir un système discontinu pour la SGE des écoulements diphasiques. En particulier, nous avons vu que certains termes sous-maille spécifiques apparaissent finalement comme des forces surfaciques à la manière des forces capillaires. Cependant, il n'y a pas de nouveaux éléments de modélisation par rapport au système continu dans l'équation de bilan de quantité de mouvement et l'hypothèse d'incompressibilité. Or, dans le chapitre précédent, nous avons déjà discuté à partir de tests *a priori* de la validité des modèles que nous avons développés. Par conséquent, il est uniquement nécessaire d'étudier l'équation de transport de la discontinuité équivalente dans laquelle nous avons introduit de nouveaux modèles afin de tenir compte notamment de la courbure de l'interface. Les nouvelles fermetures que nous avons introduites

tiennent compte de la possible anisotropie de la surface, *i.e.* du fait que les courbures des directions principales ne sont pas nécessairement égales (voir paragraphe 5.9.2). Il est donc préférable de les tester sur des écoulements 3D. L'ensemble des tests *a priori* présentés dans ce paragraphe ont été réalisés à partir des champs issus de la SND de l'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille (voir paragraphe 4.5).

6.6.1 Difficulté générale de tester les résultats de DAR

Dans le chapitre précédent, lorsque nous avons testé nos modèles de la SGE des écoulements diphasiques avec une vision continue des interfaces, nous avons fait l'hypothèse forte que l'on sait construire, à partir des champs issus de la SND, les champs que l'on aurait obtenus en réalisant une SGE. Formellement, cela signifie que l'on confond le filtre explicite dont on se sert analytiquement pour développer des modèles et le filtre implicite qui dépend du maillage mais aussi de la méthode numérique. Dans ce mémoire, nous avons choisi comme filtre explicite un filtre boîte et nous avons donc négligé le fait que le filtre dépend aussi de la méthode numérique. Dans le cas des résultats des DAR, la situation est encore plus complexe car on ne sait pas construire la solution discontinue équivalente à partir de résultats de SND. Considérons par exemple le champ de vitesse \mathbf{u} . Il est facile de construire le champ de vitesse de la SGE avec une vision continue des interfaces $\bar{\mathbf{u}}$, il suffit de faire le produit de convolution entre le noyau du filtre et le champ de vitesse : $\bar{\mathbf{u}} = G \star \mathbf{u}$. En revanche, dans la zone interfaciale, il est délicat d'estimer le champ de vitesse de la SGE avec une vision discontinue des interfaces $\tilde{\mathbf{u}}$, car il n'est pas issu d'une opération simple : il correspond à la limite asymptotique de $\bar{\mathbf{u}}$ quand l'épaisseur de la zone de transition interfaciale tend vers zéro.

6.6.2 Méthodologie dans le cas de l'équation de transport de l'interface

Nous avons établi une équation de transport de l'indicatrice de phase (eq. (6.128b)) dans le cadre de la SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces. Cette dernière fournit, à partir du champ de vitesse dans les phases, la vitesse de la discontinuité équivalente (eq. (6.123)). La difficulté consiste à déterminer quelle est la vitesse de référence de la discontinuité équivalente à laquelle on doit comparer la vitesse que retournent nos modèles.

Pour déterminer la vitesse d'interface de référence, nous avons envisagé une procédure rigoureuse. Malheureusement, elle s'avère trop difficile à mettre en oeuvre. Par conséquent, nous avons choisi de la décrire rapidement puis de présenter la façon dont nous avons finalement estimé cette vitesse de référence.

La vitesse que l'on cherche correspond au déplacement élémentaire de l'interface filtrée discontinue. La meilleure façon de faire consiste donc à construire, à chaque pas de temps, la discontinuité équivalente à partir de l'interface de la SND puis, à mesurer le déplacement de cette discontinuité équivalente suivant la direction normale. Cet algorithme d'évaluation est résumé par la figure 6.5. On commence par définir à chaque instant l'interface filtrée discontinue à partir de la description géométrique fournie par la SND. Puis, on évalue la vitesse de déplacement normale à partir de deux positions successives de la discontinuité équivalente.

Pour mettre en place la méthode précédente, il est nécessaire de sauvegarder la position de l'interface très régulièrement ce qui peut poser des problèmes de stockage des données. De plus, il faut implémenter une procédure de construction de la discontinuité équivalente

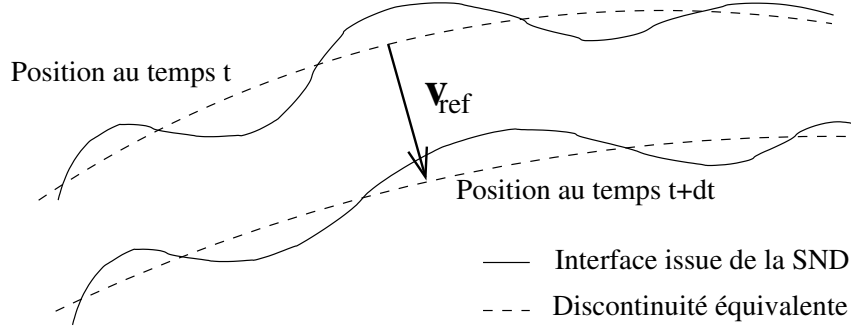


FIG. 6.5 – Détermination de la vitesse de la discontinuité équivalente pour les tests *a priori* sur l'équation de transport de l'interface dans le cadre de la SGE diphasique avec une vision discontinue des interfaces.

ce qui risque d'être délicat car on désire tenir compte de la courbure. Par conséquent, on a décidé d'utiliser une procédure plus simple. On considère que la géométrie de l'interface filtrée discontinue est bien approchée par la normale issue de la SND filtrée surfaciquement, $\bar{\mathbf{n}}^\sigma$. Enfin, on suppose qu'elle est déplacée par le champ de vitesse de la SND, \mathbf{u} . On obtient ainsi la vitesse de référence v_{ref} :

$$v_{ref} = \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma \quad (6.129)$$

On désire la comparer à $v_{\tilde{\sigma}}$ déterminé par l'équation (6.123). Pour estimer $v_{\tilde{\sigma}}$, il faut normalement disposer de $\tilde{\mathbf{u}}$ sur l'interface, on suppose que cette vitesse est très proche de la moyenne surfacique de la vitesse de la SND, $\bar{\mathbf{u}}^\sigma$. La vitesse qu'estime notre modèle est donc évaluée par l'expression

$$v_{\tilde{\sigma}} = \bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma + c_0 (\overline{\bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}^{\sigma\sigma}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}}) + c_1 \frac{r^2}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma)) \quad (6.130)$$

où les coefficients c_0 et c_1 sont des paramètres du modèle. Comme nous l'avons déjà mentionné, la vitesse de la discontinuité, $v_{\tilde{\sigma}}$, est définie implicitement (son expression est fonction d'elle même). On utilise un point fixe avec une seule itération pour l'évaluer. En résumé, dans ces tests *a priori* on étudie la potentialité de notre modèle τ_{disc}^m

$$\tau_{disc}^m = c_0 (\overline{\bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}^{\sigma\sigma}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{n}}^{\sigma\sigma}}) + c_1 \frac{r^2}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s(\bar{\mathbf{n}}^\sigma)) \quad (6.131)$$

à estimer le terme sous-maille τ_{disc} :

$$\tau_{disc} = \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma - \bar{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}^\sigma \quad (6.132)$$

Ce terme sous-maille correspond à reconstruire, suivant la direction normale, \mathbf{u} à partir de $\bar{\mathbf{u}}^\sigma$. Il est différent de ceux que nous avons rencontrés lors de l'établissement des équations de la SGE diphasique avec une vision continue des interfaces car il tient compte de leur raidissement. La modélisation issue de l'évolution de la courbure (il s'agit des termes qui font intervenir des dérivées surfaciques) et qui s'ajoute à la modélisation de type similarité d'échelles (elle-même modifiée du fait du raidissement) est aussi là pour tenir compte de l'étape de construction d'une discontinuité équivalente. Notre analyse des tests *a priori* s'oriente donc vers une vérification de l'intérêt de ces termes supplémentaires. Dans le chapitre précédent, on a vu que le laplacien d'un champ filtré permet d'évaluer la partie non résolue de ce champ (eq. (5.24)). Les opérateurs surfaciques ont le même rôle dans ce cas plus complexe.

6.6.3 Implémentation des opérateurs surfaciques

Pour réaliser les tests *a priori*, on a besoin de définir deux types d'opérateurs surfaciques : l'opérateur de moyenne et les opérateurs de dérivation.

Moyenne surfacique

Comme dans le cas volumique, on choisit un filtre boîte (voir paragraphe 5.2.2). Cependant, puisque le maillage de l'interface n'est pas structuré, il est difficile de définir un filtre boîte de taille quelconque. Pour faire varier la taille du filtre, on se contente de l'appliquer récursivement. On n'a alors plus un filtre boîte car des coefficients de pondération apparaissent. En 2D, l'interface est une courbe et, pour le filtre appliqué respectivement une, deux et trois fois, on trouve

$$\bar{\phi}_i = \frac{\phi_{i-1} + \phi_i + \phi_{i+1}}{3} \quad (6.133a)$$

$$\overline{\bar{\phi}}_i = \frac{\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{3} \quad (6.133b)$$

$$\overline{\overline{\phi}}_i = \frac{\overline{\bar{\phi}}_{i-1} + \overline{\bar{\phi}}_i + \overline{\bar{\phi}}_{i+1}}{3} \quad (6.133c)$$

où les indices i désigne le numéro du marqueur. En convenant que $\bar{\phi}^0 = \phi$, on a de façon générale :

$$\bar{\phi}_i^n = \frac{\bar{\phi}_{i-1}^{n-1} + \bar{\phi}_i^{n-1} + \bar{\phi}_{i+1}^{n-1}}{3} \quad \text{pour tout entier } n \text{ plus grand que } 1 \quad (6.134)$$

On a omis l'exposant σ pour alléger les notations. Ces définitions s'étendent immédiatement au 3D en remplaçant les marqueurs de droite et de gauche par tous les voisins immédiats.

Différenciation surfacique

Le modèle que nous avons développé nécessite le calcul des opérateurs gradient et laplacien surfaciques (voir eq. (6.131)). En particulier, il faut évaluer le tenseur de courbure et non simplement sa trace (la courbure moyenne) comme pour les forces de tension superficielle. Ceci signifie que l'on cherche à identifier les directions et courbures principales d'un maillage de surface. Puisqu'on suppose que la normale discrète est constante par élément, il est délicat de donner un sens à sa dérivée seconde. Dans l'annexe E, on explique la façon dont on a procédé.

6.6.4 Détermination des paramètres du modèle

Du fait de sa définition implicite, la vitesse de transport de l'interface $v_{\bar{\sigma}}$ dépend de façon fortement non linéaire des paramètres du modèle c_0 et c_1 . Afin de déterminer ces paramètres, on a utilisé une technique de minimisation. A l'aide de l'algorithme du simplex (voir annexe F), on a minimisé l'erreur commise sur un intervalle de temps représentatif. A chaque instant, on définit l'erreur, E , comme la somme des carrés de la différence entre la contribution réelle du terme sous-maille, τ_{disc} , et sa modélisation, τ_{disc}^m , en chaque point du maillage surfacique. On normalise cette erreur par la somme des carrés du terme sous-maille en chaque marqueur de l'interface

$$E = \frac{\sum_{k=1}^N (\tau_{disc}(\mathbf{x}_k) - \tau_{disc}^m(\mathbf{x}_k))^2}{\sum_{k=1}^N (\tau_{disc}(\mathbf{x}_k))^2} \quad (6.135)$$

où N désigne ici le nombre de marqueur lagrangien et \mathbf{x}_k la position du marqueur k . Pour chaque couple de paramètres $(c_0 ; c_1)$, on fait la moyenne de l'erreur, E , sur l'intervalle de

temps choisi. C'est cette moyenne que l'on minimise. Lorsqu'on applique trois fois le filtre itératif (défini paragraphe 6.6.3), on obtient une moyenne de huit pourcents d'erreur avec le couple de paramètre (1,5 ; 0,36). Nous avons aussi effectué la minimisation en appliquant une seule fois le filtre, six fois et douze fois. Sur le tableau 6.1, on constate que jusqu'à un filtre douze fois plus grand, l'erreur reste à peu près constante et toujours inférieure à la valeur de dix pourcents ce qui est très satisfaisant. On remarque également (tab. 6.1) que le paramètre devant le terme en similarité d'échelles de notre modèle reste lui aussi à peu près constant. On peut donc recommander de choisir $c_0 = 1,5$ quelle que soit la sous-résolution du calcul (à condition toutefois d'être dans les hypothèses du concept ISS que nous avons déjà précisées). Cependant, les choses sont plus délicates avec le paramètre c_1 . En effet, ce paramètre varie fortement en fonction de la sous-résolution et tout se passe comme s'il manquait une dépendance à notre modèle⁹. On propose de déterminer cette dépendance (tab. 6.1). Si on note Δ la longueur caractéristique qui sépare deux marqueurs lagrangiens du maillage de la SND et nb_{it} le nombre d'itérations du filtre boîte, on a

$$r = nb_{it}\Delta \quad (6.136)$$

où on rappelle que r désigne la largeur du support du noyau de convolution du filtre. Or, toujours d'après le tableau 6.1, on remarque que :

$$c_0 \approx \frac{1}{nb_{it}} \quad (6.137)$$

Puisque la SND est telle que $\Delta \approx \frac{\eta}{2}$ où η est l'échelle de Kolmogorov, d'après les équations (6.136) et (6.137), on a :

$$c_0 \approx \frac{\eta}{r} \quad (6.138)$$

Finalement, on propose le modèle suivant :

$$\tau_{disc}^m = \frac{3}{2} (\overline{\mathbf{u}^\sigma} \cdot \overline{\mathbf{n}^{\sigma\sigma}} - \overline{\mathbf{u}^{\sigma\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma}) + \eta \frac{r}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s(\overline{\mathbf{n}^\sigma})) \quad (6.139)$$

Sous cette forme finale, notre modèle n'a plus de paramètre, il est directement applicable. Par rapport à sa formulation précédente, on remarque que la partie qui tient compte de la variation de la courbure ne décroît plus comme la taille du maillage de la SGE diphasique (r) au carré mais simplement comme r . Par conséquent, même pour des maillages relativement fins il semble important de tenir compte de ce terme.

6.6.5 Bien-fondé du modèle

On étudie le modèle sous sa forme finale donnée par l'équation (6.139) lorsqu'on applique trois fois le filtre boîte récursif. La figure 6.6 montre l'évolution temporelle de l'erreur commise lorsqu'on modélise τ_{disc} :

- uniquement par l'hypothèse de similarité d'échelles surfacique $\frac{3}{2} (\overline{\mathbf{u}^\sigma} \cdot \overline{\mathbf{n}^{\sigma\sigma}} - \overline{\mathbf{u}^{\sigma\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma})$,
- seulement en tenant compte de la variation de la courbure $\eta \frac{r}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}) : \nabla_s(\overline{\mathbf{n}^\sigma}))$ et
- par le modèle complet τ_{disc}^m .

⁹En fait, il n'est pas étonnant que notre modèle n'ait pas tout à fait les bonnes dépendances, car nous l'avons développé en faisant l'hypothèse d'un filtre bien particulier que nous n'avons pas utilisé par la suite. En effet, au moment de développer le modèle, il était beaucoup plus commode de supposer que le support du filtre était sphérique mais pour les tests *a priori*, il est beaucoup plus simple d'implémenter un filtre boîte récursif. De plus, on a supposé que le rayon de courbure était beaucoup plus grand que la taille du filtre ce qui est de moins en moins vrai quand on augmente la sous-résolution.

Nombre d'itérations du filtre boîte	c_0	c_1	$\frac{1}{nb_{it}}$	Erreur moyenne (en pourcent)
1	1,4	0,9	1	7
3	1,5	0,36	0,33	8
6	1,55	0,19	0,17	8,4
12	1,6	0,1	0,08	9,3

TAB. 6.1 – Pourcentage d'erreur commise et valeur des paramètres du maillage suivant la taille du filtre (nb_{it} désigne le nombre d'itérations du filtre boîte)

Avec une seule des deux contributions, on modélise environ 50 pourcents du terme sous-maille. Lorsqu'on considère le modèle complet, on modélise plus de 90 pourcents du terme sous-maille. Les deux termes semblent donc essentiels pour modéliser le transport de la discontinuité équivalente. De plus, on constate qu'ils ont un comportement différent : ils paraissent complémentaires. En effet, lorsqu'on se trouve à un maximum local de l'erreur que l'on commet avec un seul des deux termes, on est aussi à un minimum local de l'erreur commise avec uniquement l'autre terme. De cette façon, l'erreur faite avec le modèle complet est presque constante alors que l'erreur dans le cas d'un des deux modèles partiels varie fortement. A $t = 200\Delta t$ par exemple, le terme qui tient compte de la variation de courbure est beaucoup plus performant que le terme qui repose sur l'hypothèse de similarité d'échelles. A $t = 500\Delta t$, c'est l'inverse. Il peut paraître étonnant que le terme qui tient compte de la variation de courbure modélise jusqu'à plus de soixante pourcents du terme sous-maille. En réalité, ce terme fait intervenir un laplacien de la vitesse. Or, nous avons vu (paragraphe 5.3.2) que le laplacien de la vitesse est une bonne approximation des fluctuations du champ de vitesse (eq. (5.24)). Par conséquent, il n'est pas très surprenant que ce genre de terme joue un rôle prépondérant pour modéliser le transport de la discontinuité équivalente.

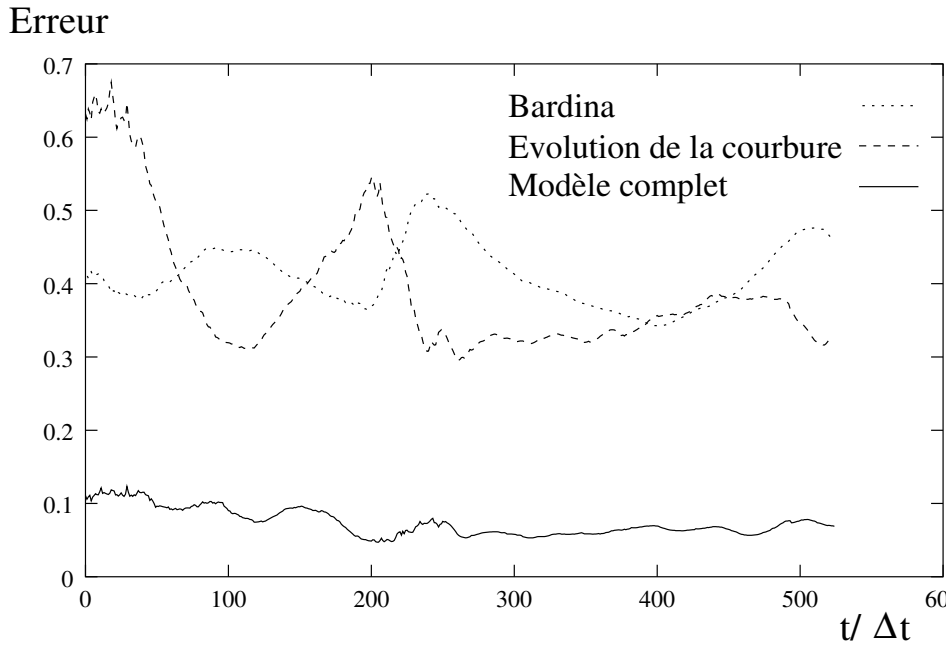
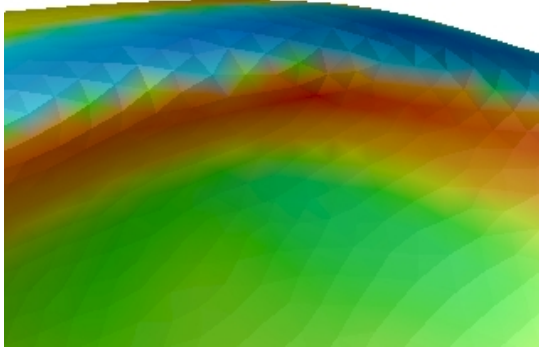
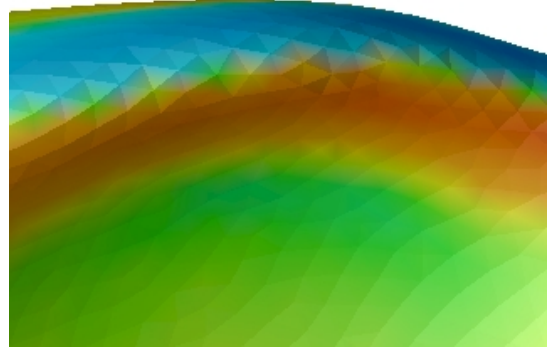


FIG. 6.6 – Evolution temporelle de l'erreur commise sur le transport de l'interface. Dans le cas d'un modèle : avec seulement les corrélations entre la vitesse et la normale, avec seulement l'évolution temporelle de la courbure, en combinant les deux modélisations.

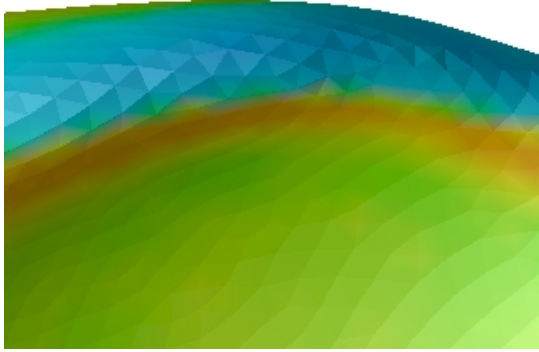
Afin de mieux comprendre le rôle joué par chacun des deux termes de notre modèle, nous les avons représentés sur la surface de la bulle à différents instants : $t = 0$ (fig. 6.7), $t = 200\Delta t$ (fig. 6.8) et $t = 500\Delta t$ (fig. 6.9). Nous avons choisi ces trois instants car ils correspondent aux trois façons différentes dont nos termes se complètent. Pour $t = 500\Delta t$ (fig. 6.9), les deux termes ont le même motif mais pas la même amplitude. Pour $t = 0$ (fig. 6.7), les deux termes ont presque le même motif mais l'endroit où ils changent de signe est décalé. Pour $t = 200\Delta t$ (fig. 6.8), les deux termes n'ont pas le même motif. Dans tous les cas, seule la somme des deux termes de nos modèles permet de bien estimer le motif et l'amplitude du terme sous-maille. Ainsi, on confirme la nécessité et l'intérêt de ces deux contributions. De plus, la modélisation complète est remarquable car dans chaque cas (fig. 6.7 à fig. 6.9), on ne distingue que difficilement la différence entre la contribution réelle (fig. (a)) et le modèle (fig. (b)). Ce bon résultat est d'ailleurs confirmé par la représentation de l'erreur (fig. (e)) dont l'amplitude est très inférieure à celle du terme sous-maille (elle en représente au plus 10 pourcents). Pour finir cette étude, on a tracé les corrélations de chacun des termes et du modèle complet avec la contribution réelle du terme sous-maille pour chacun des instants précédents (fig. 6.10 à fig. 6.12). Sans surprise, le modèle complet (fig. (a)) est excellent. Il est un peu moins bon au début du calcul (fig. 6.10) du fait de la présence de très forte courbure qui nous place à la limite de ses conditions de validité. Les contributions isolées sont beaucoup moins bien corrélées (fig. (b) et fig. (c)) et on note à nouveau une différence de comportement : la dispersion se fait par valeur inférieure pour l'hypothèse de similarité d'échelles et par valeur supérieure pour le terme qui tient compte de l'évolution de la courbure.



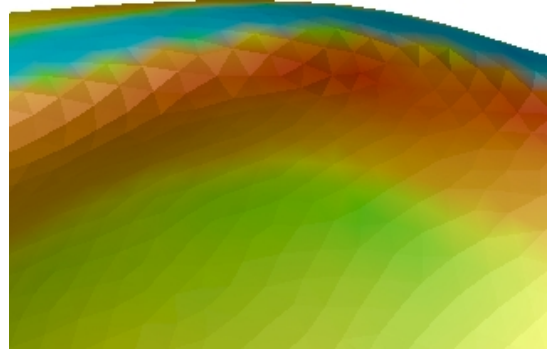
(a) Contribution réelle



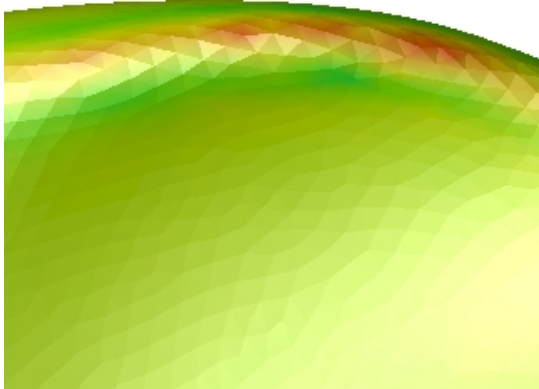
(b) Modèle complet



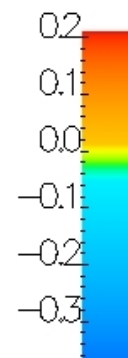
(c) Similarité d'échelles



(d) Evolution de la courbure



(e) Erreur



(f) Echelle de couleur (m/s)

FIG. 6.7 – Comparaison entre contribution réelle et modèles, $t = 0$

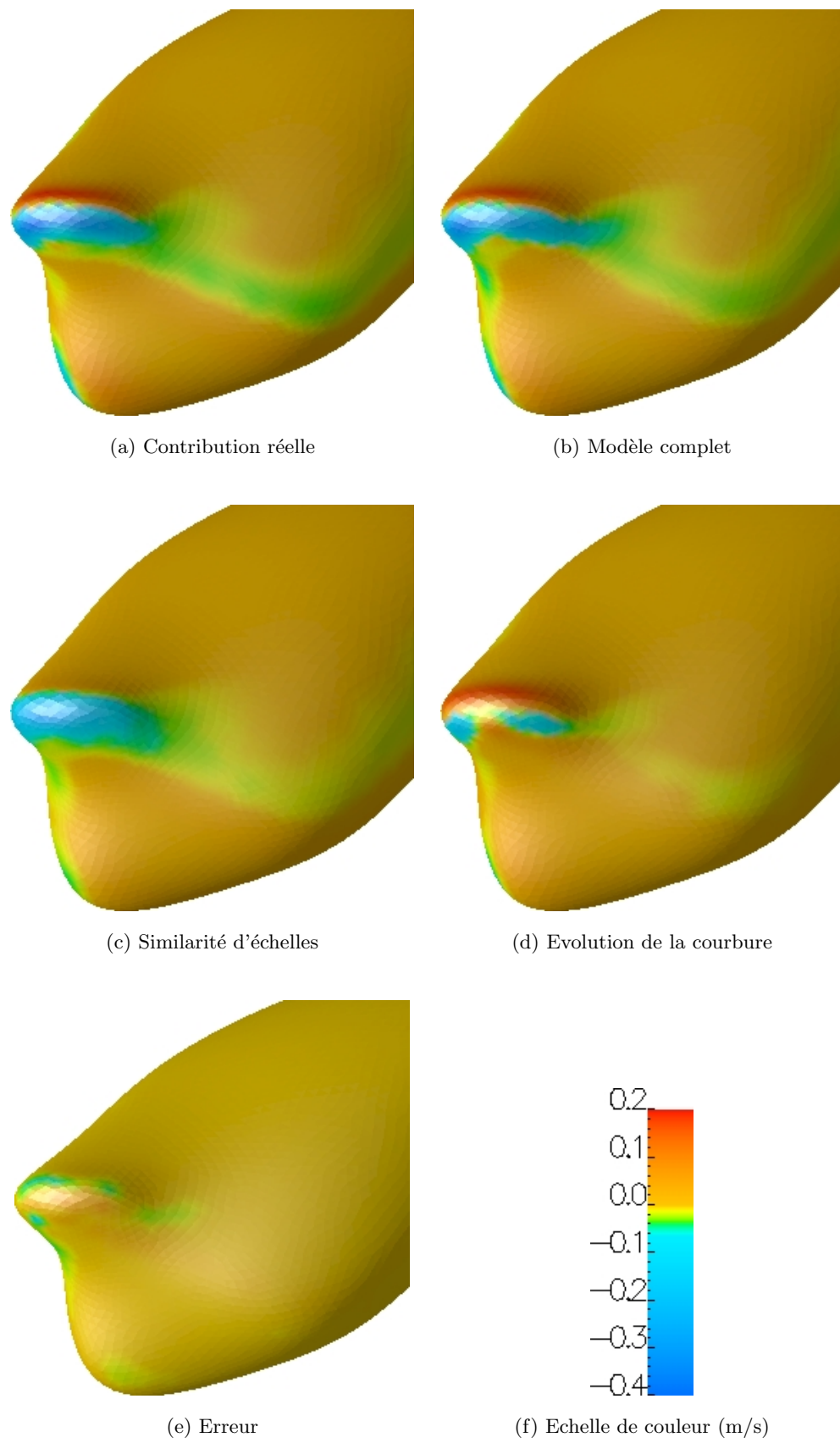


FIG. 6.8 – Comparaison entre contribution réelle et modèles, $\frac{t}{\Delta t} = 200$

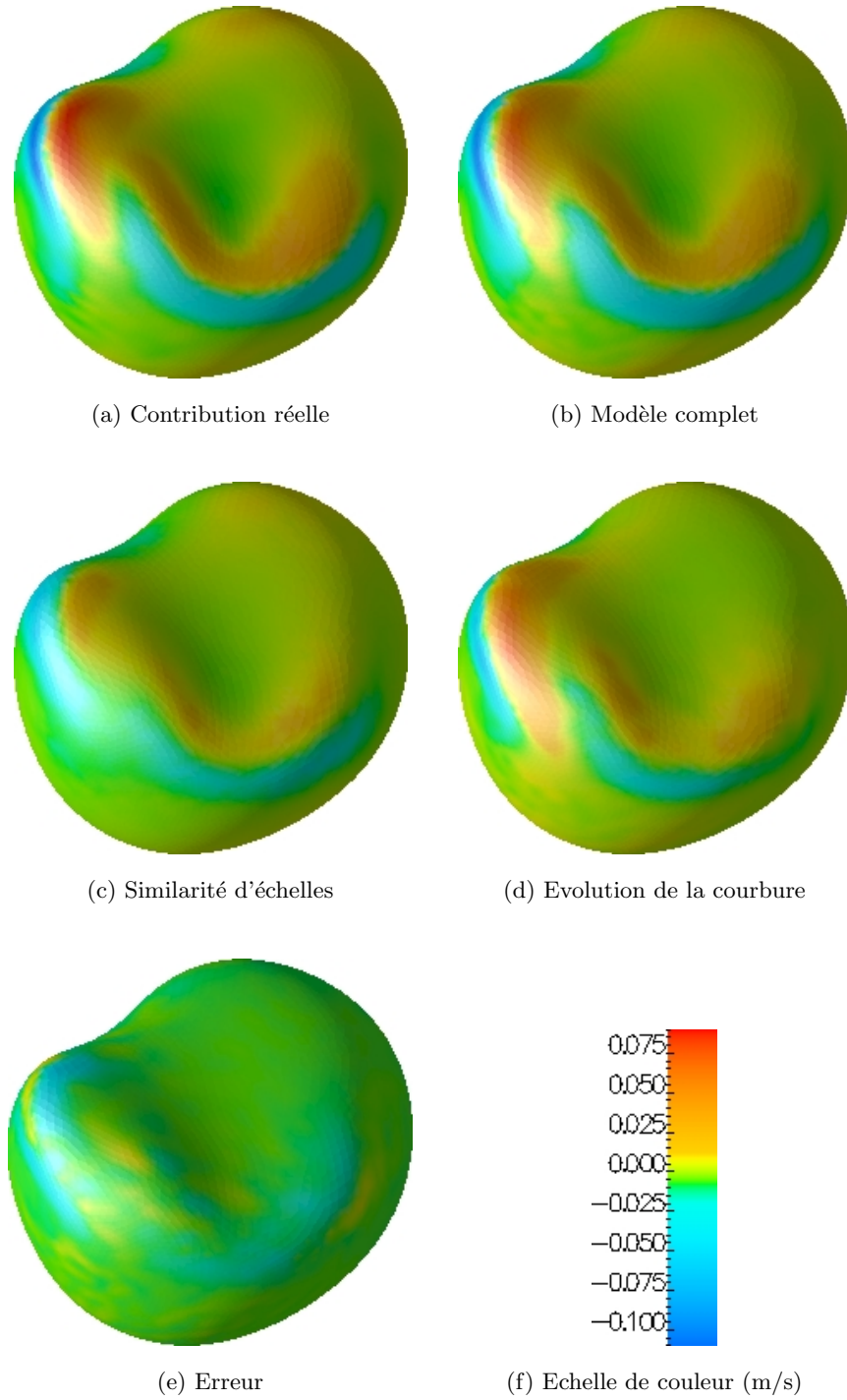


FIG. 6.9 – Comparaison entre contribution réelle et modèles, $\frac{t}{\Delta t} = 500$

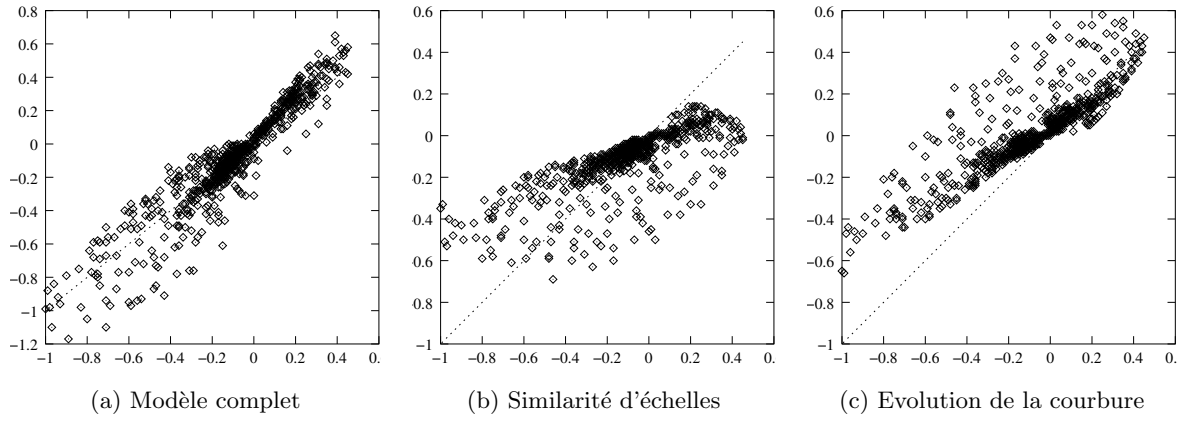


FIG. 6.10 – Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $t = 0$

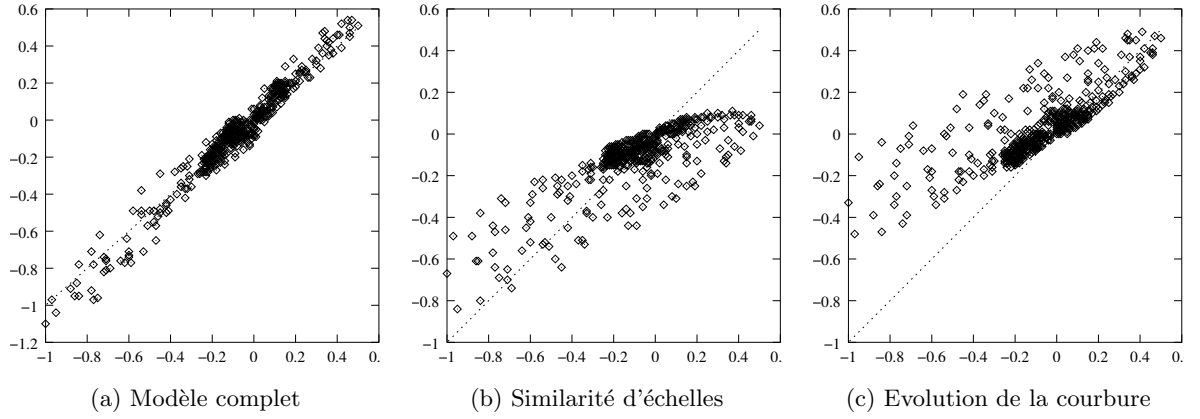


FIG. 6.11 – Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $\frac{t}{\Delta t} = 200$

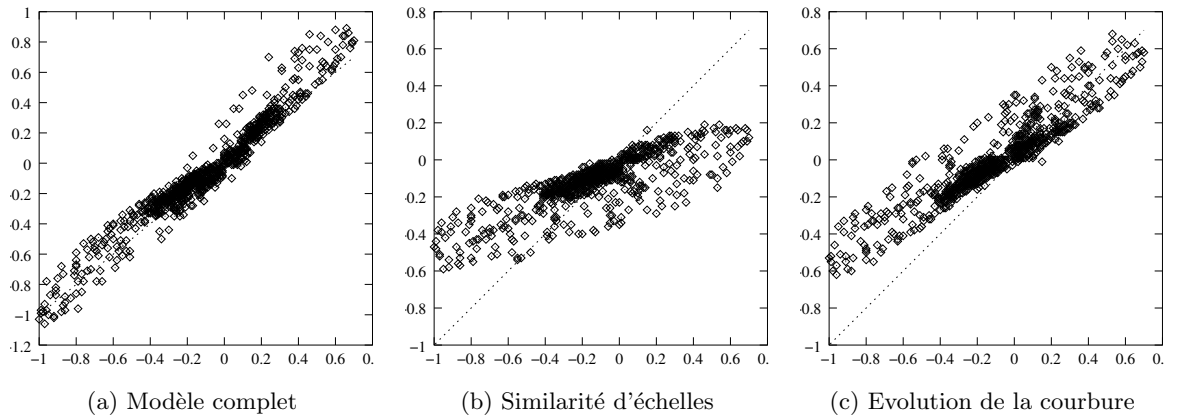


FIG. 6.12 – Corrélation entre le modèle et la contribution réelle du terme sous-maille de l'équation de transport de la discontinuité équivalente, $\frac{t}{\Delta t} = 500$

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté et illustré en détail sur des exemples précis deux méthodes (l'analyse générique des processus interfaciaux et la méthode des DAR) qui permettent de passer d'une description continue à une vision discontinue des interfaces. Ces méthodes sont principalement utilisées en SND afin de trouver la limite asymptotique discontinue d'une zone volumique de transition. Grâce aux DAR appliqués aux équations des interfaces diffuses, nous avons expliqué l'origine volumique de la tension de surface : de façon non intuitive, c'est la forte variation de masse volumique dans la direction normale qui crée la tension dans la direction tangentielle.

En filtrant les équations monofluides avec un filtre à cheval sur l'interface, nous avons obtenu un système où les grandeurs varient continûment. Pour déterminer sa limite asymptotique discontinue, nous avons appliqué la méthode des DAR. Comme cette méthode est complexe et assez calculatoire, nous avons commencé par déduire, grâce au formalisme monofluide, les relations de saut que nous cherchons à fermer avec la méthode des DAR. Nous avons ensuite adimensionnalisé les équations. Cette étape d'adimensionnalisation est cruciale car elle détermine le comportement du système discontinu équivalent. Elle repose sur la distinction de deux échelles de longueurs dont l'une est caractéristique de la zone de transition et l'autre du problème macroscopique. Pour l'application de la méthode des DAR proprement dite, nous nous sommes placés dans le système de coordonnées associées à l'interface afin de tenir compte de la courbure des interfaces qui est un point clé de notre problème. Nous avons donc écrit chaque terme des équations dans un système de coordonnées généralisées faisant intervenir des facteurs d'échelles. De cette façon, nous avons concentré l'étude des équations suivant la direction normale en dilatant cette direction. Et, nous avons alors déterminé les relations de saut à l'interface en utilisant les conditions de raccord entre les solutions intérieure et extérieures. À l'ordre 0, nous avons trouvé que

- la vitesse est continue à l'interface, ce qui implique que l'on conserve l'hypothèse d'incompressibilité : le champ de vitesse monofluide du problème discontinu équivalent est à divergence nulle,
- les corrélations entre la vitesse et la masse volumique sont l'origine volumique d'une nouvelle force surfacique dans l'équation de bilan de quantité de mouvement. Cette force s'apparente aux forces interfaciales mais contrairement à elles, sa résultante n'est pas forcément normale à l'interface.

Ces conditions de saut ne sont pas uniquement définies par l'expression de la différence entre les grandeurs du liquide et les grandeurs du gaz, il faut aussi définir précisément le lieu où on doit les imposer, *i.e.* la localisation de la discontinuité équivalente. Nous avons logiquement choisi de définir la discontinuité équivalente de telle sorte que l'on conserve la masse (*i.e.* la masse en excès est nulle). Ce choix assure que l'on retrouve la position de l'interface de la SND lorsque le rayon de courbure est très grand devant la taille du filtre. Cette position pour la discontinuité équivalente nous a conduit à établir une nouvelle équation de transport de l'interface qui, en plus de la modélisation de type similarité d'échelles, fait intervenir la variation de la courbure.

Grâce à des tests *a priori*, nous avons montré que l'équation de la discontinuité équivalente obtenue modélise très bien le déplacement de l'interface filtrée discontinue. En particulier, nous avons vu la complémentarité du terme qui tient compte de la variation de la courbure et du modèle de similarité d'échelles. Même si on n'a pas introduit de nouveaux termes dans l'équation de bilan de quantité de mouvement par rapport au cas SGE continue, il serait intéressant de faire des tests *a priori* pour évaluer le saut de la limite asymptotique

discontinue des grandeurs filtrées à l'interface et le comparer à la prédiction du modèle¹⁰. Malheureusement, de tels tests sont difficiles à mettre en oeuvre car il nécessite de savoir faire le lien entre les champs de la SND et les champs filtrés discontinus (voir paragraphe 6.6.1). Face à cette difficulté non résolue, nous proposons d'implémenter nos modèles et de réaliser, dans le chapitre suivant, une première étude *a posteriori*, c'est-à-dire de comparer le résultat d'un calcul avec le concept ISS et celui d'une SND.

¹⁰Ce travail n'aurait pas pour but de valider l'étape de modélisation (nous l'avons déjà fait dans le chapitre précédent) mais de valider l'étape analytique des DAR.

Une première validation des nouveaux modèles

DANS CE CHAPITRE, on réalise la première étude *a posteriori* des modèles que nous avons développés. Nous avons choisi de faire cette étude sur le cas test de l'ascension d'une bulle à contre-courant (voir paragraphes 4.3 et 3.3.1). Ce choix est motivé par le fait que l'on désire effectuer une étude paramétrique afin de mettre en évidence les effets de chacune des fermetures que nous avons introduites. Par conséquent, le cas d'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille est trop coûteux numériquement. De plus, le meilleur critère de validation des modèles du concept ISS nous semble être la position du centre de gravité de la bulle. Or, le cas de l'ascension de la bulle est le seul cas 2D que nous avons simulé où le centre de gravité de l'inclusion se déplace significativement.

7.1 Hypothèses supplémentaires

7.1.1 Ecriture sous forme non conservative

La méthode numérique dont nous disposons est écrite sous forme non conservative. Par conséquent, pour tester les modèles que nous proposons, il faut écrire l'équation de bilan de quantité de mouvement (6.128c) sous forme non conservative. On trouve :

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\rho}) \tilde{\mathbf{u}} = & -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}}) + \underbrace{\tilde{\mathcal{L}} \cdot \nabla \tilde{\rho}}_{(i)} + \underbrace{\tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{L}})}_{(ii)} \\
& - \left(\sigma \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} d\xi_3}_{(iii)} \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (7.1)
\end{aligned}$$

Le terme (ii) est le seul terme qui existe en SGE dans les situations monophasiques. Dans notre cas, il correspond à l'hypothèse de similarités d'échelles. Le terme (i) est l'effet de ce terme à l'interface. Le terme (iii) correspond au corrélation entre la masse volumique et la

vitesse, il corrige les erreurs de transfert de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique dues à la sous-résolution. Il est le seul terme écrit sous la forme d'une grandeur en excès. Comme les forces superficielles, les deux termes, (i) et (iii), sont des forces surfaciques.

7.1.2 Evolution de la courbure

Pour les tests *a priori* du chapitre précédent, nous avons implémenté les opérateurs de dérivation surfacique dans des outils de postraitement. Malheureusement, par manque de temps mais aussi parce que de tels opérateurs sont plus faciles à mettre en oeuvre pour le postraitement qu'au coeur du code Trio_U, nous n'avons pas implémenté ces opérateurs dans la méthode de Front-tracking. Cependant, dans le cas test que nous avons choisi, la courbure évolue peu comparativement au cas de l'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille. De plus, le cas est laminaire et 2D. On suppose que dans ces conditions, on peut négliger le terme lié à l'évolution de la courbure devant celui de l'hypothèse de similarité d'échelle dans l'équation de transport de la discontinuité équivalente. Plus précisément, on imagine que, dans ces conditions, la différence de comportement entre ces deux termes que nous avons décrite dans le paragraphe 6.6.5 est négligeable¹ et que l'hypothèse de similarité d'échelle peut très bien jouer le rôle du terme qui tient compte de la variation de la courbure. Soit c une constante, on peut résumer l'hypothèse précédente par l'équation

$$\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^s \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} \approx c \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} \tilde{\mathbf{n}} \right) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \quad (7.2)$$

dans le cas d'un écoulement faiblement turbulent avec de faibles variations de la courbure. Sous cette hypothèse supplémentaire, l'équation de transport de la discontinuité équivalente (6.128b) s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^s \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (7.3)$$

où le terme (iv) correspond à l'hypothèse de similarités d'échelles surfacique.

7.1.3 Evaluation de la grandeur en excès

La mise en oeuvre de procédures d'évaluation de grandeurs en excès est relativement complexe. En effet, les grandeurs en excès sont définies sur l'interface, donc elles sont discrétisées aux positions des marqueurs lagrangiens. Pour les évaluer sur un marqueur donné, il faut pouvoir identifier les mailles eulériennes qui sont traversées par la droite normale à l'interface et passant par ce marqueur. Par conséquent, pour cette première implémentation de nos modèles, nous avons décidé de calculer les corrélations $\frac{\partial(\overline{\tilde{\rho}} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t}$ sur tous les éléments du maillage eulérien et d'approcher, en chaque marqueur, la grandeur en excès associé à ce terme par son interpolation aux coordonnées du marqueur. Une autre difficulté pour évaluer ce terme concerne la dérivée temporelle. Nous avons choisi de réaliser un simple point fixe en deux itérations car la troisième n'apporte plus rien.

Dans la suite de ce chapitre, on veut avoir une idée qualitative de l'effet de chacun des termes (i), (ii), (iii) et (iv). Pour ce faire, on réalise cinq calculs : quatre où on ne tient compte que de l'un des quatre termes et un cinquième où on regarde l'effet combiné de chacun de ces termes.

¹Dans le paragraphe 6.6.5, on a en effet constaté que pour $t = 500\Delta_t$ (la courbure de la bulle varie alors beaucoup moins car elle se trouve en bas du domaine de calcul où l'intensité de la turbulence de grille est beaucoup plus faible du fait de la décroissance spatiale), les deux termes sont très proches.

7.2 Tests *a posteriori*

Comme nous l'avons mentionné, il nous semble qu'un bon juge de paix pour valider les modèles de ce travail de thèse est l'évolution temporelle de la coordonnée verticale du centre de gravité de la bulle. Dans ce paragraphe, on se concentre donc sur ce point et on compare l'évolution de cette coordonnée suivant les termes de modélisation dont on tient compte ainsi que suivant le raffinement des maillages eulérien et lagrangien.

7.2.1 Raffinement lagrangien

Au paragraphe 3.3, nous avons proposé un modèle de diffusion de courbure qui permet d'éviter le développement d'instabilités numériques lorsque l'on raffine le maillage lagrangien sans raffiner le maillage eulérien. Cette méthode est maintenant couramment utilisée dans le laboratoire pour les SND. Un des intérêts des tests *a posteriori*, et de vérifier l'apport de cette méthode pour les calculs de SGE diphasique, *i.e.* lorsque ses effets sont combinés avec ceux des modèles que nous avons développés. Cependant, il ne faut pas que la solution d'un calcul de SGE diphasique dépende du maillage lagrangien. C'est pourquoi, on choisit de raffiner suffisamment le maillage lagrangien pour avoir convergé (du point de vue de la discrétisation de l'interface). La figure 7.2 illustre le fait qu'une mauvaise discrétisation de l'interface implique une mauvaise évaluation des forces de frottement et de flottabilité, car le périmètre et l'aire de la bulle sont sous-estimés (voir paragraphe 3.3). Raffiner le maillage lagrangien permet d'y remédier. On remarque que les courbes obtenues avec deux ou quatre marqueurs lagrangiens par maille eulérienne sont presque identiques. On estime qu'on a atteint la convergence avec seulement deux marqueurs et on effectue les calculs pour tester les modèles dans ce cas (maillage grossier 150x150, deux marqueurs lagrangiens par maille eulériennes et un opérateur de convection centré).

7.2.2 Effet des différents termes

La notation *parami-j-k-l* des figures 7.1, 7.3 et 7.4 indique quels sont les termes dont on tient compte parmi les modèles (i), (ii), (iii) et (iv). Ainsi, le calcul *param1.0.0.0* (respectivement *param0.1.0.0*, *param0.0.1.0* et *param0.0.0.1*) ne tient compte que du terme (i) (respectivement (ii), (iii) et (iv)), les autres termes étant modélisés par zéro. Dans tous les cas, il s'agit d'un calcul grossier 150x150 avec deux marqueurs lagrangiens par maille eulérienne et un opérateur de convection centré. Sur la figure 7.3, le terme (iii) semble être le terme le moins significatif. Ceci est sûrement dû au fait que le saut de masse volumique est faible ($\rho_G = 990 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_L = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$). Les termes (i) et (ii) ont globalement l'effet d'une viscosité turbulente : augmenter le frottement moyen de la bulle, le terme (iv) apparaît être le seul à avoir l'effet inverse (diminuer le frottement moyen autour de la bulle). Sur la figure 7.4, on constate que les effets combinés des différents modèles conduisent à une sur-estimation du frottement moyen. D'après les constats précédents, on peut, afin d'y remédier, pondérer les termes (i) et (ii) par des coefficients inférieurs à un ou, au contraire, pondérer le terme (iv) par un coefficient supérieur à un. Comme les tests *a priori* que nous avons faits concluent que τ_{conv}^{nm} sous-estime le terme sous-maille qu'il modélise, τ_{conv} (voir les corrélations des figures 5.22, 5.24 et 5.26), on n'a moralement pas envie de pondérer les termes (i) et (ii) qui en sont issus par des coefficients inférieurs à un. D'autre part, on a vu, de la même façon, que τ_{interf}^{nm} sous-estime légèrement τ_{interf} (voir les corrélations de la figure 5.20). De plus, la détermination *a priori* des paramètres du modèle discontinu au paragraphe 6.6.4 indique qu'il

faut pondérer ce modèle par le coefficient 1,5. Enfin, dans ces tests *a posteriori*, on n'a pas implémenté le terme qui tient compte de la variation de la courbure car on a supposé que l'hypothèse de similarités d'échelles pouvait jouer son rôle. Il paraît donc licite de pondérer le terme (iv) par un coefficient supérieur à 1,5. Cela conduit au calcul *param1.1.1.2* où on tient compte de l'effet combiné de tous les termes de modélisation et où on a pondéré le terme (iv) par 2. L'équation de transport de l'interface s'écrit alors :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + 2 \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s} - \tilde{\mathbf{u}}^s \cdot \tilde{\mathbf{n}}^s \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (7.4)$$

Sur la figure 7.1, on vérifie que l'évolution de la coordonnée verticale du centre de gravité de la bulle qui correspond à ce calcul (*param1.1.1.2*) se trouve bien entre les deux tendances de convergence (schéma Quick d'une part et schéma centré d'autre part). Ainsi, les modèles proposés permettent de corriger la position de la bulle et ce tout au long du calcul.

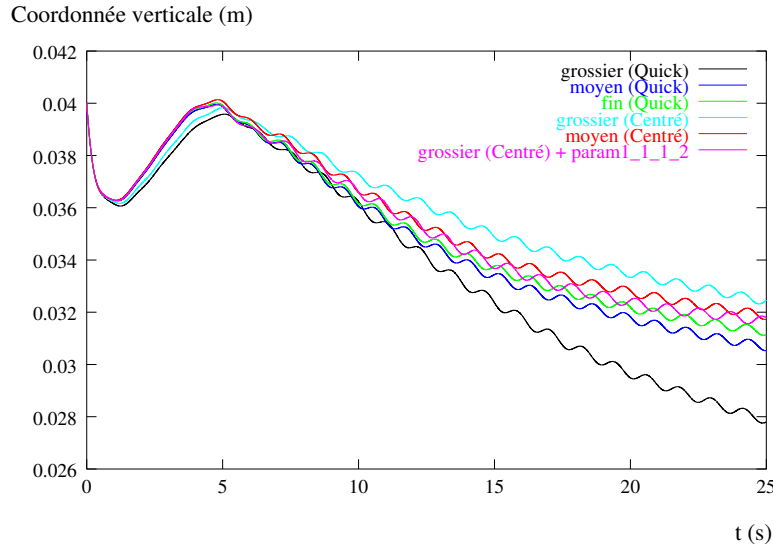


FIG. 7.1 – Convergence en maillage (grossier 150x150, moyen 300x300, fin 375x375)

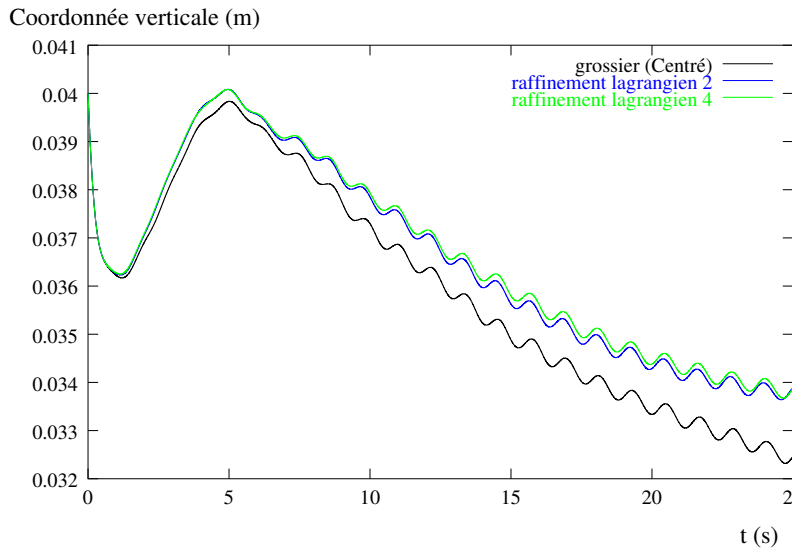


FIG. 7.2 – Convergence du raffinement lagrangien
(2 : deux points lagrangiens par maille eulérienne, 4 : quatre points)

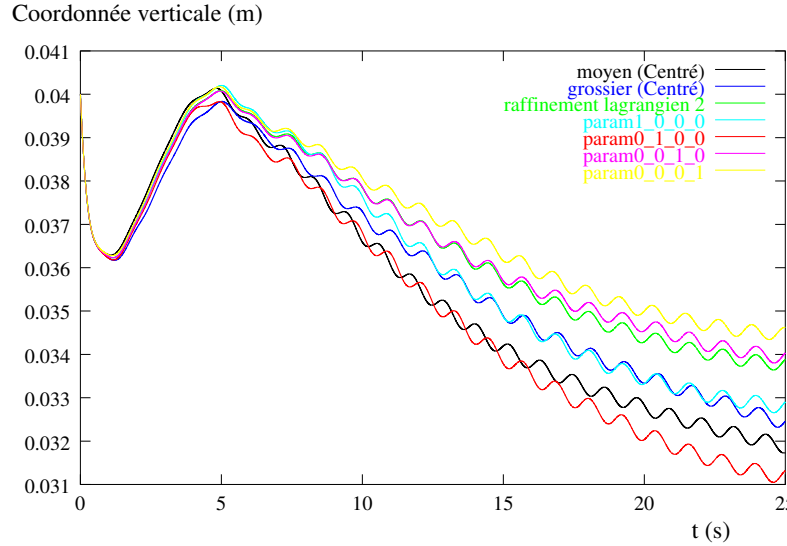


FIG. 7.3 – Etude de l'effet isolé de l'estimation des différents termes sous-maille

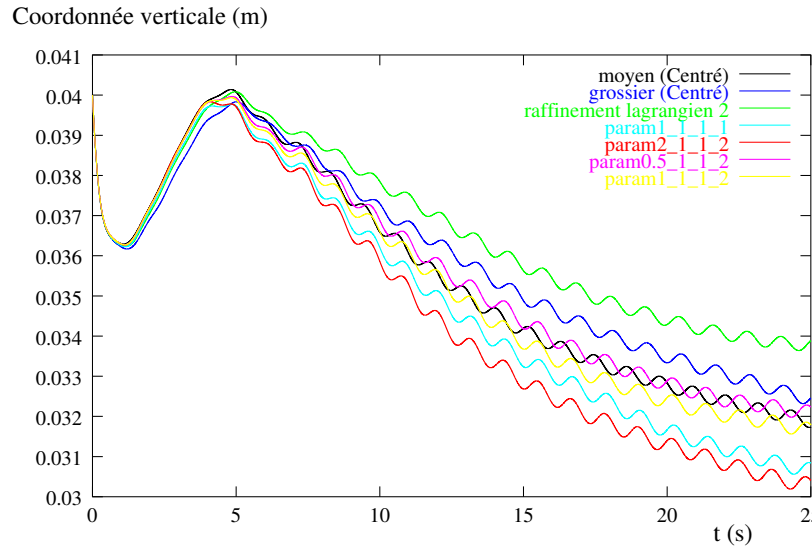


FIG. 7.4 – Etude de l'effet combiné de l'ensemble des modèles pour différentes pondérations

7.3 Conclusion

Les résultats présentés ici nous paraissent prometteurs. Ils sont cohérents avec l'ensemble des tests *a priori* que nous avons réalisés et montrent le gain en coût calcul sans perte d'informations que permettent nos modèles. Nous savons que le cas choisi du fait du faible saut de masse volumique rend peu importants les termes de l'équation de quantité de mouvement spécifiques au cas diphasique (ceux qui font intervenir ρ). Cependant, notre cas met au moins en évidence l'importance du terme sous-maille de l'équation de transport de l'interface (corrélation de la vitesse et de la normale) et le bon comportement de notre modèle. En particulier, il est important de se rappeler que notre modélisation est issue des deux étapes successives où on a d'abord appliqué un filtre centré à cheval sur l'interface puis transformé la zone de transition en une discontinuité équivalente. Selon nous, même si les modèles sont certainement perfectibles, ces tests *a posteriori* valident la démarche que nous avons élaborée qui consiste justement à distinguer ces deux étapes et qui permet ainsi d'intégrer dans les modèles l'interaction entre l'écoulement des phases et l'interface.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Ce travail de thèse a abouti, pour la première fois à notre connaissance, aux développements de modèles de SGE diphasiques qui tiennent compte des couplages fortement non linéaires qui existent entre les interfaces et la turbulence, et où les interfaces sont supposées bien résolues alors que les petites échelles de la turbulence sont modélisées. En effet, nous avons mis en évidence l'existence de termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques qui n'ont jamais fait l'objet de modélisation. Or, nous avons montré qu'un certain nombre d'entre eux avaient une importance significative dans la dynamique de l'écoulement et ce même en laminaire. En utilisant des méthodes issues de la modélisation de la turbulence des écoulements monophasiques ou de la modélisation de la physique des interfaces des écoulements diphasiques, nous avons proposé, et validé sur des tests *a priori*, des fermetures pour ces termes. On résume ici les principales étapes originales de ce travail :

- Des SND de situations d'écoulements pertinentes ont été réalisées, validées et exploitées. Ceci a été possible grâce à l'existence, dans notre laboratoire, d'une méthode performante mixte Front-tracking/VOF. Nous avons participé à l'amélioration de cette méthode (i) en augmentant la précision de la description géométrique des bulles grâce à une méthode de raffinement du maillage lagrangien, (ii) en proposant une nouvelle discrétisation du tenseur des contraintes visqueuses et (iii) en implémentant un schéma en temps de type Runge-Kutta 3 capable de gérer le couplage des différentes équations de la méthode numérique. De plus, nous avons mis en oeuvre une méthode de forçage linéaire de la turbulence qui permet de fournir des conditions d'entrée réalistes et turbulentes. Nous avons ainsi pu simuler l'interaction d'une turbulence de grille et d'une bulle vraiment déformable. Ce genre de SND est relativement rare dans la littérature. Outre l'utilisation que nous en avons faite pour développer le concept ISS, ce type de calcul devrait permettre d'enrichir des modélisations statistiques des écoulements diphasiques à bulles par exemple. Il s'agirait d'étudier les phénomènes à l'échelle de la bulle (et non à l'échelle des déformations de son interface) en mesurant par exemple son agitation en fonction de l'intensité turbulente. Dans ce but, nous avons commencé à caractériser la turbulence de grille en l'absence d'inclusion.
- Une modélisation de type SGE adaptée aux écoulements diphasiques et avec une vision continue des interfaces a été proposée. En appliquant un filtre centré, éventuellement à cheval sur les interfaces, aux équations monofluides, nous avons exhibé des termes sous-maille spécifiques aux situations diphasiques. Nous avons retrouvé formellement le fait que la géométrie de l'interface est dégradée avec la sous-résolution. Par conséquent, nous avons montré que les modèles devaient non seulement tenir compte de la turbulence mais également de la présence d'une discontinuité. L'étude des ordres de grandeurs des différents termes sous-maille nous a permis de négliger certains d'entre eux pour nous concentrer sur la modélisation des termes prépondérants. L'adaptation de la décomposition de Leonard revisitée par Germano à ces termes spécifiques, nous a conduit

à développer des modèles du type similarités d'échelles. Les nombreux tests *a priori* que nous avons effectués montrent que nos modèles sont extrêmement bien corrélés avec la contribution réelle des termes sous-maille. L'implémentation des termes principaux de notre modélisation et une première comparaison des résultats qu'elle fournit sur un maillage deux fois plus grossier que le maillage du calcul SND résolu confirme la capacité de nos modèles à diminuer notablement le coût numériquement sans véritablement en affecter la précision.

- Alors que de nombreuses et récentes études démontrent les effets conséquents du caractère déformable des inclusions sur les propriétés de l'écoulement, nous avons intégré dans des modèles sous-maille les effets de la variation de la courbure de l'interface. La méthode des DAR nous a permis de préciser les relations de saut des grandeurs filtrées et d'établir une nouvelle équation de transport de la discontinuité équivalente. Il est apparu que le saut du tenseur des contraintes, simplement égal aux forces superficielles pour les grandeurs exactes, dépend également des corrélations entre la vitesse et la masse volumique, *i.e.* des corrélations entre la vitesse et la géométrie de l'interface. Puisque ces corrélations apparaissent sous la forme d'une dérivée temporelle, on a donc, dans le cas de simulations sous-résolues, en plus des forces superficielles classiques qui sont proportionnelles à la courbure, une force surfacique dont l'intensité dépend de l'évolution temporelle de la géométrie de l'interface. De façon encore plus claire, l'équation de transport de la discontinuité équivalente que nous avons obtenue fait apparaître explicitement l'évolution temporelle de la courbure de l'interface. Grâce à des tests *a priori*, nous avons montré la nécessité de tenir compte de cette dépendance pour prédire correctement la vitesse des interfaces.

Perspectives

Les perspectives ouvertes par ces travaux sont nombreuses. On les énonce en commençant par le court terme pour aller progressivement vers le moyen et long terme, en oubliant tous les obstacles que la physique aura sans doute semés sur ce trajet.

Tout d'abord, il est nécessaire de finir l'implémentation des modèles que nous avons proposés afin de réaliser de nouvelles validations *a posteriori*, c'est-à-dire de vérifier que l'ajout de modèles lors de calculs sous-résolus permet de se rapprocher de la solution fournie par la SND. En effet, du fait, par exemple, de la diffusion numérique, l'apport des modèles de la SGE n'est pas toujours flagrant et ce même en monophasique. Dans le cadre de l'ANR Simulation Turbulence et Interfaces, il est prévu de vérifier, pour une surface libre cisailée, que les très bons résultats que nous avons obtenus à partir de tests *a priori* ne dépendent pas de conditions particulières de l'écoulement, que l'implémentation de nos modèles ne crée pas d'instabilité numérique et qu'aucun effet de la sous-résolution n'a été sous-estimé. Cependant, la démarche que nous avons mise en place lors de l'élaboration du concept ISS est complète et s'il est évident que les modèles que nous proposons devront être adaptés et retravaillés, nous sommes maintenant certains de leur potentiel.

Une fois ces premiers modèles validés, il sera alors nécessaire de relaxer certaines des hypothèses. En effet, un des programmes à long terme dans laquelle s'inscrit cette étude est la simulation de situation d'ébullition convective. Cet objectif étant trop ambitieux pour être atteint directement, les difficultés ont été scindées pour les rendre plus abordables et la modélisation physico-numérique du changement de phase, a fait l'objet de nombreux travaux [41, 20, 62] antérieurs à cette thèse. Cependant, nous avons pour l'instant établi nos modèles dans le cas sans changement de phase. Il s'agit donc d'une étape préliminaire et

il faudra compléter nos modèles afin de tenir compte du changement de phase. Nous avons d'ailleurs fait un premier pas dans cette direction en réalisant des tests *a priori* dans des situations anisothermes sans changement de phase. Le même type de modèles que celui développé pour l'équation de bilan de quantité de mouvement dans ce mémoire, fonctionne très bien pour l'équation de température [97]. Une autre hypothèse que nous avons faite concerne les déformations de l'interface : nous avons supposé que son plus petit rayon de courbure était plus grand que la taille de la maille. Pourtant, dans des situations industrielles, les bulles sont susceptibles d'être suffisamment déformées pour qu'une partie de leur géométrie soit non résolue. Comme nous l'avons montré, les interactions entre interfaces et turbulence se caractérisent par des échanges entre l'énergie d'interface et l'énergie cinétique des phases. Une façon de tenir compte des transferts non résolus serait donc d'établir des équations d'évolution de l'énergie d'interface non résolue et de l'énergie cinétique turbulente. On peut alors espérer qu'un tel outil aide à mieux comprendre un certain nombre de phénomènes physiques tels que les interactions entre plusieurs bulles et la crise d'ébullition.

De façon plus générale, le concept ISS doit, à terme, permettre de réaliser des calculs dont le degré de précision est proche de celui de la SND et dont le coût numérique est très inférieur. Par conséquent, il est un niveau de modélisation intermédiaire entre les codes industriels (basés sur un modèle à deux fluides moyennés en volume et statistiquement) et les codes de SND. Par intermédiaire on entend qu'il se construit principalement grâce aux informations issues de SND et que l'un de ces objectifs concrets et pragmatiques est d'enrichir les modèles des codes industriels. Dans les codes industriels du domaine du nucléaire, on peut distinguer trois niveaux de modélisation : le niveau *Système* qui correspond à l'ensemble du réacteur et une partie de ses auxiliaires, le niveau *Composant* qui ne s'intéresse qu'au coeur du réacteur ou à un générateur de vapeur et le niveau *3D local* qui concerne quelques canaux du coeur. En partant du niveau le plus fin, ce mémoire illustre par exemple comment chaque niveau peut être utilisée pour enrichir les niveaux moins détaillés. Une réflexion collective, principalement au sein de notre laboratoire, est amorcée afin d'élargir cette démarche multiéchelle.

Annexes

Spectre d'énergie d'interface

POUR ÉTUDIER les mécanismes d'interaction interface/turbulence, il est intéressant de disposer d'un outil permettant de connaître le spectre instantané de l'énergie d'interface. En effet, on sait qu'une interface interagit de façon sélective avec l'énergie cinétique turbulente, à la manière d'un filtre. Les structures tourbillonnaires provoquent des déformations de l'interface qui va donc osciller et rétrocéder de l'énergie aux phases mais pas nécessairement aux échelles de temps ou de longueurs initiales. De plus, on ne sait pas évaluer *a priori* l'échelle des plus petites déformations de l'interface énergétiquement actives (alors qu'on sait le faire pour les plus petites structures turbulentes au sein d'une phase : c'est l'échelle de Kolmogorov). Un outil de calcul des spectres d'énergie d'interface permet une évaluation *a posteriori* qui, si elle est faite systématiquement, notamment pour beaucoup de valeurs du nombre d'Ohnesorge, pourrait conduire à une relation permettant de déduire la taille des plus petites déformations de l'interface à partir des grandeurs caractérisant cet écoulement. Pour construire une représentation spectrale de l'énergie d'interface, on a besoin des fonctions de base adaptées : les harmoniques sphériques. Après avoir rappelé leur définition, on expliquera la méthode d'obtention d'un spectre d'énergie interfaciale et on donnera un exemple.

A.1 Les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques correspondent aux modes propres des déformations d'une inclusion (pour plus de détail sur ce problème physique, on se référera à [51] ou [69]). Ces harmoniques sont reliées aux polynômes de Legendre, P_n^m (n est le degré et m l'ordre du polynôme), par la relation

$$Y_n^m = c_n^m e^{im\varphi} P_n^m(\cos(\theta)), \quad 0 \leq m \leq n \quad (\text{A.1})$$

où on a introduit l'exponentielle complexe. La définition des angles θ et φ est précisée par la figure A.1. Le coefficient c_n^m est le coefficient de normalisation,

$$c_n^m = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \quad (\text{A.2})$$

qui assure l'orthonormalité de la base,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_l^k \overline{Y_n^m} \sin\theta d\theta = \delta_{km} \delta_{ln}, \quad (\text{A.3})$$

δ_{km} est le symbole de Kronecker (il vaut 0 si $k \neq m$ et 1 sinon) et l'opérateur $\overline{}$ associe à tout complexe le complexe conjugué.

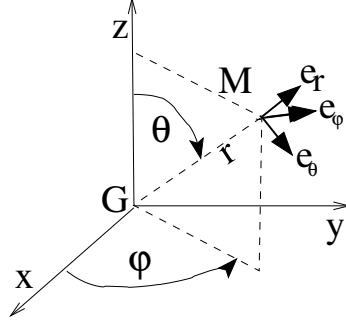


FIG. A.1 – Coordonnées sphériques

Une fonction, f , définie sur une sphère se décompose de façon unique :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{-n \leq m \leq n} f_n^m \overline{Y_n^m}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.4})$$

$$f_n^m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta \quad (\text{A.5})$$

$$Y_n^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \overline{Y_n^m}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.6})$$

Pour calculer les polynômes de Legendre, on peut avoir recourt à des formules explicites sous forme de somme mais ces dernières nécessitent des calculs de factorielles de grands nombres et des simplifications délicates entre les termes successifs dont le signe alterne. Il est donc préférable d'utiliser des formules de récurrence. Malheureusement, la plupart des récurrences sur m sont instables et sont donc à éviter lors d'un travail numérique. En effet, la relation

$$P_n^{m+1}(z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} ((n-m)z P_n^m(z) - (n+m)P_{n-1}^m(z)), \quad z = \cos\theta$$

est dangereuse lorsque θ tend vers 0 ou π . On utilisera donc les formules suivantes issues de [69]

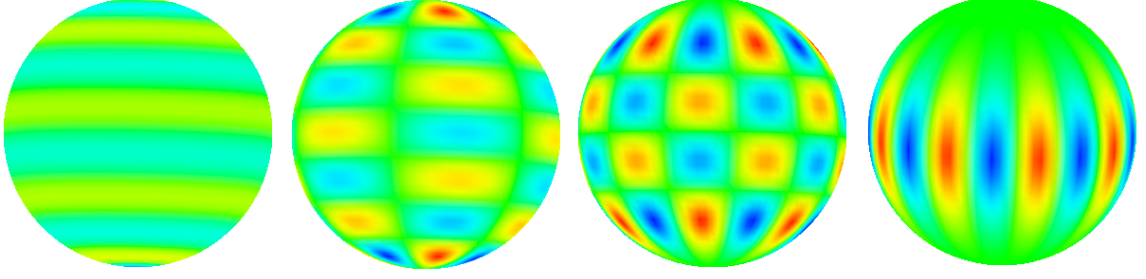
$$P_m^m(z) = (-1)^m (2m-1)!! (1-z^2)^{m/2} \quad (\text{A.7})$$

$$P_{m+1}^m(z) = z(2m+1)P_m^m(z) \quad (\text{A.8})$$

$$(n-m)P_n^m = z(2n-1)P_{n-1}^m - (n+m-1)P_{n-2}^m, \quad 0 \leq m \leq n-2 \quad (\text{A.9})$$

où $n!!$ est le produit des entiers impairs de 1 à n .

La figure A.2 montre quelques fonctions harmoniques sphériques de degré 9 et d'ordre variable. Ce sont donc des surfaces qui enveloppent la sphère et qui présentent des ondulations de part et d'autre de zéro, en rouge les zones positives, en bleu les zones négatives, et en vert les passages par zéro. La propriété est que la fonction harmonique sphérique passe autant de fois par zéro que ce que vaut son degré n . Parmi ces passages par zéro, m se font suivant une longitude, et donc $n-m$ suivant une latitude.

FIG. A.2 – Représentation des harmoniques sphériques Y_9^0 , Y_9^3 , Y_9^6 et Y_9^9 .

A.2 Spectre d'énergie interfaciale

A.2.1 Surface d'un sphéroïde

On définit le barycentre de surface d'un sphéroïde, S , comme le point G vérifiant

$$\int_{M \in S} \mathbf{GM} d\sigma = 0$$

On se place dans le repère associé aux coordonnées sphériques dont l'origine est le barycentre de surface du sphéroïde, l'élément de surface s'écrit

$$d\sigma = \|D_\theta f \wedge D_\varphi f\| d\theta d\varphi \quad (\text{A.10})$$

où \wedge est un produit vectoriel et f est la fonction qui a tout couple d'angles associe le vecteur position du point correspondant du sphéroïde :

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto \mathbf{GM} = r(\theta, \varphi) e_r \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} D_\theta f &= r e_\theta + \frac{\partial r}{\partial \theta} e_r \\ D_\varphi f &= r \sin \theta e_\varphi + \frac{\partial r}{\partial \varphi} e_r \end{aligned}$$

et la surface, s , est donnée par :

$$s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin \theta \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right)} d\theta \quad (\text{A.11})$$

En faisant l'hypothèse des petites déformations au sens où la normale à la surface est à peu près confondue avec e_r (ce qui signifie que l'amplitude des perturbations doit être d'autant plus faible que leur fréquence est élevée), on a à l'ordre deux :

$$s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (\text{A.12})$$

A.2.2 Spectre d'énergie interfaciale

Dans le cas où la tension de surface est supposée constante, l'énergie d'interface est directement proportionnelle à la surface de l'interface en question. En utilisant les équations (A.4) et (A.5) appliquées à la fonction $(\theta, \varphi) \mapsto r$, puis la propriété d'orthogonalité (A.3), l'équation (A.12) devient :

$$s = \sum_{n \geq 0} \sum_{-n \leq m \leq n} \|r_n^m\|^2 \quad (\text{A.13})$$

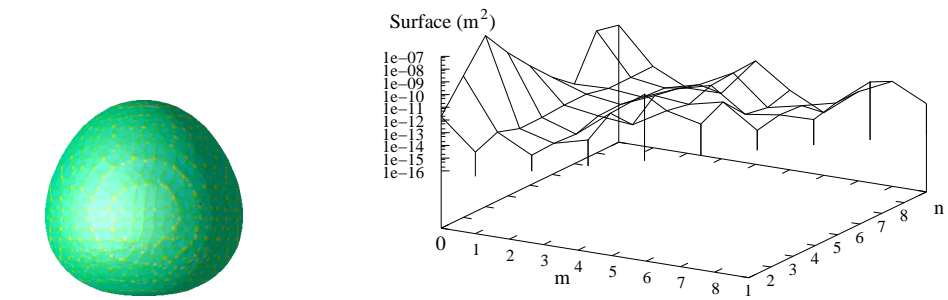
On a ainsi obtenu une décomposition spectrale de l'énergie d'interface. La propriété (A.6) implique que $\|r_n^{-m}\|^2 = \|r_n^m\|^2$. Par conséquent, pour m strictement positif, il n'est pas utile de calculer les coefficients r_n^{-m} , ni même de représenter dans le spectre d'énergie d'interface les $\|r_n^{-m}\|^2$.

A.2.3 Validation de notre implémentation du calcul du spectre d'énergie interfaciale

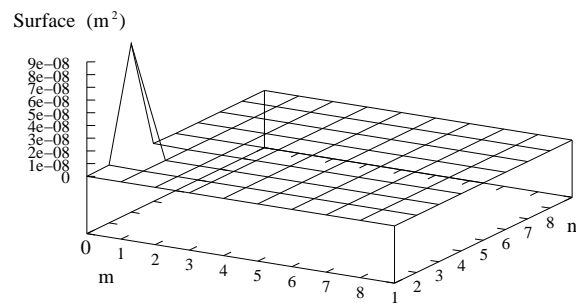
On a généré un maillage d'interface correspondant à l'harmonique sphérique Y_3^0 . L'interface est représenté figure A.3(a) et l'échelle de couleur représente la courbure. Ce maillage d'interface a alors été postraité comme s'il s'agissait du résultat d'un calcul et on a obtenu les spectres d'énergie présentés figures A.3(b) et A.3(c). On constate (fig. A.3(c)) que toute l'énergie de la perturbation est bien sur le mode attendu ($m = 0$ et $n = 3$). Mais la figure A.3(b) (en échelle log) montre que le signal est très bruité, ce qui limitera sans doute les applications de cette méthode.

A.3 Conclusion

A partir de la décomposition de la géométrie de l'interface sur les harmoniques sphériques, nous avons défini le spectre d'énergie d'une interface puis nous avons implémenté un outil de postraitement pour tracer ce spectre.

(a) Maillage du mode Y_3^0

(b) Spectre d'énergie d'interface en échelle log. Le mode (0,3) est 7000 fois plus grand que le pic suivant, le mode (0,8) et 150 fois plus grand que le mode suivant (0,4) qui est le deuxième maximum.



(c) Spectre d'énergie d'interface

FIG. A.3 – Spectre d'énergie de surface

Grandeur en excès

DANS LE CHAPITRE 6, on a introduit trois définitions de la grandeur en excès. Cette grandeur permet de faire le lien entre une vision continue et une vision discontinue des interfaces. Dans cette annexe, on discute rapidement de l'équivalence de ces trois définitions dans le cas d'une interface sphérique. On montre ainsi que si l'on désire respecter un principe de conservation seule la définition à partir d'un volume de contrôle est satisfaisante.

B.1 Trois définitions

Dans le chapitre 6, on a présenté trois définitions d'une grandeur en excès $(\bar{\phi})^{ex}$. Ces grandeurs sont utilisées dans l'analyse générique des processus interfaciaux [23]. En notant $\bar{\phi}$ la grandeur à l'échelle microscopique et $\tilde{\phi}$ celle à l'échelle macroscopique, on a

$$\int_A (\bar{\phi})^{ex} dS = \int_V (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dV \quad (\text{B.1a})$$

$$\int_{\partial A} (\bar{\phi})^{ex} d\mathbf{L} = \int_{\partial V} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) d\mathbf{S} \quad (\text{B.1b})$$

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_0^{+\infty} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dr \quad (\text{B.1c})$$

où V est le volume de contrôle défini dans la zone interfaciale, A la portion d'interface incluse dans ce volume, ∂A le contour de cette surface A et r la distance par rapport au centre de l'inclusion. L'équation (B.1a) définit la grandeur en excès à partir d'un bilan sur un volume de contrôle. Elle respecte donc la notion de conservation. La définition (B.1b) utilise une formulation en terme de flux et la relation (B.1c) est une simple intégration suivant la direction normale.

Afin de pouvoir comparer simplement ces trois définitions, on se restreint à l'étude du cas d'une interface sphérique de rayon R . On se place en coordonnées sphérique (r, θ, φ) avec l'origine au centre de l'inclusion. L'équation de l'interface sphérique est donc $r = R$ et la zone de transition d'épaisseur 2δ correspond à la région de l'espace $R - \delta < r < R + \delta$. Les notations géométriques sont précisées par la figure B.1.

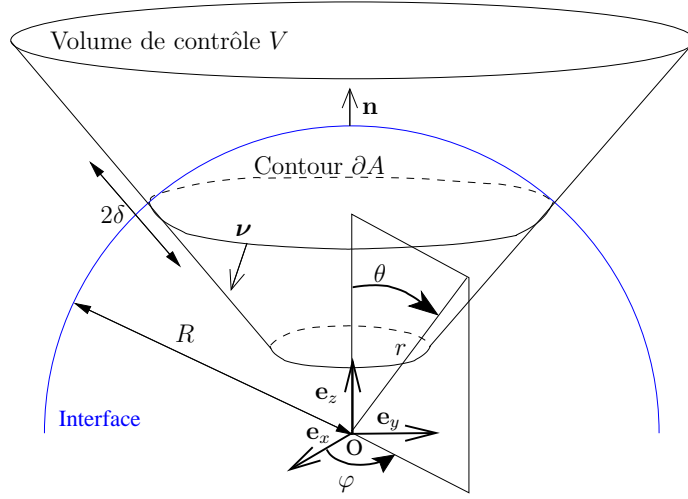


FIG. B.1 – Définition 3D du volume de contrôle associé à la zone de transition interfaciale et des coordonnées sphériques

B.2 Ecriture 1D de la définition volumique

En coordonnées sphériques, la définition (B.1a) s'écrit :

$$\int_A (\bar{\phi})^{ex}(\theta, \varphi) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \int_V (\bar{\phi} - \tilde{\phi})(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \quad (\text{B.2a})$$

Puisqu'elle est valable pour tout volume de contrôle V contenant la zone de transition, on peut se restreindre à un volume suffisamment petit pour pouvoir négliger les variations des grandeurs en fonction de θ et de ϕ :

$$(\bar{\phi})^{ex} R^2 \int_A \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{+\infty} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) r^2 dr \int_A \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{B.2b})$$

En simplifiant par $\int_A \sin\theta d\theta d\varphi$, on obtient :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{R^2} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dr \quad (\text{B.2c})$$

En se souvenant que les grandeurs à l'échelle microscopique et celle à l'échelle macroscopique diffèrent seulement dans la zone de transition interfaciale ($R - \delta < r < R + \delta$), l'intégrale précédente se réécrit :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{R-\delta}^{R+\delta} \frac{r^2}{R^2} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dr \quad (\text{B.2d})$$

En faisant le changement de variable $z = r - R$, on trouve finalement :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 + 2\frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2}\right) (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dz \quad (\text{B.2e})$$

B.3 Ecriture 1D de la définition à partir des flux

On choisit la base canonique fixe $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ telle que l'angle θ soit constant sur le contour ∂A . L'équation de ce contour est alors $\theta = \theta_0$. En notant $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur surfacique (*i.e.* qui

est tangent à l'interface) normal au contour ∂A , la définition (B.1b) s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\int_{\partial A} (\bar{\phi})^{ex} R \sin \theta_0 \nu d\varphi = \int_{\partial V} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) r \sin \theta_0 \nu d\varphi dr \quad (\text{B.3a})$$

Comme précédemment, cette définition est valable pour tout volume de contrôle V . On peut donc choisir θ_0 tel que l'on puisse négliger les variations des grandeurs par rapport à φ . Après des simplifications similaires à celles faites dans le paragraphe précédent, on trouve :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{R-\delta}^{R+\delta} \frac{r}{R} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dr \quad (\text{B.3b})$$

Avec le même changement de variable que pour la définition volumique $z = r - R$, on obtient ici :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\delta}^{+\delta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dz \quad (\text{B.3c})$$

B.4 Réécriture de la définition 1D

En limitant le support de l'intégrale à la zone de transition interfaciale et en faisant le changement de variable $z = r - R$, la définition 1D (B.1c) devient simplement :

$$(\bar{\phi})^{ex} = \int_{-\delta}^{+\delta} (\bar{\phi} - \tilde{\phi}) dz \quad (\text{B.4})$$

B.5 Conclusion

En se limitant à l'étude d'une interface sphérique, on a montré facilement que chaque définition de la grandeur en excès se réécrit comme une simple intégrale suivant la direction normale. On constate que seules les deux premières définitions font intervenir la courbure de l'interface. Si on désire préserver la notion de conservation, il faut nécessairement raisonner de façon volumique en faisant des bilans. Puisque les définitions par flux et purement monodimensionnelle ne sont pas équivalentes à la définition volumique, elles peuvent être insuffisantes. Cependant, à l'ordre 0 en $\epsilon = \frac{\delta}{R}$, les trois définitions sont rigoureusement équivalentes.

Dans ce mémoire, on s'arrête à l'ordre 0 pour les développements asymptotiques raccordés donc, lors de cette analyse, on confond ces trois définitions. En revanche, afin de conserver la masse, on détermine la position de la discontinuité équivalente à partir de la définition volumique.

Système de coordonnées associées à l'interface

LA MÉTHODE des développements asymptotiques raccordés revient à dilater la direction dans laquelle les grandeurs varient fortement et rapidement. Dans le cas des écoulements diphasiques, les grandeurs varient rapidement dans la direction normale à l'interface lorsque l'on en est suffisamment proche. Pour faire un changement de variable suivant la direction normale, il faut au préalable se placer dans un système de coordonnées associées à l'interface. Puisque ce système de coordonnées est en partie curviligne, les opérateurs de dérivation définis dans ce système font intervenir des facteurs d'échelles. Dans cette annexe, on définit le système de coordonnées associées à l'interface dont le paramétrage de la surface se fait suivant les directions principales. On écrit alors les différents opérateurs de dérivations dans ce système.

C.1 Base naturelle associée à l'interface

Soit (ξ_1, ξ_2, ξ_3) le système de coordonnées associé à l'interface. (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Le point courant M s'exprime en fonction de ces coordonnées par la relation

$$\mathbf{OM} = \mathbf{r}_0(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{n} \quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface [2, 32, 3]. On note $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ les vecteurs unitaires tangents à l'interface, parallèles aux directions principales de courbure. Ces deux directions sont orthogonales [32]. La base naturelle $\{\mathbf{g}_i\}$ associée à ce système de coordonnées est définie par :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_i} \quad (\text{C.2})$$

On a donc

$$\mathbf{g}_1 = (1 - \xi_3 \kappa_1) \mathbf{t}_1, \mathbf{g}_2 = (1 - \xi_3 \kappa_2) \mathbf{t}_2, \mathbf{g}_3 = \mathbf{n} \quad (\text{C.3})$$

où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales ([2, 32]). Soit \mathbf{V} un vecteur, on a $\mathbf{V} = V^i \mathbf{g}_i$. Les composantes V^i sont appelées *composantes contravariantes* du vecteur \mathbf{V} sur la base $\{\mathbf{g}_i\}$. On définit la base duale $\{\mathbf{g}^i\}$ de la base naturelle par les relations suivantes

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (\text{C.4})$$

et on a $\mathbf{V} = V_i \mathbf{g}^i$. Les composantes V_i sont appelées *composantes covariantes* du vecteur \mathbf{V} . Le tenseur métrique est défini par :

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (\text{C.5})$$

Les facteurs d'échelles sont définis par :

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{C.6})$$

On a :

$$h_1 = |1 - \xi_3 \kappa_1|, \quad h_2 = |1 - \xi_3 \kappa_2|, \quad h_3 = 1 \quad (\text{C.7})$$

La base naturelle a le défaut de ne pas être normée. Pour éviter cet inconvénient, on introduit la base naturelle normée, dite encore base physique :

$$\left\{ \tilde{\mathbf{g}}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{\|\mathbf{g}_i\|} = \frac{\mathbf{g}_i}{h_i} = \frac{\mathbf{g}^i}{\|\mathbf{g}^i\|} = \mathbf{g}^i h_i \right\} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}) \quad (\text{C.8})$$

On travaille avec les *composantes physiques* des vecteurs. Ces composantes vérifient :

$$\mathbf{u} = u(i) \tilde{\mathbf{g}}_i, \quad \text{avec} \quad u(i) = h_i \, u^i = \frac{u_i}{h_i} \quad (\text{C.9})$$

C.2 Variations de la base naturelle

On peut écrire les dérivées des vecteurs de base sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi_j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (\text{C.10})$$

où les nombres Γ_{ji}^i sont les coefficients de Christoffel. La définition des coefficients de Christoffel ainsi que leur calcul dans la base naturelle sont présentés dans l'annexe C.8. Pour alléger l'écriture, on notera la dérivée de ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} = \phi_{,j} \quad (\text{C.11})$$

Par abus de notation, même après le changement de variable (6.66), on notera :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \phi_{,3} \quad (\text{C.12})$$

C.3 Etude des champs surfaciques tangents

Pour les opérateurs de dérivation surfacique, les directions de différenciation appartiennent au plan tangent à l'interface (attention, ceci ne signifie pas que l'ensemble image de ces opérateurs appartient au plan tangent mais que l'on différencie uniquement suivant les directions tangentes à l'interface). Par souci de précision, les indices de cette partie sont notés avec des lettres grecques. Lorsque ces indices sont répétés, la sommation à effectuer se limite à deux termes et non trois comme dans le cas des champs volumiques. Pour plus de détail, on se reportera au chapitre 2 de l'ouvrage *Statique des coques élastiques* [32].

C.3.1 Gradient de surface d'un champ scalaire surfacique

Par définition, le gradient de surface, ∇_s , d'un champ scalaire surfacique, v , est :

$$\nabla_s v = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{t}^\alpha \quad (\text{C.13})$$

Si le champ scalaire v est défini dans tout l'espace, la relation suivante permet de relier le gradient volumique au gradient surfacique (voir [27]) :

$$\nabla v = \nabla_s v + (\mathbf{n} \cdot \nabla v) \mathbf{n} \quad (\text{C.14})$$

C.3.2 Gradient de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Le gradient de surface, ∇_s , d'un champ de vecteur tangent, \mathbf{V} , appliqué à la différentielle du point courant de la surface donne la partie tangente de la différentielle de ce champ vectoriel \mathbf{V} . Ses composantes covariantes sont

$$(\nabla_s \mathbf{V})_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial \xi_\beta} - V_\gamma \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\gamma \quad (\text{C.15})$$

où les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les coefficients de connexion riemannienne (voir section C.3.3 pour leur lien avec les coefficients de Christoffel).

C.3.3 Divergence de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Par définition, la divergence de surface, $\nabla_s \cdot$, d'un champ vectoriel surfacique tangent, \mathbf{V} , est

$$\nabla_s \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial \xi_\alpha} + V^\beta \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha \quad (\text{C.16})$$

où les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les coefficients de connexion riemannienne. Dans notre cas (*i.e.* le repère choisi suit les lignes de courbure), ils correspondent aux coefficients de Christoffel avec $\xi_3 = 0$ (voir annexe C.8).

C.3.4 Rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Le rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent est le scalaire défini par

$$rot_s \mathbf{V} = o^{\beta\alpha} \frac{\partial V_\alpha}{\partial \xi_\beta} \quad (\text{C.17})$$

où \mathbf{o} est le tenseur d'orientation de surface. Il s'agit de l'opérateur qui à tout couple de vecteur surfacique tangent associe le produit mixte avec la normale :

$$\begin{aligned} \mathbf{o} : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées choisi qui suit les lignes de courbure, les composantes covariantes (mais c'est en fait indifférent ici) du tenseur d'orientation de surface sont simplement :

$$\mathbf{o}_{..} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Le rotationnel de surface est la composante normale du rotationnel classique. Si un champ vectoriel spatial \mathbf{x} est tel que sa restriction à sa surface coïncide avec le champ vectoriel tangent \mathbf{v} , alors on a :

$$\text{rot}_s \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{x}$$

C.3.5 Laplacien de surface d'un champ scalaire surfacique

Par définition, le laplacien de surface, Δ_s , d'un champ scalaire surfacique, v , est :

$$\Delta_s v = \nabla_s \cdot (\nabla_s v) \quad (\text{C.19})$$

Avec un paramétrage associé aux directions principales (ou lignes de courbures), on a sur la surface définie par $\xi_3 = 0$:

$$\Delta_s v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} \quad (\text{C.20})$$

C.4 Tenseur de courbure normale

Les composantes covariantes du tenseur de courbure normale, \mathbf{B} , sont :

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\beta} \quad (\text{C.21})$$

La définition précédente est très générale. En particulier, les directions 1 et 2 ne correspondent pas nécessairement aux directions principales contrairement à une grande partie de ce document. Dans le cas où ces directions correspondent aux directions principales, on a la relation suivante avec les coefficients de Christoffel : $b_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^3 \Big|_{\xi_3=0}$. Les valeurs propres de \mathbf{B} sont les courbures principales de la surface au point considéré. On les note $\kappa_1 = \frac{1}{R_1}$ et $\kappa_2 = \frac{1}{R_2}$.

Ces invariants sont :

- la courbure moyenne, $\kappa = \text{Tr } \mathbf{B} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,
- la courbure gaussienne, $H = \det \mathbf{B} = \frac{1}{R_1 R_2}$.

Comme \mathbf{n} et \mathbf{t}_α sont orthogonaux entre eux les composantes covariantes du tenseur de courbure s'écrivent aussi :

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\beta}$$

D'après la généralisation du gradient de surface aux vecteurs non tangents (équation C.24), la relation précédente s'écrit en coordonnées intrinsèques :

$$\mathbf{B} = -\nabla_s \mathbf{n} \quad (\text{C.22})$$

Comme l'opérateur divergence est la trace de l'opérateur gradient, on retrouve :

$$\kappa = \text{Tr } \mathbf{B} = -\text{Tr } (\nabla_s \mathbf{n}) = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$$

C.5 Opérateurs de dérivation surfaciques

L'étude des champs surfaciques tangents nous a conduit à définir des opérateurs de dérivation surfacique. Les définitions de ces opérateurs peuvent être généralisées afin de pouvoir s'appliquer aux champs volumiques¹ non tangents². Afin de faire le lien entre les opérateurs surfaciques et les opérateurs classiques pour des tenseurs définis en volume (et non uniquement sur la surface), on définit l'opérateur de projection \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{C.23})$$

où \mathbf{I} est l'opérateur identité et \mathbf{n} la normale.

C.5.1 Opérateur gradient surfacique

Le gradient surfacique du tenseur \mathbf{T} (défini sur tout le volume et non uniquement sur la surface) est :

$$\nabla_s \mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{T} \quad (\text{C.24})$$

Cette relation permet de montrer le lien entre le gradient de surface d'un champ vectoriel et le gradient de surface de ses composantes dans la base canonique fixe. En effet, en se plaçant dans la base canonique fixe, $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, on trouve la même relation que pour le gradient *classique* :

$$\nabla_s \mathbf{V} = \nabla_s V_x \otimes \mathbf{e}_x + \nabla_s V_y \otimes \mathbf{e}_y + \nabla_s V_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (\text{C.25})$$

C.5.2 Opérateur divergence surfacique

La divergence surfacique du tenseur \mathbf{T} (défini sur tout le volume et non uniquement sur la surface) est :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{T} = \mathbf{P} : \nabla \mathbf{T} \quad (\text{C.26})$$

C.5.3 Opérateur laplacien surfacique

La relation (C.19) donnée pour un scalaire s'étend en fait à un tenseur, \mathbf{T} , de dimension arbitraire :

$$\Delta_s \mathbf{T} = \nabla_s \cdot (\nabla_s \mathbf{T}) \quad (\text{C.27})$$

¹Les champs volumiques sont définis sur tout le domaine contrairement aux champs surfaciques qui ne sont définis que sur la surface.

²Les champs non tangents peuvent avoir une composante normale non nulle contrairement aux champs tangents.

En utilisant les équations (C.24) et (C.26) dans cette dernière relation, on trouve :

$$\Delta_s \mathbf{T} = \mathbf{P} : \nabla(\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{T}) \quad (\text{C.28})$$

Tout comme pour l'opérateur gradient surfacique, on peut alors faire le lien entre le laplacien surfacique d'un champ vectoriel et le laplacien surfacique de ses composantes dans la base canonique fixe, $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. On trouve la même relation que pour le laplacien *classique* :

$$\Delta_s \mathbf{V} = \Delta_s V_x \mathbf{e}_x + \Delta_s V_y \mathbf{e}_y + \Delta_s V_z \mathbf{e}_z \quad (\text{C.29})$$

C.6 Opérateur gradient

C.6.1 Gradient d'un scalaire

Le gradient de ψ s'exprime de la façon suivante [33, Chap. 2] :

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{g}^i = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{g}_i \quad (\text{C.30})$$

Et on a :

$$\nabla \psi \cdot \tilde{\mathbf{g}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \quad (\text{C.31})$$

C.6.2 Gradient d'un vecteur

Le gradient d'un vecteur \mathbf{u} s'exprime de la façon suivante [33, Chap. 2]

$$\nabla \mathbf{u} = \left(u_{,i}^j + u^k \Gamma_{ki}^j \right) \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^i \quad (\text{C.32a})$$

ou encore, avec un autre choix de composantes :

$$\nabla \mathbf{u} = \left(u_{j,i} - u_k \Gamma_{ji}^k \right) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (\text{C.32b})$$

On a alors

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = h_i u(i)_{,j} + u(i) h_{i,j} - h_k u(k) \Gamma_{ij}^k \quad (\text{C.32c})$$

soit pour chaque composante :

$$(\nabla \mathbf{u})_{11} = h_1 u(1)_{,1} - u(2) \xi_3 \frac{h_1}{h_2} \kappa_{1,1} - u(3) h_1 \kappa_1 \quad (\text{C.32d})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{12} = h_1 u(1)_{,2} - u(2) \xi_3 \kappa_{2,1} \quad (\text{C.32e})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{13} = h_1 u(1)_{,3} \quad (\text{C.32f})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{21} = h_2 u(2)_{,1} + u(1) \xi_3 \kappa_{1,2} \quad (\text{C.32g})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{22} = h_2 u(2)_{,2} - u(1) \xi_3 \frac{h_2}{h_1} \kappa_{2,2} - u(3) h_2 \kappa_2 \quad (\text{C.32h})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{23} = h_2 u(2)_{,3} \quad (\text{C.32i})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{31} = u(3)_{,1} + u(1) \kappa_1 \quad (\text{C.32j})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{32} = u(3)_{,2} + u(2) \kappa_2 \quad (\text{C.32k})$$

$$(\nabla \mathbf{u})_{33} = u(3)_{,3} \quad (\text{C.32l})$$

C.6.3 Composante normale du tenseur des contraintes visqueuses

On déduit de l'équation (C.32a) que le gradient du vecteur \mathbf{u} contracté avec le vecteur normal à l'interface s'écrit,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = u_{,3}^j \mathbf{g}_j + u^1 \Gamma_{13}^1 \mathbf{g}_1 + u^2 \Gamma_{23}^2 \mathbf{g}_2 \quad (\text{C.33})$$

car dans l'expression (C.32a) Γ_{k3}^j est non nul uniquement pour Γ_{13}^1 et Γ_{23}^2 (voir annexe C.8). Cependant, en utilisant les composantes contravariantes physiques des vecteurs, et en exprimant le résultat dans la base naturelle normée, il reste simplement :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} = u(j)_{,3} \tilde{\mathbf{g}}_j \quad (\text{C.34})$$

On déduit des équations (C.32j), (C.32k) et (C.32l) que le gradient transposé du vecteur \mathbf{u} contracté avec le vecteur normal à l'interface s'écrit :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla^T \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u})_{3i} \mathbf{g}^i = \frac{u(3)_{,1} + u(1)\kappa_1}{h_1} \tilde{\mathbf{g}}_1 + \frac{u(3)_{,2} + u(2)\kappa_2}{h_2} \tilde{\mathbf{g}}_2 + u(3)_{,3} \tilde{\mathbf{g}}_3 \quad (\text{C.35})$$

Finalement,

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \left(u(1)_{,3} + \frac{u(3)_{,1} + u(1)\kappa_1}{h_1} \right) \tilde{\mathbf{g}}_1 + \left(u(2)_{,3} + \frac{u(3)_{,2} + u(2)\kappa_2}{h_2} \right) \tilde{\mathbf{g}}_2 + 2u(3)_{,3} \tilde{\mathbf{g}}_3 \quad (\text{C.36})$$

C.7 Opérateur divergence

C.7.1 Divergence d'un vecteur

Par définition, la divergence d'un vecteur \mathbf{u} s'exprime de la façon suivante [33, Chap. 2] :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}^i \quad (\text{C.37})$$

En écrivant le vecteur \mathbf{u} sous forme contravariante et en utilisant la relation (C.10) sur la dérivée des vecteurs de base, il vient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u^i_{,i} + u^j \Gamma_{ji}^i \quad (\text{C.38})$$

Comme certains Γ_{ji}^i sont nuls (voir annexe C.8), il vient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u^2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u^3}{\partial \xi_3} + u^1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + u^2(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2) + u^3(\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2) \quad (\text{C.39})$$

En utilisant les composantes contravariantes physiques des vecteurs et les expressions des coefficients de Christoffel, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[h_2 \frac{\partial u(1)}{\partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial u(2)}{\partial \xi_2} + h_1 h_2 \frac{\partial u(3)}{\partial \xi_3} - u(3)(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1) \right. \\ \left. - \xi_3 \left(u(1) \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} + u(2) \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \right) \right] \quad (\text{C.40}) \end{aligned}$$

C.7.2 Divergence du tenseur des contraintes visqueuses

On pose :

$$\mathbf{S} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (\text{C.41})$$

La divergence de ce tenseur d'ordre 2 s'écrit [33, Chap. 2] :

$$(\nabla \cdot \mathbf{S})_i = (\nabla \mathbf{S})_{ikk} = S_{ik,k} - S_{mk}\Gamma_{ki}^m - S_{im}\Gamma_{kk}^m \quad (\text{C.42})$$

Le triple indice un peu barbare, ikk , vient juste du fait que le gradient d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 3. On n'utilisera cette formule que dans un voisinage de l'interface, c'est-à-dire pour ξ_3 proche de zéro. Plus précisément, on va réaliser un développement limité en ϵ avec $\xi_3 = \epsilon \xi$. Pour notre étude, seuls les termes en ϵ^{-2} , en ϵ^{-1} et d'ordre 0 en ϵ sont nécessaires. En explicitant uniquement les termes qui seront non nuls jusqu'à l'ordre 0 en ϵ une fois le changement de variable $\xi_3 = \epsilon \xi$ réalisé, on a :

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{S})_1 &= 2(\mu u(1)_{,1})_{,1} + (\mu u(1)_{,2})_{,2} + (\mu u(2)_{,1})_{,2} + (\mu u(1)_{,3})_{,3} + (\mu u(3)_{,1})_{,3} \\ &\quad + \kappa_1 \left((\mu u(1))_{,3} - \mu u(1)_{,3} - 2\mu u(3)_{,1} - \xi_3 (\mu u(1)_{,3})_{,3} \right) \\ &\quad - \mu(\kappa_1 + \kappa_2) (u(3)_{,1} + u(1)_{,3} + \kappa_1 u(1) - \xi_3 \kappa_2 u(1)_{,3}) \\ &\quad + 4\mu \kappa_1^2 \xi_3 u(1)_{,3} - 2\mu \kappa_{1,1} u(3) + \mathcal{O}(\xi_3) \end{aligned} \quad (\text{C.43a})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{S})_2 &= 2(\mu u(2)_{,2})_{,2} + (\mu u(1)_{,2})_{,2} + (\mu u(2)_{,1})_{,2} + (\mu u(2)_{,3})_{,3} + (\mu u(3)_{,2})_{,3} \\ &\quad + \kappa_2 \left((\mu u(2))_{,3} - \mu u(2)_{,3} - 2\mu u(3)_{,2} - \xi_3 (\mu u(2)_{,3})_{,3} \right) \\ &\quad - \mu(\kappa_1 + \kappa_2) (u(3)_{,2} + u(1)_{,3} + \kappa_2 u(2) - \xi_3 \kappa_1 u(2)_{,3}) \\ &\quad + 4\mu \kappa_2^2 \xi_3 u(2)_{,3} - 2\mu \kappa_{2,2} u(3) + \mathcal{O}(\xi_3) \end{aligned} \quad (\text{C.43b})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{S})_3 &= 2(\mu u(3)_{,3})_{,3} + (\mu u(1)_{,3})_{,1} + (\mu u(3)_{,1})_{,1} + (\mu u(2)_{,3})_{,2} + (\mu u(3)_{,2})_{,2} \\ &\quad + \kappa_1 \left((\mu u(1))_{,1} - 2\mu u(3)_{,3} - \xi_3 (\mu u(1)_{,3})_{,1} - \mu u(3) \kappa_1 \right) \\ &\quad + \kappa_2 \left((\mu u(2))_{,2} - 2\mu u(3)_{,3} - \xi_3 (\mu u(2)_{,3})_{,2} - \mu u(3) \kappa_2 \right) \\ &\quad + \mu \xi_3 ((\kappa_{1,1} - \kappa_{2,2})(u(1)_{,3} - u(2)_{,3}) + 2u(3)_{,3}(\kappa_1 + \kappa_2)) + \mathcal{O}(\xi_3) \end{aligned} \quad (\text{C.43c})$$

C.8 Coefficients de Christoffel

Par définition [33] :

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi_j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (\text{C.44})$$

On a également les deux relations [33] :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (\text{C.45})$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\mu} (g_{j\mu, i} + g_{i\mu, j} - g_{ij, \mu}) \quad (\text{C.46})$$

Pour le système de coordonnées associées à l'interface (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , les coefficients de Christoffel qui sont non nuls sont :

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{-\kappa_1}{h_1} \quad (\text{C.47a})$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{-\kappa_2}{h_2} \quad (\text{C.47b})$$

$$\Gamma_{11}^3 = \kappa_1 h_1, \quad \Gamma_{22}^3 = \kappa_2 h_2 \quad (\text{C.47c})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{-\xi_3}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \quad (\text{C.47d})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{-\xi_3}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} \quad (\text{C.47e})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-\xi_3}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{-\xi_3}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_2} \quad (\text{C.47f})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \xi_3 \frac{h_1}{h_2^2} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_1}, \quad \Gamma_{22}^1 = \xi_3 \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_2} \quad (\text{C.47g})$$

C.9 Élément de volume

Par définition [33], l'élément de volume, dV , s'écrit :

$$dV = \sqrt{g} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{C.48a})$$

$$g = \det(g_{..}) \quad (\text{C.48b})$$

Dans le système de coordonnées associées à l'interface, $g_{..}$ est diagonal et, d'après les relations (C.7), l'équation (C.48a) devient :

$$dV = |1 - \xi_3 \kappa_1| |1 - \xi_3 \kappa_2| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{C.49})$$

On a déjà posé (section C.4) :

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 \quad (\text{C.50})$$

$$H = \kappa_1 \kappa_2 \quad (\text{C.51})$$

Si on suppose la surface suffisamment isotrope pour que l'approximation $\kappa_1 \approx \kappa_2$ soit valide, l'élément de volume devient :

$$dV = (1 - \frac{1}{2} \xi_3 \kappa)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{C.52})$$

C.10 Théorème de la divergence surfacique

Le théorème de la divergence surfacique s'écrit pour un tenseur, \mathbf{T} , quelconque³

$$\int_S \nabla_s \cdot \mathbf{T} dS = \oint_C \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} dl - \int_S \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \quad (\text{C.53})$$

où κ est la courbure moyenne de la surface S , \mathbf{n} la normale à la surface S et $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur tangent à la surface S et normal au contour C (voir par exemple [23, eq. 3.3-7 p. 51] et la figure C.1). Ce théorème peut aussi s'écrire en utilisant le projecteur \mathbf{P} défini par l'équation (C.23) :

$$\oint_C \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} dl = \int_S \nabla_s \cdot (\mathbf{P}\mathbf{T}) dS \quad (\text{C.54})$$

³La divergence de surface est définie pour un tenseur, \mathbf{T} , quelconque (le tenseur peut en particulier être volumique et non tangent, voir paragraphe C.5).

Ces deux écritures sont bien sûr équivalentes car, par définition de la courbure et de la divergence surfacique (voir respectivement les paragraphes C.4 et C.5), on a :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{P} = \kappa \mathbf{n} \quad (\text{C.55})$$

On peut ensuite particulariser ce théorème. Si on suppose que le tenseur, \mathbf{T} , est un tenseur surfacique tangent ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$), on a :

$$\int_S \nabla_s \cdot \mathbf{T} dS = \oint_C \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\nu} dl \quad (\text{C.56})$$

Cette expression est similaire à la formule de Green $\int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS$. Elle permet de transformer une intégrale de surface en intégrale de contour (la formule de Green permet de transformer une intégrale de volume en intégrale de surface). Si, de plus, la surface, S , est fermée, il n'y a pas de contour, C et donc :

$$\int_S \nabla_s \cdot \mathbf{T} dS = 0 \quad (\text{C.57})$$

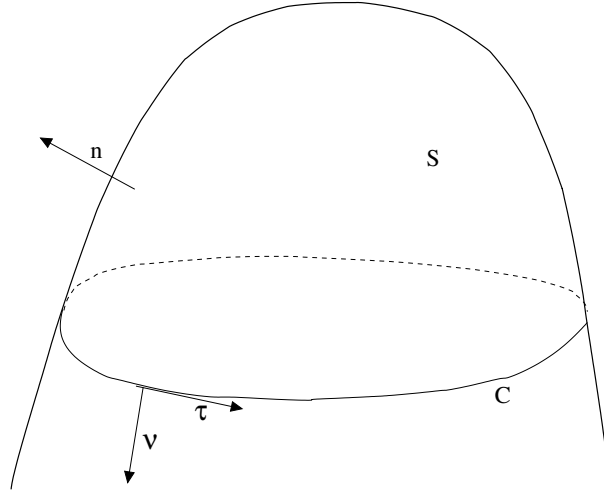


FIG. C.1 – Représentation d'un élément de surface, S , et de la courbe, C qui la limite. Le vecteur \mathbf{n} est la normale à la surface S (pour nous, cette surface est toujours une interface entre deux fluides de masse volumique différente, on oriente la normale du fluide le plus léger vers le plus lourd). Les vecteurs $\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont contenus dans le plan tangent à la surface S . Le vecteur $\boldsymbol{\nu}$ (respectivement $\boldsymbol{\tau}$) est normal (respectivement tangent) à la courbe C . Les directions de ces trois vecteurs unitaires sont telles que $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$ forme un trièdre direct.

C.11 Conclusion

Dans cette annexe, nous avons défini les opérateurs de dérivation surfaciques puis nous avons calculé les opérateurs gradient et divergent dans le système de coordonnées associées à l'interface. Ces calculs sont utilisés pour déterminer les conditions de saut des grandeurs filtrées dans le chapitre 6. On a aussi précisé l'écriture de l'élément de volume dans ce système de coordonnées. Enfin, nous avons énoncé le théorème de la divergence surfacique.

Evolution de la courbure

DANS LE CHAPITRE 6, on cherche à établir l'équation de transport de la discontinuité équivalente. Or, nous avons vu (paragraphe 5.9) que, pour être conservatif en masse lorsque l'on définit la discontinuité équivalente d'une zone volumique de transition, il faut tenir compte de la courbure à l'interface. Par conséquent, il nous faut trouver l'équation d'évolution de la courbure. On l'établit dans cette annexe en prenant soin de vérifier l'invariance galiléenne : la courbure d'une interface translatée doit rester constante.

D.1 Démonstration

La démonstration présentée ici est une variante de celle du chapitre 17.2.1 de l'ouvrage *Theory of Multicomponent Fluids* [19]. Nous la détaillons afin de faciliter l'interprétation du résultat final qui fait intervenir le laplacien de surface d'un champ scalaire surfacique. L'interface est définie par la fonction vectorielle \mathbf{x} qui a tout instant associe à chaque couple de coordonnées de surface (ξ_1, ξ_2) (voir annexe C) la position spatiale du point de l'interface correspondant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \xi_2, t) &\mapsto \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, t) \end{aligned} \tag{D.1}$$

Par définition, la vitesse de l'interface est :

$$\mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \tag{D.2}$$

La dérivée temporelle de la relation précédente (D.2) ainsi que toutes celles de cette annexe est une dérivée particulaire ou lagrangienne dans la mesure où on différencie par rapport au temps en suivant un point de la surface (*i.e.* à (ξ_1, ξ_2) fixé). Le déplacement géométrique de l'interface ne dépend que de la composante normale de la vitesse \mathbf{v} . Par conséquent, on suppose sans perte de généralité que

$$\mathbf{v}(\xi_1, \xi_2, t) = v(\xi_1, \xi_2, t) \mathbf{n}(\xi_1, \xi_2, t) \tag{D.3}$$

où \mathbf{n} est la normale à l'interface. De plus, on suppose que la paramétrisation est telle que chaque point \mathbf{x} sur la surface au temps t , paramétrisé par (ξ_1, ξ_2) , se déplace suivant la direction

normale à la surface. On suppose que non seulement la surface mais aussi la paramétrisation sont transportées suivant la direction normale. Ceci implique que la paramétrisation ne correspond pas nécessairement au déplacement d'un quelconque point matériel. En accord avec les notations de l'annexe C, on note \mathbf{t}_α ($\alpha = 1$ ou 2) les tangentes dans les directions principales à l'interface, on a en $\xi_3 = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.4a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = -\frac{1}{R_\alpha} \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.4b})$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} = \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{n} \quad (\text{D.4c})$$

En combinant (D.4a) et (D.4b), on trouve

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} = -R_\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \quad (\text{D.5})$$

où $R_\alpha = \frac{1}{\kappa_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, sont les rayons de courbure principaux. Cette relation est cohérente avec l'expression des coefficients de Christoffel (Annexe C.8). Il est important de noter que la convention de signe des annexes C, C.8 et C.9 (et donc dans celle-ci) est telle que $\kappa = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}$. En différenciant (D.5) par rapport au temps en suivant un point de la surface, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{n} + v \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{D.6a})$$

pour le membre de gauche et

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-R_\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \right) = -\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} - R_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\text{D.6b})$$

pour le membre de droite, ainsi,

$$-\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} - R_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{n} + v \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \quad (\text{D.6c})$$

Comme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{D.7a})$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{D.7b})$$

Ainsi, en faisant le produit scalaire de $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}$ avec (D.6c), on trouve :

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} = -v - R_\alpha \frac{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}}{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}} \quad (\text{D.8})$$

On va simplifier la fraction de cette expression. D'après (D.4b) et (D.4c), on a les égalités

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{1}{R_\alpha^2} \quad (\text{D.9a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} &= -\frac{1}{R_\alpha} \mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) - \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.9b})$$

où le passage des deux dernières lignes utilise la relation (D.7b). En remplaçant les deux produits scalaires de l'équation (D.8) par leurs expressions simplifiées (D.9), elle devient :

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} = -v + R_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \right) \quad (\text{D.10})$$

En différenciant (D.2) par rapport à une des deux directions principales de la surface, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha \partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial \xi_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial t} \quad (\text{D.11})$$

Comme d'après (D.3) on a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{n} + v \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\text{D.12})$$

le produit scalaire par \mathbf{n} de la relation (D.11) fournit

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{D.13})$$

En remarquant que $\mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ implique

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \cdot \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.14})$$

on a

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \cdot \mathbf{t}_\alpha = -\frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} \quad (\text{D.15})$$

L'utilisation de cette dernière relation (D.15) dans (D.10) donne :

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} = -v - R_\alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_\alpha^2} \quad (\text{D.16})$$

En posant comme dans l'annexe (C.9)

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{D.17a})$$

$$H = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (\text{D.17b})$$

on remarque que

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\kappa}{2} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - H} \quad (\text{D.18a})$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\kappa}{2} - \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - H} \quad (\text{D.18b})$$

où on a choisi $R_1 \leq R_2$. En différenciant (D.17a) et (D.17b) par rapport au temps et en éliminant R_1 et R_2 grâce à (D.18a) et (D.18b), nous obtenons

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = (\kappa^2 - 2H)v + \Delta_s v \quad (\text{D.19a})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa H v + \frac{\kappa}{2} \Delta_s v + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - H} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} \right) \quad (\text{D.19b})$$

où Δ_s désigne le laplacien de surface défini par la relation (C.20) de l'annexe C. On peut réécrire l'évolution de la courbure gaussienne (D.19b) en coordonnées intrinsèques (*i.e.* formulation tensorielle indépendante du choix d'une base de projection) à partir du tenseur de courbure normale, \mathbf{B} , (voir section C.4) et du gradient de surface, ∇_s , (voir section C.3.2) du gradient de surface du scalaire v

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \kappa H v + (\kappa \mathbf{P} - \mathbf{B}) : \nabla_s (\nabla_s v) \quad (\text{D.20})$$

où \mathbf{P} représente le projecteur dans le plan tangent à la surface défini par l'équation (C.23) et l'opérateur ":" une double contraction. Si on suppose que $\frac{\kappa}{2} \approx \frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_2}$, les relations (D.19) se limitent à la seule équation :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\kappa^2}{2} v + \Delta_s v \quad (\text{D.21})$$

D.2 Illustration

La formule (D.16) s'illustre sur des cas très simples (voir figure D.1). Le premier terme du membre de droite correspond à une dilatation : si on soumet une bulle sphérique de rayon R_0 à $t = 0$ à un champ de vitesse normale constant et égal à $-V$, son rayon est $R_0 + Vt$ à l'instant t . Le second terme correspond à la courbure du profil de vitesse normale. Ainsi, plus ce profil est courbe est plus le rayon de courbure diminue.

D.3 Formulation mettant en évidence l'invariance galiléenne

La formule D.16 a été établie en ne considérant qu'un déplacement normal. Par conséquent, la dérivée temporelle de cette équation est associée à ce paramétrage. En particulier, elle est différente de la dérivée lagrangienne et elle n'est donc pas nécessairement nulle pour un champ de vitesse constant et uniforme. Classiquement, on est habitué à relier la dérivée lagrangienne (ou dérivée particulaire, noté $\frac{D\circ}{Dt}$) à la dérivée eulérienne, noté $\frac{\partial \circ}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}$. En appelant \mathbf{u} , le champ de vitesse sous-jacent, le lien entre ces dérivées est :

$$\frac{D\circ}{Dt} = \frac{\partial \circ}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \circ \quad (\text{D.22})$$

La figure D.2 montre que le même raisonnement entre les points A' et A'' (au lieu de A et A'') pour le lien entre dérivée lagrangienne et eulérienne) conduit à

$$\frac{D\circ}{Dt} = \frac{\partial \circ}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \cdot \nabla_s \circ \quad (\text{D.23})$$

où \mathbf{P} est le projecteur défini par l'équation (C.23). L'application de (D.23) à un des rayons

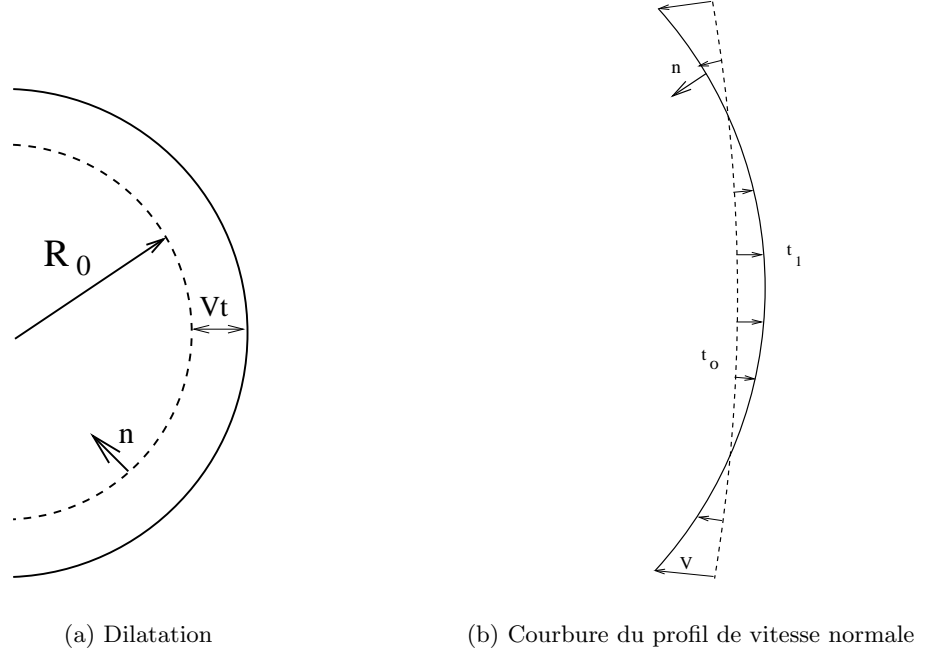


FIG. D.1 – Evolution du rayon

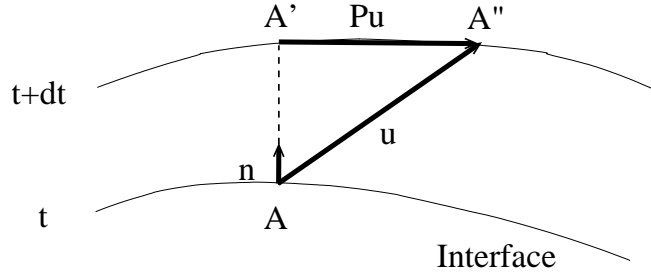


FIG. D.2 – Lien entre dérivée lagrangienne et la dérivée associée au paramétrage normal

de courbure donne :

$$\frac{DR_\alpha}{Dt} = \frac{\partial R_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_\alpha \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{DR_\alpha}{Dt} &= -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - R_\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha^2} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_\alpha \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \\ &= -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - R_\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha^2} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha^2} \cdot \mathbf{u} + 2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha} \right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_\alpha \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \end{aligned}$$

Or, d'après D.5, la dérivée de la normale s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \xi_\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(-\frac{1}{R_\alpha} \mathbf{t}_\alpha \right) = -\frac{1}{R_\alpha^2} \mathbf{n} + \frac{1}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{t}_\alpha$$

Ainsi, après élimination de certains termes :

$$\frac{DR_\alpha}{Dt} = -R_\alpha^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha^2} \cdot \mathbf{n} + 2R_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \mathbf{t}_\alpha \quad (\text{D.24})$$

Cette dernière équation vérifie trivialement $\frac{DR_\alpha}{Dt} = 0$ pour un champ de vitesse constant en espace. En combinant les équations des deux rayons principaux, on trouve pour la courbure :

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_2^2} \right) \cdot \mathbf{n} - 2 \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{t}_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} \cdot \mathbf{t}_2 \right) \quad (\text{D.25})$$

Les relations (C.29) et (C.20) impliquent :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_2^2} = \Delta_s \mathbf{u} \quad (\text{D.26})$$

On propose de calculer $\nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{B}$. On rappelle que par définition, le tenseur de courbure \mathbf{B} s'écrit :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_1} \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \frac{1}{R_2} \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 \quad (\text{D.27})$$

La relation (C.25) se réécrit :

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{u} &= \nabla_s u_x \otimes [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \nabla_s u_y \otimes [(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \nabla_s u_z \otimes [(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \\ &= \left[\frac{\partial u_x}{\partial \xi_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial u_x}{\partial \xi_2} \mathbf{t}_2 \right] \otimes [(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \left[\frac{\partial u_y}{\partial \xi_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial u_y}{\partial \xi_2} \mathbf{t}_2 \right] \otimes [(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \\ &\quad \left[\frac{\partial u_z}{\partial \xi_1} \mathbf{t}_1 + \frac{\partial u_z}{\partial \xi_2} \mathbf{t}_2 \right] \otimes [(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_1 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2 + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Les équations (D.27) et (D.28) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{B} &= \frac{1}{R_1} \left((\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_1) \frac{\partial u_x}{\partial \xi_1} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_1) \frac{\partial u_y}{\partial \xi_1} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_1) \frac{\partial u_z}{\partial \xi_1} \right) + \\ &\quad \frac{1}{R_2} \left((\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}_2) \frac{\partial u_x}{\partial \xi_2} + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}_2) \frac{\partial u_y}{\partial \xi_2} + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}_2) \frac{\partial u_z}{\partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

On reconnaît alors le deuxième terme du membre de droite de (D.25). Finalement, en remplaçant (D.26) et (D.29) dans (D.25), on a en coordonnées intrinsèques :

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \Delta_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - 2 \nabla_s \mathbf{u} : \mathbf{B} \quad (\text{D.30})$$

Cette dernière écriture vérifie trivialement que $\frac{D\kappa}{Dt} = 0$ dès que la vitesse, \mathbf{u} , est constante.

D.4 Conclusion

Dans le chapitre 5, on montre que la fonction indicatrice de phase filtrée dépend de la courbure de l'interface. Pour établir l'équation de transport de la discontinuité équivalente (chapitre 6), on a donc besoin de l'équation d'évolution temporelle de la courbure que nous avons déterminée et interprétée dans cette annexe. En particulier, nous avons vu que l'on peut décomposer l'évolution de la géométrie de l'interface en un phénomène de dilatation (fig. D.1(a)) et un phénomène dû à la courbure du profil de vitesse (fig. D.1(b)).

Discrétisation des opérateurs de différentiation surfacique

DANS LE BUT d'évaluer l'efficacité des modèles que nous avons développés dans le cadre de la SGE discontinue (voir chapitre 6), il a été nécessaire de discrétiser certains des opérateurs de différentiation surfacique présentés dans le paragraphe C.3 de l'annexe C. Plus précisément, nos modèles nécessitent de savoir estimer le tenseur de courbure normale, le gradient surfacique et le laplacien surfacique. La discrétisation de ces opérateurs constitue une des difficultés majeures dans l'évaluation de nos modèles. L'objectif de cette annexe est d'expliquer cette difficulté et de proposer des solutions afin d'implémenter les modèles que nous proposons. Dans cette annexe, on s'appuie essentiellement sur le travail de thèse de Debunne [16]. On adapte les résultats obtenus pour les opérateurs de dérivation classiques à la discrétisation des opérateurs de dérivation surfaciques.

E.1 Le théorème de Gauss

On considère le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) associé à une base canonique fixe et le système de coordonnées généralisées associées à l'interface (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (voir annexe C). Le théorème de Gauss permet de réduire le calcul d'une intégrale sur un volume à celui d'une intégrale sur la surface du volume,

$$\int_V \frac{\partial s}{\partial x_i} dV = \int_{\partial V} s n_i dS \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (\text{E.1})$$

où s est un champ scalaire et \mathbf{n} la normale à la surface d'intégration ∂V , frontière de V . Puisque la surface des inclusions est discrétisée par des triangles, les vecteurs de la base associée à l'interface sont constants sur ces triangles. On peut appliquer le théorème précédent sur chacun de ces triangles, T , en se plaçant dans la restriction de l'espace définie par le plan du triangle T

$$\int_T \frac{\partial s}{\partial \xi_\alpha} dS = \int_{\partial T} s \nu_\alpha dL \quad \text{pour } \alpha = 1 \text{ ou } 2 \quad (\text{E.2})$$

où s est un champ scalaire surfacique et $\boldsymbol{\nu}$ la normale au contour d'intégration ∂T , frontière de T . La normale précédente appartient bien sûr au plan tangent à la surface car elle est dans la restriction de l'espace dans laquelle nous nous sommes placés : le plan défini par le triangle T .

Puisque les opérateurs de dérivation surfacique sont définis à partir de l'opération élémentaire de la dérivation d'un scalaire suivant une direction tangente, la formule précédente permet de les écrire sous la forme d'une intégrale de contour. Le principe des calculs qui vont suivre est d'appliquer l'équivalent surfacique du théorème de Gauss à de petites régions de l'espace qui entoure le point où on veut estimer la dérivée. On va supposer cette portion de l'interface suffisamment petite pour y considérer les dérivées $\frac{\partial s}{\partial \xi_\alpha}$ comme constantes et pouvant donc être extraite de l'intégrale de surface. L'intégrale de contour pourra quant à elle être évaluée en faisant des hypothèses sur la forme du champ considéré.

E.2 Région de Voronoï

Une des surfaces sur laquelle nous allons appliquer le théorème de Gauss est définie comme étant la région de Voronoï associée à chaque marqueur lagrangien (*i.e.* les sommets des triangles T du paragraphe précédent). Cette région est celle contenant les points de l'espace qui sont plus proches du marqueur considéré que d'aucun autre marqueur (voir fig. E.1). C'est donc la zone la plus à même d'être représentée par la particule. Ces régions s'adaptent naturellement à la disposition des marqueurs lagrangiens, leur union couvrant tout l'espace et donnant à chaque particule une importance adéquate.

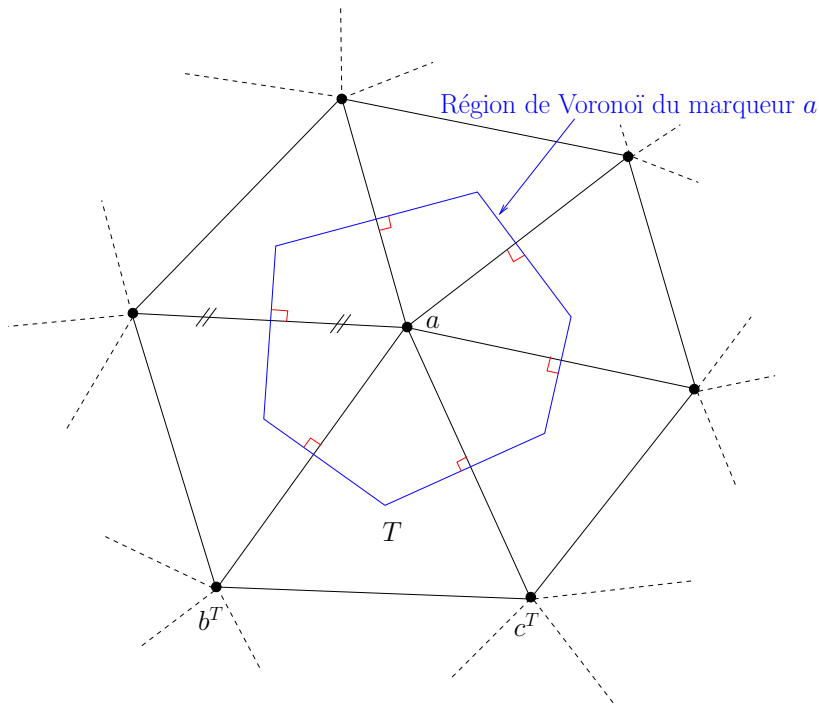


FIG. E.1 – Définition de la région de Voronoï

E.3 Discrétisation du gradient surfacique

On suppose que le champ scalaire v est discrétisé aux sommets des triangles T . On dispose donc de trois valeurs pour chaque triangle et il est naturel de supposer le gradient surfacique du champ s constant par triangle. En appliquant la formule E.2 sur le triangle de sommets a , b et c , on trouve le résultat classique des éléments finis lorsqu'on prend les fonctions chapeaux

comme fonctions de base

$$(\nabla_s v)_T = \frac{1}{2|T|} (v_a a \mathbf{n}_a + v_b b \mathbf{n}_b + v_c c \mathbf{n}_c) \quad (\text{E.3})$$

où $|T|$ est l'aire du triangle T , v_a (respectivement v_b et v_c) correspond à la valeur de v au sommet a (respectivement b et c), \mathbf{n}_a représente la normale unitaire à l'arête bc entrante dans le triangle (abc) et appartenant au plan défini par ce triangle, enfin, a est égale à la longueur de l'arête bc . Les définitions précédentes sont illustrées par la figure E.2. Pour estimer le gradient surfacique au marqueur lagrangien m (sommet des triangles T), on fait la moyenne, pondérée par l'aire de la région de Voronoï, des gradients surfaciques de tous les triangles dont un des sommets est le marqueur m

$$(\nabla_s v)_m = \frac{\sum_T A_T^m (\nabla_s v)_T}{\sum_T A_T^m} \quad (\text{E.4})$$

où A_T^m est l'aire de l'intersection entre la région de Voronoï du marqueur m et du triangle T .

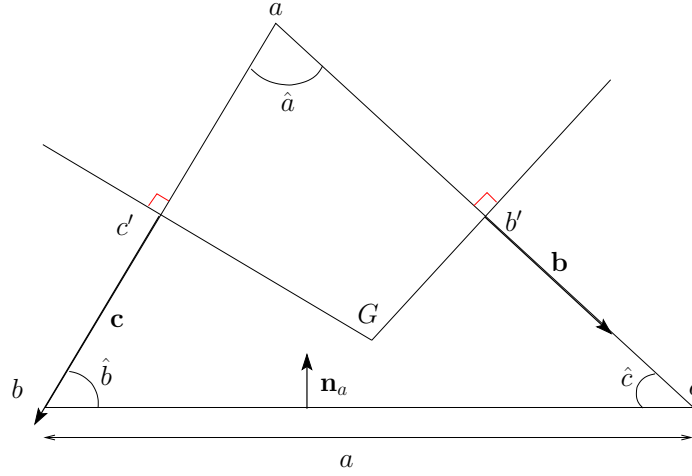


FIG. E.2 – Notations géométriques d'un triangle T

E.4 Discrétisation du tenseur de courbure

Pour discrétiser le tenseur de courbure, nous avons d'abord recherché ce qui existait dans la littérature. Nous avons trouvé des travaux récents qui utilisent les directions principales (vecteurs propres des valeurs propres non nulles du tenseur de courbure) pour optimiser des techniques de remaillage [15]. On y trouve une formule robuste pour estimer le tenseur de courbure qui possède des propriétés de convergence en maillage et qui est relativement simple à implémenter. Cependant, pour des raisons de cohérence entre la façon de calculer les différents termes qui tiennent compte de la variation de la courbure, nous n'avons finalement pas utilisé ce résultat. Nous sommes revenu à la définition du tenseur de courbure normale, \mathbf{B} , qui permet d'écrire (voir paragraphe C.4) :

$$\mathbf{B} = -\nabla_s \mathbf{n} \quad (\text{E.5})$$

Nous avons naturellement défini la normale discrète en chaque triangle comme la normale à ce triangle. Puisque l'on ne sait évaluer le gradient surfacique que pour les champs discrétisés aux marqueurs, on définit la normale en chaque marqueur m comme la moyenne, pondérée

par l'aire de la région de Voronoï, des normales de tous les triangles dont un des sommets est le marqueur m

$$(\nabla_s \mathbf{n})_m = \frac{\sum_T A_T^m (\nabla_s \mathbf{n})_T}{\sum_T A_T^m} \quad (\text{E.6})$$

A partir de cette normale discrétisée aux sommets, on trouve $(\nabla_s \mathbf{n})_T$ puis, en utilisant la définition (E.4), on calcule le tenseur de courbure normale en chaque sommet $(\nabla_s \mathbf{n})_m$. Le résultat obtenu est proche de celui que fournit la formule de Cohen-Steiner et Morvan [15]. De plus, on retrouve à peu près la valeur de la courbure moyenne ($\kappa = \text{Tr}(\mathbf{B})$) calculée par ailleurs par la méthode de Front-tracking pour l'évaluation des forces interfaciales. La figure E.3 trace les directions principales de la surface de la bulle. Elles correspondent aux vecteurs propres des valeurs propres non nulles du tenseur de courbure normale ou encore aux directions principales de la surface (*i.e.* les directions suivant lesquelles la courbure est minimale ou maximale).

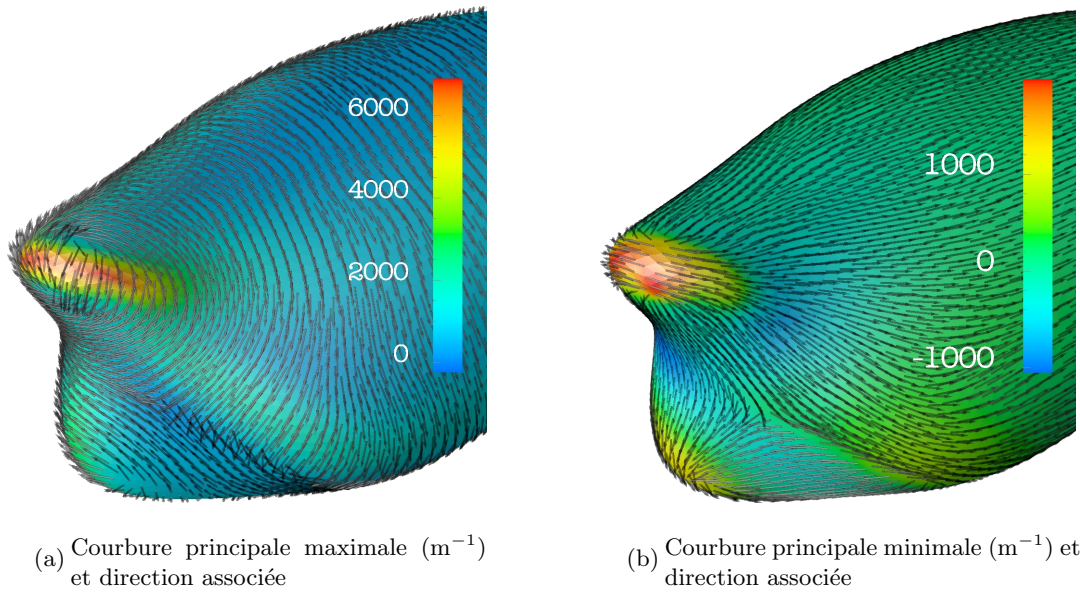


FIG. E.3 – Valeurs propres et vecteurs propres du tenseur de courbure normale, $t = 200\Delta_t$

E.5 Discrétisation du laplacien surfacique

Tout comme le laplacien classique, le laplacien surfacique, Δ_s , correspond à la divergence du gradient (voir paragraphe C.3.5), en appliquant à $\nabla_s \cdot (\nabla_s v)$, sur une portion T de la surface S , le théorème de la divergence surfacique (voir paragraphe C.10) qui se déduit de l'égalité (E.2), on obtient

$$\int_T \Delta_s v dS = \int_T \nabla_s \cdot (\nabla_s v) dS = \int_{\partial T} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL \quad (\text{E.7})$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur surfacique normal du contour ∂T de la portion T . En supposant le laplacien constant sur la région de Voronoï du marqueur m , on trouve en appliquant la formule précédente sur cette région

$$(\Delta_s v)_m \sum_T A_T^m = \sum_T \int_{\partial V_T^m} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL \quad (\text{E.8})$$

où ∂V_T^m est le contour de la région de Voronoï du marqueur m compris dans le triangle T . On suppose que le marqueur m correspond au sommet a du triangle T constitué des sommets a , b et c . En notant G le centre de gravité du triangle T , b' le milieu de l'arête ac et c' celui de l'arête ab , l'aire A_T^m est égale à :

$$A_T^m = \frac{1}{2}c'G \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2}b'G \cdot \frac{b}{2} \quad (\text{E.9})$$

En faisant apparaître les angles \hat{b} et \hat{c} , on trouve :

$$A_T^m = \frac{1}{8} \left(c^2 \cotan(\hat{c}) + b^2 \cotan(\hat{b}) \right) \quad (\text{E.10})$$

Puisque le gradient surfacique est constant sur chaque triangle T , en utilisant l'expression (E.3), son intégrale sur le contour de la région de Voronoï s'écrit :

$$\int_{\partial V_T^m} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL = \frac{1}{2|T|} (v_a a \mathbf{n}_a \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + v_b b \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{c} + v_c c \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{E.11})$$

où \mathbf{b} (respectivement \mathbf{c}) est le vecteur de norme $b'G$ (respectivement $c'G$) orienté suivant l'arête ac (respectivement ab) du sommet a vers le sommet c (respectivement b). Le vecteur \mathbf{b} (respectivement \mathbf{c}) est en fait normal à la droite ($b'G$) (respectivement $c'G$) et sortant de la région de Voronoï. On a donc, en introduisant comme précédemment les angles \hat{b} et \hat{c} :

$$\int_{\partial V_T^m} (\nabla_s v) \cdot \boldsymbol{\nu} dL = \frac{1}{2} \left(\cotan(\hat{c})(v_b - v_a) + \cotan(\hat{b})(v_c - v_a) \right) \quad (\text{E.12})$$

Finalement, en combinant les relations (E.8), (E.10) et (E.12), on a

$$(\Delta_s v)_m = 4 \frac{\sum_T \left(\cotan(\hat{c}^T)(v_b^T - v_a) + \cotan(\hat{b}^T)(v_c^T - v_a) \right)}{\sum_T \left((c^T)^2 \cotan(\hat{c}^T) + (b^T)^2 \cotan(\hat{b}^T) \right)} \quad (\text{E.13})$$

où l'exposant T rappelle que les grandeurs dépendent du triangle où l'on se trouve. Bien que l'on a considéré le champ \mathbf{u} comme localement linéaire, ce qui devrait normalement conduire à une dérivée seconde nulle, le fait d'en considérer la valeur comme une fonction par morceaux sur plusieurs triangles crée un laplacien non nul aux sommets.

E.6 Conclusion

Dans cette annexe, on a précisé comment calculer de façon cohérente le tenseur de courbure normale, le gradient et le laplacien surfaciques d'un scalaire. Puisque nos champs vectoriels sont exprimés dans la case canonique fixe, nous calculons leur dérivée composante par composante. Nous n'avons donc besoin que des formules pour les scalaires. Le travail résumé ici, nous a permis de tester *a priori* notre modélisation du transport de la discontinuité équivalente (voir paragraphe 6.6).

Méthode du simplexe

A FIN DE déterminer les coefficients souhaitables devant les modèles que nous avons développé dans le cadre de la SGE discontinue (voir chapitre 6), nous avons été amené à utiliser l'algorithme de minimisation du simplexe. Ce dernier est très rudimentaire mais extrêmement facile à implémenter. De plus, malgré un coût numérique relativement important, cet algorithme est robuste et efficace. Enfin, il est relativement intuitif à comprendre. L'objectif de cette annexe se limite à en présenter le principe. Pour se procurer les sources, ou consulter d'autres algorithmes de minimisation, on pourra consulter les Numerical Recipes.

F.1 Définition

Dans cette annexe, on présente l'algorithme de Nelder et Mead [70] à ne pas confondre avec l'algorithme du simplexe en programmation linéaire. Un simplexe de dimension k est l'enveloppe convexe de $k+1$ vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ de \mathbb{R}^n , $k \leq n$, affinement indépendants, c'est-à-dire que les k vecteurs $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}$ sont linéairement indépendants. Par exemple, trois points non alignés dans \mathbb{R}^2 , ou quatre points non coplanaires dans \mathbb{R}^3 sont affinement indépendants, et définissent des simplexes de dimension 2 et 3, respectivement.

Lorsqu'on cherche à minimiser une fonction coût qui dépend de N variables, l'algorithme de Nelder et Mead travaille avec un simplexe de dimension N constitué de $N+1$ vecteurs de \mathbb{R}^N . Par rapport à la définition précédente on a donc $k = n = N$. Dans notre cas particulier, nous avons $N = 2$ car on cherche à minimiser l'erreur de notre modèle en fonction des coefficients devant l'hypothèse de similarités d'échelles et les termes qui tiennent compte de l'évolution de la courbure (voir paragraphe 6.6).

F.2 Description de la méthode

La méthode du simplexe est dite d'ordre 0 car elle nécessite uniquement d'évaluer la valeur de la fonction et aucune dérivée. L'algorithme de minimisation de Nelder-Mead est basé sur la comparaison des valeurs de la fonction dans les $(N+1)$ sommets d'un simplexe général. Le simplexe se modifie à travers les opérations de réflexion, d'expansion et de contraction,

en changeant le sommet avec la plus grande valeur de la fonction coût par un autre point de valeur plus petite. La figure F.1 illustre géométriquement pour un simplexe d'ordre 3 dans \mathbb{R}^3 les transformations possibles. La figure F.2 décrit l'algorithme de la méthode de Nelder et Mead. L'initialisation se fait en précisant $(N+1)$ sommets. La distance qui sépare les sommets doit être caractéristique du problème. Dans notre cas, on cherche à déterminer les paramètres de notre modèle et on s'attend à qu'ils soient proches de 1. On a donc choisi les trois sommets du type $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Le test de convergence consiste à vérifier la distance entre chaque couple de sommets. Nous avons fixé ce paramètre à 10^{-5} . Le nombre d'itérations pour notre problème était de l'ordre de la centaine.

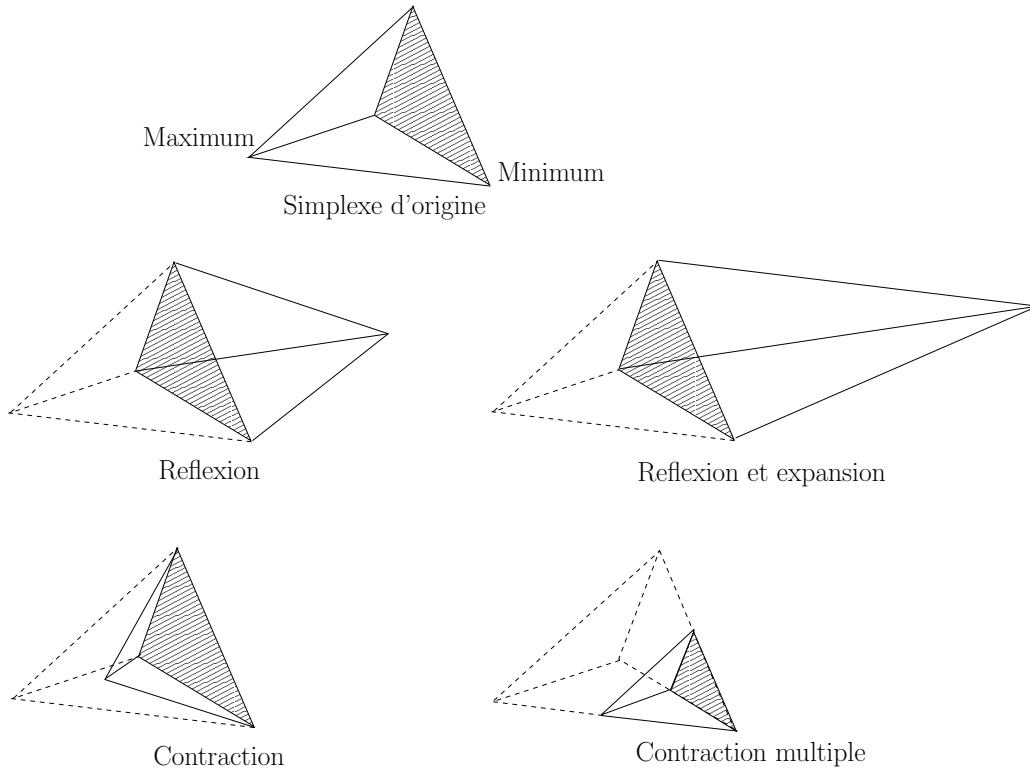


FIG. F.1 – Transformation possible au cours d'une étape de la méthode du simplexe.

F.3 Conclusion

La méthode du simplexe est relativement intuitive. Nous l'avons facilement mis en oeuvre afin de déterminer les coefficients de nos modèles dans l'équation de transport de l'interface filtrée discontinue (voir chapitre 6).

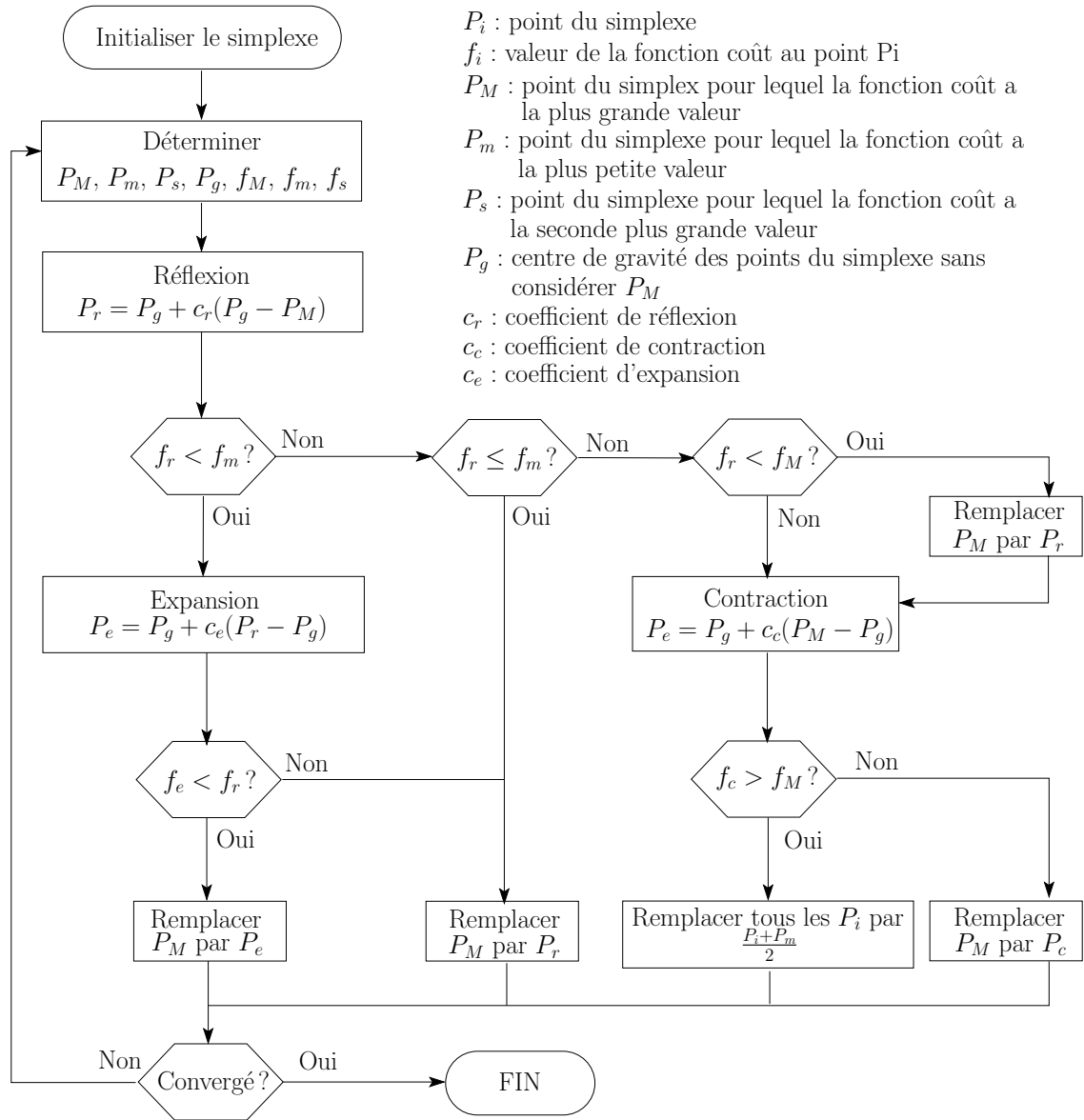


FIG. F.2 – Organigramme de la méthode de Nelder et Mead

Bibliographie

- [1] D. M. Anderson, G. B. McFadden & A. A. Wheeler. Diffuse-interface models in fluids mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 30 : 139–165, 1998.
- [2] D. M. Anderson, G. B. McFadden & A. A. Wheeler. A phase-field model with convection: sharp-interface asymptotics. *Physica D*, 151 : 305–331, 2001.
- [3] R. Aris. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover, New York, 1962.
- [4] J. Bardina, J. H. Ferziger & W. C. Reynolds. Improved turbulence models for large eddy simulation. *AIAA Paper 83 - 1357*, 1983.
- [5] G. K. Batchelor. Transport properties of two-phase materials with random structure. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 6(1) : 227–255, 1974.
- [6] A. Benkenida. *Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces. Application à la dynamique des bulles de Taylor*. Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 1999.
- [7] M. Boivin, O. Simonin & K. D. Squires. On the prediction of gas-solid flows with two-way coupling using large eddy simulation. *Phys. Fluids*, 12(8) : 2080–2090, 2000.
- [8] U. Brackbill, D.B. Kothe & C. Zemach. A continuum method for modelling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100 : 335–354, 1992.
- [9] W.P. Breugem, B.J. Boersma & R.E. Uittenbogaard. The laminar boundary layer over a permeable wall. *Transport in Porous Media*, 59(3) : 267–300, 2005.
- [10] B. Bunner & G. Tryggvason. Effect on bubble deformation on the properties of bubbly flows. *J. Fluid Mech.*, 495 : 77–118, 2003.
- [11] I. Calmet & J. Magnaudet. Statistical structure of high-Reynolds-number turbulence close to the free surface of an open-channel flow. *J. Fluid Mech.*, 474 : 355–378, 2003.
- [12] M. Chandesris & D. Jamet. Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49 : 2137–2150, 2006.
- [13] G. Chantepedrix. *Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface libre. Application à l'étude des mouvements de liquides dans les réservoirs de véhicules spatiaux*. Thèse de Doctorat, ENSAE, 2004.
- [14] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cepadues-Editions, 2000.
- [15] D. Cohen-Steiner & J.-M. Morvan. Restricted Delaunay triangulations and normal cycle. *ACM Symp. on Computational Geometry*, pages 312–321, 2003.

- [16] G. Debunne. *Animation multirésolution d'objets déformables en temps-réel, application à la simulation chirurgicale*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [17] J.M. Delhay. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation. *Int. J. Multiphase Flow*, 1 : 395–409, 1974.
- [18] D. A. Drew & R.T. Lahey. The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 13 : 113–121, 1987.
- [19] D.A. Drew & S.L. Passman. *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [20] C. Duquennoy. *Développement d'une approche de simulation numérique directe de l'ébullition en paroi*. Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 2000.
- [21] M. Van Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, California, 1975.
- [22] J. K. Eaton & J. R. Fessler. Preferential concentration of particles by turbulence. *Int. J. Multiphase Flow*, 16(1) : 169–209, 1994.
- [23] D.A. Edwards, H. Brenner & D.T. Wasan. *Interfacial Transport Processes and Rheology*. Butterworth-Heinemann, 1991.
- [24] S. Elghobashi, T. Abou-Arab, M. Rizk & A. Mostafa. Prediction of the particle-laden jet with a two-equation turbulence model. *Int. J. Multiphase Flow*, 10(6) : 687–710, 1984.
- [25] J. L. Ericksen. Anisotropic fluids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4 : 231–237, 1960.
- [26] A. C. Eringen. *Continuum Physics*, volume 2. Academic Press, New York, 1975.
- [27] J. Fabre et D. Legendre. Cours "Ecoulements diphasiques" de l'ENSEEIH, mis à jour en 2000.
- [28] A. Favre, L. S. G. Kovasznay, R. Dumas, J. Gaviglio & M. Coantic. *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthier-Villars, 1976.
- [29] R. P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman & S. Osher. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method). *J. Comput. Phys.*, 152 : 457–492, 1999.
- [30] C. Fouillet. *Généralisation à des mélanges binaires de la méthode du second gradient et application à la simulation numérique directe de l'ébullition nucléée*. Thèse de Doctorat, Univ. Paris 6, 2003.
- [31] M. Fulgosi, D. Lakehal, S. Banerjee & V. DE Angelis. Direct numerical simulation in a sheared air-water flow with a deformable interface. *J. Fluid Mech.*, 222 : 95–118, 1991.
- [32] J. Garrigues. Statique des coques élastiques. [http ://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/coques.html](http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/coques.html), 1999.
- [33] J. Garrigues. Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens. [http ://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/tenseurs.html](http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/tenseurs.html), 2001.
- [34] M. Germano. A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier-Stokes equations. *Physics of Fluids*, 29(7) : 2323–2324, 1986.

- [35] F. Gibou, R. P. Fedkiw, L.T. Cheng & M. Kang. A second-order-accurate symmetric discretization of the Poisson equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 176 : 205–227, 2002.
- [36] F. Grinstein & C. Fureby. Recent progress on MILES for high Reynolds-number flows. *AIAA Paper 2002-0134*, 2002.
- [37] A. Henriques, P. Coste, S. Pigny & J. Magnaudet. Large Interface Simulation in multi-phase flow phenomena. *Proceedings of FEDSM2006*, pages 1–8, Miami (Florida), USA, 2006.
- [38] D. Homescu & P.K. Panday. Forced convection condensation on a horizontal tube: influence of turbulence in the vapor and liquid phases. *J. Heat Transfer*, 174 : 874–885, 1999.
- [39] K. Horiuti. The role of the Bardina model in large eddy simulation of turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 1(2) : 426–428, 1989.
- [40] M. Ishii. *Thermo-fluid Dynamics Theory of Two-phase Flow*. Eyrolles, 1975.
- [41] D. Jamet. *Etude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase*. Thèse de Doctorat, ECP, 1998.
- [42] H. S. Kang, S. Chester & C. Meneveau. Decaying turbulence in an active-grid generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *J. Fluid Mech.*, 480 : 129–160, 2003.
- [43] M. Kang, R. Fedkiw & X.-D. Liu. A boundary condition capturing method for multi-phase incompressible flow. *J. Sci. Comput.*, 15 : 323–360, 2000.
- [44] I. Kataoka. Local instant formulation of two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 12 (5) : 745–758, 1986.
- [45] E. Labourasse. *Reconstruction des fluctuations turbulentes par une approche hybride RANS/SGE*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 2002.
- [46] E. Labourasse, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, S. Vincent, O. Lebaigue, J.P. Caltagirone & P. Sagaut. Towards Large Eddy Simulation of isothermal two-phase flows: governing equations and *a priori* tests. *Accepted for publication in Int. J. Multiphase Flow*, 2006.
- [47] E. Labourasse, A. Toutant & O. Lebaigue. Interface-turbulence interaction. *Proceedings of Int. Conf. Multiphase Flows - 2004*, 268, 2004.
- [48] B. Lafaurie, C. Nardonne, R. Scardovelli, S. Zaleski & G. Zanetti. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *J. Comp. Phys.*, 113 : 134–197, 1994.
- [49] S. Lain, D. Bröder, M. Sommerfeld & M. F. Göz. Modelling hydrodynamics and turbulence in a bubble column using the Euler-Lagrange procedure. *Int. J. Multiphase Flow*, 28(8) : 1381–1407, 2002.
- [50] D. Lakehal, B. L. Smith & M. Milelli. Large-eddy simulation of bubbly turbulent shear flows. *Journal of Turbulence*, 3 : 025, 2002.
- [51] H. Lamb. *Hydrodynamics (6th edition)*. Dover Pubns Publishers, 1932.

- [52] O. Lebaigue, D. Jamet, C. Duquennoy & N. Coutris. Review of existing methods for direct numerical simulation of liquid-vapor two-phase flows. *6th International Conference on Nuclear Engineering*, May 1998.
- [53] D. Legendre & J. Magnaudet. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.*, 368 : 81–126, 1998.
- [54] D. Legendre, J. Magnaudet & G. Mougin. Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 497 : 133–166, 2003.
- [55] H. Lemonnier & D. Jamet. Test-case No 5 : Oscillation of an inclusion immersed in a quiescent fluid. *Multiphase Science and Technology*, 16(1–3) : 31–38, 2004.
- [56] A. Leonard. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. in Geophys. A*, 18 : 237–248, 1974.
- [57] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Kluwer eds., 1990.
- [58] S. Liu, C. Meneveau & J. Katz. On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 275 : 83–119, 1994.
- [59] X.-D. Liu, R. P. Fedkiw & M. Kang. A boundary condition capturing method for Poisson’s equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 160 : 151–178, 2000.
- [60] T. Lundgren. Linearly forced isotropic turbulence. *Annual Research Briefs*, pages 461–473. Center for Turbulence Research, Stanford, 2003.
- [61] A. Maeda, A. Sou & A. Tomiyama. An hybrid method for simulating flows including fluid particles. *Proceedings of FEDSM2006*, pages 1–6, Miami (Florida), USA, 2006.
- [62] B. Mathieu. *Etude physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques*. Thèse de Doctorat, Université de Provence, 2003.
- [63] B. Mathieu. Demonstration of a 3d parallel implementation of the Front-tracking method : Simulation of fluid mixing with a moving boundary and a free surface. *Proceedings of Advances in the Modeling Methodologies of Two-Phase Flows Meeting*, Lyon, France, 24-26 november 2004.
- [64] B. Maury. Characteristics ALE method for the unsteady 3d Navier-Stokes equations with a free surface. *Int. J. Comp. Fluid Dynamics*, 6 : 175–188, 1996.
- [65] S. Menon, P. K. Yeung & W. W. Kim. Effect of subgrid models on the computed interscale energy transfer in isotropic turbulence. *Computers & Fluids*, 25(2) : 165–180, 1996.
- [66] A. Merle, D. Legendre & J. Magnaudet. Forces on a high-Reynolds-number spherical bubble in a turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 532 : 53–62, 2005.
- [67] A. Michalke. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.*, 19 : 543–556, 1964.
- [68] P. Moin & K. Mahesh. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30 : 539–578, 1998.
- [69] P. M. Morse & H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953.

- [70] J. A. Nelder & R. Mead. A simplex for function minimization. *Computer J.*, 7 : 308–313, 1965.
- [71] D. Q. Nguyen, R. P. Fedkiw & M. Kang. A boundary condition capturing method for incompressible flame discontinuities. *J. Comput. Phys.*, 172 : 71–98, 2001.
- [72] F. Nicoud & F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62 : 183–200, 1999.
- [73] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington D. C., 1980.
- [74] J. Piquet. *Turbulence Flows, Models and Physics*. Springer Verlag, 1999.
- [75] A. Prosperetti. Bubbles. *Physics of Fluids*, 16(6) : 1852–1865, 2004.
- [76] C. D. Pruett, J. S. Sochaki & N. A. Adams. On Taylor-series expansions of residual stresses. *Physics of Fluids*, 13(9) : 2578–2589, 2001.
- [77] W. J. Rider & D. B. Kothe. Reconstructing volume tracking. *J. Comp. Phys.*, 141 : 112–152, 1998.
- [78] F. Risso & J. Fabre. Oscillations and breakup of a bubble immersed in a turbulent field. *J. Fluid Mech.*, 372 : 323–355, 1998.
- [79] C. Rosales & C. Meneveau. Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence : Physical space implementations and convergence properties. *Phys. Fluids*, 17 (095106) : 509–529, 2005.
- [80] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer Verlag, 2003.
- [81] P. Sagaut & M. Germano. On the filtering paradigm for LES flow with discontinuities. *Journal of Turbulence*, 6(23) : 1–9, 2005.
- [82] Y. Sato, M. Sadatomi & K. Sekoguchi. Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 7 : 167–190, 1981.
- [83] Y. Sato & K. Sekoguchi. Liquid velocity distribution in two-phase bubble flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 2 : 79–95, 1975.
- [84] H. Schlichting. *Boundary-layer theory*. Pergamon Press, London, 1968.
- [85] P. Seppacher. *Etude d’une modélisation des zones capillaires fluides : interfaces et lignes de contact*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1987.
- [86] P. Seppacher. Etude des conditions aux limites en théorie du second gradient : cas de la capillarité. *C. R. Acad. Sci., t. 309, série II*, pages 497–502, 1989.
- [87] J.A. Sethian. *Level Set Methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [88] L. Shen & D. K. P. Yue. Large-eddy simulation of free surface turbulence. *J. Fluid Mech.*, 440 : 75–116, 2001.
- [89] S. Shin, S.I. Abdel-Khalik, V. Daru & D. Juric. Accurate representation of surface tension using the level contour reconstruction method. *J. Comp. Phys.*, 203(2) : 493–516, 2005.
- [90] S. Shin & D. Juric. Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front-tracking without connectivity. *J. Comp. Phys.*, 180 (2) : 427–470, 2002.

- [91] G. F. Smith & R. S. Rivlin. The anisotropic tensors. *Quart. Appl. Math.*, 15 : 308–314, 1957.
- [92] K. D. Squires & H. Yamazaki. Preferential concentration of marine particles in isotropic turbulence. *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research Papers*, 42(11–12) : 1989–2004, 1995.
- [93] S. Stolz, N. A. Adams & L. Kleiser. The approximate deconvolution model for large-eddy simulations of compressible flows and its application to shock-turbulent. *Direct and Large Eddy Simulation III*, Voke, Sandham and Kleiser eds, pages 163–174. Kluwer, 1999.
- [94] S. Stolz, N. A. Adams & L. Kleiser. The approximate deconvolution model for large-eddy simulations of compressible flows and its application to shock-turbulent-boundary-layer interaction. *Physics of Fluids*, 13(10) : 2985–3001, 2001. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/13/2985/1>.
- [95] A. Toutant, E. Labourasse, O. Lebaigue & O. Simonin. DNS of the interaction between a deformable buoyant bubble and a spatially decaying turbulence: *a priori* tests for LES two-phase flow modelling. *Submitted to Computers And Fluids*, 2006.
- [96] A. Toutant, E. Labourasse, O. Lebaigue & O. Simonin. Interaction between a deformable buoyant bubble and a homogeneous isotropic turbulence. *Proceedings of Conf. on Turbulence and Interaction*, Porquerolles, France, 29 May - 2 June 2006. URL <http://www.onera.fr/congres/ti2006/program.php>.
- [97] A. Toutant, O. Lebaigue, E. Labourasse, S. Vincent, P. Lubin & D. Lacanette. Effects of turbulence on interfacial heat transfer: *a priori* tests and filters evaluation. *Proceedings of 13rd Int. Heat Transfer Conf.*, Sydney, Australia, 13-18 August 2006.
- [98] S. O. Unverdi & G. Tryggvason. A front-tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100 : 25–37, 1992.
- [99] S. Vincent, J. P. Caltagirone & O. Lebaigue. Poiseuille two-phase flow. *Multiphase Science and Technology*, 16(1–3) : 97–100, 2004.
- [100] S. Vincent, J. Larocque, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin & P. Sagaut. Direct Numerical Simulation of phase separation and *a priori* two-phase LES filtering. *Submitted to Computers And Fluids*, 2006.
- [101] S. K. Wang, S. J. Lee, O. C. Jr. Jones & R. T. Jr. Lahey. 3-D turbulence structure and phase distribution measurements on bubbly two-phase flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 13(3) : 327–343, 1987.
- [102] J. H. Williamson. Low storage Runge-Kutta schemes. *J. Comput. Phys.*, 35 : 48–56, 1980.
- [103] R. Kh. Zeytounian. *Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides I, Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [104] D. Zwillinger. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, Boston, 1989.

Résumé Les interactions complexes entre interfaces et turbulence modifient considérablement les propriétés des écoulements. Pour tenir compte de ces interactions en minimisant le coût numérique des simulations, notre stratégie consiste à utiliser et à améliorer une méthode de SND pour développer le concept *Interface and Subgrid Scale*. ISS est un équivalent pour les écoulements diphasiques de la simulation des grandes échelles pour les écoulements monophasiques. Son objectif est de tenir compte des interactions entre interfaces et turbulence dans des modèles sous-maille. En appliquant un filtre spatial aux équations, nous avons exhibé les termes sous-maille spécifiques aux écoulements diphasiques qui nécessitent une fermeture. Grâce à des tests *a priori* réalisés sur de nombreuses SND, nous avons montré que l'hypothèse de similarités d'échelles, réinterprétée près de la discontinuité, permet de modéliser les interactions sous-maille entre interfaces et turbulence. De façon complémentaire, et à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous avons déterminé les relations de saut des grandeurs filtrées et établi l'équation de transport du lieu de ces relations de saut, *i.e.* de l'interface filtrée discontinue.

Mots-clés : écoulement diphasique, front-tracking, turbulence, SND, SGE.

Physical modelling of interactions between interfaces and turbulence

Abstract The complex interactions between interfaces and turbulence strongly impact the flow properties. Unfortunately, Direct Numerical Simulations (DNS) have to entail a number of degrees of freedom proportional to the third power of the Reynolds number to correctly describe the flow behaviour. This extremely hard constraint makes it impossible to use DNS for industrial applications. Our strategy consists in using and improving DNS method in order to develop the Interfaces and Subgrid Scales concept. ISS is a two-phase equivalent to the single-phase Large Eddy Simulation (LES) concept. The challenge of ISS is to integrate the two-way coupling phenomenon into subgrid models. Applying a space filter, we have exhibited correlations or subgrid terms that require closures. We have shown that, in two-phase flows, the presence of a discontinuity leads to specific subgrid terms. Comparing the maximum of the norm of the subgrid terms with the maximum of the norm of the advection tensor, we have found that subgrid terms related to interfacial forces and viscous effect are negligible. Consequently, in the momentum balance, only the subgrid terms related to inertia have to be closed. Thanks to *a priori* tests performed on several DNS data, we demonstrate that the scale similarity hypothesis, reinterpreted near discontinuity, provides subgrid models that take into account the two-way coupling phenomenon. These models correspond to the first step of our work. Indeed, in this step, interfaces are smooth and, interactions between interfaces and turbulence occur in a transition zone where each physical variable varies sharply but continuously. The next challenge has been to determine the jump conditions across the sharp equivalent interface corresponding to the subgrid models of the transition zone. We have used the matched asymptotic expansion method to obtain the jump conditions. The first tests on the velocity of the sharp equivalent interface are very promising.

Keywords: two-phase flow, front-tracking, turbulence, DNS, LES.