

Une méthode Éléments Finis à décomposition
 \mathbf{L}^2 d'ordre élevé motivée par la simulation
d'écoulement diphasique bas Mach

Thomas Fortin

le 05 Mai 2006

Table des matières

1	Introduction.	11
1.1	Contexte général.	11
1.2	Contexte de la thèse.	12
2	Les problèmes à résoudre.	17
2.1	Introduction.	17
2.2	Equations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible.	17
2.3	Existence et unicité d'une solution au problème de Navier-Stokes.	18
2.3.1	Rappel sur les espaces fonctionnels.	18
2.3.2	Formulation variationnelle.	20
2.3.3	Hypothèses et théorème d'existence.	21
2.4	Discrétisation du problème de Navier-Stokes.	22
2.4.1	Notations générales.	22
2.4.2	Espaces de discrétisation.	23
2.4.3	Propriétés d'approximation des espaces discrets.	25
2.4.4	Définition des formes bilinéaires discrètes.	25
3	Écoulement diphasique.	29
3.1	Introduction.	29
3.2	Equations moyennées.	30
3.3	Nouvelle formulation.	31
3.3.1	Equations de masse.	33
3.3.2	Equations de quantité de mouvement.	36
3.3.3	Système final.	38
3.4	Comparaison avec le modèle deux pressions de Neptune.	48
3.5	Conclusion.	50

4	Un nouvel espace de pression.	53
4.1	Introduction.	53
4.2	Discrétisations et courants parasites.	53
4.3	Propriétés en dimension 2.	59
4.3.1	Définitions.	59
4.3.2	Meilleure décomposition de \mathbf{L}^2	63
4.3.3	Résultats numériques.	69
4.4	Cas de la dimension 3.	73
4.4.1	Nouvel espace de pression.	74
4.4.2	Propriétés.	75
4.4.3	Meilleure décomposition de \mathbf{L}^2	91
4.4.4	Résultats numériques.	92
4.5	Conclusion.	94
5	Problème de Navier-Stokes : formulation triple.	95
5.1	Introduction.	95
5.2	Formulation générale.	96
5.3	Formulation variationnelle.	97
5.3.1	Définitions.	97
5.3.2	Solution du problème triple.	99
5.4	Discrétisation du problème triple.	105
5.4.1	Définitions.	105
5.4.2	Solution au problème discret.	107
5.4.3	Convergence.	112
5.4.4	Meilleure décomposition de \mathbf{L}^2	117
5.5	Conclusion.	119
6	Convection.	121
6.1	Propriétés.	121
6.2	Discrétisation	122
7	Pénalisation des discontinuités.	127
7.1	Introduction.	127
7.2	Définitions.	128
7.3	Méthodes de pénalisation.	129
7.4	Solution au système pénalisé.	130
7.4.1	Unicité.	130
7.4.2	Existence.	131

7.4.3	Convergence.	131
7.4.4	Définition des termes de pénalisation.	134
7.5	Comportement de la solution.	141
7.5.1	Comportement à la limite.	141
7.5.2	Monotonie de la solution.	143
7.6	Conclusion.	146
8	Schémas de projection.	149
8.1	Introduction.	149
8.2	Définitions.	150
8.3	Etude d'un schéma de projection.	152
8.3.1	Existence et unicité d'une solution au schéma de projection.	153
8.3.2	Stabilité du schéma de projection.	154
8.3.3	Convergence du schéma de projection.	155
8.4	Etude d'un second schéma de projection.	160
8.4.1	Définition du nouveau schéma de projection.	161
8.4.2	Existence et unicité d'une solution au schéma de projection.	161
8.4.3	Stabilité du schéma de projection.	162
8.4.4	Convergence du schéma de projection.	163
8.5	Modification du schéma de projection.	169
8.5.1	Définition du schéma de projection modifié.	169
8.5.2	Existence et unicité d'une solution au schéma de projection modifié.	169
8.5.3	Stabilité du schéma de projection modifié.	170
8.5.4	Convergence du schéma de projection modifié.	171
8.5.5	Résultats numériques.	178
8.6	Un algorithme de pénalisation.	208
8.6.1	Définition du schéma de projection pénalisé.	208
8.6.2	Existence et unicité d'une solution au schéma de projection pénalisé.	209
8.6.3	Stabilité du schéma de projection pénalisé.	209
8.6.4	Démonstration de convergence.	210
8.7	Conclusion.	211
9	Conclusion et perspectives.	213

A	Formulation triple non linéaire.	221
A.1	Introduction.	221
A.2	Rappels divers.	221
A.3	Formulation variationnelle.	223
A.3.1	Définition.	223
A.3.2	Solution du problème triple.	224
B	Autre forme bilinéaire.	229
B.1	Introduction.	229
B.2	Propriétés.	229
B.2.1	Continuité uniforme.	229
B.2.2	Première Condition inf-sup.	231
B.2.3	Seconde Condition inf-sup.	235
B.2.4	Meilleure décomposition de \mathbf{L}^2	237
B.3	Continuité de la constante $c_0(K)$	241
C	Nomenclature.	245

Liste des tableaux

4.1	Module des courants parasites avec $\mathbf{f} = \nabla\phi$ et $\phi = x^2$	55
4.2	Degrés de liberté associé à l'élément $P_1\text{NC}/P_1 + P_0$	63
4.3	Résultats de convergence avec $\phi = x^3$	69
4.4	Résultats de convergence avec $\phi = x^4$	69
4.5	Résultats de convergence avec $\phi = x^3$	71
4.6	Résultats de convergence avec $\phi = x^4$	71
4.7	Degrés de liberté associés à l'élément $P_1\text{NC}/P_0 + P_1 + P_a$. . .	76
4.8	Résultats de convergence avec $\phi = x^3$	93
4.9	Résultats de convergence avec $\phi = x^4$	93
4.10	Résultats de convergence avec $\phi = x^5$	93
8.1	Courbe de pression : cas 2D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y)^t$	180
8.2	Courbe de pression : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$	182
8.3	Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$	183
8.4	Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$	184
8.5	Courbe de pression dans le plan (yz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$	185
8.6	Courbe de pression : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$	187
8.7	Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$	188
8.8	Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$	189
8.9	Courbe de pression dans le plan (yz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$	190
8.10	Courbe de pression : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x^2, 0, 0)^t$	192

8.11	Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x^2, 0, 0)^t$	193
8.12	Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x^2, 0, 0)^t$	194
8.13	Composante x de la vitesse : cas 2D, $\mathbf{u} = (y, -x)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0)^t$.	196
8.14	Composante y de la vitesse : cas 2D, $\mathbf{u} = (y, -x)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0)^t$.	197
8.15	Courbe de pression : cas 2D, $\mathbf{u} = (y, -x)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0)^t$	198
8.16	Composante x de la vitesse : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$	200
8.17	Composante y de la vitesse : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$	201
8.18	Courbe de pression : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$	202
8.19	Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$	203
8.20	Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$	204
8.21	Courbe de pression dans le plan (yz) : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$	205
8.22	Composante x de la vitesse : cas 2D, poiseuille et $\mathbf{f} = (12, 0)^t$.	207

Table des figures

3.1	Variation du taux de présence α_1 en fonction de C , avec $\mathbf{g}_z = 9.81$ $\rho_1 = 712$ et $\delta(\rho) = 566$	42
3.2	Variation de la pression p en fonction de C avec $\mathbf{g}_z = 9.81$ $\rho_1 = 712$ et $\delta(\rho) = 566$	43

Chapitre 1

Introduction.

1.1 Contexte général.

Les principaux intérêts de l'industrie du nucléaire sont la compétitivité des réacteurs comparés à d'autres moyens de production d'énergie et la sûreté de ces mêmes réacteurs. Ainsi, la plupart des besoins industriels dans le domaine de l'énergie nucléaire sont étroitement liés à ces deux intérêts particuliers. Par exemple, l'amélioration de la prédiction des départs d'ébullition nucléée fait partie des besoins prioritaires puisque ce phénomène est directement lié à l'efficacité du combustible. D'une manière similaire, l'estimation de la température du fluide dans la cuve du réacteur, lors d'un choc thermique pressurisé, est un élément important quant à la durée de vie des composants critiques d'une centrale.

Ainsi, l'analyse des besoins industriels a fait naître un besoin de modélisation et de simulation d'écoulements d'un mélange de deux fluides. Dans le cas d'ébullition nucléée, le flux critique de chaleur est, pour l'heure, construit par corrélations des grandeurs moyennes de l'écoulement. Or les dites corrélations sont limitées par les conditions expérimentales et la géométrie des configurations tests. Pour pallier à ces défauts, il est envisageable de penser qu'une prédiction plus générale du flux de chaleur critique peut être obtenue à l'aide de paramètres thermohydrauliques, calculés à partir d'un code dédié au diphasique. Les chocs thermiques pressurisés, quant à eux, interviennent lors des injections de sécurité qui servent à refroidir rapidement le cœur d'un réacteur : dans ce type d'injection forcée, certaines parties de la cuve sont

soumises à de forts gradients de température qui peuvent induire la création de fissures fragilisantes. Ainsi, allonger la durée de vie de la cuve revient à savoir comment évaluer plus précisément l'évolution de la température du liquide lors des injections, et par là même, à limiter l'apparition des fissures. Or seules des méthodes numériques adaptées aux écoulements diphasiques sont aptes à rendre compte des phénomènes complexes qui régissent la physique des injections de sécurité.

Il est possible de donner de nombreux autres exemples dans lesquels la physique des mélanges de deux fluides joue un rôle prépondérant (pour cela, nous renvoyons au papier [1]). Il est donc important de proposer des solutions numériques efficaces aux problèmes générés par ce type d'écoulement.

1.2 Contexte de la thèse.

Les écoulements que nous chercherons à traiter dans la suite de cet exposé sont modélisés par les équations de Navier-Stokes “instationnaires” non linéaires et linéaires, soit respectivement :

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}(t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad \text{condition aux limites} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{condition initiale} \quad (1.4)$$

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u}(t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad \text{condition aux limites} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{condition initiale} \quad (1.8)$$

où Ω est le domaine de l'écoulement.

Ces équations possèdent naturellement quelques propriétés remarquables. Tout d'abord, elles sont conservatives localement et globalement : ceci est dû à leurs constructions mêmes, dont de nombreux ouvrages traitent abondamment (pour quelques rappels simples voir entre autre [32] ou [14]) et dont,

par conséquent, nous ne rappellerons pas le principe. C'est d'ailleurs pour cela que l'on parle généralement des équations (1.1) et (1.5) comme des équations de conservation de la quantité de mouvement et de (1.2) et (1.6) comme des équations de conservation de la masse. Ensuite, les termes de convection en $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ s'interprètent comme de simples termes de transport, du fait qu'ils n'introduisent pas d'énergie dans le système. En effet, l'écoulement étant, par définition de l'incompressibilité d'un fluide de densité constante, à divergence nulle, un simple calcul nous montre que l'énergie L^2 du terme de convection est nulle :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \sum_{i,j} \int_{\Omega} \mathbf{u}_i \partial_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j \\ &= \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i \partial_i (\mathbf{u}_j^2) \\ &= \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j^2 \mathbf{n}_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Discrétiser ces équations tout en respectant au mieux ces différentes propriétés soulève alors un certain nombre de difficultés. La première d'entre toutes est de respecter la contrainte d'incompressibilité d'un point de vu discret : une façon simple et relativement peu coûteuse de répondre à cette question a été apportée par M. M. Crouzeix et P.-A. Raviart à l'aide d'une méthode d'éléments finis qui porte désormais leurs noms.

Pour définir rapidement cette discrétisation, il nous faut supposer que le domaine de l'écoulement ait été au préalable approché par une triangulation τ dont les éléments K sont des triangles en dimension deux d'espace et des tétraèdres en dimension trois. Ensuite, les vitesse et pression discrètes sont définis de telles sortes que le problème discret approché ait un sens d'un point de vue mathématique (cf. chapitre (Ch 2) pour de plus amples rappels, notamment sur la définition exacte des espaces discrets employés) et telles que la vitesse discrète soit à divergence nulle par élément K de τ .

Toutefois, au regard des autres propriétés des équations de Navier-Stokes rappelées précédemment, cet élément fini particulier présente quelques insuffisances : certes, moyennant quelques efforts calculatoires, nous pouvons démontrer qu'il satisfait la propriété de conservativité évoquée plus haut (cf.

[7] et [14] pour une analyse détaillée), mais pour l'essentiel il ne satisfait aucune des autres particularités des équations (1.1)-(1.2) ou (1.5)-(1.6). Pire encore, il introduit un certain nombre d'erreurs numériques supplémentaires.

Commençons par signaler l'erreur qu'introduit cet élément fini sur l'opérateur de diffusion. Dans le cas continu, et puisque nous considérons un écoulement à divergence nulle, un calcul simple nous montre que la relation suivante est vérifiée :

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)$$

Il suffit pour cela de remarquer que nous avons en fait :

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^t = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Or comme il est signalé dans [14], cette dernière égalité n'est pas vérifiée pour une vitesse à divergence discrète nulle discrétisée à l'aide de l'élément de Crouzeix-Raviart : cette identité non vérifiée introduit des artefacts numériques indésirables, dus aux discontinuités des vecteurs vitesse (cf. [14] pour une discussion approfondie sur le sujet).

Mais, les défauts de l'élément fini de Crouzeix-Raviart ne s'arrête hélas pas à cela. En effet, la différence de degré entre les polynômes qui servent à définir la vitesse discrète (des polynômes de degré 1) et la pression discrète (des polynômes de degré 0) induisent la création de courants parasites, c'est-à-dire de vitesse "supplémentaire" totalement artificielle. Afin d'illustrer plus clairement ce propos, évaluons les équations de Navier-Stokes instationnaires dans le cas des conditions initiales particulières suivantes :

$$\mathbf{u}|_{t=0} := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Les solutions élémentaires sont alors données par :

$$\mathbf{u}|_{t=0} := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad p = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Dans ce cas, c'est en effet la pression qui "absorbe" complètement le terme en $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et permet donc de vérifier les équations. Dans le cas discret, le terme de convection est un polynôme de degré 1 qui ne peut évidemment pas être captée par la pression, puisque celle-ci ne contient pas ces mêmes polynômes. Du coup, le gradient de pression et le terme de convection ne

s'équilibre plus, interdisant à la dérivée temporelle de la vitesse d'être nulle, et donc à la vitesse discrète de se stabiliser naturellement à la solution donnée ci-dessus (celle-ci appartient pourtant à l'espace dans lequel évolue la vitesse discrète).

La situation précédente n'est toutefois qu'un cas tout à fait particulier de la configuration suivante. Si dans les équations (1.1) ou (1.5) nous imposons un terme source \mathbf{f} s'écrivant comme le gradient d'une fonction Φ quelconque, les solutions normalement obtenues sont une vitesse nulle et une pression p valant exactement Φ . Dans le cas discret, lors de l'utilisation des éléments finis de Crouzeix-Raviart par exemple, cette situation n'est en règle générale jamais vérifiée : si Φ est régulière (un simple polynôme de degré 1 suffit en fait), la pression discrète ne peut être égale à Φ et du coup, le terme source et le gradient de pression ne s'équilibrent pas, la vitesse devient spontanément non nulle.

L'ensemble des défauts relevés précédemment nous incite à construire de nouvelles méthodes, voire de nouvelles discrétisations, qui s'attacheraient à éliminer ou au pire à repousser à un ordre supérieure les erreurs numériques évoquées. En dimension deux d'espace, une réponse a d'ores et déjà été apportée à un certain nombre de ces problèmes à l'aide de l'élément fini $P_1NC/P_0 + P_1$ développé dans [14] : l'idée, qui résulte des constatations précédentes, consiste à enrichir la pression de l'élément de Crouzeix-Raviart, à l'aide de polynômes d'ordre 1, et à définir une forme bilinéaire de divergence discrète particulière. Ces deux éléments mis bout-à-bout nous ont permis d'accroître (grâce à de nouvelles démonstrations) la consistance de l'espace des vitesses discrètes à divergence discrète nulle \mathbf{V}_h par rapport à son homologue continu, l'espace des vitesses (continues) à divergence nulle \mathbf{V} . La conséquence directe de cette consistance, est que les courants parasites n'apparaissent plus que pour des polynômes d'ordre deux (ce qui est un gain substantiel comparé à la situation initiale) et que nous sommes en mesure d'espérer des propriétés de superconvergence très intéressantes. Toutefois, cet élément fini si particulier ne possède plus les mêmes arguments en dimension trois d'espace : en effet, aucune propriété de consistance particulière de \mathbf{V}_h n'apparaît alors, ce qui nous empêche de prétendre à des résultats aussi probants qu'en dimension deux. Aussi, une nouvelle question se fait jour naturellement : peut-on retrouver en dimension trois des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas de la dimension deux ?

Outre cela, la nouvelle forme bilinéaire de divergence discrète introduite induit la propriété remarquable suivante : si \mathbf{u}_h est une vitesse à divergence discrète nulle et $\bar{\mathbf{u}}_h$ son projeté sur l'élément fini P_1 de Lagrange, alors l'énergie introduite par le terme $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}}_h \cdot \bar{\mathbf{u}}_h$ est nulle. Par conséquent, l'idée la plus naturelle consisterait à introduire la forme de convection "modifiée" $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}}_h$ plutôt que la forme standard $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h$, et à seule fin de mieux respecter les propriétés des équations de Navier-Stokes originales. Mais comment peut-on introduire ce nouveau terme dans une formulation mathématique, de sorte que celle-ci soit bien posée ?

Enfin, nous proposerons d'employer ces différentes techniques dans le cadre d'une application particulière : l'écoulement à bas Mach d'un mélange de deux fluides quasi-compressibles. Pour cela, il nous faudra montrer que, sous ces hypothèses, les équations régissant l'écoulement du mélange peuvent se comprendre comme une série de deux équations de type Navier-Stokes emboîtées, auxquelles nous pourrons donc appliquer les différentes méthodes évoquées plus haut.

Chapitre 2

Les problèmes à résoudre.

2.1 Introduction.

Dans ce mémoire, nous allons proposer une modélisation des écoulements diphasiques à bas Mach, basée sur les équations de Navier-Stokes. Aussi, nous proposons dans un premier temps de définir de manière générale ces équations et d'en donner quelques propriétés mathématiques. Ensuite, et puisque nous nous intéresserons également à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, nous définirons le contexte discret dans lequel nous nous placerons dans la suite et donnerons quelques notations qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

2.2 Equations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible.

Les équations de Navier-Stokes modélisent l'écoulement d'un fluide incompressible : ces équations nous permettent à chaque instant de déterminer l'état du fluide, à travers sa vitesse \mathbf{u} et sa pression p .

Les équations de Navier-Stokes sont établies à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, et s'écrivent (en considérant que le fluide considéré est de densité constante dans le domaine

Ω de l'écoulement, i.e. incompressible) :

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad \text{condition aux limites} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{condition initiale} \quad (2.4)$$

où $\partial\Omega$ est la frontière du domaine Ω .

Le système d'équations précédent se simplifie dans le cas où le terme non linéaire peut-être négligé (écoulement à faible vitesse par exemple), et l'on obtient alors les équations de Stokes "instationnaires" :

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}(t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad (2.8)$$

Enfin, nous pouvons également considérer le problème de Stokes stationnaire :

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

2.3 Existence et unicité d'une solution au problème de Navier-Stokes.

2.3.1 Rappel sur les espaces fonctionnels.

L'existence et l'unicité d'une solution des systèmes d'équations aux dérivées partielles précédents est une question délicate qui nécessite un certain nombre de rappels et de notations.

Dans tout ce qui suivra, les notations suivantes seront reprises. On suppose que le domaine Ω de l'écoulement est un polygône convexe en dimension

$d = 2, 3$. On note $L^q(\Omega)$ - plus simplement L^q - l'ensemble des fonctions à valeurs réelles dont la puissance q est intégrable : $\|\cdot\|_{0,q}$ est alors la norme associée à cet espace. Parmi ces espaces, on notera (\cdot, \cdot) le produit scalaire de L^2 et $\|\cdot\|$ sa norme associée.

On introduit également les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &:= H^m := \{v \in L^2 ; \partial_\alpha v \in L^2 \quad \forall \alpha \ 0 \leq |\alpha| \leq m\} \\ H_0^m(\Omega) &:= H_0^m := \{v \in L^2 ; \partial_\alpha v \in L^2 \quad \forall \alpha \ 0 \leq |\alpha| \leq m ; v|_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

Ces espaces fonctionnels sont des espaces de Hilbert une fois dotés du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_m := \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial_\alpha u \partial_\alpha v \, d\Omega$$

A ce produit scalaire correspondent des normes et semi-normes notées respectivement $\|\cdot\|_m$ et $|\cdot|_m$.

On pourra aussi utiliser le produit scalaire et la norme suivants définis sur H_0^1 par :

$$\begin{aligned} (u, v)_1 &:= (\nabla u, \nabla v) := \sum_{1 \leq i, j \leq d} (\partial_j u_i, \partial_j v_i) \\ |u|_1 &:= \|\nabla u\| := (\nabla u, \nabla u)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En effet, $|\cdot|_1$ est bien une norme sur H_0^1 , suite à l'inégalité de Poincaré ci-dessous, vérifiée lorsque le domaine de l'écoulement Ω est borné :

$$\exists \gamma_0 > 0 \mid \forall u \in H_0^1 \quad \|u\| \leq \gamma_0 |u|_1$$

Lorsque les espaces fonctionnels précédents sont étendus à des fonctions à valeurs dans R^d , les notations adoptées sont les mêmes à l'exception de la notation des espaces eux-mêmes qui seront repérés en gras ; ainsi $\mathbf{H}_0^1 := [H_0^1]^d$. Bien sûr, la définition des normes et produits scalaires est légèrement modifiée puisqu'il faut désormais également sommer sur le nombre de dimension de la fonction vectorielle considérée.

On définit également les sous-espaces suivants :

$$L_0^2 := \{v \in L^2 \mid \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0\}$$

$$\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$$

Enfin, on désignera par $L^q(0, T; X)$ avec X espace de Banach, l'espace des fonctions $t \rightarrow f(t) : (0, T) \rightarrow X$ telles que :

$$f \text{ est mesurable pour la mesure } dt$$

$$\|f\|_{L^q(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

Quand aucune confusion ne sera possible, on notera plutôt $L^q(X)$.

2.3.2 Formulation variationnelle.

Les rappels précédents vont nous permettre de définir les formulations variationnelles associées aux problèmes (2.1)-(2.2), (2.5)- (2.6) et (2.9)-(2.10).

Pour cela, on introduit les formes bilinéaires $a(., .)$ et $b(., .)$ continues respectivement sur $\mathbf{H}_0^1 \times \mathbf{H}_0^1$ et $\mathbf{H}_0^1 \times L_0^2$ définies par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$$

$$b(\mathbf{v}, q) := (q, \nabla \cdot \mathbf{v})$$

On définit également la forme trilinéaire $c(., ., .)$ continue sur $\mathbf{H}_0^1 \times \mathbf{H}_0^1 \times \mathbf{H}_0^1$ par :

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{2} (((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}), \mathbf{w}) - (((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}), \mathbf{v})$$

Les propriétés élémentaires de cette forme trilinéaire s'énumèrent ainsi pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1$:

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

$$|c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w})| + |c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c(\|\mathbf{u}\|_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_1) \|\mathbf{w}\|_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|_1^{\frac{1}{2}}$$

$$|c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1$$

Avec ces notations, la formulation variationnelle des problèmes (2.1)-(2.2), (2.5)-(2.6) et (2.9)-(2.10) s'écrit : chercher $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1 \times L_0^2$ tels que $\forall t > 0$ et $\forall(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_0^1 \times L_0^2$ on ait respectivement :

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, q) + c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, q) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

2.3.3 Hypothèses et théorème d'existence.

Afin d'expliciter le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème de Navier-Stokes (2.1)-(2.2), nous allons faire quelques hypothèses sur la régularité du domaine de l'écoulement et sur les conditions initiales du problème.

Hypothèse 2.3.1 *On suppose le domaine de l'écoulement Ω suffisamment régulier pour que, quel que soit le terme source $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2$, la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.9)-(2.10) vérifie :*

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, p) &\in (\mathbf{H}_0^1 \cap \mathbf{H}^2) \times (L_0^2 \cap H^1) \\ \|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 &\leq c \|\mathbf{f}\| \end{aligned}$$

où c est une constante qui ne dépend que ν et Ω .

Hypothèse 2.3.2 *On suppose que la vitesse initiale \mathbf{u}_0 et le terme source \mathbf{f} vérifient :*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f} &\in L^\infty(0, +\infty; \mathbf{L}^2) \\ \|\mathbf{u}_0\|_1 + \sup_{t \geq 0} (\|\mathbf{f}\| + \|\partial_t \mathbf{f}\|) &\leq C \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante du temps.

Remarque 2.3.1 *Dans la suite de ce mémoire, cette dernière hypothèse sera toujours vérifiée car nous travaillerons sur des termes sources, constants au cours du temps.*

Grâce à ces hypothèses, on peut établir le théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Navier-Stokes (2.1)-(2.2) -et donc également pour le problème de Stokes instationnaire (2.5)-(2.6)- dont la démonstration est donnée dans [22],[23], [24],[25] :

Théorème 2.3.1 *Sous les deux hypothèses précédentes, le problème (2.1)-(2.2) avec ses conditions initiales admet une unique solution (\mathbf{u}, p) qui satisfait de plus les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{\delta_0 s} \|\mathbf{u}\|_1^2 ds &\leq e^{-\delta_0 t} \|\mathbf{u}_0\|^2 + \delta_0^{-2} C_f^2 \\ \|\mathbf{u}(t)\|_1^2 + e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{\delta_0 s} (\|\partial_t \mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|p\|_1^2) ds &\leq \kappa \\ \tau(t) (\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 + \|p(t)\|_1^2 + \|\partial_t \mathbf{u}(t)\|^2) + e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{\delta_0 s} \tau(s) \|\partial_t \mathbf{u}\|_1^2 ds &\leq \kappa \\ \tau(t)^2 \|\partial_t \mathbf{u}(t)\|_1^2 + e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{\delta_0 s} \tau(s)^2 (\|\partial_t \mathbf{u}(t)\|_2^2 + \|\partial_t p\|_1^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{u}\|^2) ds &\leq \kappa \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$, où $\tau(t) = \min(1, t)$, $\delta_0 = \frac{\nu}{2\gamma_0}$ et où κ est une constante ne dépendant que des conditions initiales et de Ω .

2.4 Discrétisation du problème de Navier-Stokes.

La résolution numérique du problème de Navier-Stokes nécessite l'introduction d'un problème approché, défini sur des espaces de dimensions finies. Dans ce paragraphe, on va donc décrire toutes les variables discrètes que nous serons amenés à utiliser ultérieurement, lors de la définition et de l'utilisation de schémas discrets sensés résoudre le problème initial.

2.4.1 Notations générales.

On suppose que le domaine de l'écoulement Ω est recouvert par une famille de maillages $(\mathcal{T}_h)_{h \in H}$ uniformément régulière au sens de la définition de [6] :

un maillage \mathcal{T}_h élément de $(\mathcal{T}_h)_{h \in H}$ est composé de triangles pour $d = 2$ (où de tétraèdres pour $d = 3$) notés K , vérifiant les propriétés suivantes :

- l'intersection de deux éléments distincts de \mathcal{T}_h , si elle n'est pas vide, est réduite soit à un point commun, soit à une arête commune, soit à une face commune en dimension trois.
- on suppose également que le rapport du diamètre h_K d'un simplexe K sur le diamètre ρ_K de la sphère inscrite est borné indépendamment de K et de \mathcal{T}_h :

$$\exists \sigma \mid \forall K \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

Enfin, on va supposer que le maillage \mathcal{T}_h vérifie une hypothèse supplémentaire non standard, introduite notamment dans [14] :

Hypothèse 2.4.1 *On suppose que pour chaque triangle K du maillage, il existe au moins deux arêtes qui n'appartiennent pas au bord $\partial\Omega$ du domaine de l'écoulement Ω , pour $d = 2$. Lorsque $d = 3$, on suppose qu'il existe également deux faces pour chaque K qui n'appartiennent pas au bord $\partial\Omega$.*

On utilisera également les notations abrégées suivantes : s désignera un sommet du maillage \mathcal{T}_h , a une arête et f une face. Lorsque l'on voudra plus particulièrement considérer ces grandeurs pour un élément donné K , les notations seront juste affublées d'un indice K . Enfin, on écrira x_s , x_a et x_f pour respectivement les coordonnées du sommet s , le barycentre de l'arête a et de la face f .

2.4.2 Espaces de discrétisation.

Soit maintenant un maillage \mathcal{T}_h de $(\mathcal{T}_h)_{h \in H}$ quelconque fixé. Nous allons introduire différents espaces discrets approximant \mathbf{H}_0^1 et L_0^2 : on notera \mathbf{v} les fonctions vectorielles et q les fonctions à valeurs réelles. On désignera également par $P_l(K)$, l'ensemble des polynômes de degré l définis sur l'élément K , et par $\mathbf{P}_1(K)$ un vecteur en dimension d , dont les composantes appartiennent toutes à $P_l(K)$.

On rappelle la définition de l'espace discret non-conforme \mathbf{X}_h , dit également espace de Crouzeix-Raviart (cf. [28]), approchant l'espace \mathbf{H}_0^1 en di-

mension, respectivement, deux et trois :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &:= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_K \in \mathbf{P}_1(K) \\ &\forall x_a, \mathbf{v} \text{ continue en } x_a \text{ et } \mathbf{v}(x_a) = 0 \text{ si } x_a \in \partial\Omega \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &:= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ &\mathbf{v}|_K \in \mathbf{P}_1(K) \forall x_f, \mathbf{v} \text{ continue en } x_f \text{ et } \mathbf{v}(x_f) = 0 \text{ si } x_f \in \partial\Omega \} \end{aligned}$$

On utilisera également une approximation conforme de \mathbf{H}_0^1 que l'on notera $\bar{\mathbf{X}}_h$ et dont la définition est :

$$\bar{\mathbf{X}}_h := \{ \mathbf{v} \in \mathcal{C}^0 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_K \in \mathbf{P}_1(K) \text{ } \mathbf{v} \text{ est nulle sur } \partial\Omega \}$$

Pour définir des approximations discrète de L_0^2 , nous allons tout d'abord introduire des espaces intermédiaires. Soit donc :

$$\begin{aligned} M_h^0 &:= \{ q \in L^2 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, q|_K \in P_0(K) \} \\ M_h^1 &:= \{ q \in \mathcal{C}^0 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, q|_K \in P_1(K) \} \end{aligned}$$

On notera M_h l'approximation discrète de L_0^2 et l'on envisagera par la suite plusieurs choix, parmi lesquels :

$$\begin{aligned} &M_h^0 \cap L_0^2 \\ &M_h^1 \cap L_0^2 \\ &(M_h^0 + M_h^1) \cap L_0^2 \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 *Dans la suite de ce mémoire, nous étudierons préférentiellement le dernier des choix présentés ci-dessus.*

A chacun de ces espaces discrets correspondent une norme et un produit scalaire naturels. Ainsi sur l'espace de pression M_h , on utilisera la norme $\|\cdot\|$ et son produit scalaire induit. Pour l'espace \mathbf{X}_h , on ne peut utiliser directement la norme $|\cdot|_1$ car toutes les fonctions de \mathbf{X}_h ne sont pas continues et n'appartiennent donc pas à \mathbf{H}_0^1 .

Par conséquent, on introduit le produit scalaire et sa norme induite, définis sur \mathbf{X}_h par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_h &:= (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_{0,K} \\ \|\mathbf{v}_h\|_h &:= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On renvoie à [28] pour la démonstration des propriétés de $\|\cdot\|_h$ sur \mathbf{X}_h , qui reposent essentiellement sur l'inégalité de Poincaré discrète ci-dessous (toujours dans le cas où Ω est borné) :

$$\exists \gamma_0 > 0 \mid \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad \|\mathbf{v}_h\| \leq \gamma_0 \|\mathbf{v}_h\|_h$$

Remarque 2.4.2 *L'espace $\bar{\mathbf{X}}_h$ est contrairement à \mathbf{X}_h , un sous-espace de \mathbf{H}_0^1 , et par conséquent la norme naturelle pour $\bar{\mathbf{X}}_h$ serait plutôt la norme $\|\cdot\|_1$. Mais, la norme $\|\cdot\|_h$ définie sur tout \mathbf{X}_h , coïncide avec $\|\cdot\|_1$ sur $\bar{\mathbf{X}}_h$: il est donc indifférent d'utiliser l'une ou l'autre sur $\bar{\mathbf{X}}_h$.*

2.4.3 Propriétés d'approximation des espaces discrets.

Les espaces discrets que l'on a défini ici, vérifient en outre les propriétés d'approximation suivantes $\forall (\mathbf{v}, q) \in (\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1) \times (H^1 \cap L_0^2)$:

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_h &\leq ch \|\mathbf{v}\|_2 \\ \inf_{\bar{\mathbf{v}}_h \in \bar{\mathbf{X}}_h} \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_h\|_1 &\leq ch \|\mathbf{v}\|_2 \\ \inf_{q_h \in M_h} \|q - q_h\| &\leq ch \|q\|_1 \end{aligned}$$

Notons au passage que la dernière inégalité est vérifiée quelque soit l'espace de pression discrète M_h choisi.

2.4.4 Définition des formes bilinéaires discrètes.

Aux formes bilinéaires continues introduites plus haut, correspondent des formes bilinéaires discrètes que nous définirons ici et qui seront constamment utilisées par la suite. Nous rappelons également quelques propriétés de ces formes bilinéaires discrètes, utiles pour le reste de l'exposé.

On introduit donc les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ définies respectivement sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ et $\mathbf{X}_h \times M_h$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_K := \nu (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_h \\ b_h(\mathbf{v}_h, q_h) &:= b(\mathbf{v}_h, q_h) + \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \int_e [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] q_h^1 d\sigma \end{aligned}$$

où e est une arête en dimension deux et une face en dimension trois, $[\cdot]$ est le saut d'une fonction à travers e avec le signe approprié et où M_h et $q_h \in M_h$ vérifient :

$$M_h := (M_h^0 \cap L_0^2) + (M_h^1 \cap L_0^2)$$

$$q_h := q_h^0 + q_h^1, \quad q_h^0 \in M_h^0 \cap L_0^2, \quad q_h^1 \in M_h^1 \cap L_0^2$$

Notons d'ores et déjà que lorsque $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ sont restreintes à $\bar{\mathbf{X}}_h$, ces formes bilinéaires sont consistantes aux formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ définies plus haut.

Le théorème suivant a été établi par [4] et [14] mais sachant qu'il en sera fait un usage constant par la suite, il semble utile de le rappeler :

Théorème 2.4.1 *Les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ sont uniformément continues sur respectivement $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ et $\mathbf{X}_h \times M_h$. Plus précisément, cela signifie qu'il existe des constantes c_1, c_2 indépendantes du pas h du maillage, telles que l'on ait :*

$$\forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h; \quad a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \leq c_1 \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h$$

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad q_h \in M_h; \quad b_h(\mathbf{v}_h, q_h) \leq c_2 \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|$$

Enfin, il est indispensable que la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ satisfasse également une condition de type Babūška-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{X}_h \times M_h$. Sébastien Heib a pu montrer dans sa thèse ([14]) que d'une part cette condition est bien vérifiée et que d'autre part, cette condition est indépendante du pas du maillage h . Comme nous utiliserons par la suite ce résultat, nous en profitons pour en rappeler l'énoncé, repris de [14] :

Théorème 2.4.2 *La forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition de Babūška-Brezzi discrète uniforme sur $\mathbf{X}_h \times M_h$. C'est-à-dire qu'il existe une constante c_3 indépendante du pas h du maillage telle que l'on ait :*

$$\forall q_h \in M_h; \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c_3 \|q_h\|$$

Enfin, on construit deux formes bilinéaires supplémentaires $b_0(\cdot, \cdot)$ et $b_1(\cdot, \cdot)$ définies respectivement sur $\mathbf{X}_h \times (M_h^0 \cap L_0^2)$ et $\mathbf{X}_h \times (M_h^1 \cap L_0^2)$, comme suit :

$$b_0(\mathbf{v}_h, q_h^0) := b_h(\mathbf{v}_h, q_h^0)$$

$$b_1(\mathbf{v}_h, q_h^1) := b_h(\mathbf{v}_h, q_h^1)$$

Compte tenu de leurs définitions, ces deux nouvelles formes bilinéaires vérifient naturellement l'uniforme continuité et la condition de Babůska-Brezzi discrète uniforme.

Chapitre 3

Ecoulement diphasique.

3.1 Introduction.

Ce chapitre est dédié à la description du modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement d'un mélange constitué de deux fluides. Dans le cadre de cette thèse, ce modèle est celui dit à une pression, où chacun des fluides est à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire encore sous une même unique pression p .

En outre et afin de simplifier l'ensemble du discours, nous ferons également l'hypothèse supplémentaire suivante :

Hypothèse 3.1.1 *L'écoulement du mélange diphasique est isotherme c'est-à-dire a lieu à température T constante.*

Toutefois, cette restriction n'est pas obligatoire et la supprimer ne modifie pas profondément, la démarche qui va suivre.

Essayons maintenant de définir précisément la notion de "mélange" de deux fluides. Mathématiquement, cette idée se traduit par la donnée de deux fonctions $\alpha_i(x)$, $i = 1, 2$ -appelées taux de présence- définies sur le domaine Ω de l'écoulement, à valeurs dans $[0, 1]$ et telles que :

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (3.1)$$

3.2 Equations moyennées.

A un fluide donné est associé un système d'équations de Navier-Stokes, qui traduit l'évolution au cours du temps de certaines grandeurs physiques caractéristiques : sa vitesse \mathbf{u} et sa densité ρ . Ce système d'équations s'écrit simplement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t))\end{aligned}$$

où la densité $\rho = \rho(p)$, est une fonction donnée par la thermodynamique et μ est la viscosité dynamique.

Dans le cas d'un mélange de deux fluides, les équations ci-dessus sont modifiées afin de tenir compte des taux de présence $\alpha_i(x)$. Plus précisément et compte tenu du modèle adopté, nous avons les systèmes d'équations suivants :

$$\partial_t(\alpha_i \rho_i) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i) = (-1)^{i+1} \Gamma(\alpha_1, p) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \alpha_i \nabla p + (-1)^{i+1} \tau \\ = \alpha_i \rho_i \mathbf{g} + \nabla \cdot (\alpha_i \mu_i (\nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^t))\end{aligned} \quad (3.3)$$

avec

i : indice du fluide, et valant 1 ou 2

ρ_i : densité du fluide i strictement positive, fonction de p , $\frac{\partial \rho_i}{\partial p} := \epsilon_i \geq 0$

μ_i : viscosité dynamique du fluide i strictement positive

\mathbf{u}_i : vitesse du fluide i

Γ : terme source de changement de phase

τ : terme de transfert de quantité de mouvement défini plus loin

p : pression

Ce système appelle déjà une remarque. Pour cela, considérons la situation simple, d'un liquide (de l'eau par exemple) placé sur une plaque chauffante. Tant que la température est inférieure à la température d'ébullition du liquide, aucun changement de phase ne se produit. Par contre dès que l'on atteint la température d'ébullition, des bulles se forment dans le corps du liquide ou au contact des parois chauffées : dans ce cas, nous obtenons par

simple échauffement, un mélange de deux fluides. Supposons maintenant que nous souhaitions utiliser les équations (3.2) et (3.3) pour d'écrire le comportement de notre biffuide au moment précis où les bulles se forment. Compte tenu de la forme des équations, nous avons donc besoin de connaître (entre autre) la vitesse initiale des bulles au moment de leur création. Or celle-ci nous est totalement inconnue. De plus, il est probable que, selon qu'une bulle se forme le long des parois chauffées ou dans le corps du liquide, les vitesses initiales aient un comportement bien différent. La situation d'une phase évanescente (qui apparaît ou disparaît) est donc particulièrement problématique. Aussi dans la suite de ce chapitre, nous ne considérons que des écoulements dans lesquels les deux phases existent partout à tout temps t et telles que leurs caractéristiques essentielles (vitesse, pression ...) soient définies en t :

$$0 < \alpha_i < 1$$

3.3 Nouvelle formulation.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous négligerons les termes de diffusion dans chacune des phases : les coefficients de diffusion dynamique $\mu_i(p)$ seront négligés par la suite.

Nous souhaitons dorénavant introduire les nouvelles variables suivantes : la vitesse du mélange \mathbf{u} , la vitesse de frottement entre les fluides $\delta(\mathbf{u})$, la pression p et la quantité λ dont les expressions littérales sont simplement données par

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &:= \frac{\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2}{\rho} \\ \delta(\mathbf{u}) &:= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \lambda &:= \ln(\alpha_1) - \ln(\alpha_2)\end{aligned}$$

avec $\rho := \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$, tandis que les densité des fluides $\rho_i(p)$.

L'introduction de la variable λ peut sembler arbitraire mais présente toutefois un grand intérêt, qui pour la clareté de l'exposé sera énoncé plus tard.

Nous utiliserons également la vitesse moyenne de mélange \mathbf{u}_α comme paramètre du problème. En effet, cette dernière possède, sous certaines hypothèses particulières, des propriétés intéressantes que nous détaillerons plus

loin dans ce chapitre. Afin de définir complètement cette vitesse moyenne de mélange, nous donnons dès à présent sa définition et accessoirement son expression en fonction de nos nouvelles variables :

$$\mathbf{u}_\alpha := \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \theta \frac{\delta(\rho)}{\rho} \delta(\mathbf{u}) \quad (3.4)$$

avec $\theta := \alpha_1 \alpha_2$ et $\delta(\rho) := \rho_1 - \rho_2$.

Introduisons à présent une identité remarquable fort utilisée dans la suite. Si a_1, a_2, b_1 et b_2 sont quatre réels quelconques alors pour tout réel ϕ l'égalité suivante est vérifiée :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 + a_2)(\phi b_1 + (1 - \phi)b_2) + ((1 - \phi)a_1 - \phi a_2)(b_1 - b_2) \quad (3.5)$$

Enfin, nous aurons besoin d'utiliser les constantes ϵ_i qui sont les inverses du carré des vitesses de propagation du son c_i au sein des fluides i . Ces vitesses s'obtiennent par les relations suivantes :

$$\epsilon_i := \frac{\partial \rho_i}{\partial p} = \frac{1}{c_i^2} \quad (3.6)$$

Il nous reste donc à établir les équations régissant le comportement de ces nouvelles variables à partir des équations (3.2). Ceci fait l'objet des paragraphes qui suivent.

Remarque 3.3.1 *Ces quelques notations nous permettent déjà d'évaluer l'énergie cinétique du mélange des deux fluides à l'aide des variables introduites ci-dessus. En effet, nous avons par définition de l'énergie cinétique E_c du mélange :*

$$E_c := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_1 \rho_1 \|\mathbf{u}_1\|_e^2 + \alpha_2 \rho_2 \|\mathbf{u}_2\|_e^2 d\Omega$$

ou $\|\cdot\|_e$ est la norme euclidienne usuelle.

Or, nous avons avec les notations introduites :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \|\mathbf{u}\|_e^2 d\Omega &= \int_{\Omega} 2 \frac{\theta \rho_1 \rho_2}{\rho} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_e + \frac{\alpha_1^2 \rho_1^2}{\rho} \|\mathbf{u}_1\|_e^2 + \frac{\alpha_2^2 \rho_2^2}{\rho} \|\mathbf{u}_2\|_e^2 d\Omega \\ \int_{\Omega} \theta \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \|\delta(\mathbf{u})\|_e^2 d\Omega &= \int_{\Omega} -2 \frac{\theta \rho_1 \rho_2}{\rho} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_e + \frac{\theta \rho_1 \rho_2}{\rho} \|\mathbf{u}_1\|_e^2 + \frac{\theta \rho_1 \rho_2}{\rho} \|\mathbf{u}_2\|_e^2 d\Omega \end{aligned}$$

Il nous suffit de faire la demi-somme des deux relations précédentes pour finalement obtenir :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \|\mathbf{u}\|_e^2 + \tilde{\rho} \|\delta(\mathbf{u})\|_e^2 d\Omega$$

$$\text{où } \tilde{\rho} := \theta \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho}.$$

3.3.1 Equations de masse.

Nous allons maintenant établir les équations de masse sur nos nouvelles variables \mathbf{u} et $\delta(\mathbf{u})$.

Nous commençons par séparer les taux de présence α_i des équations de masse (3.2), par dérivations successives. Nous obtenons alors les équations, après division par ρ_1, ρ_2 :

$$\partial_t \alpha_1 + \alpha_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \alpha_1 = \frac{\Gamma}{\rho_1} - \alpha_1 (\partial_t \ln(\rho_1) + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \ln(\rho_1)) \quad (3.7)$$

$$\partial_t \alpha_2 + \alpha_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \alpha_2 = -\frac{\Gamma}{\rho_2} - \alpha_2 (\partial_t \ln(\rho_2) + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \ln(\rho_2)) \quad (3.8)$$

Introduisons ensuite les constantes ϵ_i définies par (3.6) et la pression afin d'écrire le système suivant :

$$\partial_t \alpha_1 + \alpha_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \alpha_1 = \frac{\Gamma}{\rho_1} - \frac{\alpha_1 \epsilon_1}{\rho_1} (\partial_t p + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p) \quad (3.9)$$

$$\partial_t \alpha_2 + \alpha_2 \nabla \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \alpha_2 = -\frac{\Gamma}{\rho_2} - \frac{\alpha_2 \epsilon_2}{\rho_2} (\partial_t p + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla p) \quad (3.10)$$

en notant que :

$$\begin{aligned} \partial_t \ln(\rho_i) &= \frac{\partial \ln(\rho_i)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\epsilon_i}{\rho_i} \partial_t p \\ \nabla \ln(\rho_i) &= \frac{\partial \ln(\rho_i)}{\partial p} \nabla p = \frac{\epsilon_i}{\rho_i} \nabla p \end{aligned}$$

Nous divisons ensuite chacune des équations (3.9) -(3.10) par α_i de façon à obtenir des expressions en fonction des $\ln(\alpha_i)$. Nous cherchons ainsi à faire

apparaître notre nouvelle variable λ décrite auparavant.

$$\partial_t \ln(\alpha_1) + \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \ln(\alpha_1) = \frac{\Gamma}{\alpha_1 \rho_1} - \frac{\epsilon_1}{\rho_1} (\partial_t p + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p) \quad (3.11)$$

$$\partial_t \ln(\alpha_2) + \nabla \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \ln(\alpha_2) = -\frac{\Gamma}{\alpha_2 \rho_2} - \frac{\epsilon_2}{\rho_2} (\partial_t p + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla p) \quad (3.12)$$

Nous procédons ensuite en deux étapes distinctes. Nous commençons tout d'abord par faire la différence entre les équations (3.11) et (3.12).

Par définition des variables λ et $\delta(\mathbf{u})$, nous obtenons alors une équation de "masse" sur $\delta(\mathbf{u})$:

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda + \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \ln(\alpha_1) - \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \ln(\alpha_2)) = \\ \frac{\Gamma}{\tilde{\rho}} + \frac{\rho_1 \epsilon_2 - \rho_2 \epsilon_1}{\rho_1 \rho_2} \partial_t p + \left(\frac{\epsilon_2}{\rho_2} \mathbf{u}_2 - \frac{\epsilon_1}{\rho_1} \mathbf{u}_1 \right) \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $\theta := \alpha_1 \alpha_2$ et $\tilde{\rho} := \theta \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho}$.

Nous allons maintenant employer l'expression (3.5) pour simplifier l'écriture du système précédent. Pour cela nous remarquons que :

$$\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \ln(\alpha_1) - \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \ln(\alpha_2) = \delta(\mathbf{u}) \cdot (\alpha_2 \nabla \ln(\alpha_1) + \alpha_1 \nabla \ln(\alpha_2)) + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \lambda \quad (\phi = \alpha_2)$$

Or toujours avec (3.5), nous pouvons simplifier quelque peu l'écriture :

$$\begin{aligned} \alpha_2 \nabla \ln(\alpha_1) + \alpha_1 \nabla \ln(\alpha_2) &= (\alpha_1 \nabla \ln(\alpha_1) + \alpha_2 \nabla \ln(\alpha_2)) \\ &+ (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \nabla (\ln(\alpha_1) - \ln(\alpha_2)) \\ &= (\nabla \alpha_1 + \nabla \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1) \nabla \lambda \\ &= -\delta(\alpha) \nabla \lambda \end{aligned}$$

avec $\delta(\alpha) := \alpha_1 - \alpha_2$.

D'où finalement, il nous devient possible d'écrire :

$$\partial_t \lambda + \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) + \mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla \lambda = \frac{\Gamma}{\tilde{\rho}} + \gamma \partial_t p + \mathbf{u}_\gamma \cdot \nabla p \quad (3.14)$$

avec :

$$\begin{aligned}\gamma &:= \frac{\rho_1 \epsilon_2 - \rho_2 \epsilon_1}{\rho_1 \rho_2} \\ \mathbf{u}_\gamma &:= \frac{\rho_1 \epsilon_2 \mathbf{u}_2 - \rho_2 \epsilon_1 \mathbf{u}_1}{\rho_1 \rho_2} \\ \mathbf{u}_\lambda &:= \mathbf{u}_\alpha - \delta(\alpha) \delta(\mathbf{u}) = \alpha_2 \mathbf{u}_1 + \alpha_1 \mathbf{u}_2\end{aligned}$$

En remarquant que $\partial_t \alpha_1 = \theta \partial_t \lambda$, nous obtenons l'équation d'évolution de α_1 :

$$\partial_t \alpha_1 + \theta \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) + \mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla \alpha_1 = \theta \left(\frac{\Gamma}{\bar{\rho}} + \gamma \partial_t p + \mathbf{u}_\gamma \cdot \nabla p \right) \quad (3.15)$$

Remarque 3.3.2 *Nous pouvons d'ores et déjà constater que lorsque les ϵ_i sont très petits, les paramètres γ et \mathbf{u}_γ sont très proches de 0 et donc négligeables.*

Faisons désormais la somme des équations (3.9) et (3.10) afin d'obtenir une équation de "masse" sur notre vitesse de mélange \mathbf{u} . Comme la somme des taux de présence α_i est une constante, nous avons facilement par définition de \mathbf{u} :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \epsilon \partial_t p = \frac{\delta(\rho)}{\rho_1 \rho_2} \Gamma - \mathbf{u}_\epsilon \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left(\theta \frac{\delta(\rho)}{\rho} \delta(\mathbf{u}) \right) \quad (3.16)$$

avec cette fois :

$$\begin{aligned}\epsilon &:= \frac{\alpha_1 \epsilon_1 \rho_2 + \alpha_2 \epsilon_2 \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \\ \mathbf{u}_\epsilon &:= \frac{\alpha_1 \epsilon_1 \rho_2 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \epsilon_2 \rho_1 \mathbf{u}_2}{\rho_1 \rho_2}\end{aligned}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à établir des équations de "quantité de mouvement" sur \mathbf{u} et $\delta(\mathbf{u})$.

Remarque 3.3.3 *Cette remarque est analogue à la précédente, à savoir que lorsque les ϵ_i deviennent négligeables, il en devient de même pour les paramètres ϵ et \mathbf{u}_ϵ .*

Remarque 3.3.4 *Nous aurions pu également préciser le lien existant entre les vitesses \mathbf{u}_γ , \mathbf{u}_ϵ et nos variables \mathbf{u} et $\delta(\mathbf{u})$.*

$$\mathbf{u}_\gamma = \gamma \mathbf{u}_\alpha + \frac{\theta \delta(\rho) \delta(\epsilon) - \rho(\alpha_1 \epsilon_2 + \alpha_2 \epsilon_1)}{\rho_1 \rho_2} \delta(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{u}_\epsilon = \epsilon \mathbf{u}_\alpha + \frac{\rho \delta(\epsilon) - \tilde{\epsilon} \delta(\rho)}{\rho_1 \rho_2} \theta \delta(\mathbf{u}) = \epsilon \left(\mathbf{u} - \theta \frac{\delta(\rho)}{\rho} \delta(\mathbf{u}) \right) + \frac{\rho \delta(\epsilon) - \tilde{\epsilon} \delta(\rho)}{\rho_1 \rho_2} \theta \delta(\mathbf{u})$$

avec $\delta(\epsilon) := \epsilon_1 - \epsilon_2$ et $\tilde{\epsilon} := \alpha_1 \epsilon_1 + \alpha_2 \epsilon_2$.

3.3.2 Equations de quantité de mouvement.

La façon de procéder pour obtenir lesdites équations de “quantité de mouvement” reste identique à celle développée dans le paragraphe précédent.

Tout comme dans le paragraphe ci-dessus, nous séparons les vitesses \mathbf{u}_i des équations de quantité de mouvement (3.3) par dérivations successives. Ceci nous conduit naturellement à considérer les égalités :

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) &= \alpha_i \rho_i (\partial_t \mathbf{u}_i + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i)) \\ &\quad + \mathbf{u}_i (\partial_t(\alpha_i \rho_i) + \mathbf{u}_i \cdot \nabla(\alpha_i \rho_i)) \\ &= \alpha_i \rho_i (\partial_t \mathbf{u}_i + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) - \mathbf{u}_i (\nabla \cdot \mathbf{u}_i)) \\ &= \alpha_i \rho_i (\partial_t \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i) \end{aligned}$$

après avoir réinjecté les équations de masse (3.2), pour obtenir le passage de la première ligne à la seconde.

Dès lors, il devient envisageable de reformuler les équations de quantité de mouvement (3.3) sous une forme plus réduite, quitte à diviser par $\alpha_i \rho_i$:

$$\partial_t \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + \frac{1}{\rho_1} \nabla p + \frac{\tau}{\alpha_1 \rho_1} = \mathbf{g} \quad (3.17)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 + \frac{1}{\rho_2} \nabla p - \frac{\tau}{\alpha_2 \rho_2} = \mathbf{g} \quad (3.18)$$

Cherchons maintenant à exprimer l'équation de “quantité de mouvement” associée à $\delta(\mathbf{u})$. Pour cela, nous faisons la différence des équations (3.17)-(3.18) afin d'obtenir :

$$\partial_t \delta(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tau = \frac{1}{\rho_\#} \nabla p$$

en ayant posé $\delta(\rho) := \rho_1 - \rho_2$, $\rho_{\#} := \frac{\rho_1 \rho_2}{\delta(\rho)}$.

Il nous reste à exprimer les termes non linéaires en fonction des paramètres qui nous intéressent (avec (3.5) et $\phi = \alpha_2$) :

$$(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla) \delta(\mathbf{u}) + (\delta(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha$$

en utilisant (3.4) pour le passage à la seconde égalité, et en notant également $\delta(\alpha) := \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha_1 - 1$.

Ce qui donne en réunissant tous les termes :

$$\partial_t \delta(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla) \delta(\mathbf{u}) + (\delta(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tau = \frac{1}{\rho_{\#}} \nabla p \quad (3.19)$$

De la même manière, nous allons établir une équation d'évolution sur \mathbf{u} à l'aide des équations (3.3). La somme des équations (3.3) nous donne, compte tenu de la définition de \mathbf{u} :

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla p = \rho \mathbf{g}$$

Remarquons que la sommation des équations (3.2), nous simplifie un peu l'écriture :

$$\rho \partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla p = \rho \mathbf{g}$$

Enfin, les termes non linéaires se réexpriment sous la forme suivante, en utilisant (3.5) avec $\phi = \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 &= (\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2) \otimes (\phi \mathbf{u}_1 + (1 - \phi) \mathbf{u}_2) \\ &\quad + ((1 - \phi) \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 - \phi \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2) \otimes (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \\ &= \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \tilde{\rho} \delta(\mathbf{u}) \otimes \delta(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Réunissant toutes ces estimations, nous trouvons finalement :

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot (\tilde{\rho} \delta(\mathbf{u}) \otimes \delta(\mathbf{u}))$$

Soit en divisant par ρ :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\rho} \delta(\mathbf{u}) \otimes \delta(\mathbf{u})) \quad (3.20)$$

3.3.3 Système final.

Nous commencerons par formuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.3.1 *Nous supposons que le terme τ peut s'écrire :*

$$\tau = C\nabla\alpha_1 \quad \text{avec } C > 0 \text{ réel} \quad (3.21)$$

Remarque 3.3.5 *Nous aurions également pu choisir :*

$$\tau = C\nabla\alpha_1 + C_2\delta(\mathbf{u}) \quad \text{avec } C_2 > 0 \text{ réel}$$

sans que cela change fondamentalement la suite des résultats.

Dès lors, en réunissant toutes nos équations sur nos nouvelles variables, nous obtenons le système d'équations particulier suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\rho} \delta(\mathbf{u}) \otimes \delta(\mathbf{u})) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} \quad (3.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \epsilon \partial_t p = \frac{\Gamma}{\rho_{\#}} - \mathbf{u}_{\epsilon} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\#}} \delta(\mathbf{u}) \right) \quad (3.23)$$

$$\partial_t \delta(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{u}) + (\delta(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{C\rho}{\rho_1\rho_2} \nabla \lambda = \frac{1}{\rho_{\#}} \nabla p \quad (3.24)$$

$$\nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) + \partial_t \lambda + \mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla \lambda = \frac{\Gamma}{\tilde{\rho}} + \gamma \partial_t p + \mathbf{u}_{\gamma} \cdot \nabla p \quad (3.25)$$

avec, nous le rappelons :

$$\begin{aligned} \theta &:= \alpha_1\alpha_2; \quad \gamma := \frac{\rho_1\epsilon_2 - \rho_2\epsilon_1}{\rho_1\rho_2}; \quad \epsilon := \frac{\alpha_1\epsilon_1\rho_2 + \alpha_2\epsilon_2\rho_1}{\rho_1\rho_2} \\ \tilde{\rho} &:= \theta \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}; \quad \rho_{\#} := \frac{\rho_1\rho_2}{\delta(\rho)}; \quad \rho := \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 \\ \mathbf{u}_{\alpha} &:= \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2; \quad \mathbf{u}_{\lambda} := \alpha_2\mathbf{u}_1 + \alpha_1\mathbf{u}_2; \quad \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\#}} := \theta \frac{\delta(\rho)}{\rho} \\ \mathbf{u}_{\gamma} &:= \frac{\rho_1\epsilon_2\mathbf{u}_2 - \rho_2\epsilon_1\mathbf{u}_1}{\rho_1\rho_2}; \quad \mathbf{u}_{\epsilon} := \frac{\alpha_1\epsilon_1\rho_2\mathbf{u}_1 + \alpha_2\epsilon_2\rho_1\mathbf{u}_2}{\rho_1\rho_2} \end{aligned}$$

En effet, l'équation (3.24) est obtenue à l'aide de la relation $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1$, qui nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \nabla \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \nabla \alpha_1 \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \nabla \alpha_1 - \frac{1}{\alpha_2} \nabla \alpha_2 \\ &= \nabla(\ln(\alpha_1)) - \nabla(\ln(\alpha_2)) \\ &= \nabla \lambda \end{aligned}$$

Remarque 3.3.6 *Dans le cas où les deux fluides sont quasi-compressibles, les paramètres ϵ_i sont très faibles et très petits devant les vitesses \mathbf{u}_i des fluides. Par conséquent, et compte tenu des notations introduites plus avant, nous obtenons :*

$$\begin{aligned} \gamma &\approx \epsilon \approx 0 \\ \mathbf{u}_\gamma &\approx \mathbf{u}_\epsilon \approx 0 \end{aligned}$$

ce qui nous autorise à négliger tous ces termes dans les équations (3.22)-(3.25).

Nous allons commencer par souligner l'importance de la constante C , définie dans la relation (3.21) explicitant le lien entre le paramètre τ et le taux de présence α_1 . En effet, si cette constante est strictement nulle, alors les équations (3.22)-(3.23) et (3.24)-(3.25) sont mal posées dans le sens où il ne peut y avoir d'équilibre entre les fluides.

Pour illustrer ces dires, nous allons procéder à une démonstration par l'absurde. Faisons donc l'hypothèse supplémentaire (outre l'incompressibilité des fluides) que le mélange des deux fluides atteint un état d'équilibre à un temps donné t^n : cela signifie que pour tout temps t supérieur à t^n , nous avons $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = 0$. Par définition de nos variables, nous obtenons donc $\mathbf{u} = \delta(\mathbf{u}) = 0$, pour tout t supérieur à t^n .

Or sous les hypothèses introduites ici, l'équation (3.22) nous permet d'obtenir facilement le gradient de pression à l'équilibre :

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \neq 0$$

Par conséquent, sous la contrainte $C = 0$, l'équation (3.24) se réécrit également sous la forme :

$$\partial_t \delta(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho\#} \nabla p = \frac{\rho \delta(\rho)}{\rho_1 \rho_2} \mathbf{g}$$

Ce qui donne, lorsque les deux fluides n'ont pas la même densité, $\partial_t \delta(\mathbf{u}) \neq 0$, relation contraire à la notion d'équilibre présupposée.

Cet exemple nous montre que le paramètre C est bien indispensable à la modélisation envisagée et qu'il doit être choisi non nul.

Maintenant que nous avons établi que la constante C de (3.21) ne pouvait être nulle pour espérer atteindre un état stationnaire, nous allons essayer de caractériser les solutions analytiques stationnaires de (3.22)-(3.23) et (3.24)-(3.25), dans un cadre monodimensionnel.

Dans la situation d'un équilibre en régime stationnaire monodimensionnel, nos systèmes d'équations se réduisent donc à la simple expression suivante :

$$\partial_z p = \rho \mathbf{g}_z \tag{3.26}$$

$$C \rho \partial_z \lambda = \delta(\rho) \mathbf{g}_z \tag{3.27}$$

Il devient alors envisageable de calculer analytiquement les solutions de ce nouveau système d'équations. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\delta(\rho)}{C} \mathbf{g}_z z + c_\lambda \\ p &= \rho_1 \mathbf{g}_z z + C \ln \left(1 + e^{c_\lambda - \frac{\delta(\rho)}{C} \mathbf{g}_z z} \right) + c_p \\ \alpha_1 &= \frac{1}{1 + e^{(c_\lambda - \frac{\delta(\rho)}{C} \mathbf{g}_z z)}} \end{aligned}$$

où c_λ est une constante associée à la masse globale, et c_p une constante arbitraire due à l'incompressibilité.

Pour donner une idée du comportement des diverses variables en fonction du paramètre de "raideur" C , nous avons tracé le profil de ces variables pour diverses valeurs de C , dans le cas d'un mélange eau/vapeur d'eau à 300°C et

à pression de 8 MPa.

Dans le cas particulier de deux fluides incompressibles, la courbe représentant le taux de présence α est claire : plus le paramètre C tend vers 0, plus on tend vers une fonction de Heaviside. Il nous devient possible alors d'interpréter C comme un paramètre "raidisseur" d'interface : lorsque C est grand, nous voyons un mélange de deux fluides dont l'interface se répartie sur une grande portion du domaine de l'écoulement. Nous passons continument d'un fluide à l'autre. A l'inverse quand C est petit, l'interface entre les deux fluides tend à se réduire à un point de sorte que nous passons brutalement d'un fluide à un autre (discontinuité).

La pression, quant à elle, possède un profil de plus en plus "raide". Pour un grand C , la pression du mélange est une courbe manifestement C^1 de sorte que le passage d'un fluide à l'autre se fait de manière très régulière. Pour un paramètre C petit, la pression semble tendre vers une courbe possédant un point de non dérivabilité, intersection de deux droites dont l'une possède une pente très forte et l'autre très faible : ainsi, lorsque nous passons d'un fluide à l'autre (qui dans ce cas sont très nettement séparés), la pression reste continue mais ne s'accroît plus de la même façon (discontinuité de la dérivée).

Enfin, la variable λ est une fonction linéaire en fonction de z dont la pente tend vers l'infini lorsque le paramètre C de (3.21) décroît.

Dans le cas de deux fluides quasi-compressibles, la situation devient plus complexe encore. Dans ce cas, les densités des fluides ρ_1 et ρ_2 dépendent de la pression : les solutions des équations (3.26)-(3.27) possèdent alors un comportement bien plus complexe.

L'analyse des solutions du système monodimensionnel précédent suggère encore une chose : nous constatons que quelle que soit la valeur du paramètre C , le produit $C\lambda$ reste toujours égal au même polynôme. Nous avons obtenu ainsi un invariant du système diphasique. Ceci suggère donc de prendre comme variable non pas λ mais $\tilde{\lambda}$ définie par :

$$\tilde{\lambda} = C\lambda$$

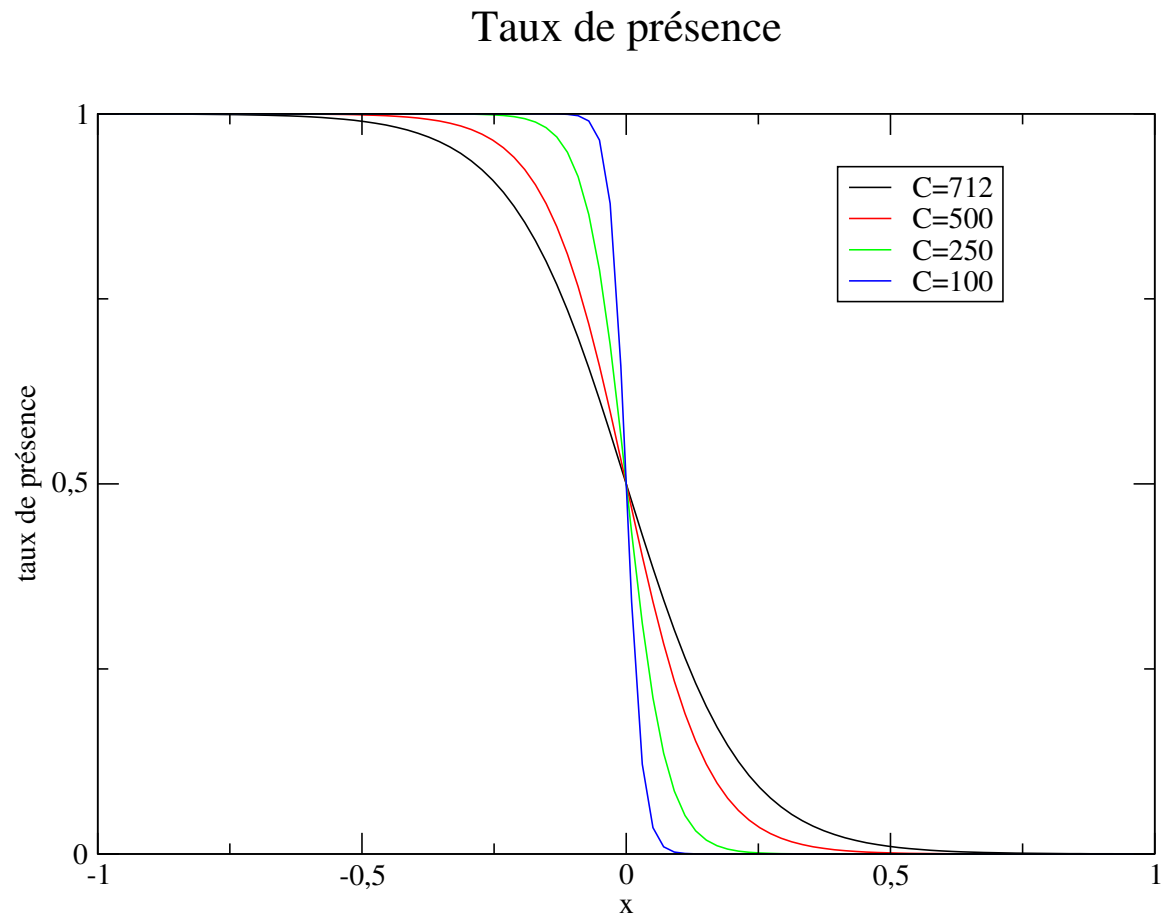


FIG. 3.1 – Variation du taux de présence α_1 en fonction de C , avec $\mathbf{g}_z = 9.81$
 $\rho_1 = 712$ et $\delta(\rho) = 566$.

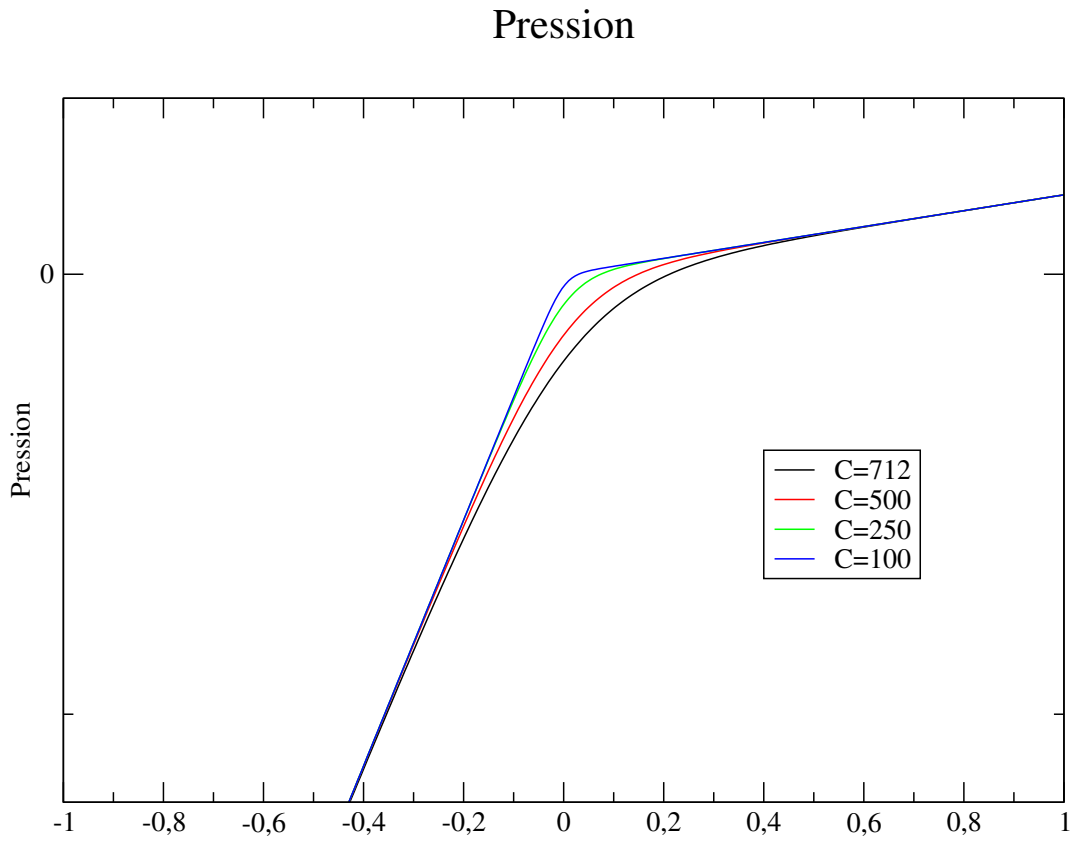


FIG. 3.2 – Variation de la pression p en fonction de C avec $\mathbf{g}_z = 9.81$ $\rho_1 = 712$ et $\delta(\rho) = 566$.

En introduisant alors $\tilde{\lambda}$ dans (3.22)-(3.25), nous obtenons le système suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\rho} \delta(\mathbf{u}) \otimes \delta(\mathbf{u})) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \epsilon \partial_t p = \frac{\Gamma}{\rho_{\#}} - \mathbf{u}_{\epsilon} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\#}} \delta(\mathbf{u}) \right) \quad (3.29)$$

$$\partial_t \delta(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{u}) + (\delta(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} \nabla \tilde{\lambda} = \frac{1}{\rho_{\#}} \nabla p \quad (3.30)$$

$$C \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) + \partial_t \tilde{\lambda} + \mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla \tilde{\lambda} = \frac{C\Gamma}{\tilde{\rho}} + C\gamma \partial_t p + C \mathbf{u}_{\gamma} \cdot \nabla p \quad (3.31)$$

Or lorsque nous faisons tendre C vers 0 de façon à obtenir des interfaces entre fluide raides, les termes $C \nabla \cdot \delta(\mathbf{u})$, $C\gamma \partial_t p$ et $C \mathbf{u}_{\gamma} \cdot \nabla p$ tendent à devenir nuls. Dans ce cas limite, le système ci-dessus se simplifie une nouvelle fois :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\rho} \delta(\mathbf{u}) \otimes \delta(\mathbf{u})) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} \quad (3.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \epsilon \partial_t p = \frac{\Gamma}{\rho_{\#}} - \mathbf{u}_{\epsilon} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\#}} \delta(\mathbf{u}) \right) \quad (3.33)$$

$$\partial_t \delta(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{u}) + (\delta(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} + \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} \nabla \tilde{\lambda} = \frac{1}{\rho_{\#}} \nabla p \quad (3.34)$$

$$\partial_t \tilde{\lambda} + \mathbf{u}_{\lambda} \cdot \nabla \tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\Gamma}}{\tilde{\rho}} \quad (3.35)$$

où $\tilde{\Gamma}$ est la limite de $C\Gamma$ lorsque C tend vers 0.

Nous remarquons que l'équation (3.35) est alors une simple équation de transport sur $\tilde{\lambda}$.

Nous allons maintenant tâcher, d'obtenir une idée de démonstration (d'un point de vue formel uniquement) de l'existence et l'unicité d'une solution au système d'équations (3.32)-(3.35) sur un intervalle de temps $[0, T]$ où T est un réel quelconque fixé. Pour cela, nous découpons cet intervalle en une série de N sous-intervalles $[t^n, t^{n+1}]$ distincts de longueur δt , avec par définition $t^0 := 0$ et $t^{N+1} := T$. Pour toute variable U , nous noterons U^n son évaluation au temps t^n : ainsi à t^n fixé, U^n sera une fonction définie sur Ω et à valeur dans R ou dans R^d , avec d la dimension du problème.

Sans entrer plus avant dans les détails, nous supposons avoir défini deux espaces fonctionnels continus \mathbf{V} et Q tels que nous puissions introduire le problème variationnel suivant : trouver \mathbf{u}^{n+1} , $\delta(\mathbf{u}^{n+1})$ dans \mathbf{V} et p^{n+1} , $\tilde{\lambda}^{n+1}$ dans Q tels que

$$a_1(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) - \delta t b_1(p^{n+1}, \mathbf{v}) = \delta t (\mathcal{F}_1, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.36)$$

$$b_1(\mathbf{u}^{n+1}, q) = b_2(\delta(\mathbf{u}^{n+1}), q) \quad \forall q \in Q \quad (3.37)$$

$$a_2(\delta(\mathbf{u}^{n+1}), \mathbf{v}) - \delta t b_1(\tilde{\lambda}^{n+1}, \mathbf{v}) = -\delta t \hat{b}_2(\mathbf{v}, p^{n+1}) + \delta t (\mathcal{F}_3, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.38)$$

$$C \delta t b_1(\delta(\mathbf{u}^{n+1}), q) + a_3(\tilde{\lambda}^{n+1}, q) = \delta t (\mathcal{F}_4, q) \quad \forall q \in Q \quad (3.39)$$

où nous avons posé $C \geq 0$ et les égalités suivantes :

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\rho^n \mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \left(\frac{\rho_1^n \rho_2^n}{\rho^n} \mathbf{u}, \mathbf{v} \right); \quad a_3(p, q) := (p, q)$$

$$b_1(\mathbf{v}, q) := (\nabla \cdot \mathbf{v}, p); \quad b_2(\mathbf{v}, q) := \left(\nabla \cdot \left(\frac{\tilde{\rho}^n}{\rho^n_{\#}} \mathbf{v} \right), q \right); \quad \hat{b}_2(\mathbf{v}, q) := b_2\left(\frac{1}{\tilde{\rho}^n} \mathbf{v}, q\right)$$

et où les \mathcal{F}_i sont les termes sources dans lesquels nous avons regroupé tous les termes évalués au temps t^n .

Ensuite, aux formes bilinéaires $a_i(\cdot, \cdot)$ nous associons les opérateurs (définis positifs) A_i définis par :

$$(A_i \mathbf{u}, \mathbf{v}) := a_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

Nous définissons les opérateurs B_i , B_i^t , \hat{B}_2 et \hat{B}_2^t de manière analogue :

$$\begin{aligned} (B_i \mathbf{v}, q) &= (\mathbf{v}, B_i^t q) := b_i(\mathbf{v}, q) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, q \in Q \\ (\hat{B}_2 \mathbf{v}, q) &= (\mathbf{v}, \hat{B}_2^t q) := \hat{b}_2(\mathbf{v}, q) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, q \in Q \end{aligned}$$

Nous supposons de plus que la forme bilinéaire $b_1(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition de type inf-sup sur $\mathbf{V} \times Q$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout q dans Q , nous ayons :

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b_1(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \geq \beta \|q\|_Q \quad (3.40)$$

Ceci signifie entre autre que l'opérateur B_2^t est injectif sur Q :

$$(\forall q \in Q \mid B_1^t q = 0) \Rightarrow q = 0 \quad (3.41)$$

De manière analogue \hat{B}_2^t est un opérateur injectif, car il vérifie une inégalité inf-sup similaire à (3.40), dont la constante β dépend du rapport $\frac{\tilde{\rho}^n}{\rho_{\#}^n}$.

Dès lors, nous constatons qu'il nous est possible de réécrire nos équations sous la forme d'un système "matriciel" très simple du type $\mathcal{L}X = \mathcal{F}$, avec :

$$\mathcal{L} := \begin{pmatrix} A_1 & -\delta t B_1^t & 0 & 0 \\ -B_1 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & \delta t \hat{B}_2^t & A_2 & -\delta t B_1^t \\ 0 & 0 & C \delta t B_1 & A_3 \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \\ \delta(\mathbf{u}^{n+1}) \\ \tilde{\lambda}^{n+1} \end{pmatrix}$$

et où \mathcal{F} est le vecteur $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq 4}$ auquel nous rajoutons les termes évalués au temps t^n .

Puisque par définition, les opérateurs A_i sont définis positifs et donc inversibles, il nous devient possible de résoudre le système précédent. En effet, la dernière ligne du système matriciel, nous donne $\tilde{\lambda}^{n+1}$ en fonction de $\delta(\mathbf{u}^{n+1})$:

$$\tilde{\lambda}^{n+1} = \delta t A_3^{-1} (\mathcal{F}_4 - C B_1 \delta(\mathbf{u}^{n+1})) \quad (3.42)$$

Par suite, nous obtenons à l'aide de la troisième ligne du système matriciel, l'expression de $\delta(\mathbf{u}^{n+1})$ en fonction de p^{n+1} , grâce à la substitution de $\tilde{\lambda}^{n+1}$ par l'expression (3.42) :

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{u}^{n+1}) &= (A_2 + C\delta t {}^2B_1^t A_3^{-1} B_1)^{-1} \left(\mathcal{F}_3 - \delta t \hat{B}_2^t p^{n+1} + \delta t {}^2B_1^t A_3^{-1} \mathcal{F}_4 \right) \\ &:= -\delta t \mathcal{A}^{-1} \hat{B}_2^t p^{n+1} + \tilde{\mathcal{F}}\end{aligned}\tag{3.43}$$

car l'opérateur \mathcal{A} est inversible, $CB_1^t A_3^{-1} B_1$ étant positif.

La première équation du système matriciel nous fournit l'expression de \mathbf{u}^{n+1} en fonction de p^{n+1} :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{n+1} &= \delta t A_1^{-1} B_1^t p^{n+1} + \delta t A_1^{-1} \mathcal{F}_1 \\ &:= \delta t A_1^{-1} B_1^t p^{n+1} + \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}\end{aligned}\tag{3.44}$$

Il nous reste à substituer, dans la deuxième équation du système "matriciel", $\delta(\mathbf{u}^{n+1})$ par son expression en fonction de p^{n+1} (3.43) ainsi que \mathbf{u}^{n+1} en fonction de p^{n+1} pour obtenir une évaluation de p^{n+1} :

$$p^{n+1} = -\frac{1}{\delta t} (B_1 A_1^{-1} B_1^t + B_2 \mathcal{A}^{-1} \hat{B}_2^t)^{-1} \mathcal{F}_2 + B_1 \tilde{\tilde{\mathcal{F}}} - B_2 \tilde{\mathcal{F}}\tag{3.45}$$

car, l'opérateur $B_1 A_1^{-1} B_1^t + B_2 \mathcal{A}^{-1} \hat{B}_2^t$ est inversible, grâce à la condition inf-sup sur $b_1(\cdot, \cdot)$.

A ce stade, nous pouvons faire quelques commentaires. Tout d'abord, nous constatons que ces systèmes d'équations ressemblent beaucoup, dans leur forme, à des systèmes d'équations de Navier-Stokes sur les variables (\mathbf{u}, p) et $(\delta(\mathbf{u}), \tilde{\lambda})$ couplées. De plus, il apparaît possible d'obtenir des solutions aux équations (3.36)-(3.39), et ce à partir d'une méthode d'Uzawa. Cette technique étant particulièrement utilisée pour la résolution des équations de Navier-Stokes classiques, cela ne fait, de plus, que renforcer l'idée de similitude entre nos équations d'écoulement d'un mélange de deux fluides et les dites équations de Navier-Stokes.

L'introduction de la variable $\tilde{\lambda}$ dans les équations d'écoulement proposées présente un avantage important : par construction, $\tilde{\lambda}$ est un réel quelconque, c'est-à-dire ne subit aucune contrainte, contrairement aux taux de présence

α_i , dont nous rappelons qu'ils doivent se situer entre 0 et 1. Du coup, la résolution numérique de ces nouvelles équations d'écoulement n'en est que plus facile. Ensuite, il est tout à fait possible de reconstruire, à partir de la valeur $\tilde{\lambda}$ calculée, les taux de présence α_i satisfaisant les diverses contraintes évoquées : il nous suffit de réutiliser la définition de $\tilde{\lambda}$ en fonction des taux de présence (rappel : $\tilde{\lambda} := (\ln(\alpha_1) - \ln(\alpha_2)) / C$) et de noter que la fonction introduite est une bijection des réels vers le segment ouvert $(0, 1)$. Le fait que les équations proposées nous garantissent que les taux de présence α_i ne peuvent jamais valoir 1 ou 0 est également un point important : ceci nous assure de ne jamais rencontrer la situation de phase évanescence, et par la même, de tomber dans les difficultés discutées un peu plus haut.

3.4 Comparaison avec le modèle deux pressions de Neptune.

Le modèle d'écoulement diphasique étudié dans le projet Neptune (cf. les articles [1],[21],[34],[35], [33]), est un modèle dit à deux pressions : chacun des fluides i possède une pression p_i qui lui est propre. Les équations qui résulte de ce modèle sont les suivantes, lorsqu'il n'y a ni terme source de transfert de masse, ni terme de diffusion :

$$\partial_t \alpha_i + \mathbf{v}^{\text{int}} \cdot \nabla \alpha_i = (-1)^{i+1} \beta (p_1 - p_2) \quad (3.46)$$

$$\partial_t (\alpha_i \rho_i) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i) = 0 \quad (3.47)$$

$$\partial_t (\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) + \nabla (\alpha_i p_i) - p^{\text{int}} \nabla \alpha_i = \alpha_i \rho_i \mathbf{g} \quad (3.48)$$

$$\partial_t (\alpha_i E_i) + \nabla \cdot (\alpha_i (E_i + p_i) \mathbf{u}_i) + p^{\text{int}} \partial_t \alpha_i = \Gamma_i \mathbf{v}^{\text{int}} \quad (3.49)$$

où E_i désigne l'énergie totale du fluide i , où β est un paramètre de relaxation et où \mathbf{v}^{int} , p^{int} désignent respectivement la vitesse et la pression interfaciales du modèle définies.

Ces dernières sont d'ailleurs définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{\text{int}} &:= \mu \mathbf{u}_1 + (1 - \mu) \mathbf{u}_2 \\ p^{\text{int}} &:= \frac{(1 - \mu) a_1 p_1 + \mu a_2 p_2}{(1 - \mu) a_1 + \mu a_2} \end{aligned}$$

où les a_i sont des paramètres dont les expressions sont données dans [1] et μ est tel que :

$$\begin{aligned}\mu &= 0 \text{ ou } \mu = 1 \\ \mu &= \frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho}\end{aligned}$$

Dans la suite, nous supposons que les conditions d'écoulement sont telles que les équations d'énergie (3.49) ne sont pas nécessaires pour fermer le système d'équation (3.46) - (3.48).

Ce qui nous intéresse est de montrer les similitudes entre ce modèle à deux pressions et le nouveau modèle proposé précédemment. Remarquons que sous l'hypothèse d'absence de transfert de masse, les équations de masse du modèle Neptune et les équations (3.2) de notre modèle sont identiques, si bien qu'en effectuant sur (3.47) les manipulations décrites dans les premiers paragraphes, nous retombons sur nos équations de masse (3.23)-(3.25) en \mathbf{u} et $\delta(\mathbf{u})$.

Les équations de quantité de mouvement du modèle Neptune (3.48) diffèrent des équations initiales (3.3) par les termes suivants :

$$\nabla(\alpha_i p_i) - p^{int} \nabla \alpha_i = \alpha_i \nabla p_i + (p_i - p^{int}) \nabla \alpha_i$$

Ainsi, si nous effectuons la somme des équations (3.48) afin d'obtenir une équation de quantité de mouvement pour la variable \mathbf{u} , nous obtenons à nouveau l'équation (3.22), à ceci près que le terme $\frac{1}{\rho} \nabla p$ est remplacé par :

$$\frac{1}{\rho} \sum_i (\nabla(\alpha_i p_i) - p^{int} \nabla \alpha_i) = \frac{1}{\rho} \nabla \left(\sum_i \alpha_i p_i \right) \quad (3.50)$$

De même, en effectuant des manipulations analogues pour obtenir une équation de quantité de mouvement sur $\delta(\mathbf{u})$, nous obtenons avec le modèle Neptune, la relation (3.24) où les termes en $\frac{1}{\rho_{\#}} \nabla p$ et $\frac{C\rho}{\rho_1 \rho_2} \nabla \lambda$ sont remplacés respectivement par :

$$\frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 - \frac{1}{\rho_1} \nabla p_1 \quad (3.51)$$

$$\frac{\alpha_2 \rho_2 (p_1 - p^{int}) + \alpha_1 \rho_1 (p_2 - p^{int})}{\rho_1 \rho_2} \nabla \lambda \quad (3.52)$$

Considérons le cas où le paramètre de relaxation β tend vers l'infini. Ceci contraint le modèle Neptune à converger vers un modèle à une pression p , et dans ce cas :

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow p \\ p_2 &\rightarrow p \\ p^{int} &\rightarrow p \end{aligned}$$

Dès lors, le terme (3.50) se comporte à la limite comme suit :

$$\frac{1}{\rho} \sum_i \nabla(\alpha_i p_i) - p^{int} \nabla \alpha_i \rightarrow \frac{1}{\rho} \nabla p$$

De même, à la limite, les termes (3.51) et (3.52) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 - \frac{1}{\rho_1} \nabla p_1 &\rightarrow \frac{1}{\rho\#} \nabla p \\ \frac{\alpha_2 \rho_2 (p_1 - p^{int}) + \alpha_1 \rho_1 (p_2 - p^{int})}{\rho_1 \rho_2} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc exactement les équations du modèle d'écoulement diphasique proposé précédemment, lorsque la constante C tend vers 0.

Enfin, il ne nous reste plus qu'à comparer les équations de transport de phase du modèle Neptune (3.46) des équations de transport de phase de notre modèle (3.15). Nous ne nous intéresserons qu'à la vitesse de transport du taux de présence α_i : la vitesse de transport \mathbf{v}^{int} prônée par le modèle Neptune est identique à la vitesse \mathbf{u}_λ proposée dans ce mémoire si et seulement si le paramètre μ est égal à α_2 . Or dans l'article de référence [1], les valeurs proposées pour μ ne coïncident jamais avec α_2 : c'est là une différence importante entre les deux modèles.

3.5 Conclusion.

Nous avons pu montrer que dans le cas d'écoulement à bas Mach de deux fluides quasi-compressibles, les équations modélisant le dit écoulement peuvent se mettre sous la forme générique suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \mathbf{g} + \mathbf{f}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \delta(\mathbf{u}) + \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} \nabla \tilde{\lambda} &= \delta(\rho) \mathbf{g} + \mathbf{f}_2 \\ C \nabla \cdot \delta(\mathbf{u}) + \partial_t \tilde{\lambda} + \mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla \tilde{\lambda} &= 0\end{aligned}$$

où \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont des estimations supposées connues des termes suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &\approx -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\rho} \delta(\mathbf{u}) \otimes \delta(\mathbf{u})) \\ \mathbf{f}_2 &\approx -(\mathbf{u}_\lambda \cdot \nabla) \delta(\mathbf{u}) - (\delta(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha\end{aligned}$$

Nous avons interprété, ensuite, ces systèmes d'équations comme des systèmes d'équations de Navier-Stokes emboîtées via des termes de couplage : les solutions de ces équations, dans une situation d'équilibre monodimensionnel, sont très régulières mais possèdent des taux d'accroissement locaux très grands et donc des variations locales importantes.

Ce sont ces équations que nous cherchons à résoudre numériquement : lors de leur résolution à l'aide d'un système approché, il n'est pas possible de capter exactement ces variations locales : la solution numérique calculée n'étant pas strictement égale à la solution physique, l'erreur commise se propage au calcul des vecteurs vitesses discrets qui du coup ne sont plus égaux aux vecteurs vitesses continus (nuls, par hypothèse). Les erreurs numériques sur les vitesses, appelées courants parasites, ainsi produites font que numériquement, nous ne sommes pas à l'équilibre physique.

Remarquons dès à présent que l'erreur numérique introduite dépend très fortement des espaces discrets utilisés. En effet, les erreurs numériques (et donc les courants parasites) sont d'autant plus importantes que les espaces de polynômes contenus dans les espaces de discrétisation sont de faibles degrés : aussi, si nous ne pouvons empêcher l'existence d'erreurs, nous pouvons tout de même essayer de les diminuer au maximum en augmentant le degré des polynômes contenus dans nos espaces de discrétisation. Ce point particulier fait l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 4

Un nouvel espace de pression.

4.1 Introduction.

Dans le chapitre (**Ch 3**), nous avons souligné l'importance de travailler sur des discrétisations contenant des polynômes de degré élevé. Ce chapitre est destiné, dans un premier temps, à illustrer plus en détail et au travers d'exemples simples, l'importance de cette notion. Ensuite, nous présenterons de nouvelles discrétisations dans le but de satisfaire ce nouveau critère d'exigence et montrerons leurs propriétés mathématiques les plus remarquables.

4.2 Discrétisations et courants parasites.

Qu'entendons-nous par courants parasites? Prenons le cas particulier d'une équation aux dérivées partielles donnée et dont la solution est une fonction u de valeur nulle. L'expression courant parasite, intimement liée à la notion de discrétisation, signifie simplement que l'erreur commise entre la solution u et son approximation discrète, notée u_h , obtenue par discrétisation de ces mêmes EDP, est strictement non nulle : u_h est donc différent de u . Par abus de langage, c'est cette erreur que nous appelons courant parasite (voir aussi [18]).

Pour illustrer plus clairement ce propos, prenons l'exemple simple des

équations de Darcy suivantes, où les inconnues sont \mathbf{u} et p :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

Une formulation variationnelle possible de (4.1) est de rechercher \mathbf{u} dans \mathbf{L}^2 et p dans $H^1 \cap L_0^2$ solutions de :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2 \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in H^1 \cap L_0^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

en ayant posé :

$$b(\mathbf{v}, q) := (\nabla q, \mathbf{v}) \quad \forall q \in H^1 \cap L_0^2, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2$$

Nous considérerons par la suite que le terme source \mathbf{f} s'écrit sous la forme particulière $\mathbf{f} = \nabla \Phi$, où Φ est une fonction donnée supposée très régulière. Dès lors, dans ce cas précis, il devient évident que la solution de (4.2) est donnée par :

$$\mathbf{u} = 0, \quad p = \Phi$$

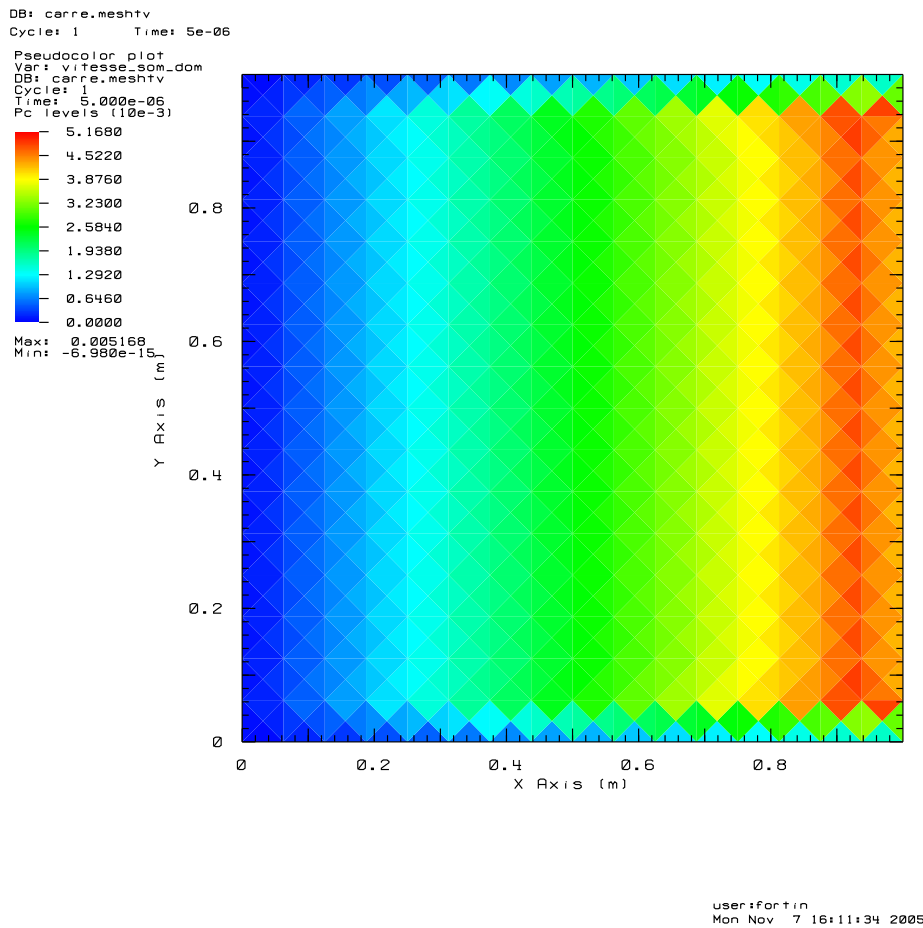
Fixons dorénavant des espaces discrets \mathbf{X}_h et M_h approchant respectivement l'espace des vitesses continues et l'espace des pressions continues, et discrétisons le système (4.2). Nous obtenons un problème (discret) dont les solutions \mathbf{u}_h et p_h doivent vérifier :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in M_h \end{aligned} \quad (4.3)$$

où nous avons $b_h(.,.) \approx b(.,.)$, et où $b_h(.,.)$ vérifie également des conditions de continuité et une inégalité de type inf-sup.

Sous l'hypothèse que toutes les conditions requises pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution à (4.3) soient effectivement vérifiées, il est très probable, pour peu que $\Phi \notin M_h$, que nous obtenons $p_h \neq \Phi$, donc $p_h \neq p$ et en conséquence $\mathbf{u}_h \neq \mathbf{u} = 0$.

Mathématiquement, l'existence d'une telle erreur vient du fait que l'espace \mathbf{L}^2 n'est pas correctement décomposé en la somme de l'image d'un gradient



TAB. 4.1 – Module des courants parasites avec $\mathbf{f} = \nabla\phi$ et $\phi = x^2$.

discret et l'image d'un rotationnel discret. En effet, le système d'équations (4.3) peut se réécrire sous la forme des deux équations de projection sui-

vantes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h^\perp \\ \mathbf{V}_h &:= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \mid b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h\} \end{aligned}$$

L'espace \mathbf{V}_h s'interprétant comme l'ensemble des vitesses à divergence discrète nulle (et donc moralement comme l'ensemble des vitesses images d'un rotationnel discret) et son orthogonal comme l'ensemble des vitesses images d'un gradient discret, l'existence de courants parasites signifie qu'il existe un angle entre \mathbf{V} -ensemble des vitesses à divergence continue nulle et \mathbf{V}_h , qui tend à être d'autant plus grand que M_h est petit.

Cette erreur est toutefois estimable facilement. Ainsi, et toujours sous les mêmes hypothèses, il nous est possible de montrer que, dans ce cas particulier :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| = \|\mathbf{u}_h\| = O(h^k) \quad (4.4)$$

où h est le pas du maillage et k le degré des polynômes contenus dans M_h .

En effet, l'analyse d'erreur classique nous permet d'obtenir la série d'inégalités suivantes :

$$\|\mathbf{u}_h\|^2 = (\nabla(\Phi - q_h), \mathbf{u}_h) \leq |\Phi - q_h|_1 \|\mathbf{u}_h\| \quad \forall q_h \in M_h$$

Or par hypothèse, M_h contient les polynômes de degré k , d'où la majoration :

$$\|\mathbf{u}_h\| \leq ch^k |\Phi|_{k+1}$$

où c est une constante indépendante du maillage.

La situation est pire encore, dans le cas d'écoulements instationnaires. Pour le comprendre, considérons les équations de Darcy continues et discrètes correspondantes :

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \epsilon(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p(t)) &= (\nabla \Phi, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2 \\ b(\mathbf{u}(t), q) &= 0 \quad \forall q \in H^1 \cap L_0^2 \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_t \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h) + \epsilon(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h(t)) &= (\nabla \Phi, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \\
b_h(\mathbf{u}_h(t), q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in M_h \\
\mathbf{u}_h|_{t=0} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

où $\epsilon > 0$ est une constante quelconque fixé.

Si dans le cas continu, la vitesse \mathbf{u} reste identique à la condition initiale, il n'en est, une fois de plus, pas de même pour le cas discret. En effet, si nous intégrons en fonction du temps les équations de Darcy instationnaires discrètes, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h) + \int_{s=0}^t \epsilon(\mathbf{u}_h(s), \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h(s)) ds &= t(\nabla \Phi, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \\
b_h(\mathbf{u}_h(t), q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in M_h \\
\mathbf{u}_h|_{t=0} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

D'où en remplaçant \mathbf{v}_h par le vecteur $\mathbf{u}_h(t)$, nous obtenons l'équation d'énergie :

$$\|\mathbf{u}_h\|^2 + \epsilon \int_{s=0}^t \|\mathbf{u}_h\|^2(s) ds = t(\nabla(\Phi - q_h), \mathbf{u}_h)$$

Et donc également :

$$\|\mathbf{u}_h\|^2 \leq t(\nabla(\Phi - q_h), \mathbf{u}_h)$$

Ce qui nous donne une croissance linéaire en temps de l'erreur suivant la formule :

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{t})\| = \|\mathbf{u}_h(\mathbf{t})\| = O(th^k)$$

Il est donc très important de limiter au maximum l'impact de ces courants parasites, sur nos solutions discrètes.

Pour maîtriser ces énergies parasites, une approche classique consisterait alors à introduire un terme de diffusion supplémentaire dans les équations (4.3) avec un coefficient de diffusion adapté, mais cette technique modifiée fait les équations discrètes, si bien que nous n'approchons plus exactement

le système d'équations initiales.

Une autre solution qui vient à l'esprit pour limiter la présence de courant parasite, serait de considérer des espaces de vitesses discrètes \mathbf{X}_h contenant des polynômes de degré $k \geq 2$, et des espaces de pressions discrètes M_h contenant des polynômes de faible degré (0 ou 1). En effet, nous pourrions croire qu'en augmentant la taille de l'espace \mathbf{X}_h , nous serions plus consistant avec l'espace des vitesses continues et par conséquent, plus consistant avec l'espace \mathbf{V} des vitesses continues à divergence nulle. Or un exemple très simple montre qu'une telle idée n'est pas viable. En effet, soit (\mathbf{u}, p) solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &:= \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Les solutions sont évidemment données par :

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}; \quad p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Dans ce cas particulier, le gradient de pression compense exactement l'opérateur de convection appliqué à \mathbf{u} . Or lors de la discrétisation, l'opérateur de convection discret $(\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h$ est un polynôme de degré $2k - 1$: comme la pression discrète est de bas degré, son gradient discret ne compensera pas exactement l'opérateur de convection discret. En conséquence, la vitesse discrète \mathbf{u}_h ne pourra pas être égale à la solution \mathbf{u} : il y a création de courants parasites, même dans le cas où l'espace \mathbf{X}_h contient des polynômes de degré élevé.

Une autre approche consisterait à s'appuyer sur la remarque suivante : nous avons vu à l'aide de (4.4) que les courants parasites ont leurs énergies qui dépendent directement du degré des polynômes contenus dans M_h . Plus celui-ci est élevé, plus l'erreur commise est petite et donc plus les courants parasites sont négligeables. Il peut donc être intéressant de forcer M_h à contenir des polynômes de haut degré, sachant qu'en contrepartie la condition inf-sup sera plus difficile à vérifier et établir.

4.3 Propriétés en dimension 2.

Ce paragraphe consiste à démontrer les propriétés particulières de l'espace discret des pressions lorsque nous travaillons en dimension 2. Pour cela, nous allons donner quelques définitions et/ou rappels, qui nous serviront ensuite dans un certains nombres de démonstrations.

4.3.1 Définitions.

Nous allons utiliser quelques espaces discrets particuliers. Nous appellerons dans la suite $P_k(K)$, l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k sur l'élément K du maillage \mathcal{T}_h .

Ensuite, nous définissons l'espace M_h^0 selon la relation suivante, où K désigne un élément quelconque du maillage \mathcal{T}_h :

$$M_h^0 := \{q \in L^2 \mid \forall K, q|_K \in P_0(K)\} \quad (4.5)$$

Un élément de cet espace sera noté q_h^0 et appartient évidemment à l'espace L^2 .

Nous utiliserons également un second espace discret de pression, noté M_h^k et dont nous donnons l'expression :

$$M_h^k := \{q \in \mathcal{C}^0 \mid \forall K, q|_K \in P_k(K)\} \quad (4.6)$$

Un élément de cet espace sera noté q_h^k et par définition de M_h^k , q_h^k est un élément de H^1 .

En dimension deux, l'espace discret de pression que nous utilisons effectivement dans l'ensemble des chapitres de cette thèse, est l'espace M_h dont l'expression découle directement de M_h^0 et M_h^1 . Ainsi, nous avons la relation :

$$M_h := (M_h^0 + M_h^1) \cap L_0^2 \quad (4.7)$$

Tout élément de M_h sera noté q_h dans la suite de ce chapitre, dont la décomposition selon $M_h^0 \cap L_0^2$ et $M_h^1 \cap L_0^2$ peut s'écrire :

$$q_h := q_h^0 + q_h^1 \quad q_h^0 \in M_h^0 \cap L_0^2; \quad q_h^1 \in M_h^1 \cap L_0^2 \quad (4.8)$$

Remarquons enfin que q_h est seulement un élément de L^2 .

Rappelons maintenant l'expression de la forme bilinéaire de divergence discrète $b_h(\cdot, \cdot)$, et qui est définie sur $\mathbf{X}_h \times M_h$ par :

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) := \sum_K \int_K (\mathbf{v}_h \nabla q_h^1 - q_h^0 \nabla \cdot \mathbf{v}_h) d\Omega \quad (4.9)$$

Cette forme bilinéaire vérifie une condition inf-sup uniforme de type Babuška-Brezzi dont la démonstration est donnée dans [14]. De plus, elle vérifie une condition d'uniforme continuité démontrée également dans [14]. Nous pouvons toutefois montrer qu'elle possède des propriétés de continuité plus forte encore :

Théorème 4.3.1 *La forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{X}_h \times (M_h^0 + M_h^k) \cap L_0^2$. Plus exactement, il existe une constante c , indépendante du pas du maillage h , telle que l'on ait :*

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in (M_h^0 + M_h^k) \cap L_0^2 \quad |b_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq c \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\| \quad (4.10)$$

Preuve du théorème:

La démonstration suivante s'appuie sur des arguments similaires à ceux développés par Bernardi et Hecht dans [4].

Soit donc un vecteur \mathbf{v}_h de \mathbf{X}_h quelconque fixé, et un élément q_h de $(M_h^0 + M_h^k) \cap L_0^2$ quelconque fixé. Nous écrirons également cet élément sous la forme :

$$q_h := q_h^0 + q_h^k; \quad q_h^0 \in M_h^0; \quad q_h^k \in M_h^k$$

Ainsi, commençons par intégrer par partie la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$:

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = - \sum_K \int_K \nabla \cdot \mathbf{v}_h q_h d\Omega + \sum_K \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K q_h^k d\sigma \quad (4.11)$$

avec \mathbf{n}_K vecteur normal extérieur à l'élément K du maillage.

Dans un premier temps, nous voyons que le premier terme de l'addition (4.11) se prête facilement à la majoration escomptée, grâce à une majoration de type Cauchy-Schwartz :

$$\sum_K \int_K \nabla \cdot \mathbf{v}_h q_h d\Omega \leq \sum_K \|\mathbf{v}_h\|_{1,K} \|q_h\|_K \leq \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\| \quad (4.12)$$

Il ne nous reste donc plus qu'à majorer le second terme de l'addition (4.11), pour pouvoir conclure. Or, nous pouvons écrire :

$$\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K q_h^k d\sigma = \sum_K \sum_{f \in K} \int_f [\mathbf{v}_h] q_h^k d\sigma \quad (4.13)$$

avec f est une arête en dimension 2 ou une face en dimension 3 quelconque du maillage \mathcal{T}_h et K_1 et K_2 représentant les deux éléments d'arête/face commune f :

$$[\mathbf{v}_h] = (\mathbf{v}_{h,K_1} - \mathbf{v}_{h,K_2}) \cdot \mathbf{n}_{K_1} \quad (4.14)$$

Par définition de \mathbf{X}_h et de $[\mathbf{v}_h]$, ce dernier s'annule au milieu de l'arête/face f . Dès lors, si nous notons $q_h^{k,f}$ la valeur moyenne de q_h^k le long de l'arête/face f , nous pouvons écrire :

$$\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K q_h^k d\sigma = \sum_K \sum_{f \in K} \int_f [\mathbf{v}_h] (q_h^k - q_h^{k,f}) d\sigma \quad (4.15)$$

Cette dernière équation peut se réécrire sous une forme plus appropriée :

$$\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K q_h^k d\sigma = \sum_K \sum_{f \in \partial K} \int_f (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^f) \cdot \mathbf{n}_K q_h^k d\sigma \quad (4.16)$$

avec \mathbf{v}_h^f moyenne du vecteur \mathbf{v}_h sur l'arête/face f .

Nous utilisons ensuite la fonction affine qui envoie un élément K du maillage vers l'élément de référence \hat{K} (le tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$), et l'arête/face f de K vers l'arête/face \hat{f} de \hat{K} . Grâce à l'équivalence des normes en dimension finie, l'intégrale précédente est alors majorée par :

$$\left| \int_f (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^f) \cdot \mathbf{n}_K q_h^k d\sigma \right| \leq c|f| \int_{\hat{f}} |\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^f| |\widehat{q}_h^k| d\sigma \leq |f| \|\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^f\|_{1,K} \|\widehat{q}_h^k\|_K \quad (4.17)$$

avec $|f|$ mesure de l'arête/face f , et c une constante ne dépendant que de \hat{K} .

Définissons pour les besoins de cette démonstration, l'espace discret $\hat{\mathbf{X}}$ comme suit :

$$\hat{\mathbf{X}} := \{ \widehat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{P}_1(\hat{K}) \mid \int_{\hat{f}} \widehat{\mathbf{v}}_h d\sigma = 0; \hat{f} \text{ arête/face de } \hat{K} \} \quad (4.18)$$

Compte tenu de la discrétisation adoptée pour la vitesse, il nous apparaît que le vecteur $\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}} - \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{f}}$ appartient à $\widehat{\mathbf{X}}$. Or à cause de l'injection compacte de $\mathbf{H}^1(\widehat{K})$ dans $\mathbf{L}^2(\widehat{K})$ et du lemme de Peetre-Tartar, la semi-norme $|\cdot|_{1,\widehat{K}}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{1,\widehat{K}}$ sur $\widehat{\mathbf{X}}$. Nous avons donc l'équation :

$$\left| \int_f (\mathbf{v}_{\mathbf{h}} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{f}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{K}} q_h^k d\sigma \right| \leq |f| \int_{\widehat{f}} |\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}} - \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{f}}| |\widehat{q}_h^k| d\sigma \leq c |f| \|\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}\|_{1,K} \|\widehat{q}_h^k\|_K \quad (4.19)$$

Par suite, l'utilisation de la transformation affine envoyant \widehat{K} sur K , nous autorise à écrire :

$$\left| \int_f (\mathbf{v}_{\mathbf{h}} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{f}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{K}} q_h^k d\sigma \right| \leq c \|\mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_{1,K} \|q_h^k\|_K \quad (4.20)$$

Dès lors, le second terme de (4.11) que nous cherchions à majorer uniformément en fonction des normes $\|\cdot\|_h$ et $\|\cdot\|$, s'évalue par :

$$\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{v}_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{K}} q_h^k d\sigma \leq c \sum_K \|\mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_{1,K} \|q_h^k\|_K \leq c \|\mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h \|q_h^k\| \quad (4.21)$$

avec l'utilisation d'une inégalité de type Cauchy-Schwartz. \square

Voici un schéma représentant les degrés de liberté de l'élément fini $M_h^0 + M_h^1$ en dimension deux (les cercles sont associés à la pression et les carrés à la vitesse) :

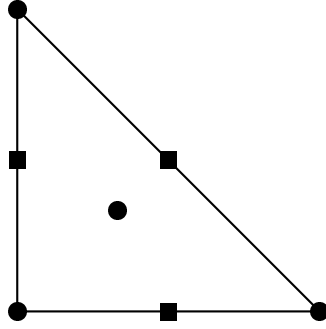
Nous aurons également besoin de définir les espaces vectoriels suivants :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{t}} := \{\mathbf{v}_{\mathbf{h}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{h}} \mid \mathbf{v}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_f) \cdot \mathbf{n}_f = 0 \quad \forall f\} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{X}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}} := \{\mathbf{v}_{\mathbf{h}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{h}} \mid \mathbf{v}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_f) \times \mathbf{n}_f = 0 \quad \forall f\} \quad (4.23)$$

avec f arête/face quelconque du maillage \mathcal{T}_h , \mathbf{n}_f un vecteur normal à la face f et \mathbf{x}_f barycentre de l'arête/face f .

$\mathbf{X}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{t}}$ représente l'ensemble des vecteurs vitesse tangents aux centres des faces des éléments K de notre maillage, tandis que $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{n}}$ représente l'ensemble des vecteurs vitesse normaux aux centres des faces des éléments K .

TAB. 4.2 – Degrés de liberté associé à l'élément $P_1\text{NC}/P_1 + P_0$.

4.3.2 Meilleure décomposition de L^2 .

Nous rappelons la définition du noyau \mathbf{V}_h de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$:

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \mid b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h\}$$

Le noyau \mathbf{V}_h de $b_h(\cdot, \cdot)$ possède alors une propriété remarquable, due à la forme particulière de $b_h(\cdot, \cdot)$ et aux formules d'intégrations numériques. En effet, le théorème suivant nous donne :

Théorème 4.3.2 *Soit \mathbf{v}_h un élément quelconque \mathbf{V}_h . Alors, \mathbf{v}_h vérifie :*

$$\sum_K \int_K \nabla q_h^2 \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall q_h^2 \in M_h^2 \quad (4.24)$$

Preuve du théorème:

Selon les hypothèses du théorème, nous écrivons grâce à une intégration par partie, avec q_h^2 quelconque fixé :

$$\sum_K \int_K \nabla q_h^2 \mathbf{v}_h d\Omega = \sum_K \int_{\partial K} q_h^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h d\sigma \quad (4.25)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal extérieur à l'élément K du maillage.

En effet, \mathbf{v}_h appartenant à \mathbf{V}_h , il est à divergence nulle sur chaque élément K . Mais, toujours grâce à une intégration par partie, ce vecteur vérifie également :

$$\sum_K \int_{\partial K} q_h^1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h d\sigma = 0 \quad \forall q_h^1 \in M_h^1 \quad (4.26)$$

Ainsi, il nous est possible d'introduire dans la relation (4.25) un élément quelconque q_h^1 de M_h^1 . Choisissons l'élément q_h^1 de sorte que pour tout sommet s du maillage, nous ayons :

$$q_h^1(s) = q_h^2(s) \quad (4.27)$$

Nous notons dorénavant $r_h := q_h^2 - q_h^1$. Cette fonction est un polynôme de degré 2 par élément, continu le long des arêtes du maillage, et qui s'annule en chaque sommet s du maillage. Par conséquent, l'équation (4.25) peut s'écrire :

$$\sum_K \int_K \nabla q_h^2 \mathbf{v}_h d\Omega = \sum_K \int_{\partial K} r_h \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h d\sigma \quad (4.28)$$

Le vecteur \mathbf{v}_h étant continu au milieu des arêtes par définition de \mathbf{X}_h et r_h étant continu le long de ces mêmes arêtes, nous pouvons modifier l'expression ci-dessus comme suit :

$$\sum_K \int_K \nabla q_h^2 \mathbf{v}_h d\Omega = \sum_K \sum_{a \in K} \int_a r_h \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a) d\sigma \quad (4.29)$$

avec \mathbf{v}_h^a qui représente la valeur de \mathbf{v}_h au milieu d'une arête a du maillage.

Nous remarquons par la suite que l'intégrande du terme ci-dessus est un polynôme de degré 3, qui s'annule par construction, aux sommets et au milieu de l'arête a . Or pour tout polynôme p_3 de degré 3, la formule d'intégration numérique de Simpson nous donne :

$$\int_a p_3 d\sigma = \frac{|a|}{6} (p_3(s1_a) + 4p_3(m_a) + p_3(s2_a)) \quad (4.30)$$

avec $|a|$ longueur de l'arête a ; $s1_a, s2_a$ sommets de a et m_a milieu de a .

Par conséquent, pour toute arête a , nous avons :

$$\int_a r_h \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a) d\sigma = 0 \quad (4.31)$$

Ce qui nous permet de conclure sur l'énoncé du théorème :

$$\sum_K \int_K \nabla q_h^2 \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad (4.32)$$

□

Remarque 4.3.1 *Nous pouvons d'ores et déjà remarquer la chose suivante : dire que $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ vérifie la relation (4.24), signifie également que l'équation suivante (obtenue par intégration par partie) est vérifiée*

$$\sum_a \int_a q_h^2 \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_a d\sigma = 0 \quad \forall q_h^2 \in M_h^2$$

où a est une arête du maillage \mathcal{T}_h , et \mathbf{n}_a un vecteur unitaire normal à l'arête a .

D'une certaine façon, nous pénalisons ainsi les discontinuités de la vitesse \mathbf{v}_h par des polynômes de degré deux.

L'interprétation de ce théorème est intéressante : celui-ci nous annonce qu'en fait, l'espace discret de pression M_h introduit, contient implicitement les polynômes de degré 2. Selon l'analyse présentée dans le premier paragraphe de ce chapitre, cela revient à dire que l'erreur commise sur les courants parasites sera nulle pour des termes sources s'écrivant comme le gradient d'un polynôme de degré 2 sur Ω et au moins d'ordre h^3 dans tous les autres cas.

Nous allons détailler cela au travers des théorèmes suivants issues des travaux de Philippe Emonot et [14] :

Théorème 4.3.3 *Soit ϕ un élément quelconque fixé de $H^4 \cap L_0^2$ et tel que $|\phi|_4$ soit non nul.*

Alors, quel que soit \mathbf{v}_h dans \mathbf{V}_h , noyau de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$, nous avons l'estimation suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \phi d\Omega \leq c(\phi, \Omega) h^3 \|\mathbf{v}_h\|_h$$

où $c(\phi, \Omega)$ ne dépend que de la fonction ϕ et de Ω .

Preuve du théorème:

Soit un vecteur \mathbf{v}_h de \mathbf{V}_h quelconque fixé. Soit ϕ_3 le projeté en norme H^3 de ϕ sur l'espace des éléments finis P_3 de Lagrange, noté M_h^3 (définition analogue à M_h^2 à ceci près que les éléments de M_h^3 sont des polynômes de degré trois par élément K du maillage).

Dès lors, nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \phi_3 \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (\phi - \phi_3) \, d\Omega$$

A l'aide du théorème (**Th** 4.3.1), il nous est possible de majorer le premier terme du membre de gauche de l'équation précédente et nous obtenons alors la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \phi_3 \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (\phi - \phi_3) \, d\Omega &\leq \|\mathbf{v}_h\|_h \inf_{\tilde{q}_h \in M_h^2} \|\phi_3 - \tilde{q}_h\| \\ &+ \|\mathbf{v}_h\| \|\phi - \phi_3\|_1 \\ &\leq c(\Omega) h^3 (|\phi|_3 + |\phi|_4) \|\mathbf{v}_h\|_h \end{aligned}$$

Le théorème est démontré en posant :

$$c(\phi, \Omega) := c(\Omega) (|\phi|_3 + |\phi|_4)$$

□

Théorème 4.3.4 *Soit ϕ un élément quelconque fixé de $H^4 \cap L_0^2$ et tel que $|\phi|_4$ soit non nul. Soit \mathbf{u}_h et p_h deux éléments de, respectivement, \mathbf{X}_h et M_h solutions des équations de Stokes particulières suivantes :*

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\nabla \phi, \mathbf{v}_h) \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

où \mathbf{v}_h et q_h sont des éléments quelconques de \mathbf{X}_h et M_h et où nous avons également posé :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \nu \sum_K (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_K \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \tag{4.34}$$

Alors, nous avons les propriétés de superconvergence suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h &\leq c(\phi) h^5 \\ \|p_h - \phi\| &\leq c(\phi) h^2 \end{aligned}$$

où $c(\phi)$ ne dépend que de la fonction ϕ .

Preuve du théorème:

Soit q_h^2 un élément quelconque fixé de M_h^2 . Soit M_h^ϕ l'ensemble suivant :

$$M_h^\phi := \{q_h^\phi \in C^0 \mid \exists q_h^2 \in M_h^2; \forall K, \exists a_K \in R \mid q_h^\phi|_K := q_h^2|_K + a_K \prod_{i=1}^d \lambda_i; (\nabla q_h^\phi, \nabla \phi) = 0\}$$

où les λ_i sont les fonctions de formes du P_1 sur l'élément K , d la dimension du problème.

Par définition de $b_h(\cdot, \cdot)$ et comme \mathbf{u}_h appartient à \mathbf{V}_h , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} b_h(\mathbf{u}_h, q_h^\phi) &= \sum_K \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h^\phi \\ &= \sum_K \int_{\partial K} q_h^\phi \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_K \int_{\partial K} q_h^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_K \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h^2 = 0 \end{aligned}$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal et extérieur à K .

Soit \mathbf{V}_d^ϕ , l'espace vectoriel défini par la relation suivante, pour tout q_h^ϕ élément de M_h^ϕ :

$$\mathbf{V}_d^\phi := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2 \mid \int_\Omega \mathbf{w} \nabla \phi \, d\Omega = 0; \int_\Omega \mathbf{w} \nabla q_h^\phi \, d\Omega = 0\}$$

Nous choisissons le vecteur \mathbf{v} de \mathbf{V}_d^ϕ défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &:= \mathbf{u}_h + \alpha \nabla \phi \\ \alpha &:= -\frac{\int_\Omega \mathbf{u}_h \cdot \nabla \phi}{\|\nabla \phi\|^2} \end{aligned}$$

Dès lors, nous avons les relations suivantes avec l'aide du théorème (**Th** 4.3.3) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_h\| &= |\alpha| \|\nabla \phi\| \\ &= \frac{1}{|\phi|_1^2} \left| \int_\Omega \mathbf{u}_h \cdot \nabla \phi \, d\Omega \right| \\ &\leq c(\phi, \Omega) h^3 \|\mathbf{u}_h\|_h \end{aligned}$$

Pour l'estimation en vitesse, il suffit que nous prenions $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans les équations données dans le théorème pour trouver :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \phi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \mathbf{v}) \cdot \nabla (\phi - q_h^\phi) \, d\Omega \end{aligned}$$

Dès lors, l'utilisation d'une inégalité de type Cauchy-Schwartz, nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h^2 &\leq |\phi - q_h^\phi|_1 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}\| \\ &\leq (ch^2|\phi|_3)(c(\phi)h^3\|\mathbf{u}_h\|_h) \\ &\leq c(\phi)h^5\|\mathbf{u}_h\|_h \end{aligned}$$

Il nous reste à établir la convergence en pression. Pour cela, nous utilisons tout d'abord l'inégalité triangulaire classique :

$$\begin{aligned} \|\phi - p_h\| &\leq \|\phi - q_h^1\| + \|p_h - q_h^1\| \\ &\leq \|\phi - q_h^3\| + \|q_h^3 - q_h^1\| + \|p_h - q_h^1\| \end{aligned} \quad (4.35)$$

où q_h^1 est un élément quelconque fixé de M_h^1 et q_h^3 un élément quelconque fixé de M_h^3 .

Ensuite, grâce à la condition inf-sup uniforme vérifiée par la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ et le théorème (**Th** 4.3.1), nous avons la succession de majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \|p_h - q_h^1\| &\leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (\phi - q_h^1) \, d\Omega - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \\ &\leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot (\nabla (\phi - q_h^3) + \nabla (q_h^3 - q_h^1)) \, d\Omega - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \\ &\leq c (|\phi - q_h^3|_1 + \|q_h^3 - q_h^1\| + \|\mathbf{u}_h\|_h) \end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de h .

Dès lors, avec l'inégalité triangulaire (4.35), en choisissant convenablement q_h^3 et q_h^1 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\phi - p_h\| &\leq c(|\phi - q_h^3|_1 + \|\phi - q_h^3\| + \|q_h^3 - q_h^1\| + \|\mathbf{u}_h\|_h) \\ &\leq c(h^3|\phi|_4 + h^4|\phi|_4 + h^2|\phi|_2 + h^5) \\ &\leq c(\phi)h^2 \end{aligned}$$

□

4.3.3 Résultats numériques.

Afin de vérifier ces résultats de superconvergence, nous avons étudié numériquement le comportement des solutions des équations de (4.34) pour différentes fonctions ϕ , sur un domaine d'écoulement Ω carré de côté 1 et une diffusivité égale à 1 également. Plus exactement, nous avons successivement choisi pour ϕ les polynômes x , x^2 , x^3 et x^4 : si pour les deux premiers cas, la convergence en vitesse est immédiate (avec des taux d'erreur de l'ordre de 10^{-30}), les convergences observées pour les autres situations sont résumés dans la série de tableaux suivante :

Pas du maillage (h)	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\ \mathbf{u}_h\ $	2.61e-03	6.69e-05	1.96e-06	5.27e-08
$\ \mathbf{u}_h\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		5.28	5.08	5.22
$\ p_h - \phi\ $	2.53e-02	6.37e-03	1.59e-03	3.98e-04
$\ p_h - \phi\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		1.992	1.998	2.0

TAB. 4.3 – Résultats de convergence avec $\phi = x^3$.

Pas du maillage (h)	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\ \mathbf{u}_h\ $	1.76e-02	4.07e-04	1.12e-05	3.02e-07
$\ \mathbf{u}_h\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		5.43	5.18	5.21
$\ p_h - \phi\ $	3.88e-02	9.83e-03	2.47e-03	6.18e-04
$\ p_h - \phi\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		1.981	1.993	1.998

TAB. 4.4 – Résultats de convergence avec $\phi = x^4$.

Il apparaît sur ces quelques exemples que le taux de convergence mesuré sur la pression, est tout à fait conforme aux résultats théoriques démontrés. Il en est de même pour la vitesse puisque nous présentons des résultats de convergence évalués à partir de la norme \mathbf{L}^2 de la vitesse : pour retrouver des taux de convergence évalué à partir de la norme $\|\cdot\|_h$, tels ceux présentés dans le théorème, il nous faut ôter 1 aux taux retranscrits ici (ceci vient du fait que $\|\mathbf{v}_h\|_h \leq \frac{c}{h}\|\mathbf{v}_h\|$ avec c constante indépendante de h).

Nous avons également mesuré l'erreur (en norme L^2) commise entre la pression discrète calculée p_h et l'interpolée sur M_h , noté $\Pi_h p$, de la pression

exacte p , défini par :

$$\begin{aligned} \forall s \in K; \Pi_h p(s) &= p(s) \\ \int_K \Pi_h p \, dK &= \int_K p \, dK \end{aligned}$$

où s est un sommet de l'élément K du maillage.

Puis, nous en avons profiter pour évaluer son comportement en fonction du pas du maillage h . Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants :

Pas du maillage (h)	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\ p_h - \Pi_h p\ $	8.22e-01	5.35e-02	3.41e-03	2.16e-04
$\ p_h - \Pi_h p\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		3.94	3.97	3.98

TAB. 4.5 – Résultats de convergence avec $\phi = x^3$.

Pas du maillage (h)	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\ p_h - \Pi_h p\ $	1.78	1.22e-01	7.98e-02	5.10e-04
$\ p_h - \Pi_h p\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		3.86	3.93	3.97

TAB. 4.6 – Résultats de convergence avec $\phi = x^4$.

Dans ce cas, nous observons que l'écart entre la pression discrète calculée et l'interpolée de la pression exacte décroît comme h^4 environ, c'est-à-dire plus vite que ne décroît l'erreur entre la pression discrète calculée et la pression exacte (qui est en $O(h^2)$). Nous démontrons un résultat un peu plus faible à l'aide du théorème suivant :

Théorème 4.3.5 *Soit ϕ une fonction de $H^3 \cap L_0^2$. Soit p dans L_0^2 , la pression solution des équations de Stokes suivantes :*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\nabla \phi, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Supposons en outre p suffisamment régulière. Alors, nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$\|p_h - \Pi_h p\| \leq ch^3$$

où c est une constante indépendante de h et p_h est la solution de (4.33).

Preuve du théorème:

Commençons par remarquer que ϕ étant un élément de L_0^2 , nous avons évidemment $p = \phi$ et $\mathbf{u} = 0$.

Grâce à la condition inf-sup uniforme vérifiée par la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times M_h$, nous avons la majoration suivante :

$$\|p_h - \Pi_h p\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, p_h - \Pi_h p)}{\|\mathbf{v}_h\|_h}$$

Par hypothèse, nous savons que p_h vérifie les équations (4.33). En conséquence, nous pouvons écrire :

$$\|p_h - \Pi_h p\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{(\nabla \phi, \mathbf{v}_h) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, \Pi_h p)}{\|\mathbf{v}_h\|_h}$$

Dès lors, les inégalités ci-dessus se réduisent à :

$$\|p_h - \Pi_h p\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, p) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, \Pi_h p)}{\|\mathbf{v}_h\|_h}$$

Soit \tilde{p}_h un élément de M_h^3 (espace des éléments finis P_3 de Lagrange) tel que :

$$\begin{aligned} \forall K; \forall s \in K; \tilde{p}_h(s) &= p(s) \\ \forall K; \int_K \tilde{p}_h dK &= \int_K p dK \\ \|p - \tilde{p}_h\| &\leq ch^4 |p|_4 \end{aligned}$$

où s est un sommet quelconque d'un élément K du maillage \mathcal{T}_h .

Nous pouvons donc réécrire les majorations précédentes comme suit :

$$\|p_h - \Pi_h p\| \leq c \left(\|\mathbf{u}_h\|_h + \|p - \tilde{p}_h\| + \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, \tilde{p}_h - \Pi_h p)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \right)$$

Or pour tout élément \mathbf{v}_h de \mathbf{X}_h , nous avons, compte tenu des propriétés de $\Pi_h p$ et de \tilde{p}_h :

$$\begin{aligned} b_h(\mathbf{v}_h, \tilde{p}_h - \Pi_h p) &= - \sum_K \int_K \nabla \cdot \mathbf{v}_h (\tilde{p}_h - \Pi_h p) + \sum_a \int_a [\mathbf{v}_h] \cdot (\tilde{p}_h - \Pi_h p) \mathbf{n} \\ &= \sum_a \int_a [\mathbf{v}_h] \cdot (\tilde{p}_h - \Pi_h p) \mathbf{n} \end{aligned}$$

avec a arête quelconque du maillage, et \mathbf{n} un vecteur normal unitaire à l'arête a .

Nous remarquons alors que grâce à la formule de Simpson (4.30), nous avons pour tout élément q_h^2 de M_h^2 :

$$\sum_a \int_a [\mathbf{v}_h] \cdot (q_h^2 - \Pi_h q_h^2) = 0$$

Dès lors, nous avons la majoration suivante :

$$b_h(\mathbf{v}_h, \tilde{p}_h - \Pi_h p) \leq c \|\mathbf{v}_h\|_h \inf_{q_h^2 \in M_h^2} \|p - q_h^2\| \leq ch^3 |p|_3 \|\mathbf{v}_h\|_h$$

Ensuite, en réunissant toutes les estimations, nous trouvons finalement :

$$\|p_h - \Pi_h p\| \leq c(\|\mathbf{u}_h\|_h + c(p)h^3) \leq c(c(\phi)h^5 + c(p)h^3) \leq c(\phi)h^3$$

□

Pour le moment, nous n'avons pas encore pu expliquer le taux de convergence constaté en $O(h^4)$.

4.4 Cas de la dimension 3.

D'après le paragraphe ci-dessus, il apparaît que le noyau \mathbf{V}_h en dimension 3, ne peut satisfaire un théorème identique. En effet, si nous analysons la démonstration précédente, le point clef reste l'utilisation d'une formule d'intégration numérique, le long d'une arête a du maillage. La formule utilisée (celle de Simpson) a ceci de remarquable que ses points d'intégrations sont situés exactement aux noeuds portant les degrés de liberté de nos variables discrètes vitesse \mathbf{v}_h et pression q_h^1 . C'est cette coïncidence qui nous a permis de conclure.

Or en dimension 3, il n'existe pas de formule d'intégration numérique, exacte pour les polynômes de degré 3 ou plus, dont les points d'intégrations soient exactement les noeuds portant les degrés de liberté de nos variables; à savoir en dimension 3, le milieu des faces f du maillage pour les vecteurs vitesses \mathbf{v}_h et les sommets s du maillage pour les pressions q_h^1 .

La plus petite formule d'intégration numérique dont nous disposons pour des surfaces triangulaires K et qui soit exacte pour des polynômes p_3 de degré inférieur ou égal à 3, est en effet celle-ci :

$$\int_K p_3 dx := |K| \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{20} p_3(s_i) + \sum_{a=1}^3 \frac{2}{15} p_3(m_a) + \frac{9}{20} p_3(G) \right) \quad (4.37)$$

avec s_i sommet du triangle, m_a milieu de l'arête a du triangle, G barycentre du triangle et $|K|$ mesure du triangle K .

Compte tenu des remarques précédentes, si nous souhaitons retrouver des propriétés similaires au cas bidimensionnel, il nous est apparu naturel de rajouter des degrés de liberté aux pressions discrètes. Ces degrés de liberté seront portés par des noeuds situés au milieu m_a des arêtes a du maillage.

4.4.1 Nouvel espace de pression.

La conséquence directe du développement précédent est l'introduction d'un nouvel espace discret de pression, dont la définition est donnée par :

$$M_h^a := \{q \in C^0 \mid \forall K, q|_K \in P_K^a\} \quad (4.38)$$

où P_K^a est l'espace vectoriel défini sur un élément K du maillage \mathcal{T}_h , engendré par les fonctions de formes $\gamma_a := 4\lambda_{i,K}\lambda_{j,K}$; $1 \leq i \leq 6$; $j \neq i$ et où par définition, $\lambda_{i,K}$ est la fonction de forme $P_1(K)$ valant 1 au sommet i de l'élément K . Les γ_a sont donc des polynômes de degré 2, dont les degrés de liberté sont situés au milieu m_a des arêtes a de K .

Dans toute la suite, nous supposons qu'à chaque face f du maillage \mathcal{T}_h est associé un vecteur normal à f unitaire, noté \mathbf{n}_f . De plus, si \mathbf{v} est un vecteur quelconque de R^3 , la trace tangentielle de ce vecteur le long de f sera notée $\mathbf{v} \times \mathbf{n}_f$.

Soit maintenant la forme bilinéaire, notée Γ , définie sur $(M_h^a + M_h^1) \times (M_h^a + M_h^1)$ par la relation suivante :

$$\Gamma(p_h, q_h) := \sum_K |K| \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\nabla p_h(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}, \nabla q_h(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}) \quad \forall p_h, q_h \in M_h^a + M_h^1$$

où \mathbf{n}_{f_i} est le vecteur normal à la face f_i , face opposée au sommet i de l'élément K et G_{f_i} est le barycentre de f_i .

A l'aide de cette forme bilinéaire particulière, nous définissons l'ensemble $M_h^{1,p}$, sous-espace vectoriel de M_h^a , par la relation d'orthogonalité suivante :

$$M_h^{1,p} := \{q_h^a \in M_h^a \mid \forall q_h^1 \in M_h^1 \Gamma(q_h^a, q_h^1) = 0\}$$

Nous remarquons alors que pour un élément quelconque q_h^a de $M_h^a/M_h^{1,p}$ et un élément quelconque q_h^1 de M_h^1 , nous obtenons la propriété suivante :

$$\Gamma(q_h^a + q_h^1, q_h^a + q_h^1) = \sum_K |K| \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e^2 + \|\nabla q_h^1(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e^2) \quad (4.39)$$

Enfin, en dimension 3, nous raisonnerons dorénavant sur un espace de pression M_h enrichi par $M_h^a/M_h^{1,p}$ et dont la définition sera désormais :

$$M_h := (M_h^0 + M_h^1 + (M_h^a/M_h^{1,p})) \cap L_0^2 \quad (4.40)$$

Par conséquent, la forme bilinéaire de divergence discrète $b_h(\cdot, \cdot)$ doit faire l'objet d'une nouvelle définition. Ainsi, $b_h(\cdot, \cdot)$ est définie sur $\mathbf{X}_h \times M_h$ par :

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) := \sum_K \int_K (\mathbf{v}_h \nabla (q_h^1 + q_h^a) - q_h^0 \nabla \cdot \mathbf{v}_h) d\Omega \quad (4.41)$$

avec $q_h := q_h^0 + q_h^1 + q_h^a$, q_h^0 appartenant à $M_h^0 \cap L_0^2$, q_h^1 à $M_h^1 \cap L_0^2$ et q_h^a à $M_h^a/M_h^{1,p} \cap L_0^2$.

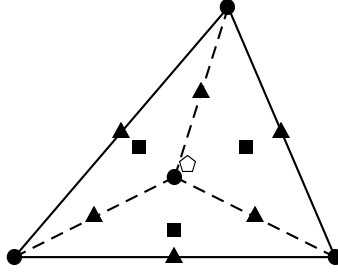
Par commodité, nous introduisons de nouvelles formes bilinéaires dont l'utilité se verra conforter dans la suite du chapitre. Ainsi, nous noterons $b_h^{01}(\cdot, \cdot)$ la restriction de $b_h(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times (M_h^0 + M_h^1) \cap L_0^2$ et $b_h^a(\cdot, \cdot)$ la restriction de $b_h(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times ((M_h^a/M_h^{1,p}) \cap L_0^2)$.

Voici un schéma représentant les degrés de liberté de cet élément fini particulier en trois dimensions (les cercles, les triangles et les pentagones sont associés à la pression et les carrés à la vitesse) :

4.4.2 Propriétés.

L'introduction d'un nouvel espace discret de pression nous impose toutefois un certain nombre de contraintes supplémentaires. Ainsi, il nous faut vérifier la continuité de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ sur l'espace produit $\mathbf{X}_h \times M_h$. De même, nous devons assurer l'existence d'une condition de type inf-sup pour cette même forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$. Ces deux points particuliers font l'objet des développements qui vont suivre.

Tout d'abord, nous avons, à l'aide du théorème (**Th** 4.3.1), l'uniforme continuité de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times M_h$:

TAB. 4.7 – Degrés de liberté associés à l'élément $P_1\text{NC}/P_0 + P_1 + P_a$.

Théorème 4.4.1 *La forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{X}_h \times (M_h \cap L_0^2)$. Plus exactement, il existe une constante c , indépendante du pas du maillage h , telle que l'on ait :*

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in M_h \cap L_0^2 \quad |b_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq c \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\| \quad (4.42)$$

Il ne nous reste donc qu'à obtenir une inégalité de type inf-sup. A cette fin, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.4.1 *Soit K un élément du maillage \mathcal{T}_h quelconque, de mesure $|K|$. Soit q_h^a un élément quelconque de $M_h^a/M_h^{1,p}$ fixé, de coefficients a_{ij} sur K . Soit q_h^1 un élément quelconque de M_h^1 fixé, de coefficients a_i sur K .*

Alors, il existe des constantes c_1 et c_2 indépendantes de K telles que l'on ait :

$$\begin{aligned} c_1(|q_h^a|_{1,K}^2 + |q_h^1|_{1,K}^2) &\leq |K| \sum_{i=1}^3 (\|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}\|_e^2 + \|\nabla q_h^1(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}\|_e^2) \\ &\leq c_2(|q_h^a|_{1,K}^2 + |q_h^1|_{1,K}^2) \end{aligned} \quad (4.43)$$

où i est le numéro d'un sommet de K , f_i la face opposé au sommet i dans K , \mathbf{n}_{f_i} le vecteur unitaire extérieur à K , normal à f_i , G_{f_i} le barycentre de f_i et $\|\cdot\|_e$ la norme euclidienne sur R^3 .

Preuve du lemme:

Nous commençons par remarquer que q_h^a ne sera vu qu'à travers son gradient sur l'élément K . Il existe donc un polynôme de degré deux \tilde{q}_h^a sur K tel que :

$$\tilde{q}_h^a := 4 \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i}^4 a_{ij} \lambda_i \lambda_j \quad (4.44)$$

$$\int_K \tilde{q}_h^a dK = 0 \quad (4.45)$$

$$\nabla \tilde{q}_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} = \nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.46)$$

où i désigne un sommet de l'élément K , f_i la face opposée au sommet i , G_{f_i} le barycentre de f_i et \mathbf{n}_{f_i} le vecteur normal à f_i , unitaire et extérieur à K .

En effet, appelons l la constante suivante définie sur K :

$$l := \frac{1}{6} \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i}^4 a_{ij}$$

Par définition des fonctions de forme λ_i restreintes à l'élément K , nous pouvons également écrire :

$$l := 4l \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i}^4 \lambda_i \lambda_j + l \sum_{i=1}^4 \lambda_i (2\lambda_i - 1)$$

Dans ce qui suit, nous noterons l_1 le premier polynôme de l'expression ci-dessus et l_2 le second.

Nous écrivons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla q_h^a|_K &= \nabla(q_h^a - l)|_K \\ &= \nabla(q_h^a - l_1)|_K - \nabla l_2|_K \end{aligned}$$

Posons alors $\tilde{q}_h^a := q_h^a - l_1$ et vérifions les hypothèses de départ. Nous avons donc dans un premier temps :

$$\tilde{q}_h^a = 4 \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i}^4 (a_{ij} - l) \lambda_i \lambda_j$$

Dès lors, nous pouvons écrire avec $|K|$ représentant la mesure de l'élément K :

$$\begin{aligned} \int_K \tilde{q}_h^a &= \frac{|K|}{5} \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i}^4 (a_{ij} - l) \\ &= \frac{|K|}{5} \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j>i}^4 a_{ij} - 6l \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans un second temps, il nous suffit de vérifier que le vecteur $\nabla l_2(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}$ est nul pour tout sommet i afin de satisfaire la dernière contrainte recherchée. Or, nous pouvons écrire :

$$\nabla l_2(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} = \left(4l \sum_{j=1}^4 \lambda_j \nabla \lambda_j \right) (G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}$$

Par définition de G_{f_i} , nous avons $\lambda_i(G_{f_i}) = 0$ et $\lambda_j(G_{f_i}) = \frac{1}{3}$ lorsque j est différent de i . En conséquence, nous avons évidemment :

$$\begin{aligned} \nabla l_2(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} &= \frac{4l}{3} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^4 \nabla \lambda_j \right) \times \mathbf{n}_{f_i} \\ &= -\frac{4l}{3} \nabla \lambda_i \times \mathbf{n}_{f_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

en ayant remarqué que $\sum_{i=1}^4 \nabla \lambda_i = 0$ sur K .

La même remarque s'applique à q_h^1 , c'est-à-dire qu'il existe un polynôme de degré un \tilde{q}_h^1 tel que :

$$\tilde{q}_h^1 := \sum_{i=1}^4 a_i \lambda_i \tag{4.47}$$

$$\int_K \tilde{q}_h^1 dK = 0 \tag{4.48}$$

$$\nabla \tilde{q}_h^1(\mathbf{x}) = \nabla q_h^1(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in K \tag{4.49}$$

Une fois tout ceci posé, nous allons commencer par montrer que le terme du centre de la relation (4.43) est bien une norme au carré sur $(M_h^a/M_h^{1,p}) +$

M_h^1 .

Supposons donc que cette quantité est réduite à 0. Par conséquent, nous avons pour chaque face f_i fixée de l'élément K :

$$\begin{aligned}\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} &= 0 \\ \nabla q_h^1(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} &= 0\end{aligned}\tag{4.50}$$

Le traitement du polynôme q_h^1 étant identique au cas du polynôme q_h^a , nous nous intéresserons dans la suite exclusivement au cas du polynôme q_h^a . Ainsi en utilisant la relation (4.44), il nous devient possible d'écrire :

$$\begin{aligned}\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} &= \nabla \tilde{q}_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} \\ &= \frac{4}{3} \left(\sum_{j \neq i} \sum_{l \neq i, j} a_{jl} \nabla \lambda_j \right) \times \mathbf{n}_{f_i}\end{aligned}\tag{4.51}$$

Ces relations sont dues aux trois propriétés (par définition de i par rapport à f_i) :

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_i \times \mathbf{n}_{f_i} &= 0 \\ \lambda_i(G_{f_i}) &= 0 \\ \lambda_j(G_{f_i}) &= \frac{1}{3} \quad j \neq i\end{aligned}\tag{4.52}$$

Afin de fixer les idées, nous supposons maintenant que la face f_i en question est la face de sommets numéro 1, 2 et 3. Les autres faces se traitant de manière similaire, il nous est apparu plus clair d'effectuer le reste de la démonstration dans ce cadre. Ainsi, dans ce cadre particulier, nous réorganisons les équations (4.51) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \nabla q_h^a(G_{f_4}) \times \mathbf{n}_{f_4} &= (a_{12} + a_{13}) \nabla \lambda_1 \times \mathbf{n}_{f_4} \\ &+ (a_{12} + a_{23}) \nabla \lambda_2 \times \mathbf{n}_{f_4} + (a_{13} + a_{23}) \nabla \lambda_3 \times \mathbf{n}_{f_4}\end{aligned}\tag{4.53}$$

Nous remarquons ensuite que la somme des trois vecteurs $\nabla \lambda_i$ avec $1 \leq i \leq 3$ est nulle le long de la face f_4 . Aussi, l'expression précédente se simplifie :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \nabla q_h^a(G_{f_4}) \times \mathbf{n}_{f_4} &= (a_{23} - a_{13}) \nabla \lambda_2 \times \mathbf{n}_{f_4} \\ &+ (a_{23} - a_{12}) \nabla \lambda_3 \times \mathbf{n}_{f_4}\end{aligned}\tag{4.54}$$

Nous obtenons alors une somme de deux vecteurs linéairement indépendants et telle que la relation (4.50) soit vérifiée. Ceci nous permet donc d'écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a_{23} - a_{13} &= 0 \\ a_{23} - a_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Le système précédent nous permet également d'obtenir le lien suivant entre les coefficients a_{12} , a_{13} et a_{23} :

$$a_{12} = a_{13} = a_{23}$$

En réitérant l'ensemble de ce processus sur deux autres faces de K , nous aurions au final, pu écrire l'ensemble des relations qui suivent :

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34}$$

Nous avons choisi q_h^a de telle sorte que sa moyenne soit nulle dans l'élément K : par conséquent a_{ij} est nul pour tout i et tout $j > i$. Le même raisonnement effectué sur q_h^1 aurait abouti à la relation $a_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Nous avons donc bien une norme sur K pour nos éléments de $M_h^a/M_h^{1,p}$ et M_h^1 .

Il nous reste à évaluer les inégalités proposées dans le théorème. Pour cela, nous allons nous ramener à l'élément de référence \hat{K} par l'utilisation d'une fonction affine F_K de matrice B_K .

Nous rappelons avant de commencer, les formules transformant le gradient d'une fonction et le vecteur normal \mathbf{n} à l'élément K en leur image dans \hat{K} :

$$\begin{aligned} \nabla q \circ F_K &= B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{q} \\ \mathbf{n} \circ F_K &= \frac{B_K^{-T} \hat{\mathbf{n}}}{\|B_K^{-T} \hat{\mathbf{n}}\|_e} \end{aligned} \tag{4.55}$$

Là encore, nous ne raisonnerons que sur la fonction q_h^a dans la mesure où le raisonnement qui va suivre s'applique de la même manière à q_h^1 . Tout d'abord, il nous faut remarquer que, au sommet i fixé :

$$\|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}\|_e = \sup_{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f_i} = 0} \frac{\nabla q_h^a(G_{f_i}) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_e} \tag{4.56}$$

Nous utilisons ensuite, la transformation affine F_K pour changer de variable. Nous obtenons alors avec les rappels précédents :

$$\|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e = \sup_{\hat{\mathbf{v}} \mid (B_K^{-1}\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{f}_i} = 0} \frac{\hat{\nabla} \hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_i}) \cdot B_K^{-1}\hat{\mathbf{v}}}{\|\hat{\mathbf{v}}\|_e} \quad (4.57)$$

En remarquant que nous avons :

$$B_K^{-1}\hat{\mathbf{v}} = (B_K^{-1}\hat{\mathbf{v}}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{f}_i} \quad (4.58)$$

Nous obtenons, dès lors, par une simple majoration du dénominateur :

$$\|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e \geq \frac{\|\hat{\nabla} \hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{f}_i}\|_e}{\|B_K\|_e} \quad (4.59)$$

De la même façon, il devient possible de majorer (4.57) :

$$\|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e \leq \|\hat{\nabla} \hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{f}_i}\|_e \|B_K^{-1}\|_e \quad (4.60)$$

Nous élevons les expressions ci-dessus au carré avant de sommer sur les sommets i , et nous obtenons un encadrement de notre norme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|B_K\|_e^2} \sum_{i=1}^4 \|\hat{\nabla}(\hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{f}_i})\|_e^2 &\leq \sum_{i=1}^4 \|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e^2 \\ &\leq \|B_K^{-1}\|_e^2 \sum_{i=1}^4 \|\hat{\nabla} \hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{f}_i}\|_e^2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Sommant ensuite les deux séries d'inégalités précédentes, puis par équivalence des normes en dimension finie, nous trouvons évidemment :

$$\frac{|K|}{\|B_K\|_e^2} |\hat{\nabla} \hat{q}_h^a|_{0, \hat{K}}^2 \leq |K| \sum_{i=1}^4 \|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e^2 \leq |K| \|B_K^{-1}\|_e^2 |\hat{\nabla} \hat{q}_h^a|_{0, \hat{K}}^2 \quad (4.62)$$

Puis il nous suffit de réutiliser le changement de variables affine pour trouver :

$$c_1 |q_h^a|_{1, K}^2 \leq |K| \sum_{i=1}^4 \|\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{\mathbf{f}_i}\|_e^2 \leq c_2 |q_h^a|_{1, K}^2 \quad (4.63)$$

en remarquant que $\|B_K\|_e = ch_K$ et $\|B_K^{-1}\|_e = \frac{c}{h_K}$. \square

Remarque 4.4.1 *Il est indispensable, pour la validité de la démonstration du théorème suivant, de vérifier que la relation ci-dessous s'avère exacte :*

$$\sum_{j=1}^4 \nabla q_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_i} = \sum_{j=1}^4 \nabla \tilde{q}_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_i} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.64)$$

Pour cela, il nous suffit de constater que pour un sommet i fixé :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \nabla l_2(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_i} &= \frac{4l}{3} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1, k \neq j}^4 \nabla \lambda_k \times \mathbf{n}_{f_i} \\ &= -\frac{4l}{3} \sum_{j=1}^4 \nabla \lambda_j \times \mathbf{n}_{f_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Avant d'énoncer un théorème établissant une condition de type inf-sup sur notre nouvel espace en pression, nous allons énoncer quelques hypothèses que nous supposerons vérifiées dans la suite des démonstrations.

Hypothèse 4.4.1 *Le bord du domaine $\partial\Omega$ ne contient au plus qu'une face d'un même élément K du maillage \mathcal{T}_h .*

Hypothèse 4.4.2 *Soit q_h^a un élément quelconque fixé de $M_h^a/M_h^{1,p}$ et q_h^1 un élément quelconque fixé de M_h^1 . Soit K un élément quelconque fixé du maillage \mathcal{T}_h de diamètre h_K . Soit c_0 la constante indépendante du pas du maillage h telle que :*

$$\begin{aligned} &\sum_K |K| \sum_{i=1, f_i \not\subset \partial\Omega}^4 \left\| \sum_{j=1}^4 \nabla q_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_i} \right\|_e^2 \\ &\leq c_0 \sum_K |K| \sum_{i=1, f_i \not\subset \partial\Omega}^4 \left\| \nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} \right\|_e^2 \end{aligned}$$

avec $|K|$ la mesure de K , f_i la face opposée au sommet i de K , \mathbf{n}_{f_i} le vecteur unitaire normal à f_i et extérieur à K , G_{f_i} le centre de gravité de f_i .

Nous supposerons alors que la constante c_0 vérifie l'inégalité suivante :

$$c_0 < 81$$

Remarque 4.4.2 *Sur le tétraèdre de référence \hat{K} , il existe une constante \hat{c}_0 vérifiant la majoration suivante pour un élément $\hat{q}_h^a \in L_0^2(\hat{K})$ quelconque fixé :*

$$\sum_{i=1, \hat{f}_i \notin \partial\Omega}^4 \left\| \sum_{j=1}^4 \nabla \hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_j}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{f}_i} \right\|_e^2 \leq \hat{c}_0 \sum_{i=1, \hat{f}_i \notin \partial\Omega}^4 \left\| \nabla \hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{f}_i} \right\|_e^2$$

Nous avons par ailleurs obtenu une évaluation numérique de cette constante \hat{c}_0 :

$$\hat{c}_0 \approx 45$$

*Par conséquent, il nous suffit de vérifier que pour un élément K de \mathcal{T}_h "voisin" de \hat{K} , la constante $c_0(K)$ associée soit voisine de \hat{c}_0 pour que l'inégalité recherchée soit vérifiée (cf. pour cela **(Ch B)**).*

Nous énonçons maintenant un théorème établissant une condition de type Babūška-Brezzi .

Théorème 4.4.2 *Sous les hypothèses **(H 4.4.1)** et **(H 4.4.2)**, la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition de type Babūška-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{X}_h^t \times ((M_h^a/M_h^{1,p}) + M_h^1) \cap (\cup_K L_0^2(K))$. Plus précisément, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h telle que l'on ait :*

$$\forall q_h \in ((M_h^a/M_h^{1,p}) + M_h^1) \cap (\cup_K L_0^2(K)) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h\| \quad (4.65)$$

Preuve du théorème:

Soit des éléments q_h^a, q_h^1 des espaces $M_h^a/M_h^{1,p}$, et M_h^1 quelconques fixés. Notre objectif est de trouver un élément \mathbf{v}_h de \mathbf{X}_h^t et une constante c indépendante de h tels que l'on ait l'estimation :

$$\frac{b_h^a(\mathbf{v}_h, q_h^a + q_h^1)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h^a + q_h^1\| \quad (4.66)$$

Par définition de l'espace $M_h^a/M_h^{1,p}$, son gradient ∇q_h^a est un polynôme de degré 1 sur chaque élément K de \mathcal{T}_h : ce gradient peut donc se développer sur la base locale des fonctions de forme Ψ_f , polynôme de degré 1 qui vaut 1

au barycentre de la face $f \in K$ et 0 aux barycentres des autres faces de K . Ainsi, nous avons le développement suivant de ∇q_h^a :

$$\nabla q_h^a|_K = \sum_{i=1}^4 \nabla q_h^a(G_{f_i}) \Psi_{f_i} \quad (4.67)$$

où G_{f_i} est le barycentre de la face f_i , face opposée au sommet i de l'élément K .

Toujours selon les mêmes arguments mais appliqués cette fois à q_h^1 , son gradient s'écrit de la façon suivante :

$$\nabla q_h^1|_K = \sum_{i=1}^4 \nabla q_h^1(G_{f_i}) \Psi_{f_i}$$

Étudions maintenant pour un élément K quelconque fixé, l'intégrale $I(K)$ correspondante dans la forme bilinéaire $b_h^a(\cdot, \cdot)$, avec donc par définition :

$$\begin{aligned} I(K) &:= \int_K \mathbf{v}_h \nabla (q_h^a + q_h^1) d\Omega \\ &= \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \sum_{i=1}^4 \int_K \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \cdot \nabla q_h^a(G_{f_i}) \Psi_{f_i} \Psi_{f_j} d\Omega \\ &\quad + \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \int_K \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \cdot \nabla q_h^1 \Psi_{f_j} d\Omega \end{aligned} \quad (4.68)$$

Or nous savons évaluer le produit scalaire de deux fonctions de forme Ψ_f . Ainsi, nous obtenons avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned} \int_K \Psi_{f_i} \Psi_{f_j} d\Omega &= -\frac{1}{20} |K| \quad \text{si } i \neq j \\ \int_K \Psi_{f_i}^2 d\Omega &= \frac{2}{5} |K| \end{aligned}$$

De cette façon, l'expression de $I(K)$ se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
I(K) &= \frac{2}{5}|K| \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \cdot \nabla q_h^a(G_{f_j}) \\
&\quad - \frac{1}{20}|K| \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \sum_{i=1, i \neq j}^4 \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \cdot \nabla q_h^a(G_{f_i}) \\
&\quad + \frac{1}{4}|K| \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \nabla q_h^1|_K \cdot \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \\
&= \frac{9}{20}|K| \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \cdot \nabla q_h^a(G_{f_j}) \\
&\quad - \frac{1}{20}|K| \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \cdot \nabla q_h^a(G_{f_i}) \\
&\quad + \frac{1}{4}|K| \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \nabla q_h^1|_K \cdot \mathbf{v}_h(G_{f_j})
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Remarquons que q_h^a est continue -par définition- le long de la face f_i à i fixé : il en sera donc de même pour le polynôme $\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}$. Compte tenu des propriétés (4.44)-(4.46) et (4.64) du polynôme \tilde{q}_h^a défini dans le lemme (**Lemme** 4.4.1), nous pouvons remplacer q_h^a par \tilde{q}_h^a dans tout ce qui précède sans en modifier les conclusions : nous considérerons donc que q_h^a est à moyenne nulle dans chaque élément K . Notons de plus, que pour des raisons analogues, les polynômes q_h^1 et $\nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_{f_i}$ sont continus le long des faces f .

A partir de ces remarques, nous allons déterminer les valeurs des différents vecteurs $\mathbf{v}_h(f_i)$.

Les propriétés de continuité précédemment évoquées, nous amènent à poser dans l'équation (4.69) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_h(f_i) \times \mathbf{n}_{f_i} &= h_-^2 (\nabla q_h^a(G_{f_i}) + \nabla q_h^1) \times \mathbf{n}_{f_i} \quad 1 \leq i \leq 4, f_i \not\subset \partial\Omega \\
\mathbf{v}_h(f) &= 0 \quad \forall f \subset \partial\Omega
\end{aligned} \tag{4.70}$$

avec $h_- := \min_K(h_K)$.

Rappelons que par hypothèse, il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de \mathcal{T}_h telle que :

$$h_- \geq \sigma h$$

où h est le pas de \mathcal{T}_h .

En sommant les intégrales $I(K)$ sur les éléments K et en tenant compte de la propriété (4.39), nous obtenons donc l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \sum_K I(K) &= \frac{9}{20} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \|\nabla q_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \|\nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2 \\ &- \frac{1}{20} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \{ (\nabla q_h^a(G_{f_j}) + \nabla q_h^1) \times \mathbf{n}_{f_j} \} \\ &\cdot \sum_{i=1}^4 \{ \nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_j} \} \end{aligned}$$

Il nous reste à évaluer le dernier terme de l'expression précédente. Pour cela, nous allons majorer ce terme à l'aide d'inégalités de type Cauchy-Schwartz.

Ainsi, nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_K I(K) &\geq \frac{9}{20} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \|\nabla q_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2 \\ &+ \frac{1}{4} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \|\nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2 \\ &- \frac{1}{20} \sum_K |K| \sqrt{\sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \| (\nabla q_h^a(G_{f_j}) + \nabla q_h^1) \times \mathbf{n}_{f_j} \|_e^2} \\ &\sqrt{\sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \left\| \sum_{i=1}^4 \nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_j} \right\|_e^2} \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons une inégalité de la moyenne afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_K I(K) &\geq \frac{9}{40} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \|\nabla q_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2 \\ &\quad + \frac{1}{40} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \|\nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2 \\ &\quad - \frac{1}{360} \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 \left\| \sum_{i=1}^4 \nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_j} \right\|_e^2 \end{aligned}$$

Dès lors d'après l'hypothèse (**H** 4.4.2), il existe une constante $c > 0$ indépendante du pas h du maillage telle que :

$$\sum_K I(K) \geq c \sum_K |K| \sum_{j=1, f_j \notin \partial\Omega}^4 h_-^2 (\|\nabla q_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2 + \|\nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_{f_j}\|_e^2)$$

Ensuite, d'après l'hypothèse (**H** 4.4.1) et le lemme (**Lemme** 4.4.1), le terme de droite de l'expression ci-dessus est une norme telle que :

$$\sum_K I(K) \geq c\sigma^2 \sum_K h_K^2 (|q_h^a|_{1,K}^2 + |q_h^1|_{1,K}^2)$$

en remarquant que $h_-^2 \geq \sigma^2 h^2 \geq \sigma^2 h_K^2$.

Toujours en utilisant le lemme (**Lemme** 4.4.1), nous obtenons la majoration du vecteur vitesse dont nous avons choisi les coordonnées :

$$|\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 \leq ch_K^2 (|q_h^a|_{1,K}^2 + |q_h^1|_{1,K}^2) \quad (4.71)$$

Comme nous travaillons par hypothèse sur $L_0^2(K)$, l'inégalité de Bramble-Hilbert suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \|q_h^a\|_K &\leq h_K |q_h^a|_{1,K} \\ \|q_h^1\|_K &\leq h_K |q_h^1|_{1,K} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Sommant ensuite sur les éléments K de notre maillage, et en utilisant les inégalités (4.72), nous obtenons l'énoncé du théorème. \square

Remarque 4.4.3 Nous aurions également pu faire l'hypothèse qu'il existe une constante c_0 indépendante du pas du maillage \mathcal{T}_h vérifiant la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_K |K| \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 h_{f_i}^2 \left\| \sum_{j=1}^4 \nabla q_h^a(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_i} \right\|_e^2 \\ & \leq c_0 \sum_K |K| \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 h_{f_i}^2 \left\| \nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i} \right\|_e^2 \end{aligned}$$

avec $|K|$ la mesure de K , f_i la face opposée au sommet i de K , \mathbf{n}_{f_i} le vecteur unitaire normal à f_i et extérieur à K , G_{f_i} le centre de gravité de f_i et h_{f_i} est le diamètre de f_i .

Dans ce cas, il nous faut changer la définition de la forme bilinéaire $\Gamma(\cdot, \cdot)$ définie sur $(M_h^a + M_h^1) \times (M_h^a + M_h^1)$ qui devient alors :

$$\Gamma(p_h, q_h) := \sum_K |K| \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 h_{f_i}^2 (\nabla p_h(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}, \nabla q_h(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}) \quad \forall p_h, q_h \in M_h^a + M_h^1$$

Enfin, dans la démonstration du théorème (**Th** 4.4.2), il nous faut choisir le vecteur \mathbf{v}_h de \mathbf{X}_h suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h(f_i) \times \mathbf{n}_{f_i} &= h_{f_i}^2 (\nabla q_h^a(G_{f_i}) + \nabla q_h^1) \times \mathbf{n}_{f_i} \quad 1 \leq i \leq 4, f_i \notin \partial\Omega \\ \mathbf{v}_h(f) &= 0 \quad \forall f \subset \partial\Omega \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à établir l'existence d'une condition de type inf-sup sur notre espace discret de pression M_h complet. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 4.4.3 La forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition de type Babūška-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{X}_h \times M_h$. Plus précisément, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h telle que l'on ait :

$$\forall q_h \in M_h \cap L_0^2 \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h\| \quad (4.73)$$

Preuve du théorème:

Nous allons utiliser pour cette démonstration un argument de type Boland et Nicolaidis, développé dans [17], et introduit par Bernardi et Hecht dans [4].

Soit un élément $q_h = \tilde{q}_h + \tilde{q}_h^0$ un élément quelconque fixé de $M_h = ((M_h^a/M_h^{1,p} + M_h^1) \cap L_0^2) + (M_h^0 \cap L_0^2)$. Notons que nous décomposons \tilde{q}_h sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{q}_h &:= q_h^1 + q_h^a \\ q_h^1 &\in M_h^1 \cap L_0^2 \\ q_h^a &\in M_h^a/M_h^{1,p} \cap L_0^2\end{aligned}$$

Nous pouvons alors reformuler ce terme sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}q_h &= \hat{q}_h + q_h^0 \\ \hat{q}_h &:= \tilde{q}_h - \bar{q}_h^1 - \bar{q}_h^a \\ q_h^0 &:= \tilde{q}_h^0 + \bar{q}_h^1 + \bar{q}_h^a\end{aligned}$$

où \bar{q}_h^1 et \bar{q}_h^a sont des éléments de M_h^0 constitués des moyennes par maille K des fonctions q_h^1 et q_h^a .

D'après le théorème (4.4.2), nous savons qu'il existe un vecteur \mathbf{v}_h^t dans \mathbf{X}_h^t tel que nous puissions écrire :

$$b_h(\mathbf{v}_h^t, \hat{q}_h) = \|\hat{q}_h\|^2 \quad (4.74)$$

$$\|\mathbf{v}_h^t\|_h \leq c \|\hat{q}_h\| \quad (4.75)$$

où c est une constante indépendante de h .

De plus, la condition inf-sup vérifiée par l'élément de Crouzeix-Raviart classique nous assure également l'existence d'un vecteur \mathbf{w}_h de \mathbf{X}_h vérifiant :

$$b_h(\mathbf{w}_h, q_h^0) = \|q_h^0\|^2 \quad (4.76)$$

$$\|\mathbf{w}_h\|_h \leq c \|q_h^0\| \quad (4.77)$$

où là encore c est une constante différente du pas du maillage h .

Posons par définition $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^t + \beta \mathbf{w}_h$ avec une constante β que nous déterminerons plus tard. Dès lors, nous pouvons écrire, en utilisant les égalités ci-dessus :

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \|\hat{q}_h\|^2 + \beta \|q_h^0\|^2 + \beta b_h(\mathbf{w}_h, \hat{q}_h) \quad (4.78)$$

L'utilisation de l'uniforme continuité de $b_h(\cdot, \cdot)$ ainsi que de la majoration de la norme de \mathbf{w}_h dans (4.76), nous amène à la minoration suivante :

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) \geq \|\hat{q}_h\|^2 + \beta \|q_h^0\|^2 - c\beta \|q_h^0\| \|\hat{q}_h\| \quad (4.79)$$

L'utilisation d'une relation de type Cauchy-Schwartz, nous permet d'obtenir une autre minoration :

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) \geq \frac{1}{2} \|\hat{q}_h\|^2 + \beta \left(1 - \frac{c^2\beta}{2}\right) \|q_h^0\|^2 \quad (4.80)$$

Nous choisissons alors un $\beta > 0$ de sorte que :

$$1 - \frac{c^2\beta}{2} > 0 \quad (4.81)$$

Et enfin, nous avons la minoration attendu :

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) \geq c(\|\hat{q}_h\|^2 + \|q_h^0\|^2) \quad (4.82)$$

avec c constante appropriée.

Il ne nous reste plus qu'à majorer la norme du vecteur \mathbf{v}_h en fonction de $\|\hat{q}_h\|^2$ et de $\|q_h^0\|^2$. Or grâce aux inégalités triangulaires et aux inégalités (4.74)-(4.76), nous obtenons :

$$\|\mathbf{v}_h\|_h \leq \|\mathbf{v}_h^t\|_h + \beta \|\mathbf{w}_h\|_h \leq c(\|\hat{q}_h\| + \|q_h^0\|) \leq c(\|\hat{q}_h\|^2 + \|q_h^0\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.83)$$

Enfin, il nous suffit finalement de remarquer que l'inégalité suivante est vérifiée pour pouvoir conclure :

$$\|\hat{q}_h\|^2 + \|q_h^0\|^2 \geq c\|\hat{q}_h + q_h^0\|^2 \geq c\|\tilde{q}_h + \tilde{q}_h^0\|^2$$

où c est une constante indépendante de h . \square

4.4.3 Meilleure décomposition de L^2 .

Dans ce paragraphe, nous allons essentiellement montrer que nous avons un résultat analogue à la dimension 2 pour notre nouvel espace de pression, à savoir que nous pouvons obtenir dans des cas spécifiques, des gains d'ordre de convergence pour nos schémas discrétisés.

Nous allons d'abord rappeler la définition de l'espace discret de pression M_h^2 :

$$M_h^2 := \{q \in C^0 \mid \forall K, q|_K \in P_2(K)\} \quad (4.84)$$

où $P_2(K)$ est l'ensemble des polynômes de degré 2 sur l'élément K du maillage \mathcal{T}_h .

Dès lors et compte tenu des définitions précédentes, nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.4.4 *Soit \mathbf{v}_h un élément quelconque \mathbf{V}_h . Alors, \mathbf{v}_h vérifie :*

$$\sum_K \int_K \nabla q_h^2 \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall q_h^2 \in M_h^2 \quad (4.85)$$

Preuve du théorème:

Cette démonstration est essentiellement la même que pour le cas bidimensionnel (à ceci près que nous utilisons non plus la formule d'intégration numérique (4.30) mais la formule d'intégration numérique (4.37)), aussi nous ne la reprendrons pas.

□

Nous avons également des propriétés de consistance et de superconvergence tout à fait analogue au cas bidimensionnel, puisque de la même manière, nous "contenons" des polynômes de degré 2. C'est ce que résument les deux théorèmes qui suivent :

Théorème 4.4.5 *Soit ϕ un élément quelconque fixé de $H^4 \cap L_0^2$ et tel que $|\phi|_4$ soit non nul. Soit \mathbf{V}_d^ϕ , l'espace vectoriel défini par :*

$$\mathbf{V}_d^\phi := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2 \mid \int_\Omega \mathbf{w} \nabla \phi d\Omega = 0; \int_\Omega \mathbf{w} \nabla q_h d\Omega = 0 \quad \forall q_h \in M_h^2 \cap L_0^2\}$$

Alors, quel que soit \mathbf{v}_h dans \mathbf{V}_h , noyau de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$, il existe un vecteur \mathbf{v}_d^ϕ de \mathbf{V}_d^ϕ tel que l'on ait la majoration suivante :

$$\|\mathbf{v}_d^\phi - \mathbf{v}_h\| \leq c(\phi)h^3\|\mathbf{v}_h\|_h$$

où $c(\phi)$ ne dépend que de la fonction ϕ .

Preuve du théorème:

Analogue à celle du théorème (Th 4.3.3). \square

Théorème 4.4.6 Soit ϕ un élément quelconque fixé de $H^4 \cap L_0^2$ et tel que $|\phi|_4$ soit non nul. Soit \mathbf{u}_h et p_h deux éléments de, respectivement, \mathbf{X}_h et M_h solutions des équations de Stokes particulières suivantes :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\nabla\phi, \mathbf{v}_h) \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \end{aligned}$$

où \mathbf{v}_h et q_h sont des éléments quelconques de \mathbf{X}_h et M_h et où nous avons également posé :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \nu \sum_K (\nabla\mathbf{u}_h, \nabla\mathbf{v}_h)_K \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad (4.86)$$

Alors, nous avons les propriétés de superconvergence suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h &\leq c(\phi)h^5 \\ \|p_h - \phi\| &\leq c(\phi)h^2 \end{aligned}$$

où $c(\phi)$ ne dépend que de la fonction ϕ .

Preuve du théorème:

Analogue à celle du théorème (Th 4.3.4). \square

4.4.4 Résultats numériques.

Dans ce paragraphe, nous présentons des résultats numériques permettant d'évaluer les taux de convergence de la vitesse et de la pression discrètes dans le cas où le terme source s'écrit comme un gradient d'un polynôme ϕ de haut degré. Nous avons donc choisi successivement pour ϕ les polynômes x , x^2 , x^3 , x^4 et x^5 : dans les deux premiers cas, la convergence en vitesse est immédiate (erreur de l'ordre de de 10^{-27}) tandis les convergences observés dans les trois autres cas, sont résumées par les tableaux suivants :

Pas du maillage (h)	0.25	0.125	0.0625	0.03125
$\ \mathbf{u}_h\ $	2.32e-24	2.06e-25	1.67e-26	4.70e-27
$\ \mathbf{u}_h\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$				
$\ p_h - \phi\ $	2.54e-02	7.09e-03	1.94e-03	5.16e-04
$\ p_h - \phi\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		1.84	1.87	1.91

TAB. 4.8 – Résultats de convergence avec $\phi = x^3$.

Pas du maillage (h)	0.25	0.125	0.0625	0.03125
$\ \mathbf{u}_h\ $	1.77e-24	2.45e-25	3.13e-26	3.76e-27
$\ \mathbf{u}_h\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$				
$\ p_h - \phi\ $	3.53e-02	9.86e-03	2.69e-03	7.19e-04
$\ p_h - \phi\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		1.84	1.88	1.90

TAB. 4.9 – Résultats de convergence avec $\phi = x^4$.

Pas du maillage (h)	0.25	0.125	0.0625	0.03125
$\ \mathbf{u}_h\ $	1.05e-10	1.44e-15	1.64e-20	1.76e-25
$\ \mathbf{u}_h\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$				
$\ p_h - \phi\ $	4.50e-02	1.29e-02	3.49e-03	9.41e-04
$\ p_h - \phi\ = O(h^\alpha)$, $\alpha =$		1.80	1.885	1.893

TAB. 4.10 – Résultats de convergence avec $\phi = x^5$.

Au vu de ces résultats, quelques commentaires semblent nécessaires. La convergence numérique de la pression effectivement constatée est en accord avec les théorèmes énoncés. Par contre, il est impossible d'évaluer numériquement la vitesse de convergence de la vitesse, compte tenu des ordres de grandeur renvoyés. Ces résultats suprenants sont peut-être dus à la nature des maillages employés : le domaine de l'écoulement Ω est d'abord découpé en petit cubes de longueur h , puis ceux-ci sont subdivisés en tétraèdres. Nous obtenons ainsi un maillage structuré dont les propriétés sont peut-être suffisantes pour expliquer le comportement de l'algorithme.

4.5 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons pu comprendre pourquoi l'élément fini P_1NC/P_0+P_1 possède des propriétés de superconvergence en dimension deux d'espace et en conséquence, les démontrer. Du même coup, nous en avons pu en déduire un nouvel élément fini possédant, par construction, des propriétés analogues en dimension trois d'espace : c'est l'élément que nous avons appelé $P_1NC/P_0 + P_1 + P_a$. Il a cependant fallu s'attacher à montrer que cet élément était stable, au sens où la condition inf-sup que doit vérifier la forme bilinéaire de divergence discrète, ce qui fut pénible en raison du grand nombre de degrés de liberté associés à ce nouvel élément.

Nous avons pu montrer dans ce chapitre des propriétés de convergence pour des termes source de la forme $\nabla\phi$ où ϕ était une fonction régulière. La question qui suivante qui vient à l'esprit est : pouvons-nous obtenir le même type de résultat pour des termes sources de la forme $\nabla \times \phi$?

Chapitre 5

Problème de Navier-Stokes : formulation triple.

5.1 Introduction.

Nous avons pu voir dans le chapitre (**Ch 4**) qu'il était possible de décomposer très "proprement" l'espace \mathbf{L}^2 en somme d'un espace discret image d'un rotationnel discret et d'un espace discret image d'un gradient discret, en deux dimensions comme en trois. Une conséquence intéressante, outre la diminution des courants parasites, est la propriété de superconvergence des solutions discrètes vers les solutions continues : la vitesse et la pression convergent en effet bien plus vite que ne le laisserait penser de prime abord le choix de nos espaces de discrétisation.

L'idée qui sous tend cette partie est d'essayer de voir si l'on peut étendre cette propriété de superconvergence à la variable tourbillon définie par $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$. Pour cela, nous commencerons par définir un nouveau problème mathématique continu faisant intervenir cette variable supplémentaire, et établirons les conditions d'existence et d'unicité des solutions de ce problème, ainsi que son équivalence au problème de Navier-Stokes original.

Ces propriétés fondamentales établies, nous décrirons le problème discret approchant cette nouvelle formulation de Navier-Stokes, les conditions d'existence et d'unicité des solutions et enfin ses propriétés de convergence et superconvergence.

Notons enfin que ce chapitre est inspiré des travaux de thèse de S. Salmon dans [39].

5.2 Formulation générale.

Dans ce paragraphe, nous allons réécrire les équations (2.9)-(2.10) de façon à introduire la nouvelle variable tourbillon. Rappelons tout d'abord que les inconnues initiales sont le vecteur vitesse \mathbf{u} et la pression p . Le tourbillon, que nous noterons ω dans toute la suite de chapitre, s'écrit alors de la façon suivante :

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (5.1)$$

où $\nabla \times \cdot$ est un opérateur dont on précisera ultérieurement le domaine de définition.

Notons que selon la dimension du problème, le tourbillon est tantôt un scalaire (dimension 2) ou un vecteur (dimension 3). Ceci est en effet dû à la dissymétrie de l'opérateur rotationnel. L'expression exacte du tourbillon en fonction de la dimension, peut ainsi s'écrire :

$$\nabla \times \mathbf{u} = \partial_x u_y - \partial_y u_x \quad \text{en dimension 2} \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = (\partial_y u_z - \partial_z u_y, \partial_z u_x - \partial_x u_z, \partial_x u_y - \partial_y u_x)^t \quad \text{en dimension 3} \quad (5.3)$$

A cet opérateur rotationnel, nous associons son transposé, noté également $\nabla^s \times \cdot$ et dont les propriétés algébriques dépendent également de la dimension considérée. Ainsi en dimension 2, l'élément auquel s'applique cet opérateur transposé est un scalaire, tandis qu'en dimension 3, ce rotationnel s'applique à un vecteur. Plus particulièrement, les relations algébriques évoquées s'écrivent (avec η un scalaire -resp. un vecteur- en dimension 2 -resp. en dimension 3-) :

$$\nabla^s \times \eta = (-\partial_y \eta, \partial_x \eta)^t \quad \text{en dimension 2} \quad (5.4)$$

$$\nabla^s \times \eta = (\partial_y \eta_z - \partial_z \eta_y, \partial_z \eta_x - \partial_x \eta_z, \partial_x \eta_y - \partial_y \eta_x)^t \quad \text{en dimension 3} \quad (5.5)$$

Ces définitions nous permettent d'établir, par un simple calcul algébrique et indépendamment de considérations sur la dimension, la relation suivante :

$$-\Delta \mathbf{u} = \nabla^s \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5.6)$$

Par suite, l'équation (5.6) nous permet de transformer de manière formelle les équations de Navier-Stokes (2.9)-(2.10) et de les mettre sous la forme suivante (puisque la vitesse est à divergence nulle) :

$$\omega - \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (5.7)$$

$$\nabla^s \times \omega + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (5.9)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5.10)$$

Ce nouveau système d'équations, que nous appellerons formulation triple du problème de Navier-Stokes, sera étudié plus en détail dans les paragraphes qui suivent. Il est bien entendu équivalent au problème de Navier-Stokes initial (2.9)-(2.10) lorsque tous deux sont interprétés sous leurs formes faible.

5.3 Formulation variationnelle.

5.3.1 Définitions.

Ce paragraphe va être consacré tout d'abord à la définition précise de l'opérateur $\nabla \times \cdot$ ainsi qu'aux espaces fonctionnels que nous allons utiliser spécifiquement dans ce chapitre. Nous achèverons la présente partie par la mise en place du système variationnel que nous désirons étudier, et son équivalence avec le problème initial (2.9)-(2.10).

Les espaces fonctionnels que nous allons utiliser, restent inchangés pour la vitesse et la pression, à savoir les espaces de Hilbert \mathbf{H}_0^1 et L_0^2 . Le tourbillon devra être choisi soit dans L^2 en dimension 2, soit dans \mathbf{L}^2 en dimension 3. Pour des raisons de commodité d'écriture, nous n'utiliserons que la notation \mathbf{L}^2 pour parler de l'espace de définition du tourbillon.

Les normes associées à ces espaces sont donc les mêmes normes que pour le cas classique. Nous noterons donc $||\cdot||$ (respectivement $|\cdot|_1$) la norme pour les espaces de définition de la pression et du tourbillon (resp. pour l'espace

de définition de la vitesse).

Ces données nous permettent de définir précisément les domaines de définition et d'arrivée de l'opérateur $\nabla \times \cdot$, sachant que son expression algébrique est celle donnée plus haut :

$$\nabla \times : \mathbf{H}_0^1 \rightarrow \mathbf{L}^2 \quad (5.11)$$

Définissons maintenant la formulation variationnelle associée (5.7)-(5.9) que nous allons étudier par la suite :

$$(\omega, \phi) - (\nabla \times \mathbf{u}, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathbf{L}^2 \quad (5.12)$$

$$(\omega, \nabla \times \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (5.13)$$

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2 \quad (5.14)$$

où ω, \mathbf{u}, p sont les inconnues évoluant respectivement dans $\mathbf{L}^2, \mathbf{H}_0^1$ et L^2 .

Afin de faciliter l'écriture, nous utiliserons dans toute la suite de ce chapitre et en remplacement des précédentes notations sur les formes bilinéaires, l'écriture suivante :

$$a(\eta, \phi) := (\eta, \phi) \quad \forall \eta, \phi \in \mathbf{L}^2 \quad (5.15)$$

$$b(\mathbf{v}, q) := (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_0^1 \times L^2 \quad (5.16)$$

$$c(\eta, \mathbf{v}) := (\eta, \nabla \times \mathbf{v}) \quad \forall (\eta, \mathbf{v}) \in \mathbf{L}^2 \times \mathbf{H}_0^1 \quad (5.17)$$

Ainsi, nous avons la réécriture suivante :

$$a(\omega, \phi) = c(\phi, \mathbf{u}) \quad \forall \phi \in \mathbf{L}^2 \quad (5.18)$$

$$c(\omega, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (5.19)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2 \quad (5.20)$$

Une première étape consiste à démontrer le théorème d'équivalence suivant :

Théorème 5.3.1 *Grâce aux hypothèses faites, les équations (5.7)-(5.9) sont équivalentes aux équations (5.12)-(5.14).*

Preuve du théorème:

Nous remarquons tout d'abord que l'équation (5.12) est équivalente à l'équation (5.7), lorsque cette dernière est prise au sens des distributions. En effet,

l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω étant dense dans \mathbf{L}^2 , il suffit de remplacer une fonction ϕ quelconque de \mathbf{L}^2 par une fonction Φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour pouvoir conclure.

De la même façon, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans \mathbf{H}_0^1 . Par conséquent, si nous remplaçons les fonctions tests \mathbf{v} de \mathbf{H}_0^1 par une fonction Φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, l'équation (5.13) est équivalente à (5.8) au sens des distributions. De plus, l'appartenance de \mathbf{u} à \mathbf{H}_0^1 implique que l'équation $u = 0$ valable sur le bord $\partial\Omega$, est vérifiée au sens des traces.

Une analyse similaire sur la densité de $\mathcal{D}(\Omega) \cap L_0^2$ dans L_0^2 , permet de conclure à l'équivalence entre (5.14) et (5.9).

Par conséquent, le problème variationnel choisi est bien équivalent au problème initial. \square

5.3.2 Solution du problème triple.

Nous allons tout d'abord nous consacrer à l'étude des équations (5.12)-(5.14), c'est-à-dire que nous souhaitons montrer, dans le cadre des espaces fonctionnels envisagés, l'existence et l'unicité d'une solution, et la continuité de cette dernière vis-à-vis des données initiales du problème.

A cette fin, nous devons nous préoccuper des conditions de continuité des formes bilinéaires que nous rencontrerons, ainsi que des éventuelles conditions de Babūška-Brezzi . Ceci est l'objet des quelques lignes qui suivent.

Notons que compte tenu du choix des espaces fonctionnels, il est inutile de s'intéresser à la forme bilinéaire $b(.,.)$, puisque sa continuité à déjà été prouvée (cf. [11] par exemple) ainsi que l'existence d'une condition de type Babūška-Brezzi . Nous nous occuperons donc des autres formes bilinéaires, à travers les théorèmes suivants :

Théorème 5.3.2 *Les formes bilinéaires $a(.,.)$ et $c(.,.)$ sont continues sur respectivement $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{L}^2$ et $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{H}_0^1$, en dimension deux et trois. Ainsi, il existe une constante c telle que l'on ait :*

$$\forall \eta, \phi \in \mathbf{L}^2 \quad |a(\eta, \phi)| \leq c \|\eta\| \|\phi\| \quad (5.21)$$

$$\forall \eta \in \mathbf{L}^2, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad |c(\eta, \mathbf{v})| \leq c \|\eta\| \|\mathbf{v}\|_1 \quad (5.22)$$

Théorème 5.3.3 *La forme bilinéaire $c(.,.)$ satisfait une condition de type Babūška-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{H}_0^1$, en dimension deux et trois. Plus précisément, il existe une constante c telle que l'on ait :*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \sup_{\eta \in \mathbf{L}^2} \frac{c(\eta, \mathbf{v})}{\|\eta\|} \geq c|\mathbf{v}|_1 \quad (5.23)$$

où l'on rappelle que \mathbf{V} est le noyau de la forme bilinéaire $b(.,.)$ (cf. chapitre (Ch 1)).

Nous allons démontrer le premier théorème :

Preuve du théorème:

- La forme bilinéaire $a(.,.)$ est évidemment continue sur $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{L}^2$ dans la mesure où elle n'est ni plus ni moins que le produit scalaire associé à l'espace \mathbf{L}^2 . La constante c vaut dans ce cas exactement 1.

- La forme bilinéaire $c(.,.)$ est continue sur $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{H}_0^1$ grâce aux inégalités qui suivent :

$$c(\eta, \mathbf{v}) \leq \|\eta\| \|\nabla \times \mathbf{v}\| \quad (5.24)$$

$$\|\nabla \times \mathbf{v}\| \leq |\mathbf{v}|_1 \quad (5.25)$$

Là encore, la constante c de l'énoncé vaut exactement 1.

□

Le deuxième théorème mérite un peu plus d'attention.

Preuve du théorème:

Soit donc un vecteur \mathbf{v} choisi quelconque dans \mathbf{V} . Pour démontrer qu'il existe une condition de type Babūška-Brezzi pour $c(.,.)$, nous avons la possibilité de choisir un η qui nous convient. Comme \mathbf{v} est dans \mathbf{H}_0^1 , nous en déduisons que $\nabla \times \mathbf{v}$ est dans \mathbf{L}^2 . Aussi, nous posons $\eta = \nabla \times \mathbf{v}$ et nous écrivons alors :

$$\sup_{\eta \in \mathbf{L}^2} \frac{c(\eta, \mathbf{v})}{\|\eta\|} \geq \frac{c(\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{v})}{\|\nabla \times \mathbf{v}\|} \quad (5.26)$$

En utilisant l'expression exacte de $c(.,.)$, l'inégalité (5.26) devient alors :

$$\sup_{\eta \in \mathbf{L}^2} \frac{c(\eta, \mathbf{v})}{\|\eta\|} \geq \|\nabla \times \mathbf{v}\| \quad (5.27)$$

Il nous reste donc à relier $\|\nabla \times \mathbf{v}\|$ avec la norme de \mathbf{v} dans \mathbf{H}_0^1 , $|\mathbf{v}|_1$.

Un calcul algébrique montre qu'en dimension 2, la relation suivante est vérifiée :

$$\|\nabla \times \mathbf{v}\| = |\mathbf{v}|_1 \quad (5.28)$$

Aussi, la relation de Babüska-Brezzi est vérifiée avec une constante c valant 1.

En dimension 3, il nous faut utiliser l'expression suivante, valable sur l'espace des distributions $\mathbf{D}'(\Omega)$:

$$\Delta \mathbf{w} = \nabla^s \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{D}'(\Omega) \quad (5.29)$$

Si nous notons Φ un élément quelconque de l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, $\mathbf{D}(\Omega)$, l'expression précédente signifie exactement (par définition des dérivées au sens des distributions) :

$$\langle \nabla \mathbf{w}, \nabla \Phi \rangle = \langle \nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \Phi \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{w}, \nabla \cdot \Phi \rangle \quad (5.30)$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit de dualité entre $\mathbf{D}'(\Omega)$ et $\mathbf{D}(\Omega)$.

Or nous savons que $\mathbf{D}(\Omega)$ est dense dans \mathbf{H}_0^1 pour la norme $|\cdot|_1$. Par conséquent, l'égalité précédente est également valable pour tout élément Φ de \mathbf{H}_0^1 et au sens du produit scalaire de \mathbf{L}^2 .

Revenons maintenant à la démonstration de notre condition de type inf-sup. Comme nous avons la possibilité de choisir un η , élément quelconque de \mathbf{L}^2 , nous posons par définition :

$$\eta := \nabla \times \mathbf{v} \quad (5.31)$$

où \mathbf{v} est l'élément que nous avons fixé dans \mathbf{V} .

Puisque \mathbf{v} est un élément de \mathbf{H}_0^1 par définition de \mathbf{V} , de surcroît à divergence nulle, il nous est possible d'utiliser l'équation (5.30), qui nous donne dans ce cas précis :

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{v}) \quad (5.32)$$

où le vecteur Φ a été remplacé par \mathbf{v} .

Dès lors, avec notre choix de η , nous avons évidemment :

$$\begin{aligned} \sup_{\eta \in \mathbf{L}^2} \frac{c(\eta, \mathbf{v})}{\|\eta\|} &\geq \frac{c(\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{v})}{\|\nabla \times \mathbf{v}\|} \\ &\geq |\mathbf{v}|_1 \end{aligned} \quad (5.33)$$

en remarquant que nous avons la majoration $\|\nabla \times \mathbf{v}\| \leq |\mathbf{v}|_1$.

Par conséquent, la relation de Babūška-Brezzi est également vérifiée pour la dimension 3 avec une constante c , valant exactement 1. \square

Existence.

Dans cette partie, nous allons démontrer l'existence d'une solution au système d'équations (5.7)-(5.9).

Pour cela, nous introduisons quelques espaces fonctionnels supplémentaires. En particulier, nous définissons :

$$W := \{\eta \in \mathbf{L}^2 \mid c(\eta, \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\} \quad (5.34)$$

$$W^\perp := \{\eta \in \mathbf{L}^2, a(\eta, \phi) = 0 \forall \phi \in W\} \quad (5.35)$$

Nous aurons également besoin des polaires des espaces \mathbf{V} et W . Nous définissons donc ces deux espaces :

$$V^o := \{l \in \mathbf{H}_0^{1'}, \langle l, \mathbf{v} \rangle = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\} \quad (5.36)$$

$$W^o := \{l \in L^2, \langle l, \eta \rangle = 0 \forall \eta \in W'\} \quad (5.37)$$

où $\mathbf{H}_0^{1'}$, W' sont les duaux topologiques de respectivement \mathbf{H}_0^1 et W .

Remarque 5.3.1 *Le théorème ci-dessus sur l'existence de condition inf-sup pour les formes bilinéaire $b(.,.)$ et $c(.,.)$ est équivalent aux énoncés qui suivent (cf. [11]) :*

$$\forall l \in V^o \exists! q \in L^2 \mid b(\mathbf{v}, q) = \langle l, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (5.38)$$

$$\forall l \in W^o \exists! \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid c(\omega, \mathbf{v}) = \langle l, \omega \rangle \quad \forall \omega \in \mathbf{L}^2 \quad (5.39)$$

$$\forall l \in V' \exists! \omega \in W^\perp \mid c(\omega, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (5.40)$$

Dès lors, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.3.4 *Les équations (5.12)-(5.14) admettent une solution (\mathbf{u}, p, ω) dans $\mathbf{H}_0^1 \times L_0^2 \times \mathbf{L}^2$ qui dépend continûment des données initiales du problème. Plus exactement, il existe une constante c ne dépendant que du domaine Ω telle que l'on ait :*

$$\|\omega\| + \|\mathbf{u}\|_1 + \|p\| \leq c \|\mathbf{f}\| \quad (5.41)$$

Preuve du théorème:

Nous commençons par découpler les équations (5.12) à (5.14), ce qui donne :

$$(\omega, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in W \quad (5.42)$$

$$c(\phi, \mathbf{u}) = (\omega, \phi) \quad \forall \phi \in \mathbf{L}^2 \quad (5.43)$$

$$c(\omega, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (5.44)$$

$$b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - c(\omega, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (5.45)$$

Nous débuterons d'abord par prouver l'existence d'un élément de \mathbf{L}^2 satisfaisant les équations (5.42) et (5.44).

Connaissant \mathbf{f} , il nous est possible de définir une forme linéaire F_1 continue sur \mathbf{V} par :

$$\langle F_1, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (5.46)$$

Comme F_1 appartient à \mathbf{V}' , la condition de type Babūška-Brezzi sur la forme bilinéaire $c(.,.)$, nous permet d'affirmer qu'il existe un unique élément ω^\perp dans W^\perp vérifiant l'équation (5.44) (cf. remarque plus haut). Cette même condition inf-sup nous donne une première relation de continuité de notre

solution par rapport aux données du problème. En effet, nous avons la possibilité d'écrire toujours avec (5.44) :

$$\|\omega^\perp\| \leq c \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{c(\omega^\perp, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_1} \leq c \|\mathbf{f}\| \quad (5.47)$$

L'équation (5.42) nous permet quant à elle de définir entièrement le tourbillon ω . En effet, cette équation nous permet de conclure que le seul élément de \mathbf{L}^2 la satisfaisant, sachant que cet élément doit d'ores et déjà admettre comme projeté orthogonal sur W^\perp le scalaire ω^\perp , est ω^\perp lui-même.

Nous avons donc déjà démontré l'existence d'un élément de \mathbf{L}^2 satisfaisant les équations (5.44) et (5.42), ainsi que la contrainte de continuité sur les données du problème. Nous traitons maintenant l'existence d'une vitesse \mathbf{u} dans \mathbf{H}_0^1 satisfaisant l'équation (5.43).

Soit maintenant la forme linéaire F_2 continue sur \mathbf{L}^2 définie par :

$$\langle F_2, \phi \rangle = (\omega, \phi) \quad \forall \phi \in \mathbf{L}^2 \quad (5.48)$$

où ω est le tourbillon dont on vient de démontrer l'existence.

Dès lors l'équation (5.43) nous donne F_2 dans à W^o , polaire de W . En remarquant alors qu'il nous est dorénavant possible d'utiliser la remarque sur la condition inf-sup de la forme bilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ dans (5.43), nous obtenons l'existence d'un vecteur vitesse \mathbf{u} dans \mathbf{V} (cf. plus haut). De plus, cette même condition inf-sup nous permet d'écrire l'équation :

$$|\mathbf{u}|_1 \leq c \sup_{\eta \in \mathbf{L}^2} \frac{c(\eta, \mathbf{u})}{\|\eta\|} \leq c \|\omega\| \quad (5.49)$$

Or nous avons montré que ω est continu en fonction des données initiales, il en va donc de même pour la vitesse \mathbf{u} .

Il nous reste à démontrer l'existence d'une pression p dans L_0^2 et pour cela nous allons utiliser l'équation (5.45). Soit maintenant, une nouvelle forme linéaire continue F_3 définie sur \mathbf{H}_0^1 par :

$$\langle F_3, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - c(\omega, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (5.50)$$

La continuité est notamment due à l'utilisation d'une inégalité de Cauchy-Schwartz, au fait que $\|\omega\|$ est majoré par $\|\mathbf{f}\|$ et des inégalités :

$$\|\mathbf{v}\| \leq c|\mathbf{v}|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (5.51)$$

$$\|\nabla \times \mathbf{v}\| \leq c|\mathbf{v}|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (5.52)$$

Dès lors l'équation (5.44) nous assure que F_3 appartient à V^o , polaire de V . Par conséquent, la remarque sur la condition inf-sup donne l'existence d'une pression p , solution de (5.45). En outre, cette même inégalité inf-sup nous donne la continuité en fonction des données. En effet, nous avons :

$$\|p\| \leq c \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{|\mathbf{v}|_1} \leq c(\|f\| + \|\omega\|) \quad (5.53)$$

Enfin, il nous suffit de rappeler que $\|\omega\|$ est continue en fonction des données pour conclure. \square

Unicité.

Ce paragraphe, consacré à la démonstration de l'unicité des solutions des équations (5.12) à (5.14), est bref dans la mesure où les démonstrations sont similaires aux précédentes. En effet, ce sont l'ellipticité de $a(.,.)$ et les conditions de Babūška-Brezzi de $b(.,.)$ et $c(.,.)$ qui assurent cette unicité.

5.4 Discrétisation du problème triple.

Les contraintes imposées au maillage et aux éléments qui le constituent sont les mêmes que celles décrites dans le chapitre (Ch 2). Dès lors, nous nous concentrerons uniquement sur la définition des équations discrètes associées au problème triple, et de la validité de ces mêmes équations. Enfin, pour des raisons que nous évoquerons à la fin de ce chapitre, seul le cas de la dimension deux est traité dans les paragraphes qui suivent.

5.4.1 Définitions.

L'espace \mathbf{X}_h précédemment utilisé est l'espace des vitesses P_1 non conforme déjà utilisé auparavant, à savoir l'ensemble des fonctions vectorielles dont la restriction sur chaque élément K du maillage est un polynôme de degré 1

P_1 , et continues au milieu des arêtes/faces de ces mêmes éléments en 2D/3D. Nous noterons que ces fonctions ne sont pas continues.

Nous définissons ensuite deux espaces intermédiaires :

$$M_h^0 := \{q_h \in L^2(\Omega) \mid \forall K \in \tau_h \ q_h|_K \in P_0(K)\} \quad (5.54)$$

$$M_h^1 := \{q_h \in H^1(\Omega) \mid \forall K \in \tau_h \ q_h|_K \in P_1(K)\} \quad (5.55)$$

Ces deux espaces nous permettent de construire les espaces Y_h et \mathbf{Z}_h dans lesquels vont évoluer nos variables :

$$Y_h := (M_h^0 + M_h^1) \cap L_0^2(\Omega) \quad (5.56)$$

$$\mathbf{Z}_h := (M_h^0 + M_h^1)^{2d-3} \quad (5.57)$$

Les normes associées à ces différents espaces sont celles déjà utilisées plus avant, à savoir $\|\cdot\|_h$ pour tous les éléments de \mathbf{X}_h et $\|\cdot\|$ pour tous les éléments de Y_h et \mathbf{Z}_h .

Enfin, nous approchons le système d'équations (5.12)-(5.14), par un système d'équations sur des variables discrètes qui peut s'écrire comme :

$$a_h(\omega_h, \phi_h) - c_h(\phi_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in \mathbf{Z}_h \quad (5.58)$$

$$c_h(\omega_h, \mathbf{v}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad (5.59)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Y_h \quad (5.60)$$

où les inconnues sont $\mathbf{u}_h, p_h, \omega_h$ appartenant respectivement à \mathbf{X}_h , Y_h et \mathbf{Z}_h et avec les formes bilinéaires :

$$a_h(\eta_h, \phi_h) := (\eta_h, \phi_h) \quad \forall \eta_h, \phi_h \in \mathbf{Z}_h \quad (5.61)$$

$$c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h) := \sum_K (\eta_h^0, \nabla \times \mathbf{v}_h)_K + (\nabla^s \times \eta_h^1, \mathbf{v}_h)_K \quad \forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad (5.62)$$

La forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ est celle définie dans le chapitre (**Ch 2**).

Ces équations discrètes doivent donc être étudiées pour dans un premier temps, savoir si elles admettent une solution, si possible unique, et dans un deuxième temps, connaître le taux de convergence de notre solution discrète vers la solution continue des équations (5.12)-(5.14).

5.4.2 Solution au problème discret.

Notre objectif est, outre de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à notre système d'équations (5.58)-(5.60), de vérifier que celle-ci dépend continuellement des données du problème. A cette fin, il est indispensable de vérifier la continuité des différentes formes bilinéaires discrètes que nous souhaitons utiliser.

Etant donné que la forme bilinéaire de divergence discrète $b_h(.,.)$ satisfait déjà ces contraintes de continuité (voir pour cela [14]), il nous suffit de travailler sur $a_h(.,.)$ et $c_h(.,.)$. Les résultats sont regroupés dans le théorème suivant :

Théorème 5.4.1 *Les formes bilinéaires $a_h(.,.)$ et $c_h(.,.)$ sont continues sur respectivement $\mathbf{Z}_h \times \mathbf{Z}_h$ et $\mathbf{Z}_h \times \mathbf{X}_h$. Ainsi, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h telle que l'on ait :*

$$\forall \eta_h, \phi_h \in \mathbf{Z}_h \quad |a_h(\eta_h, \phi_h)| \leq c \|\eta_h\| \|\phi_h\| \quad (5.63)$$

$$\forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad |c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h)| \leq c \|\eta_h\| \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (5.64)$$

Preuve du théorème:

Montrons tout d'abord l'uniforme continuité de $a_h(.,.)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|$. Celle-ci est évidente puisque $a_h(.,.)$ est le produit scalaire associé à l'espace de Hilbert L^2 . Par conséquent, une simple application d'une majoration de Cauchy-Schwartz nous donne la réponse, avec une constante de continuité c valant exactement 1.

Occupons nous de la continuité de $c_h(.,.)$. En intégrant par partie l'un des deux membres de cette forme bilinéaire, nous obtenons l'expression avec η dans \mathbf{Z}_h et \mathbf{v}_h dans \mathbf{X}_h :

$$c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h) = (\eta_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) + \sum_K \int_{\partial K} \eta_h^1 \times \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h d\sigma \quad (5.65)$$

Dans ce qui précède, nous avons noté n_K le vecteur normal extérieur à l'élément K du maillage, tandis que l'expression $\eta_h^1 \times \mathbf{n}_K$ symbolise en 2D comme en 3D un vecteur tangentiel au bord de K .

Le premier membre de cette nouvelle expression se majore selon les normes souhaitées à l'aide d'une relation de Cauchy-Schwartz :

$$(\eta_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) \leq \|\eta_h\| \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (5.66)$$

Le second membre nécessite plus d'attention. Comme le vecteur $\eta_h^1 \times \mathbf{n}_K$ est continu le long des arêtes/faces de l'élément K (car η_h^1 l'est), l'expression suivante est valide :

$$\sum_K \int_{\partial K} \eta_h^1 \times \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h d\sigma = \sum_K \sum_{a \in \partial K} \int_{\partial K} \eta_h^1 \times \mathbf{n}_K (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a) d\sigma \quad (5.67)$$

où \mathbf{v}_h^a est la valeur moyenne de \mathbf{v}_h le long de l'arête/face a de l'élément K .

Nous utilisons ensuite la fonction affine qui envoie un élément K du maillage vers l'élément de référence \hat{K} , et la face f de K vers la face \hat{f} de \hat{K} . Grâce à l'équivalence des normes en dimension finie, l'intégrale précédente est alors majorée par :

$$\left| \int_f (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^f) \times \mathbf{n}_K \eta_h^1 d\sigma \right| \leq c|f| \int_{\hat{f}} |\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^f| |\widehat{\eta}_h^1| d\sigma \leq |f| \|\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^f\|_{1,K} \|\widehat{\eta}_h^1\|_K \quad (5.68)$$

avec $|f|$ mesure de la face f , et c une constante ne dépendant que de \hat{K} .

Définissons pour les besoins de cette démonstration, l'espace discret $\hat{\mathbf{X}}$ comme suit :

$$\hat{\mathbf{X}} := \{ \widehat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{P}_1(\hat{K}) \mid \int_{\hat{f}} \widehat{\mathbf{v}}_h d\sigma = 0; \hat{f} \text{ face de } \hat{K} \} \quad (5.69)$$

Compte tenu de la discrétisation adoptée pour la vitesse, il nous apparaît que le vecteur $\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^f$ appartient à $\hat{\mathbf{X}}$. Or à cause de l'injection compacte de $\mathbf{H}^1(\hat{K})$ dans $\mathbf{L}^2(\hat{K})$ et du lemme de Peetre-Tartar, la semi-norme $|\cdot|_{1,\hat{K}}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{1,\hat{K}}$ sur $\hat{\mathbf{X}}$. Nous avons donc l'équation :

$$\left| \int_f (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^f) \cdot \mathbf{n}_K \eta_h^1 d\sigma \right| \leq |f| \int_{\hat{f}} |\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^f| |\widehat{\eta}_h^1| d\sigma \leq c|f| \|\widehat{\mathbf{v}}_h\|_{1,K} \|\widehat{\eta}_h^1\|_K \quad (5.70)$$

Par suite, l'utilisation de la transformation affine envoyant \hat{K} sur K , nous autorise à écrire :

$$\left| \int_f (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^f) \times \mathbf{n}_K \eta_h^1 d\sigma \right| \leq c |\mathbf{v}_h|_{1,K} \|\eta_h^1\|_K \quad (5.71)$$

Dès lors, le second terme de (4.11) que nous cherchions à majorer uniformément en fonction des normes $\|\cdot\|_h$ et $\|\cdot\|$, s'évalue par :

$$\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \times \mathbf{n}_K \eta_h^1 d\sigma \leq c \sum_K |\mathbf{v}_h|_{1,K} \|\eta_h^1\|_K \leq c \|\mathbf{v}_h\|_h \|\eta_h^1\| \quad (5.72)$$

avec l'utilisation d'une inégalité de type Cauchy-Schwartz. \square

Bien que nécessaire, l'uniforme continuité des formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$, $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ ne suffit pas. Il nous faut également des conditions de type Babůska-Brezzi, équivalentes au cas continu. Grâce à [14], il nous suffit de démontrer l'existence d'une telle contrainte sur $c_h(\cdot, \cdot)$, l'inégalité recherchée existant pour $b_h(\cdot, \cdot)$ avec une constante indépendante de h . Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.4.2 *La forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$ vérifie une inégalité de type Babůska-Brezzi en dimension 2, sur $\mathbf{Z}_h \times \mathbf{X}_h$. Plus précisément, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h , telle que l'on ait :*

$$\sup_{\eta_h \in \mathbf{Z}_h} \frac{c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h)}{\|\eta_h\|} \geq c \|\mathbf{v}_h\|_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (5.73)$$

où \mathbf{V}_h est le noyau de la forme bilinéaire de divergence discrète $b_h(\cdot, \cdot)$.

Preuve du théorème:

Soit dans un vecteur \mathbf{v}_h de \mathbf{X}_h quelconque fixé. Comme nous sommes en dimension 2, ce vecteur se réécrit sous la forme :

$$\mathbf{v}_h := (v_h^1, v_h^2) \quad (5.74)$$

où v_h^1 et v_h^2 sont des fonctions scalaires P_1 sur chaque élément K du maillage et non conformes.

Nous pouvons alors écrire l'orthogonal de ce vecteur \mathbf{v}_h comme :

$$\mathbf{v}_h^\perp := (v_h^2, -v_h^1) \quad (5.75)$$

En outre, il est évident que \mathbf{v}_h et \mathbf{v}_h^\perp ont exactement la même norme, quelle que soit celle choisie.

Notons de plus que sous la contrainte supplémentaire $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ où \mathbf{V}_h est le noyau de $b_h(\cdot, \cdot)$, nous avons la propriété supplémentaire :

$$\mathbf{v}_h^\perp \in \mathbf{V}_h^\perp \quad (5.76)$$

avec \mathbf{V}_h^\perp orthogonal de \mathbf{V}_h pour le produit scalaire de R^2 .

Grâce à ces diverses propriétés, nous remarquons que selon les écritures de $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$, il existe une relation liant ces deux formes bilinéaires :

$$c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h) = -b_h(\mathbf{v}_h^\perp, \eta_h) \quad \forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h \quad (5.77)$$

Par conséquent, la condition de type Babüska-Brezzi pour la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$ découle directement de celle pour $b_h(\cdot, \cdot)$. En effet, il devient possible d'écrire (puisque en dimension 2, Y_h est inclus dans \mathbf{Z}_h) :

$$\frac{c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h)}{\|\eta_h\|} = \frac{-b_h(\mathbf{v}_h^\perp, \eta_h)}{\|\eta_h\|} \geq c \|\mathbf{v}_h^\perp\|_h = c \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (5.78)$$

L'existence d'une condition inf-sup pour la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$ est donc établie pour la dimension 2, avec de plus, le fait qu'elle soit indépendante du maillage choisie.

□

Remarque 5.4.1 *Le théorème ci-dessus nous permet d'ores et déjà d'obtenir un certain nombre d'enseignements. Tout d'abord, nous avons pu montrer que l'égalité suivante est vérifiée :*

$$c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h) = -b_h(\mathbf{v}_h^\perp, \eta_h) \quad \forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad (5.79)$$

Dès lors, si nous définissons les opérateurs ∇_h et $\nabla_h \times \cdot$ suivants par :

$$\begin{aligned} (\nabla_h q_h, \mathbf{v}_h) &:= b_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad \forall q_h \in M_h \\ (\nabla_h \times \eta_h, \mathbf{v}_h) &:= c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad \forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h \end{aligned}$$

nous obtenons la relation d'orthogonalité suivante :

$$\text{Im}(\nabla_h) \perp \text{Im}(\nabla_h \times \cdot) \quad \text{au sens de la norme } \mathbf{L}^2$$

Ceci signifie entre autre que $\text{Im}(\nabla_h \times \cdot) \subset \mathbf{V}_h$.

Ensuite, le fait que $c_h(\cdot, \cdot)$ vérifie des conditions inf-sup sur respectivement $\mathbf{Z}_h \times \mathbf{V}_h$, nous amène à l'égalité suivante :

$$\text{Im}(\nabla_h \times \cdot) := \mathbf{V}_h$$

Par suite, nous obtenons donc la décomposition \mathbf{L}^2 de \mathbf{X}_h en somme de sous-espaces orthogonaux :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &:= \text{Im}(\nabla_h) \oplus \text{Im}(\nabla_h \times \cdot) \\ \text{Im}(\nabla_h) &:= \mathbf{V}_h^\perp \end{aligned}$$

Remarque 5.4.2 Tout comme dans le cas continu, l'existence d'inégalités de type Babūška-Brezzi pour les formes bilinéaires $b_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ se traduit par les formulations équivalentes suivantes :

$$\forall l_h \in V_h^o \exists! q_h \in Y_h \mid b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \langle l_h, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad (5.80)$$

$$\forall l_h \in W_h^o \exists! \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{V}_h \mid c_h(\boldsymbol{\eta}_h, \mathbf{v}_h) = \langle l_h, \boldsymbol{\eta}_h \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{Z}_h \quad (5.81)$$

$$\forall l_h \in V_h' \exists! \boldsymbol{\eta}_h \in W_h^\perp \mid c_h(\boldsymbol{\eta}_h, \mathbf{v}_h) = \langle l_h, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (5.82)$$

$$(5.83)$$

où \mathbf{V}_h est le noyau de $b_h(\cdot, \cdot)$, V_h^o et W_h^o sont les polaires de respectivement \mathbf{V}_h et W_h , V_h' le dual topologique de \mathbf{V}_h et où :

$$W_h := \{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{Z}_h \mid c_h(\boldsymbol{\eta}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h\} \quad (5.84)$$

Existence et unicité.

Sous les conditions rappelées dans le paragraphe précédent, il nous est possible de suivre la démonstration d'existence faite pour les équations (5.12) à (5.14), l'adaptation nécessaire au cas discret ne présentant aucun problème.

Cette remarque vaut tout autant pour la démonstration de l'unicité de la solution pour notre systèmes d'équations discrètes (5.58)-(5.60).

Nous avons ainsi le théorème suivant :

Théorème 5.4.3 *Les équations (5.58)-(5.60) en dimension 2 admettent une solution unique $(\mathbf{u}_h, p_h, \omega_h)$ dans $\mathbf{X}_h \times Y_h \times \mathbf{Z}_h$ qui dépendent continûment des données initiales du problème. Plus exactement, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h , telle que l'on ait :*

$$\|\omega_h\| + \|\mathbf{u}_h\|_h + \|p_h\| \leq c\|\mathbf{f}\| \quad (5.85)$$

Preuve du théorème:

La même que pour le problème continu. \square

5.4.3 Convergence.

Dans ce paragraphe, nous allons établir l'erreur commise en approchant le problème continu (5.12)-(5.14) en 2 dimensions, par le problème discret (5.58)-(5.60). Le résultat de cette analyse est alors donné par le théorème :

Théorème 5.4.4 *Supposons que les solutions \mathbf{u} , p et ω du problème bi-dimensionnel continu (5.12)-(5.14) évolue respectivement dans $\mathbf{H}_0^1 \cap \mathbf{H}^2$, $L_0^2 \cap H^1$ et $L^2 \cap H^1$.*

Alors l'erreur commise entre la solution continue (5.12)-(5.14) et la solution discrète (5.58)-(5.60) est telle qu'il existe une constante c indépendante du pas du maillage h vérifiant :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h + \|p - p_h\| + \|\omega - \omega_h\| \leq ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\omega\|_1) \quad (5.86)$$

Preuve du théorème:

Commençons donc par estimer l'erreur commise sur le tourbillon ω , solution des équations (5.12)-(5.14).

Dans cette optique, nous aurons besoin de définir l'espace discret suivant :

$$W_h(\mathbf{f}) := \{\phi_h \in W_h \mid c_h(\phi_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h\} \quad (5.87)$$

Puisque le terme $(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)$ est continu en fonction de $\|\cdot\|_h$, ce nouvel espace discret est non vide, grâce à la condition inf-sup établie pour la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$.

Rappelons que nous appelons W_h l'espace discret suivant :

$$W_h := \{\eta_h \in \mathbf{Z}_h \mid c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h\} \quad (5.88)$$

Enfin, notons également que \mathbf{V}_h représente toujours le noyau de la forme bilinéaire de divergence discrète $b_h(\cdot, \cdot)$.

Dorénavant, fixons un élément ϕ_h quelconque de $W_h(\mathbf{f})$. Les équations discrètes (5.58)-(5.60) nous affirment que le tourbillon ω_h est un élément de $W_h(\mathbf{f})$. Par conséquent, les notations introduites ci-dessus nous donnent $\omega_h - \phi_h$ dans l'espace W_h .

Dès lors, nous écrivons à l'aide d'une inégalité triangulaire :

$$\|\omega - \omega_h\| \leq \|\omega - \phi_h\| + \|\omega_h - \phi_h\| \quad (5.89)$$

Cependant l'équation discrète (5.58) nous permet de majorer le dernier membre de l'inégalité précédente. En effet, nous avons alors :

$$\|\omega_h - \phi_h\|^2 \leq a_h(\omega_h - \phi_h, \omega_h - \phi_h) \leq c_h(\omega_h - \phi_h, \mathbf{u}_h) - a_h(\phi_h, \omega_h - \phi_h) \quad (5.90)$$

Cependant, nous savons que \mathbf{u}_h appartient à \mathbf{V}_h et que $\omega_h - \phi_h$ est quant à lui dans W_h . Compte tenu de la définition de cet espace, nous avons donc :

$$c_h(\omega_h - \phi_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad (5.91)$$

De plus, nous avons évidemment l'inclusion de W_h dans L^2 et par conséquent l'équation continue (5.12) peut se mettre sous la forme particulière :

$$a(\omega, \omega_h - \phi_h) - c(\omega_h - \phi_h, \mathbf{u}) = 0 \quad (5.92)$$

Dès lors, l'utilisation de ces deux propriétés dans l'inégalité (5.90) nous autorise la réécriture suivante :

$$\|\omega_h - \phi_h\|^2 \leq a_h(\omega - \phi_h, \omega_h - \phi_h) - c_h(\omega_h - \phi_h, \mathbf{u}) \quad (5.93)$$

Remarquons que pour un élément quelconque fixé \mathbf{v} de \mathbf{H}_0^1 , l'équation (5.65) nous donne l'égalité suivante :

$$c(\eta_h, \mathbf{v}) = c_h(\eta_h, \mathbf{v}) \quad \forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h \quad (5.94)$$

Introduisons maintenant un vecteur \mathbf{v}_h quelconque fixé de \mathbf{V}_h . Comme $\omega_h - \phi_h$ est un élément de W_h , la définition de cet espace discret nous permet alors d'obtenir :

$$\|\omega_h - \phi_h\|^2 \leq a_h(\omega - \phi_h, \omega_h - \phi_h) - c_h(\omega_h - \phi_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \quad (5.95)$$

Nous employons alors les propriétés d'uniforme continuité de nos formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ pour obtenir une nouvelle majoration :

$$\|\omega_h - \phi_h\| \leq c(\|\omega - \phi_h\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h) \quad (5.96)$$

où c est une constante indépendante de h .

Par conséquent, il nous devient possible d'obtenir la majoration d'erreur suivante pour le tourbillon ω :

$$\|\omega - \omega_h\| \leq c \left(\inf_{\phi_h \in W_h(\mathbf{f})} \|\omega - \phi_h\| + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h \right) \quad (5.97)$$

Cherchons maintenant à évaluer l'erreur commise sur le vecteur vitesse \mathbf{u} solution de (5.12)-(5.14).

Soit donc un vecteur \mathbf{v}_h quelconque fixé de \mathbf{V}_h . L'utilisation de l'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_h \quad (5.98)$$

où \mathbf{u}_h est le vecteur vitesse solution de (5.58)-(5.60).

Comme $\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h$ est un élément de \mathbf{V}_h , il nous est possible d'utiliser la condition inf-sup établie pour la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$:

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_h \leq c \sup_{\eta_h \in \mathbf{Z}_h} \frac{c_h(\eta_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h)}{\|\eta_h\|} \quad (5.99)$$

où c est l'inverse de la constante assurant la condition de Babůska-Brezzi .

Ensuite, nous utilisons l'équation (5.59) afin de modifier l'inégalité précédente :

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_h \leq c \sup_{\eta_h \in \mathbf{Z}_h} \frac{a_h(\omega_h, \eta_h) - c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h)}{\|\eta_h\|} \quad (5.100)$$

En utilisant l'inclusion de \mathbf{Z}_h dans L^2 et à nouveau l'équation continue (5.12), nous pouvons encore obtenir :

$$a(\omega, \eta_h) - c(\eta_h, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h \quad (5.101)$$

Par conséquent, si nous retirons la ligne ci-dessus à l'équation (5.100), nous obtenons une nouvelle inégalité qui se met sous la forme :

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_h \leq c \sup_{\eta_h \in \mathbf{Z}_h} \frac{a_h(\omega_h - \omega, \eta_h) + c_h(\eta_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h)}{\|\eta_h\|} \quad (5.102)$$

Il nous suffit ensuite d'utiliser les propriétés d'uniforme continuité des formes bilinéaires $a_h(.,.)$ et $c_h(.,.)$ afin d'avoir :

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_h \leq c (\|\omega - \omega_h\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h) \quad (5.103)$$

Enfin, si nous réunissons les différentes relations obtenues (y compris la majoration d'erreur sur le tourbillon ω), nous pouvons écrire la majoration d'erreur pour la vitesse \mathbf{u} , à savoir :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq c \left(\inf_{\phi_h \in W_h(\mathbf{f})} \|\omega - \phi_h\| + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h \right) \quad (5.104)$$

Il nous reste finalement à évaluer l'erreur commise sur la pression p solution des équations (5.12)-(5.14).

Soit donc un élément quelconque q_h fixé de Y_h . L'utilisation d'une inégalité triangulaire nous amène à écrire :

$$\|p - p_h\| \leq \|p - q_h\| + \|p_h - q_h\| \quad (5.105)$$

avec p_h solution des équations discrètes (5.58)-(5.60).

Comme $p_h - q_h$ est un élément de Y_h , la condition uniforme de Babūška-Brezzi sur la forme bilinéaire de divergence discrète $b_h(.,.)$ nous permet d'écrire la majoration suivante :

$$\|p_h - q_h\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \quad (5.106)$$

où c est une constante indépendante de h .

Nous utilisons alors l'équation discrète (5.59) afin de modifier l'équation précédente, qui devient :

$$\|p_h - q_h\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - c_h(\omega_h, \mathbf{v}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \quad (5.107)$$

Nous remarquons alors que le problème triple continu s'écrit sous sa forme faible :

$$\nabla^s \times \omega + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.108)$$

Par conséquent, en multipliant ces équations par un vecteur \mathbf{v}_h quelconque de \mathbf{X}_h et en intégrant l'équation résultante par partie, nous trouvons l'équation variationnelle suivante :

$$c_h(\omega, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) + \sum_K \int_{\partial K} \omega \times \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h + p \cdot \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h d\sigma \quad (5.109)$$

où les deux derniers termes sont dus à la non conformité de l'espace \mathbf{X}_h .

Ces termes supplémentaires peuvent se majorer de manière classique, ce qui nous permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$\left| \sum_K \int_{\partial K} \omega \times \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h d\sigma \right| \leq ch \|\omega\|_1 \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (5.110)$$

$$\left| \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h d\sigma \right| \leq ch \|p\|_1 \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (5.111)$$

Nous intégrons ensuite ces trois dernières relations dans la majoration (5.107) afin d'obtenir ce qui suit :

$$\|p_h - q_h\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{(c_h(\omega - \omega_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p - q_h))}{\|\mathbf{v}_h\|_h} + ch (\|p\|_1 + \|\omega\|_1) \quad (5.112)$$

Puis nous utilisons l'uniforme continuité des formes bilinéaires discrètes $c_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\|p_h - q_h\| \leq c (\|\omega - \omega_h\| + \|p - q_h\|) + ch (\|p\|_1 + \|\omega\|_1) \quad (5.113)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire initiale sur la pression, la majoration d'erreur sur le tourbillon ω et notre toute dernière inégalité, nous obtenons la majoration d'erreur suivante pour la pression p :

$$\begin{aligned} \|p - p_h\| \leq c & \left(\inf_{\phi_h \in W_h(\mathbf{f})} \|\omega - \phi_h\| + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\| \right) \\ & + ch(\|p\|_1 + \|\omega\|_1) \end{aligned} \quad (5.114)$$

Pour conclure de manière définitive, il nous faut préciser le comportement des termes $\inf_{\phi_h \in W_h(\mathbf{f})} \|\omega - \phi_h\|$ et $\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h$ en fonction du pas du maillage h . Or d'après [11], ces grandeurs sont majorées par les inégalités :

$$\inf_{\phi_h \in W_h(\mathbf{f})} \|\omega - \phi_h\| \leq c \inf_{\phi_h \in W_h} \|\omega - \phi_h\| \quad (5.115)$$

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in X_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h \quad (5.116)$$

où c représente l'inverse des constantes des inégalités de type Babūška-Brezzi pour les formes bilinéaires discrètes $b_h(.,.)$ et $c_h(.,.)$.

Par conséquent, nous pouvons en conclure que ces majorations d'erreur sont optimales en dimension 2. \square

5.4.4 Meilleure décomposition de L^2 .

Ce petit paragraphe est destiné à montrer, et ce uniquement pour la dimension 2, que le tourbillon possède des propriétés analogues à celles démontrées pour la pression dans le chapitre (Ch 4).

Nous commencerons donc par établir le théorème suivant :

Théorème 5.4.5 *Soit \mathbf{v}_h un élément quelconque \mathbf{V}_h^\perp . Alors, \mathbf{v}_h vérifie :*

$$\sum_K \int_K \nabla^s \times \phi_h^2 \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall \phi_h^2 \in M_h^2 \quad (5.117)$$

Preuve du théorème:

Pour démontrer ce théorème, nous remarquons à nouveau que si \mathbf{v}_h appartient à \mathbf{V}_h^\perp alors \mathbf{v}_h^\perp appartient à \mathbf{V}_h .

De plus, nous avons la propriété suivante, déjà rencontrée plus haut :

$$c_h(\eta_h, \mathbf{v}_h) = -b_h(\mathbf{v}_h^\perp, \eta_h) \quad \forall \eta_h \in \mathbf{Z}_h \quad (5.118)$$

Ces deux propriétés nous suffisent dès lors pour établir le théorème, qui devient exactement équivalent au théorème (**Th** 4.3.2) \square

Du coup et grâce aux arguements développés ci-dessus, il nous devient très facile d'établir le théorème suivant :

Théorème 5.4.6 *Soit Φ un élément quelconque fixé de $H^4 \cap L_0^2$ et tel que $|\Phi|_4$ soit non nul. Soit η un élément quelconque fixé H^4 et tel que $|\eta|_4$ soit non nul. Soit ω_h , \mathbf{u}_h et p_h trois éléments de, respectivement, \mathbf{Z}_h , \mathbf{X}_h et M_h solutions des équations de Stokes particulières suivantes :*

$$\begin{aligned} a_h(\omega_h, \phi_h) - c_h(\phi_h, \mathbf{u}_h) &= 0 \quad \forall \phi_h \in \mathbf{Z}_h \\ c_h(\omega_h, \mathbf{v}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\nabla \Phi, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Y_h \end{aligned}$$

Alors, nous avons les propriétés de superconvergence suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h &\leq c(\Phi)h^5 \\ \|\omega_h\| &\leq c(\Phi)h^5 \\ \|p_h - \Phi\| &\leq c(\Phi)h^2 \end{aligned}$$

où $c(\Phi)$ ne dépend que de la fonction Φ .

Preuve du théorème:

Nous avons déjà démontré au cours du théorème (**Th** 5.4.3) que la relation suivante est vérifiée :

$$\|\mathbf{u}_h\|_h \leq c\|\omega_h\|$$

où c est une constante indépendante du pas du maillage h .

Pour obtenir la majoration attendue sur $\|\mathbf{u}_h\|_h$, il nous suffit donc de l'établir sur $\|\omega_h\|$. Or compte tenu de la relation inf-sup vérifiée par la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$, nous avons :

$$\|\omega_h\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{c_h(\omega_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h}$$

où c est une constante indépendante de h .

En utilisant alors la seconde équation des équations données dans l'énoncé du théorème, nous obtenons également :

$$\|\omega_h\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\nabla \Phi, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h}$$

Il nous suffit alors de reprendre les démonstrations du théorème (**Th** 4.3.4) du chapitre (**Ch** 4) pour établir les inégalités une et deux de ce théorème.

Ensuite, l'inégalité sur l'erreur en pression s'obtient de manière analogue aux démonstrations du théorème (**Th** 4.3.4). \square

5.5 Conclusion.

La nouvelle formulation introduite ne répond que partiellement à la question initiale : certes, nous obtenons une vitesse de convergence importante sur la pression, le tourbillon et la vitesse, mais uniquement en dimension deux d'espace.

En effet, le cas de la dimension 3 est plus délicat et cela est notamment le fait de la forme bilinéaire $c_h(.,.)$ qui ne s'écrit plus simplement à partir de la forme de divergence discrète $b_h(.,.)$. En effet, le tourbillon discret η_h est alors un vecteur tandis que la pression discrète q_h est un scalaire, par conséquent les manipulations faites lors du théorème démontrant la condition inf-sup discrète ne peuvent plus s'appliquer : pour l'instant nous sommes incapables de montrer l'existence d'une telle condition inf-sup. Toutefois, il faut remarquer que la démonstration de continuité de la forme bilinéaire $c_h(.,.)$ est tout à fait généralisable au cas tridimensionnel.

Une question naturelle surgit alors : cette formulation triple "vitesse-pression-tourbillon" est-elle la plus adaptée ou en existe-t-il d'autres ? En effet, nous aurions pu également choisir comme troisième variable le tenseur des vitesses $\nabla \mathbf{u}$ et lui associer une formulation variationnelle adaptée, ou encore choisir le tenseur des déformation $\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t$ et également lui faire

correspondre un nouveau problème. Ces solutions sont tout à fait envisageables et mériteraient en effet d'être approfondies.

Chapitre 6

Convection.

Suite aux développements du chapitre (Ch 4), nous allons nous attarder quelque peu sur la discrétisation de l'opérateur de convection. Nous verrons que nous sommes en mesure d'obtenir un opérateur discret, qui soit conservatif en terme d'énergie.

6.1 Propriétés.

Pour rappeler brièvement les propriétés qui nous intéressent, nous aurons besoin des notations suivantes.

Soit d la dimension spatiale du problème. Soit Ω un ouvert borné de R^d , suffisamment régulier. Soit T un réel quelconque fixé et t un réel quelconque de l'intervalle $[0, T]$.

Nous supposons également connu pour tout t et tout \mathbf{x} de Ω , le vecteur vitesse $\mathbf{u} := \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, qui sera supposé être à divergence nulle pour tout t . Enfin, soit le scalaire $S := S(\mathbf{x}, t)$ régit par l'équation de transport suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t S + \mathbf{u} \cdot \nabla S &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ S(\mathbf{x}, 0) &= s_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $s_0(\mathbf{x})$ est une fonction de Ω donnée à valeur dans R , \mathbf{n} le vecteur normal extérieur à Ω et où les conditions aux limites sur S sont données sur

l'ensemble de points :

$$\Gamma_{in} := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0\}$$

Les équations (6.1) s'écrivent également sous la forme variationnelle suivante :

$$(\partial_t S, r) + (\mathbf{u} \cdot \nabla S, r) = 0 \quad (6.2)$$

où $r := r(t, \mathbf{x})$ est une fonction définie dans un espace approprié, auquel appartient du reste la fonction S .

Enfin, nous appellerons terme de transport, la fonction de \mathbf{x} et de t suivante :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla S$$

Ces quelques éléments mis en place, nous allons rappeler deux des propriétés des équations (6.1) ou de manière équivalente des équations (6.2). Tout d'abord, les équations de transport conservent l'énergie (évaluée en norme L^2) de la fonction S . Il suffit pour cela de constater que l'énergie produite par le terme de transport est nulle, ce qui s'obtient à partir de (6.2) en posant $r = S$ et en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla S, S) &:= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla S) S \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla S^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (S^2 \mathbf{n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, l'équation de transport vérifie un principe du maximum. Ceci se traduit par la propriété suivante (conservation de la norme L^∞ au cours du temps) :

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} s_0(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}, t) \leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} s_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, T]$$

6.2 Discrétisation

Dans ce paragraphe, nous aurons besoin de discrétiser certaines variables et donc de définir des espaces de discrétisation. Tout d'abord, soit \mathcal{T}_h un

maillage du domaine de l'écoulement Ω , composé de triangles en deux dimension ou de tétraèdres en dimension trois, notés K . Nous introduisons ensuite, de manière formelle, l'espace des vitesses discrètes que nous noterons \mathbf{X}_h . L'espace des scalaires P_1 conforme sera noté \bar{X}_h , dont la définition est rappelé plus précisément dans (Ch 2).

Soit donc \mathbf{u}_h une vitesse discrète de \mathbf{X}_h . La forme variationnelle discrète des équations (6.2) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$(\partial_t S_h, r_h) + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla S_h, r_h) \quad \forall r_h \in \bar{X}_h \quad (6.3)$$

où l'inconnue est le scalaire $S_h := S_h(\mathbf{x}, t)$ supposé appartenir à \bar{X}_h .

Nous cherchons à voir si l'équation de transport discrète possède la même caractéristique que l'équation de transport continue, à savoir conservation de l'énergie en norme L^2 .

La conservation de l'énergie de la solution S_h est fonction de l'énergie due au terme de transport discret. Or l'énergie de ce dernier (évaluée en norme L^2), s'obtient en remplaçant dans (6.3), la fonction r_h par la fonction S_h et en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla S_h, S_h) &:= \sum_K \int_K (\mathbf{u}_h \cdot \nabla S_h) S_h \\ &= \frac{1}{2} \sum_K \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla (S_h^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h S_h^2 d\Omega + \sum_K \int_{\partial K} \mathbf{u}_h \cdot (S_h^2 \mathbf{n}) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

où K est un élément quelconque du maillage \mathcal{T}_h .

Deux cas peuvent alors se présenter. Soit, les éléments finis utilisés pour définir la vitesse sont tels que la divergence de la vitesse \mathbf{u}_h peut être nulle par élément (exemple : éléments finis de Crouzeix-Raviart, éléments finis P_2/P_0 ...), auquel cas l'expression (6.4) se réduit au terme de sauts le long des faces du maillage. Soit, nous utilisons des éléments finis de type P_k/P_{k-1} auquel cas l'équation (6.4) se réduit au terme en $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$ (les termes \mathbf{u}_h et S_h étant

alors continus tous deux, le terme de saut s'annule).

Toutefois, dans chacun de ces cas, l'équation (6.4) ne peut s'annuler en général. Dans le cas où \mathbf{u}_h est à divergence nulle par élément, nous n'avons aucune relation a priori entre la trace de \mathbf{u}_h sur chaque élément K et la trace normale d'un polynôme de degré 2 par élément (c'est bien le cas pour S_h^2). Dans le cas où nous utiliserions des éléments finis du type P_k/P_{k-1} , l'absence de condition inf-sup ne nous permet pas d'obtenir une vitesse à divergence nulle par élément. Par conséquent, le terme de transport discret introduit généralement une énergie supplémentaire dans l'équation de transport : il n'y aura donc par conservation globale de l'énergie.

Il est également bien connu (cf. entre autre [15]) que l'opérateur de transport discret présenté ci-dessus ne préserve pas la stabilité de S_h en norme L^∞ : ceci vient du fait que les coefficients extra-diagonaux de la matrice associée à cet opérateur peuvent être strictement négatifs. Ces coefficients négatifs sont en effet responsables de l'apparition de comportements oscillatoires dans la solution numérique de l'équation de transport, et aboutissent parfois à dépasser les valeurs limites $\sup_{\mathbf{x},n,\Omega} s_0(\mathbf{x})$ et $\inf_{\mathbf{x}\in\Omega} s_0(\mathbf{x})$.

Pouvons-nous apporter quelques solutions à ces problèmes ? Obtenir la conservation de l'énergie en norme L^2 est en fait accessible facilement en modifiant légèrement la définition de la vitesse \mathbf{u}_h . En effet, nous avons déjà vu dans le chapitre (**Ch 4**) que nous pouvions choisir une vitesse \mathbf{u}_h comme élément de \mathbf{X}_h à divergence nulle par élément et telle que :

$$\sum_K \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h^2 dK = 0 \quad (6.5)$$

où q_h^2 est un élément quelconque de M_h^2 , espace des éléments finis P_2 de Lagrange (la définition de M_h^2 est également donnée au chapitre (**Ch 4**)).

Il suffit pour cela que la vitesse \mathbf{u}_h appartienne au noyau des formes bilinéaires suivantes :

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) := \begin{cases} \sum_K \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h dK + \int_{\partial K} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] q_h^1 d\sigma & \text{en dimension 2} \\ \sum_K \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h dK + \int_{\partial K} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] (q_h^1 + q_h^a) d\sigma & \text{en dimension 3} \end{cases}$$

où q_h est un élément de M_h tel que :

$$\left. \begin{array}{l} M_h := M_h^0 + M_h^1 \\ q_h := q_h^0 + q_h^1, \quad q_h^0 \in M_h^0, \quad q_h^1 \in M_h^1 \end{array} \right\} \text{ en dimension 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_h := M_h^0 + M_h^1 + M_h^a/M_h^{1,p} \\ q_h := q_h^0 + q_h^1 + q_h^a, \quad q_h^0 \in M_h^0, \quad q_h^1 \in M_h^1, \quad q_h^a \in M_h^a/M_h^{1,p} \end{array} \right\} \text{ en dimension 3}$$

Ensuite, une simple intégration par partie de (6.5) nous permet d'obtenir :

$$\sum_K \int_{\partial K} q_h^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

Du coup, pour une vitesse satisfaisant (6.5) en plus de la contrainte de divergence nulle par élément, la relation (6.4) devient égale à 0. Nous obtenons ainsi la conservation de l'énergie de norme L^2 .

Chapitre 7

Pénalisation des discontinuités.

7.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à la pénalisation des discontinuités de la vitesse, lorsque les équations de Navier-Stokes sont résolues numériquement à l'aide d'éléments finis, définissant une vitesse discontinue. En effet, la construction de ce type d'éléments finis repose sur le fait que les degrés de liberté définissant la vitesse sont situés le long des arêtes du maillage (ou au barycentre des faces en 3 dimensions), et par là même imposent la continuité en ce seul point.

Ce type d'éléments finis est, en effet, le plus simple que l'on puisse obtenir pour avoir une convergence uniforme en fonction du pas du maillage : caractérisé par des polynômes de degré 1 sur chaque élément du maillage (donc de plus petit degré possible pour obtenir un taux de convergence optimal), il ne peut être remplacé par des éléments finis de type P_1 conforme puisque le nombre total de degrés de liberté est alors insuffisant pour vérifier une condition de Babūška-Brezzi uniforme.

Malgré cela, il apparaît contradictoire, d'un point de vue purement physique, d'obtenir comme solution numérique, une vitesse qui soit non continue, alors que l'écoulement que l'on souhaite simuler l'est. De plus, un tel choix d'espace discret introduit des instabilités numériques malvenues ; ainsi l'opérateur de diffusion appliqué à la vitesse crée des courants de diffusion parasites et donc non "physiques" (cf. [14]).

Une solution possible consiste évidemment à choisir un autre espace discret qui cette fois sera continu. Malheureusement, cette solution n'est que partiellement satisfaisante dans la mesure où le plus petit espace possible satisfaisant la condition inf-sup et donc une vitesse à divergence nulle par élément K du maillage (P1+bulle pour la vitesse, P0 pour la pression) entraîne un surcoût tant au niveau de la place mémoire que du temps calcul.

Une approche intermédiaire consiste donc non pas à éliminer totalement la partie discontinue de la vitesse, mais à en limiter si possible les effets néfastes sur la qualité physique et numérique du résultat. Ceci peut s'obtenir entre autre par la pénalisation de la partie discontinue des grandeurs physiques discrètes : ce sont quelques unes de ces méthodes qui vont être décrites et étudiées ci-dessous.

7.2 Définitions.

Avant de commencer les démonstrations, il est nécessaire de faire quelques rappels de notations. On rappelle que \mathbf{X}_h est l'espace des fonctions vectorielles dites P_1 non conformes sur le maillage du domaine physique et que $\bar{\mathbf{X}}_h$ est l'ensemble des fonctions vectorielles dites P_1 conformes sur le dit maillage : nous avons donc respectivement des fonctions discrètes discontinues et discrètes continues sur notre maillage, avec la relation ensembliste suivante $\bar{\mathbf{X}}_h \subset \mathbf{X}_h$. Ces espaces sont dotés de la norme $\|\cdot\|_h$.

Par conséquent, il devient possible de décrire précisément l'ensemble des fonctions seulement discontinues comme étant un supplémentaire de $\bar{\mathbf{X}}_h$ dans \mathbf{X}_h , et qui sera noté par la suite \mathbf{X}_h' . La définition exacte qui sera adoptée dépendra des méthodes employées décrites par la suite. Dès lors et compte tenu de notre objectif, il apparaît naturel de pénaliser cet espace \mathbf{X}_h' selon deux types de procédé.

Nous définissons également un espace de fonctions scalaires, noté M_h , vérifiant une condition de type Babūška-Brezzi avec \mathbf{X}_h :

$$\exists c \neq c(h) \mid \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h\| \quad \forall q_h \in M_h$$

où h est le pas du maillage et où $||\cdot||$ désigne une norme donnée sur M_h .

Dans un premier temps, il semble naturel de limiter l'impact des discontinuités et donc de limiter les sauts de nos variables discrètes. C'est ce que nous avons dénommé la méthode de pénalisation des sauts. Mais il est également possible de limiter l'énergie des discontinuités à travers un terme de pénalisation bien choisi ; ce que nous avons dénommé pénalisation de l'énergie discontinue.

7.3 Méthodes de pénalisation.

Bien que portant des noms différents (des sauts ou de l'énergie discontinue), les méthodes de pénalisation envisagées ici peuvent se regrouper dans un même cadre mathématique, seules leurs interprétations pouvant alors se distinguer.

Ainsi les méthodes de pénalisation décrites ici, se caractérisent par l'ajout dans les équations de Navier-Stokes discrètes usuelles d'un terme de pénalisation particulier (dépendant de la méthode) et qui sous forme variationnelle sera représenté par la forme bilinéaire suivante :

$$d : \mathbf{X}_h' \times \mathbf{X}_h' \rightarrow R \quad (7.1)$$

$$d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h) = \sum_K \frac{1}{\varepsilon_K} d_K(\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h) \quad (7.2)$$

où $\varepsilon_h = (\varepsilon_K)_K$ est une famille de paramètres fixés, dont chaque élément peut être individuellement choisi sur les éléments K du maillage et où $d_K(\cdot, \cdot)$ est une famille de formes bilinéaires fixées définies sur $\mathbf{X}_h' \times \mathbf{X}_h'$.

Nous noterons également $a^*(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire de diffusion pénalisée, définie sur $X \times \mathbf{X}_h$ par la relation suivante :

$$a^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h) \quad (7.3)$$

où \mathbf{u}'_h et \mathbf{v}'_h sont les projetés sur \mathbf{X}_h' de respectivement $\mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_h$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$.

Enfin, nous ferons également les hypothèses (qui seront démontrées lorsque nous donnerons la forme exacte des termes de pénalisation) d'ellipticité de la forme bilinéaire de diffusion pénalisée et de continuité de cette même forme bilinéaire :

$$\exists \alpha(h) \mid \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad \alpha(h) \|\mathbf{v}_h\|_h \leq a^*(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \quad (7.4)$$

$$\exists \beta(h) \mid \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad a^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \leq \beta(h) \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (7.5)$$

Suite à toutes ces définitions, nous introduisons les nouvelles équations de Stokes discrètes à résoudre, qui se mettent donc sous la forme :

$$a^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad (7.6)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h \quad (7.7)$$

L'idée que nous allons dès à présent suivre est très simple. Dans un premier temps, nous allons montrer l'existence et l'unicité d'une solution à (7.6), qui ne sont rien d'autres que les équations de Stokes auxquelles nous avons simplement rajoutées des termes de pénalisation. Par la suite, nous évaluerons le taux de convergence de la solution discrète de (7.6) vers la solution continue de (2.9)-(2.10), notamment en fonction des paramètres $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ introduits plus tôt. Enfin et puisque les démarches décrites ci-dessus auront été réalisées de manière globale, nous définirons exactement les termes de pénalisation en fonction des méthodes employées et nous en profiterons pour vérifier les différentes assertions présumées dans ce paragraphe.

7.4 Solution au système pénalisé.

7.4.1 Unicité.

Supposons donc l'existence d'une solution à (7.6) établie. Ayant supposé l'ellipticité de la forme bilinéaire $a^*(\cdot, \cdot)$, il est alors évident que la vitesse est unique. Par la suite, l'unicité de la pression est tout aussi évidente à établir dans la mesure où la forme bilinéaire de divergence discrète suit une inégalité de type Babūška-Brezzi sur nos espaces discrets de vitesse et de pression. En conséquence, notre problème discret (7.6) admet bien une unique solution si celle-ci existe.

7.4.2 Existence.

De la même façon que pour la démonstration de l'unicité, les preuves de l'existence de solution aux équations (7.6) s'établissent de manière standard. En effet, l'ellipticité de la forme bilinéaire $a^*(.,.)$ assure l'existence d'une vitesse discrète à nos équations pénalisées. De la même façon, la condition de Babūška-Brezzi permet de conclure à l'existence d'une pression discrète non trivialement nulle. De plus, ces contraintes nous permettent de conclure à la continuité des solutions en fonction des données, c'est-à-dire plus précisément que l'on a l'inégalité suivante :

$$\exists \eta(h) \mid \| \mathbf{u}_h \|_h + \| p_h \| \leq \eta(h) \| \mathbf{f} \| \quad (7.8)$$

7.4.3 Convergence.

Rappelons au passage quelques notations qui seront utiles pour notre démonstration. Ainsi \mathbf{V}_h désigne l'ensemble des fonctions vectorielles de \mathbf{X}_h à divergence discrète nulle, pour la forme bilinéaire $b(.,.)$. Nous utiliserons également le projecteur \mathbf{H}_0^1 -orthogonal de \mathbf{H}_0^1 sur $\bar{\mathbf{X}}_h$ désigné par la suite par la notation $\bar{\mathbf{P}}_h^1$.

Suite à ces notations, nous donnons l'énoncé du théorème :

Théorème 7.4.1 *Soit \mathbf{u}, p les solutions du problème de Stokes (2.9)-(2.10) que l'on supposera respectivement dans $\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1$ et $L^2 \cap H^1$.*

Si \mathbf{u}_h, p_h désignent respectivement la vitesse et la pression solutions des équations (7.6), alors on a la majoration d'erreur suivante :

$$\exists c(h, \varepsilon_h) \mid \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_h + \| p - p_h \| \leq c(h, \varepsilon_h) h (\| \mathbf{u} \|_2 + \| p \|_1) \quad (7.9)$$

Preuve du théorème:

Cette démonstration s'obtient de manière classique. On commencera donc par évaluer l'erreur commise sur la vitesse, avant de déterminer l'erreur en pression.

Soit \mathbf{v}_h un vecteur quelconque fixé de \mathbf{V}_h . Nous noterons par soucis de commodité, \mathbf{e}_h (resp. \mathbf{e}'_h) les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_h &:= \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \\ \mathbf{e}'_h &:= \mathbf{u}'_h - \mathbf{v}'_h \end{aligned}$$

où les vecteurs $\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}$ et $\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}$ sont bien évidemment des éléments de $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$ issus de la décomposition des vecteurs $\mathbf{u}_{\mathbf{h}}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{h}}$ de $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}$ sur les sous-espaces supplémentaires $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$ et $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$.

On commence par écrire l'inégalité triangulaire classique suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_h \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h + \|\mathbf{e}_{\mathbf{h}}\|_h \quad (7.10)$$

Nous allons essayer de majorer le terme $\|\mathbf{e}_{\mathbf{h}}\|_h$ à l'aide des équations (7.6) et des grandeurs physiques \mathbf{u}, p . Nous commençons donc par écrire :

$$\|\mathbf{e}_{\mathbf{h}}\|_h^2 \leq a^*(\mathbf{e}_{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_{\mathbf{h}}) \leq a^*(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_{\mathbf{h}}) - a^*(\mathbf{v}_{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_{\mathbf{h}}) \quad (7.11)$$

Considérons (7.6), les égalités précédentes peuvent se réécrire comme suit :

$$\|\mathbf{e}_{\mathbf{h}}\|_h^2 \leq (\mathbf{f}, \mathbf{e}_{\mathbf{h}}) - a^*(\mathbf{v}_{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_{\mathbf{h}}) \quad (7.12)$$

Le premier terme du membre de droite se réécrit en fonction des équations (2.9)-(2.10) (nous négligerons les termes dus à la non conformité dans la mesure où leurs comportements ont été déjà étudiés dans [28] ou [14]) :

$$\|\mathbf{e}_{\mathbf{h}}\|_h^2 \leq a(\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_{\mathbf{h}}) + b(\mathbf{e}_{\mathbf{h}}, p - q_h) - d(\varepsilon_h, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{e}_{\mathbf{h}}) \quad (7.13)$$

où q_h est un élément quelconque de M_h .

Nous avons précédemment supposé la continuité de la forme bilinéaire $a^*(., .)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_h$. Nous pouvons donc en conclure qu'il en est de même pour la forme bilinéaire $d(\varepsilon_h, ., .)$, avec une constante de continuité $c(\varepsilon_h, h)$ qui peut dépendre de la famille de paramètre ε_h mais aussi du paramètre h . Tenant compte de cela, il devient alors possible d'écrire la majoration suivante :

$$\|\mathbf{e}_{\mathbf{h}}\|_h^2 \leq (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h + \|p - q_h\| + c(\varepsilon_h, h)\|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1 \mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h) \|\mathbf{e}_{\mathbf{h}}\|_h \quad (7.14)$$

car nous utilisons le fait que $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$ et $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$ sont supplémentaires dans $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}$.

Ensuite, il nous suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire sur le terme gênant et le fait que la solution \mathbf{u} est également supposée dans \mathbf{H}^2 :

$$\|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1 \mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h \leq \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1 \mathbf{u}\|_h + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h \leq ch\|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h \quad (7.15)$$

où c est une constante indépendante de h .

En utilisant l'inégalité triangulaire initiale, il nous est alors possible d'écrire la majoration suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h + c \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\| + c(\varepsilon_h, h)h \|\mathbf{u}\|_2 \quad (7.16)$$

où les c sont des constantes indépendantes de h .

Avant de conclure définitivement sur l'analyse d'erreur concernant la vitesse \mathbf{u} , nous rappelons l'inégalité suivante démontrée dans [11]

$$\exists c \mid \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_h \quad (7.17)$$

Ceci nous permet finalement de conclure à la majoration :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \leq ch (\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1) + c(\varepsilon_h, h)h \|\mathbf{u}\|_2 \quad (7.18)$$

Tachons d'établir la convergence de la pression discrète p_h vers la pression continue p . Pour cela, nous notons d'abord q_h une pression discrète quelconque de l'espace M_h et rappelons également que notre forme bilinéaire de divergence discrète $b(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition de type Babūška-Brezzi sur le couple \mathbf{X}_h, M_h (cf. éventuellement [14] pour une démonstration complète).

Ensuite, nous procédons de manière classique, en procédant par une inégalité triangulaire. Ainsi, nous écrivons simplement :

$$\|p - p_h\| \leq \|p - q_h\| + \|p_h - q_h\| \quad (7.19)$$

Nous utilisons ensuite la condition de Babūška-Brezzi sur la première équation de (7.6) afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \|p_h - q_h\| &\leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \\ &\leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - a^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \end{aligned} \quad (7.20)$$

où c désigne une constante indépendante de h , et désignera à l'avenir toute constante satisfaisant cette propriété.

Il nous reste donc à introduire les solutions continues \mathbf{u}, p -sans nous préoccuper des termes dus à la non conformité pour des raisons similaires à ci-dessus- et nous en déduisons :

$$\|p_h - q_h\| \leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - q_h) - d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \quad (7.21)$$

Nous majorons grâce à la continuité des différentes formes bilinéaires et utilisons le fait que $\bar{\mathbf{X}}_h$ et \mathbf{X}_h' soient supplémentaires pour écrire :

$$\|p_h - q_h\| \leq c\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h + c\|p - q_h\| + c(\varepsilon_h, h)\|\bar{\mathbf{P}}_h^1 \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h \quad (7.22)$$

Compte tenu des résultats obtenus sur l'analyse de convergence de la vitesse discrète, il est alors facile d'obtenir la majoration d'erreur finale suivante :

$$\begin{aligned} \|p - p_h\| &\leq c \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\| + ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1) + c(\varepsilon_h, h)h\|\mathbf{u}\|_2 \\ &\leq ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1) + c(\varepsilon_h, h)h\|\mathbf{u}\|_2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

La conclusion finale concernant ces deux analyses d'erreur est qu'il nous est nécessaire de connaître précisément le comportement de $c(\varepsilon_h, h)$ en fonction de la famille de paramètres ε_h et de h pour pouvoir éventuellement conclure à une convergence optimale en pas du maillage. Or cette constante $c(\varepsilon_h, h)$ représente la constante de continuité de la forme de diffusion pénalisée (ou au moins de $d(\varepsilon_h, \cdot, \cdot)$). C'est pour cela que les développements ultérieurs demeurent importants. \square

7.4.4 Définition des termes de pénalisation.

Comme précédemment indiqué, nous allons dans cette partie définir précisément la forme bilinéaire de pénalisation $d(\varepsilon_h, \cdot, \cdot)$, avant de démontrer que les hypothèses faites précédemment sont vérifiées avec nos choix particuliers.

Pour la méthode de pénalisation des sauts, la forme bilinéaire de pénalisation est définie de la manière suivante :

$$d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h) = \sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \int_a [\mathbf{u}_h] [\mathbf{v}_h] d\sigma \quad (7.24)$$

où a est une arête/face en 2D/3D d'un élément K du maillage, où $[\mathbf{v}] := \mathbf{v}|_{a,K_1} - \mathbf{v}|_{a,K_2}$ commune a et où γ_a est un paramètre dont la définition :

$$\gamma_a := \min(h_{K_1}^{-1}, h_{K_2}^{-1}) \quad (7.25)$$

K_1 et K_2 représentant deux éléments du maillage d'arête/face commune a .

Ellipticité de la diffusion pénalisée.

Constatons tout d'abord que l'on a de manière triviale la positivité de la forme bilinéaire de pénalisation :

$$d(\varepsilon_h, \mathbf{v}'_h, \mathbf{v}'_h) = \sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \int_a [\mathbf{v}_h]^2 d\sigma \leq 0 \quad (7.26)$$

car le paramètre γ_a a été choisi strictement positif.

Par conséquent, la forme bilinéaire $a^*(., .)$ est évidemment elliptique puisque la suite d'inégalités suivante est vérifiée :

$$a^*(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + d(\varepsilon_h, \mathbf{v}'_h, \mathbf{v}'_h) \geq a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (7.27)$$

Continuité de la diffusion pénalisée.

Suivant la démonstration de convergence précédente, il nous reste à démontrer la continuité de l'opérateur de diffusion pénalisée, dans le cadre de la méthode de pénalisation des sauts.

Etant donné la définition de notre opérateur pénalisé, il nous suffit de montrer la continuité du terme de pénalisation $d(\varepsilon_h, ., .)$ en fonction de la norme $\|\cdot\|_h$.

Ainsi, on va démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.4.2 *Il existe une constante c indépendante de h , telle que l'on ait :*

$$\forall \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_h; \quad \sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \int_a [\mathbf{u}_h] [\mathbf{v}_h] d\sigma \leq c \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (7.28)$$

Preuve du théorème:

On remarque tout d'abord que l'on a, puisque $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h$ sont continues au milieu de l'arête/face a et de valeurs respectivement $\mathbf{u}_h^a, \mathbf{v}_h^a$:

$$\begin{aligned} \sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \int_a [\mathbf{u}_h] [\mathbf{v}_h] d\sigma &= \sum_a \gamma_a \sum_{K, a \in K} \int_a [\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^a] [\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a] d\sigma \\ &= \sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \int_a [\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^a] [\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a] d\sigma \end{aligned}$$

Ensuite, notons K^d et K^g les éléments du maillage \mathcal{T}_h situés de part et d'autre d'une arête/face a donnée, ainsi que \mathbf{u}_h^d et \mathbf{u}_h^g les traces sur a des vecteurs $\mathbf{u}_h|_{K^d}$ et $\mathbf{u}_h|_{K^g}$.

Ces notations nous permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} &\sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \int_a [\mathbf{u}_h] [\mathbf{v}_h] d\sigma \\ &\leq \sum_a \gamma_a (\|\mathbf{u}_h^d - \mathbf{u}_h^a\|_{0,a} + \|\mathbf{u}_h^g - \mathbf{u}_h^a\|_{0,a}) (\|\mathbf{v}_h^d - \mathbf{v}_h^a\|_{0,a} + \|\mathbf{v}_h^g - \mathbf{v}_h^a\|_{0,a}) \\ &\leq c \sqrt{\sum_a \gamma_a (\|\mathbf{u}_h^d - \mathbf{u}_h^a\|_{0,a}^2 + \|\mathbf{u}_h^g - \mathbf{u}_h^a\|_{0,a}^2)} \sqrt{\sum_a \gamma_a (\|\mathbf{v}_h^d - \mathbf{v}_h^a\|_{0,a}^2 + \|\mathbf{v}_h^g - \mathbf{v}_h^a\|_{0,a}^2)} \\ &\leq c \sqrt{\sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \|\mathbf{u}_h|_K - \mathbf{u}_h^a\|_{0,a}^2} \sqrt{\sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \|\mathbf{v}_h|_K - \mathbf{v}_h^a\|_{0,a}^2} \end{aligned}$$

La suite du raisonnement consiste alors à utiliser la transformation affine F_K qui envoie un élément K quelconque du maillage sur l'élément de référence \hat{K} et son arête/face a sur l'arête/face référence \hat{a} de \hat{K} afin d'effectuer un changement de variable dans la dernière des expressions ci-dessus. En notant alors \hat{v} l'image par F_K d'une variable quelconque v , on obtient les égalités suivantes pour chaque élément K du maillage :

$$\begin{aligned} \gamma_a \int_a \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^a\|_e^2 d\sigma &= \gamma_a h_a^{d-1} \int_{\hat{a}} \|\widehat{\mathbf{u}}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h^a\|_e^2 d\sigma \\ \gamma_a \int_a \|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a\|_e^2 d\sigma &= \gamma_a h_a^{d-1} \int_{\hat{a}} \|\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^a\|_e^2 d\sigma \end{aligned} \tag{7.29}$$

où h_a est la longueur/surface de l'arête/face a dans l'élément K et d la dimension du problème.

Par suite, il nous suffit d'utiliser la continuité de (7.29) en fonction de la norme $\|\cdot\|_{1,\widehat{K}}$, pour obtenir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_a \int_a \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^a\|_e^2 d\sigma &\leq c\gamma_a h_a^{d-1} \|\widehat{\mathbf{u}}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h^a\|_{1,\widehat{K}}^2 \\ \gamma_a \int_a \|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a\|_e^2 d\sigma &\leq c\gamma_a h_a^{d-1} \|\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^a\|_{1,\widehat{K}}^2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

où c est une constante quelconque fixée, ne dépendant pas de l'élément initial K .

Définissons pour les besoins de cette démonstration, l'espace discret \mathbf{X}_h^a comme suit :

$$\mathbf{X}_h^a := \{\widehat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{P}_1(\widehat{K}) \mid \int_{\widehat{a}} \widehat{\mathbf{v}}_h d\sigma = 0; \widehat{a} \text{ arête/face de } \widehat{K}\} \quad (7.31)$$

Compte tenu de la discrétisation adoptée pour la vitesse, nous constatons que les vecteurs $(\widehat{\mathbf{u}}_h - \widehat{\mathbf{u}}_h^a)$ et $(\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^a)$ appartiennent tous deux à \mathbf{X}_h^a . Or à cause de l'injection compacte de $\mathbf{H}^1(\widehat{K})$ dans $\mathbf{L}^2(\widehat{K})$ et du lemme de Peetre-Tartar, la semi-norme $|\cdot|_{1,\widehat{K}}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{1,\widehat{K}}$ sur \mathbf{X}_h^a . Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \gamma_a \int_a \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^a\|_e^2 d\sigma &\leq c\gamma_a h_a^{d-1} |\widehat{\mathbf{u}}_h|_{1,\widehat{K}}^2 \\ \gamma_a \int_a \|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h^a\|_e^2 d\sigma &\leq c\gamma_a h_a^{d-1} |\widehat{\mathbf{v}}_h|_{1,\widehat{K}}^2 \end{aligned} \quad (7.32)$$

où c est une constante différente de la précédente mais toujours indépendante d'un élément K quelconque du maillage.

Or nous savons, en utilisant la transformation affine inverse F_K^{-1} , que nous avons la majoration suivante :

$$|\widehat{\mathbf{v}}_h|_{1,\widehat{K}} \leq c h_K^{1-\frac{d}{2}} |\mathbf{v}_h|_{1,K}$$

avec c constante indépendante du pas du maillage h .

Avec ce qui précède, nous trouvons donc finalement :

$$\begin{aligned} \sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \|\mathbf{u}_h|_K - \mathbf{u}_h^a\|_{0,a}^2 &\leq c \sum_K h_K^{2-d} \sum_{a \in K} \gamma_a h_a^{d-1} |\mathbf{u}_h|_{1,K}^2 \\ \sum_K \sum_{a \in K} \gamma_a \|\mathbf{v}_h|_K - \mathbf{v}_h^a\|_{0,a}^2 &\leq c \sum_K h_K^{2-d} \sum_{a \in K} \gamma_a h_a^{d-1} |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 \end{aligned} \quad (7.33)$$

En remarquant que nous avons les inégalités $\gamma_a \leq h_K^{-1}$, $h_a \leq h_K$, on en déduit très facilement le théorème. \square

Remarque 7.4.1 *Dans la démonstration précédente, il est intéressant de remarquer qu'à aucun moment, nous n'avons utilisé de définition précise de l'espace des fonctions purement discontinues \mathbf{X}_h' . Par conséquent, dans le cadre de cette méthode particulière, tout espace \mathbf{X}_h' supplémentaire de $\bar{\mathbf{X}}_h$ dans \mathbf{X}_h est susceptible d'être utilisé.*

Conséquemment à ce théorème, nous obtenons la continuité de l'opérateur de diffusion pénalisée et plus encore son uniforme continuité. En effet, la constante de continuité évaluée ci-dessus est indépendante du maillage que l'on considère et par conséquent, les taux de convergence déjà étudiés sont optimaux, selon la remarque faite lors du paragraphe associé.

Pour la méthode de pénalisation de l'énergie discontinue, la forme bilinéaire de pénalisation est définie de la manière suivante :

$$d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h) = \sum_K \frac{1}{\varepsilon_K} (\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h)_{d,K} \quad (7.34)$$

où $(\cdot, \cdot)_{d,K}$ représente le produit scalaire associé à la norme de l'espace $\mathbf{L}^2(K)$ ou le semi-produit scalaire associé à la semi-norme de l'espace $\mathbf{H}^1(K)$.

Ellipticité de la diffusion pénalisée.

Ce cas est particulièrement simple à traiter dans la mesure où il suffit de constater la positivité de la forme bilinéaire de pénalisation. En effet, nous trouvons compte tenu des définitions ci-dessus, les relations suivantes :

$$d(\varepsilon_h, \mathbf{v}'_h, \mathbf{v}'_h) = \sum_K \frac{1}{\varepsilon_K} (\mathbf{v}'_h, \mathbf{v}'_h)_{d,K} \geq 0 \quad (7.35)$$

car les coefficients ε_K ont tous été choisis positifs.

Par conséquent, nous pouvons établir que la forme bilinéaire de diffusion pénalisée, dans le cas de l'énergie discontinue, vérifie bien une condition d'ellipticité :

$$a^*(\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}}) = a(\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}}) + d(\varepsilon_h, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}}) \geq \|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_h^2 \quad (7.36)$$

Continuité de la diffusion pénalisée.

Démontrons la continuité de la forme bilinéaire de diffusion pénalisée, dans le cadre de la méthode de l'énergie discontinue. A cette fin, nous remarquons qu'il nous suffit de montrer que la forme bilinéaire $d(\varepsilon_h, \cdot, \cdot)$ est elle-même continue.

Ainsi nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 7.4.3 *Il existe une constante c indépendante de h , telle que l'on ait :*

$$\forall \mathbf{v}_{\mathbf{h}}, \mathbf{u}_{\mathbf{h}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{h}}; \quad \sum_K \frac{1}{\varepsilon_K} (\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}})_{d,K} \leq c \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_h \|\mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_h \quad (7.37)$$

Preuve du théorème:

Dans un premier temps, nous allons utiliser des inégalités de type Cauchy-Schwartz, afin d'obtenir une expression de $d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}})$ en fonction des normes $\|\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}\|$ et $\|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|$:

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}}) &\leq \sqrt{\sum_K \frac{1}{\varepsilon_K^2}} \sqrt{\sum_K (\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}})_{d,K}^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_K \frac{1}{\varepsilon_K^2}} \sqrt{\sum_K \|\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}\|_{d,K}^2 \|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_{d,K}^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_K \frac{1}{\varepsilon_K^2}} \sqrt{\sum_K \|\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}\|_{d,K}^2} \sqrt{\sum_K \|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_{d,K}^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_K \frac{1}{\varepsilon_K^2}} \|\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}\|_d \|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_d \end{aligned}$$

car $\|\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}\|_{d,K}^2$ et $\|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_{d,K}^2$ sont évidemment positifs.

Ensuite, si nous considérons la définition de $\|\cdot\|_d$, nous remarquons que nous avons la majoration suivante :

$$\exists c \neq c(h) \mid \forall \mathbf{v}'_{\mathbf{h}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{h}}' \quad \|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_d \leq c \|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_h \quad (7.38)$$

En effet, soit $\|\cdot\|_d$ coïncide avec la norme $\|\cdot\|_h$, soit elle est égale à $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$. Or dans ce dernier cas et puisque $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$ est un sous-ensemble de $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}$, l'inégalité de Cauchy discrète s'applique de sorte que la majoration précédente est vérifiée.

Nous obtenons alors une majoration quasi-finale, à savoir :

$$d(\varepsilon_h, \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}, \mathbf{v}'_{\mathbf{h}}) \leq c \|\mathbf{u}'_{\mathbf{h}}\|_h \|\mathbf{v}'_{\mathbf{h}}\|_h \quad (7.39)$$

où c est exactement égal à $\sqrt{\sum_K \frac{1}{\varepsilon_K^2}}$.

La démonstration n'est hélas pas tout à fait complète car il est nécessaire de définir précisément la relation qui lie un vecteur de $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$ à un vecteur de $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}$ en fonction de la norme $\|\cdot\|_h$. En d'autres termes, il nous faut définir exactement la notion de supplémentaire.

Si l'on tient compte des résultats que l'on souhaite obtenir, il apparait alors naturel de définir l'espace $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$ comme l'orthogonal de $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$ par rapport à un produit scalaire quelconque, à la seule condition que l'opérateur de projection associé soit continu par rapport à la norme $\|\cdot\|_h$. Ainsi, si $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}'$ est défini comme le supplémentaire de $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$ dans $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}$ par rapport, soit au produit scalaire de \mathbf{L}^2 , soit au produit scalaire discret de $\mathbf{X}_{\mathbf{h}}$, alors le théorème est établi. \square

Grâce à ce théorème, nous obtenons la continuité de l'opérateur de diffusion pénalisée. Remarquons toutefois, que, suivant la démonstration de la convergence de la méthode, le choix de la famille de paramètres ε_h peut considérablement influencer sur le taux de convergence final. Ainsi, si l'on souhaite conserver l'optimalité de ce taux, il est important de choisir cette famille de paramètres comme totalement indépendante du pas du maillage \mathcal{T}_h .

7.5 Comportement de la solution.

Nous allons maintenant étudier l'évolution de la solution de (7.6) en fonction de la famille de paramètres de pénalisation ε_h , avec un maillage \mathcal{T}_h fixé. Cette étude est motivée par les deux questions suivantes :

- la solution de (7.6) tend-elle vers une solution continue en espace ?
- existe-t-il une famille ε_h optimale ?

7.5.1 Comportement à la limite.

L'objet principal de ce paragraphe est de montrer que les différentes méthodes de pénalisation tendent bien vers l'objectif annoncé, à savoir limiter la partie irrégulière de notre solution discrète. Pour évaluer cela, il nous suffit de regarder quelle peut être notre solution discrète lorsque la famille de paramètres ε_h est choisie de norme arbitrairement grande pour un maillage \mathcal{T}_h fixé.

Soit donc une suite $(\varepsilon_h)^n$ tendant vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. A cette sous-suite, correspond évidemment une famille de solution aux équations (7.6) que nous noterons par la suite, \mathbf{u}_h^n .

Essayons de déterminer le comportement de cette famille de solution. L'ellipticité de la forme bilinéaire $a^*(\cdot, \cdot)$ nous permet d'obtenir une borne majorante sur cette famille :

$$\|\mathbf{u}_h^n\|_h \leq \|\mathbf{f}\| \quad (7.40)$$

Par compacité dans les espaces de dimension finie, nous pouvons extraire une sous-suite, notée $\mathbf{u}_h^{n_k}$, qui converge vers un vecteur \mathbf{u}_h de \mathbf{X}_h , c'est-à-dire aussi :

$$\mathbf{u}_h^{n_k} \rightarrow \mathbf{u}_h \quad \text{quand } k \rightarrow \infty \quad (7.41)$$

Cherchons maintenant à évaluer le comportement de la partie discontinue de \mathbf{u}_h^n . Nous avons ainsi, et puisque la famille de paramètres ε_h^n tend vers l'infini :

$$\exists c \mid \forall K \ d_K(\mathbf{u}_h^{m_k}, \mathbf{u}_h^{n_k}) \leq c \quad (7.42)$$

où K est un élément quelconque du maillage \mathcal{T}_h et où c est une constante quelconque fixé.

Notons $\|\cdot\|_d$ la fonction suivante définie sur \mathbf{X}_h' :

$$\|\mathbf{v}'_h\|_d := \sum_K d_K(\mathbf{v}'_h, \mathbf{v}'_h) \quad (7.43)$$

Dans notre cas particulier, les formes bilinéaires que nous avons choisies font que la fonction $\|\cdot\|_d$ est une norme sur \mathbf{X}_h' . La sommation sur les éléments K du maillage de l'inégalité (7.42) nous permet d'avoir également :

$$\exists c \mid \|\mathbf{u}_h^{m_k}\| \leq c \quad (7.44)$$

Par conséquent et puisque nous sommes en présence d'une norme, nous en déduisons qu'il existe un vecteur \mathbf{w}_h de \mathbf{X}_h' , vers lequel $\mathbf{u}_h^{m_k}$ tend lorsque k tend vers l'infini (\mathbf{X}_h' étant un fermé de \mathbf{X}_h , par équivalence des normes en dimension finie) :

$$\mathbf{u}_h^{m_k} \rightarrow \mathbf{w}_h \quad \text{quand } k \rightarrow \infty \quad (7.45)$$

Nous allons désormais montrer que le vecteur \mathbf{w}_h n'est que la décomposition de \mathbf{u}_h sur l'espace \mathbf{X}_h' . Remarquons que nous avons par hypothèse sur la forme bilinéaire de pénalisation :

$$\sum_K d_K(\mathbf{u}_h^{n_k}, \mathbf{v}'_h) = \sum_K d_K(\mathbf{u}_h^{m_k}, \mathbf{v}'_h) \quad \forall \mathbf{v}'_h \in \mathbf{X}_h' \quad (7.46)$$

Par continuité et par passage à la limite, nous obtenons donc l'égalité recherchée :

$$\mathbf{w}_h = \mathbf{u}'_h \quad (7.47)$$

Maintenant, nous allons passer à la limite dans (7.6), en remplaçant au préalable \mathbf{v}_h par $\mathbf{u}_h^{n_k}$:

$$a^*(\mathbf{u}_h^{n_k}, \mathbf{u}_h^{n_k}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h^{n_k}) \quad (7.48)$$

Comme $\mathbf{u}_h^{n_k}$, et donc le membre de droite, admet une limite finie, il en est de même pour le membre de gauche. Or ε_h^n tend vers l'infini, nous sommes donc contraint d'avoir $\mathbf{u}_h^{m_k}$ qui tend vers 0 également. Par unicité de la limite, $\mathbf{u}_h^{n_k}$ tend bien vers une fonction $\mathbf{u}_h \in \bar{\mathbf{X}}_h$.

La convergence de la suite complète \mathbf{u}_h^n s'obtient aisément en procédant par l'absurde et en réitérant le procédé ci-dessus : c'est donc toute la suite

\mathbf{u}_h^n qui converge vers \mathbf{u}_h . Enfin, la continuité de la forme bilinéaire $b(.,.)$ impose à \mathbf{u}_h de vérifier la contrainte de divergence nulle : comme $\mathbf{u}_h \in \bar{\mathbf{X}}_h$, on a donc en général $\mathbf{u}_h = 0$.

La conclusion est donc mitigée. Certes, à la limite, les discontinuités ont complètement disparues, mais à cause du couplage entre les espace $\bar{\mathbf{X}}_h$ et \mathbf{X}_h' à travers l'opérateur de divergence discret $b(.,.)$, la partie continue tend également à devenir nulle. Par conséquent, le choix des paramètres de pénalisation doit être fait avec soin, puisque le lissage particulier des discontinuités se traduit également par une perte d'énergie de la partie continue de la solution discrète. A pas de maillage h fixé, la solution discrète de (7.6) tend à sous-évaluer la solution continue des équations (2.9)-(2.10). Il n'y a donc pas de famille de paramètres optimale.

7.5.2 Monotonie de la solution.

Le résultat précédent montre clairement que la pénalisation atteint l'effet escompté, à savoir diminuer l'énergie due au sous-espace \mathbf{X}_h' , mais en contrepartie et à cause du couplage introduit par la contrainte de divergence nulle, cette pénalisation tend également à "tuer" la partie continue de notre solution discrète. Ce paragraphe a donc pour but d'évaluer quantitativement les pertes d'énergie liée à un tel schéma numérique. Pour simplifier notre analyse, nous supposons par ailleurs que la famille de paramètres $\varepsilon_h = (\varepsilon_K)_K$ est telle que :

$$\forall h; \forall K; \varepsilon_K = \varepsilon$$

où K est un élément du maillage \mathcal{T}_h et où ε est une constante qui ne dépend que de h .

On va donc montrer que la décroissance d'énergie est continue en fonction de ε_h mais également strictement décroissante lorsque ε_h tendent vers l'infini à maillage fixé. Plus précisément, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème 7.5.1 *Les solutions \mathbf{u}_h, p_h des équations (7.6) sont des fonctions continues de la famille de paramètre ε_h . Plus précisément, la vitesse est une fonction exponentielle décroissante de ε_h .*

Preuve du théorème:

Dans la suite, on posera $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$ comme paramètres d'évolution, ceci afin de

faciliter les calculs ultérieurs. De plus, nous n'étudierons que les équations linéaires. Enfin, nous introduisons à nouveau l'espace discret à divergence nulle \mathbf{V}_h , noyau de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$.

Le principe d'analyse de la monotonie reposera sur un développement limité de la solution des équations (7.6) en fonction des paramètres λ_K . Mais pour procéder ainsi, il nous faut définir un certain nombre d'opérateurs linéaires :

$$\begin{aligned}
 A & : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h \\
 \langle A\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle & := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\
 D & : \mathbf{X}'_h \rightarrow \mathbf{X}'_h \\
 \langle D\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h \rangle & := \sum_K d_K(\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h) \\
 F & : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h \\
 \langle F, \mathbf{v}_h \rangle & := (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \\
 P & : \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbf{X}'_h \\
 \langle P\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h, D\mathbf{v}'_h \rangle & := 0
 \end{aligned}$$

Ceci une fois posé, la première des équations de (7.6) se réécrit :

$$A\mathbf{u}_h + \lambda P^t D P \mathbf{u}_h = F$$

Afin d'utiliser la méthode des développements limités, nous définissons maintenant un nouveau vecteur \mathbf{u}_h^δ , défini comme la solution au problème (7.6) de paramètre λ^δ où :

$$\lambda^\delta = \lambda + \delta \tag{7.49}$$

où δ est un paramètre quelconque fixé, supposé de petite amplitude.

Nous faisons alors la différence entre les équations (7.6) initial et les équations (7.6) de paramètres λ^δ :

$$A\mathbf{e}_h + \lambda^\delta P^t D P \mathbf{u}_h^\delta - \lambda P^t D P \mathbf{u}_h = 0$$

où \mathbf{e}_h est la différence entre \mathbf{u}_h^δ et \mathbf{u}_h .

Nous réécrivons l'équation précédente à l'aide de notre nouvelle variable \mathbf{e}_h :

$$A\mathbf{e}_h + \lambda^\delta P^t D P \mathbf{e}_h = -\delta P^t D P \mathbf{u}_h \tag{7.50}$$

Nous introduisons alors l'opérateur B défini par :

$$B := A + \lambda P^t DP \quad (7.51)$$

Cet opérateur doit son inversibilité (il est même défini positif) à la coercivité des formes bilinéaires associées aux opérateurs A et $P^t DP$. Par inversion de B , il devient donc possible d'écrire :

$$(Id + \delta B^{-1} P^t DP) \mathbf{e}_h = -\delta B^{-1} P^t DP \mathbf{u}_h \quad (7.52)$$

Or pour δ suffisamment petit, l'opérateur du membre de gauche de l'équation précédente est inversible, et nous pouvons dès lors obtenir ce qui suit :

$$\mathbf{e}_h = -\delta \left(Id - \sum \delta B^{-1} P^t DP + o(\delta^2) \right) B^{-1} P^t DP \mathbf{u}_h \quad (7.53)$$

En ne conservant que les termes d'ordre 1 en δ , nous obtenons le développement limité recherché :

$$\mathbf{e}_h = -\delta B^{-1} P^t DP \mathbf{u}_h + o(\delta^2) \quad (7.54)$$

Nous venons donc de montrer que le vecteur solution \mathbf{u}_h est continu en fonction du paramètre δ , et comme il en est de même pour les opérateurs discrets B^{-1} et D , nous en déduisons que le vecteur solution est C^1 d'équation différentielle :

$$\partial_\delta \mathbf{u}_h := -\delta B^{-1} P^t DP \mathbf{u}_h \quad (7.55)$$

Dès lors, nous obtenons très facilement la forme exacte du vecteur \mathbf{u}_h pour cet élément :

$$\mathbf{u}_h(\delta) := e^{-\delta B^{-1} P^t DP} \mathbf{u}_h(0) \quad (7.56)$$

Nous voyons que la perte d'énergie est exponentielle, il est donc important de ne pas choisir un paramètre λ trop grand, sous peine de voir la solution devenir nulle de manière artificielle.

Maintenant avec l'aide du développement limité et de (7.54), il devient possible d'évaluer le comportement énergétique de notre solution discrète en fonction du paramètre λ :

$$\|\mathbf{u}_h^\delta\|_h^2 = \langle A \mathbf{u}_h^\delta, \mathbf{u}_h^\delta \rangle = \|\mathbf{u}_h\|_h^2 - 2\delta \langle AB^{-1} P^t DP \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle + o(\delta^2) \quad (7.57)$$

Le produit d'opérateurs positifs étant lui-même positif, on en conclut que la norme de la solution est continue, localement décroissante et donc globalement décroissante en fonction du paramètre λ .

De la même façon et toujours avec (7.54), il est possible d'étudier la variation d'énergie de la partie discontinue de notre solution discrète en fonction des normes $\|\cdot\|_h$ et $\|\cdot\|_d$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'_h{}^\delta\|_d^2 &:= \lambda^\delta \langle D\mathbf{u}'_h{}^\delta, \mathbf{u}'_h{}^\delta \rangle \\ &= \lambda^\delta \langle DP\mathbf{u}_h{}^\delta, P\mathbf{u}_h{}^\delta \rangle \\ &= \|\mathbf{u}'_h\|_d^2 - 2\delta \langle B^{-1}P^t DP\mathbf{u}_h, P^t DP\mathbf{u}_h \rangle + o(\delta^2) \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'_h{}^\delta\|_h^2 &:= \langle A\mathbf{u}'_h{}^\delta, \mathbf{u}'_h{}^\delta \rangle = \langle P^t AP\mathbf{u}_h{}^\delta, \mathbf{u}_h{}^\delta \rangle \\ &= \|\mathbf{u}'_h\|_h^2 - 2\delta \langle B^{-1}P^t DP\mathbf{u}_h, P^t AP\mathbf{u}_h \rangle + o(\delta^2) \end{aligned} \quad (7.59)$$

Là encore, nous voyons que l'énergie associée à l'espace \mathbf{X}_h' est continue en fonction du paramètre λ et décroît lorsque celui-ci augmente. \square

Il peut être intéressant d'évaluer l'évolution du rapport $\frac{\|\mathbf{u}'_h{}^\delta\|_d^2}{\|\mathbf{u}_h{}^\delta\|_h^2}$.

Malheureusement, on ne peut conclure facilement quant à l'évolution d'un tel rapport.

7.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons essentiellement cherché à comprendre et limiter l'impact des discontinuités de la vitesse discrète sur la méthode numérique employée. L'idée naturelle qui nous est venue à l'esprit fut donc de pénaliser (de différentes manières) ces fameuses discontinuités : à cet égard, l'analyse théorique nous montre qu'il est tout à fait envisageable de procéder de la sorte.

Toutefois, cette même analyse nous montre que d'une part, nous ne pouvons pas choisir un paramètre de pénalisation indépendant du pas h du maillage, trop grand (sous peine de "tuer" la solution), et d'autre part, qu'un choix dudit paramètre en fonction de h ne peut que nous réduire notre taux de convergence (en effet, la constante de continuité $c(\varepsilon_h, h)$ intervient dans

l'estimation d'erreur (7.9)). De plus, l'utilisation d'une technique de pénalisation ne s'attaque pas réellement au fond du problème car, même si nous tentons d'en limiter les impacts, les discontinuités existent toujours car nous travaillons sur un espace, par nature, de fonctions discontinues.

Dès lors, l'étape suivante semble être la totale suppression de ces discontinuités et pour cela, il paraît nécessaire de travailler sur un espace de fonctions (ici les vitesses discrètes) continues. C'est cette démarche qui fait l'objet du chapitre (**Ch 8**).

Chapitre 8

Schémas de projection.

8.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons tenter de répondre aux problèmes soulevés plus avant dans ce mémoire à savoir les erreurs purement numériques commises sur l'opérateur de diffusion et un coût calcul et mémoire important.

Du premier point de vue, le chapitre (**Ch 7**) nous a rappelé que les erreurs commises sur l'opérateur de diffusion sont entièrement dues aux discontinuités de notre vitesse discrète, et qu'en un certain sens nous sommes en mesure de limiter leurs effets. Mais pourquoi ne pas aller un cran au-delà et utiliser directement une discrétisation de la vitesse qui impose à cette dernière d'être continue ? Dans ce cas, les problèmes apparus sur l'opérateur de diffusion disparaissent. De plus, s'il nous souhaitons également limiter l'espace mémoire nécessaire à un calcul et le temps d'exécution, il semble cohérent de choisir un espace de vitesse discrète qui soit de dimension la plus petite possible : l'espace qui s'impose alors naturellement est l'espace dit P_1 conforme.

Cependant, un tel choix soulève un problème important : il est bien connu que cet espace particulier de vitesses discrètes ne satisfait pas la contrainte inf-sup sur la forme bilinéaire de divergence discrète $b_h(.,.)$. Comment faire pour passer outre cette limitation ? C'est l'objet développé dans les paragraphes suivants, où nous allons développer des méthodes numériques basées sur des discrétisations de la vitesse et de la pression "quasi-colocalisées".

8.2 Définitions.

Pour commencer, nous allons définir les espaces discrets sur lesquels nous allons travailler durant toute cette partie, sachant qu'une généralisation à d'autres choix d'espaces est possible.

Soit donc l'espace vectoriel discret \mathbf{P}_1 non conforme, noté \mathbf{X}_h , inclus dans \mathbf{L}^2 et dont nous rappelons la définition :

$$\mathbf{X}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathbf{P}_1(K) \text{ } \mathbf{v}_h \text{ continue en } x_f \text{ et } \mathbf{v}_h(x_f) = 0 \text{ si } x_f \in \partial\Omega\}$$

où x_f est le milieu d'une arête du maillage en dimension deux, et le milieu d'une face du maillage en dimension trois.

Par abus de langage, \mathbf{X}_h pourra également être appelé espace des vitesses discrètes. Soit également un espace scalaire discret M_h inclus dans L^2 ; nous pourrons le désigner comme espace des pressions discrètes. M_h sera supposé vérifier une condition de type inf-sup sur une forme bilinéaire discrète de divergence $b_h(\cdot, \cdot)$, définie sur $\mathbf{X}_h \times M_h$:

$$\exists \beta \mid \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq \beta \|q_h\| \quad \forall q_h \in M_h$$

avec β indépendante du maillage \mathcal{T}_h .

La donnée de $b_h(\cdot, \cdot)$ nous permet de définir un sous-ensemble de vitesses à divergence (discrète) nulle, noté \mathbf{V}_h , non réduit à $\{0\}$, et obtenu par :

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \mid b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h\} \quad (8.1)$$

Enfin \mathbf{X}_h admet une décomposition \mathbf{L}^2 orthogonal en deux sous-espaces distincts : un sous-espace $\bar{\mathbf{X}}_h$ inclus dans \mathbf{H}_0^1 et un sous-espace \mathbf{X}_h' inclus dans \mathbf{L}^2 . Leurs définitions sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &:= \bar{\mathbf{X}}_h \oplus \mathbf{X}_h' \\ \bar{\mathbf{X}}_h &:= \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0 \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathbf{P}_1(K)\} \end{aligned}$$

Afin d'obtenir des estimations d'erreur, il nous faut également rappeler que ces différents ensembles discrets possèdent des propriétés d'approximation intéressantes. C'est l'objet du théorème qui suit :

Théorème 8.2.1 *Soit \mathbf{u}_1 un élément quelconque fixé de $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2$ et \mathbf{u}_2 un élément quelconque fixé de $\mathbf{H}_0^1 \cap \mathbf{H}^2$.*

Les espaces discrets $\bar{\mathbf{X}}_h$ et \mathbf{V}_h possèdent les propriétés d'approximation suivantes :

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_h\| \leq Ch^2 \|\mathbf{u}_1\|_2 \quad (8.2)$$

$$\inf_{\bar{\mathbf{w}}_h \in \bar{\mathbf{X}}_h} \|\mathbf{u}_2 - \bar{\mathbf{w}}_h\| \leq Ch^2 \|\mathbf{u}_2\|_2 \quad (8.3)$$

où les constantes C sont indépendantes du pas h du maillage.

Afin de faciliter la lecture de ce chapitre, nous allons également introduire dès à présent un certain nombre d'opérateurs de projection, dont un usage constant sera fait par la suite.

Nous commençons donc par définir un projecteur \mathbf{L}^2 -orthogonal, \mathbf{P}_h , qui à tout élément de \mathbf{L}^2 associe un élément de \mathbf{X}_h . Comme \mathbf{X}_h se décompose par définition en une partie "lisse" $\bar{\mathbf{X}}_h$ et une partie discontinue \mathbf{X}_h' , il apparaît naturel de définir les opérateurs de projection \mathbf{L}^2 orthogonaux correspondants, à savoir $\bar{\mathbf{P}}_h$ et \mathbf{P}'_h . Compte tenu de ces définitions, il existe un lien élémentaire entre ces trois projecteurs :

$$\mathbf{P}_h \mathbf{u} = \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u} + \mathbf{P}'_h \mathbf{u} \quad (8.4)$$

avec \mathbf{u} élément quelconque fixé de \mathbf{L}^2 .

Dernier projecteur dont nous aurons besoin, $\bar{\mathbf{P}}_h^1$ se définit comme l'opérateur de projection \mathbf{H}_0^1 orthogonal sur $\bar{\mathbf{X}}_h$, pour -évidemment- tout élément de \mathbf{H}_0^1 .

Les précédents opérateurs seront essentiellement destinés à être employés sur les vitesses discrètes de nos différents schémas numériques. Mais afin d'estimer complètement le taux de convergence, il nous faudra également maîtriser l'erreur commise sur l'estimation de la pression discrète. Pour cela, nous allons introduire deux autres opérateurs propres à cette variable.

Nous définissons tout d'abord l'opérateur Π_h , qui à un élément q de L^2 associe un élément de M_h , à partir de la relation :

$$b(\mathbf{v}_h, q) := b_h(\mathbf{v}_h, \Pi_h q) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^\perp \quad (8.5)$$

où \mathbf{V}_h^\perp est l'orthogonal de \mathbf{V}_h pour le produit scalaire (\cdot, \cdot) .

Ensuite, nous introduisons l'opérateur ∇_h défini sur M_h et à valeurs dans \mathbf{X}_h par :

$$(\nabla_h q_h, \mathbf{v}_h) := b_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad \forall q_h \in M_h \quad (8.6)$$

Enfin, nous aurons continuellement besoin du lemme suivant (dit de Gronwall) dont l'énoncé et la démonstration peuvent être trouvés dans les références [25] et [19] :

Lemme 8.2.1 *Soit $\delta, g_0, a_n, b_n, c_n$ et γ_n ($n \geq 0$) une suite de nombre réels positifs vérifiant l'inégalité suivante :*

$$a_n + \delta \sum_{j=0}^n b_j \leq \delta \sum_{j=0}^n \gamma_j a_j + \delta \sum_{j=0}^n c_j + g_0$$

Supposons de plus que $\gamma_j \delta < 1$ pour tout entier j . Alors nous avons également :

$$a_n + \delta \sum_{j=0}^n b_j \leq e^{(\delta \sum_{j=0}^n \sigma_j \gamma_j)} \left[\delta \sum_{j=0}^n c_j + g_0 \right]$$

où nous avons posé $\sigma_j := \frac{1}{1-\gamma_j \delta}$.

8.3 Etude d'un schéma de projection.

Dans ce premier paragraphe, on va chercher à étudier le schéma de projection suivant, défini pour tout $(\bar{\mathbf{v}}_h, \mathbf{v}_h, q_h) \in \bar{\mathbf{X}}_h \times \mathbf{X}_h \times M_h$:

$$\frac{1}{\delta t} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h) + a(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) + c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{v}}_h) \quad (8.7)$$

$$\frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) = 0 \quad (8.8)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad (8.9)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1} \quad (8.10)$$

où les inconnues à déterminer sont $\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_h^{n+1}$ et p_h^{n+1} , appartenant respectivement aux espaces discrets $\bar{\mathbf{X}}_h, \mathbf{X}_h$ et M_h .

On procède traditionnellement en plusieurs étapes : il faut tout d'abord montrer qu'à chaque pas de temps δt , le système (8.7) à (8.10) admet une solution unique; ensuite, il faut montrer que cette solution est stable au cours du temps selon des normes appropriées; et enfin, il faudra établir le taux de convergence en fonction des paramètres δt et h .

8.3.1 Existence et unicité d'une solution au schéma de projection.

On considère donc le schéma défini par les équations (8.7) à (8.10). Supposons qu'il existe un n tel que $\forall n_0 \leq n$, le schéma (8.7) à (8.10) admette une unique solution. La démonstration sera terminée si l'on montre que le schéma admet une unique solution au pas $n + 1$.

Par hypothèse de départ, le vecteur $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n$ est supposé connu. Par conséquent, (8.7) est une équation non-linéaire portant uniquement sur l'inconnu $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$. On reconnaît une équation de convection diffusion, dont les formes bilinéaires ont toutes les propriétés voulues : on peut donc conclure que (8.7) définit de manière unique le vecteur $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$.

A présent, on peut supposer $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ connu dans le système d'équations (8.8)-(8.9). Ce système se réécrit de manière découplé comme suit :

$$(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_{\mathbf{h}}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{\mathbf{h}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{h}} \quad (8.11)$$

$$b_h(\mathbf{v}_{\mathbf{h}}, p_h^{n+1}) = \frac{-1}{\delta t} (\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_{\mathbf{h}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathbf{h}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{h}}^{\perp} \quad (8.12)$$

Il est clair que la première équation de ce système découplé admet une unique solution : $\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}$ est le projeté \mathbf{L}^2 orthogonal de $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ sur $\mathbf{V}_{\mathbf{h}}$.

La condition de Babūška-Brezzi, implique l'existence et l'unicité d'une unique pression p_h^{n+1} satisfaisant (8.8).

Enfin, (8.10) se suffit à elle-même pour ce qui concerne l'existence et l'unicité de $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+1}$.

8.3.2 Stabilité du schéma de projection.

Théorème 8.3.1 *Il existe une constante C telle que $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, on ait :*

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|^2 + \delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \leq C \\ \delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \delta t \sum_{n=0}^N \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 & \leq C\delta t \end{aligned}$$

Ces inégalités se traduisent par la stabilité en norme $L^\infty(\mathbf{L}^2)$ et $L^2(\mathbf{H}_0^1)$.

Preuve du théorème:

La forme $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ étant antisymétrique, nous remplaçons $\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}$ dans la première équation par $2\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ et l'on obtient :

$$\|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 = 2\delta t (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (8.13)$$

Dans le second système d'équation, il nous suffit de remplacer $\mathbf{v}_{\mathbf{h}}$ par $2\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}$ et l'on trouve :

$$\|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = 0 \quad (8.14)$$

En sommant (8.13)-(8.14), on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 \\ & + \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ & \leq c\delta t \|\mathbf{f}\|^2 + \varepsilon\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \end{aligned} \quad (8.15)$$

On voit donc que :

$$\|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|^2 \leq c\delta t \|\mathbf{f}\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 \quad (8.16)$$

Par définition de P_h , on en déduit par récurrence les deux premières majorations du théorème.

Enfin, en sommant sur les n , il vient :

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{u}}^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \left(\|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \right) \\ + c\delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \leq \|\mathbf{u}^0\|^2 + c \sum_{n=0}^N \delta t \|\mathbf{f}\|^2 \end{aligned} \quad (8.17)$$

D'où les majorations suivantes du théorème :

$$\delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \leq \|\mathbf{u}^0\|^2 + c \sum_{n=0}^N \delta t \|\mathbf{f}\|^2 \leq C \quad (8.18)$$

$$\delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 \leq \delta t \|\mathbf{u}^0\|^2 + c\delta t \sum_{n=0}^N \delta t \|\mathbf{f}\|^2 \leq C\delta t \quad (8.19)$$

$$\delta t \sum_{n=0}^N \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \delta t \|\mathbf{u}^0\|^2 + c\delta t \sum_{n=0}^N \delta t \|\mathbf{f}\|^2 \leq C\delta t \quad (8.20)$$

□

8.3.3 Convergence du schéma de projection.

Pour obtenir l'erreur en temps et en espace de notre schéma entièrement discrétisé, l'idée consiste à séparer l'approximation en temps de l'approximation en espace. Si $\mathbf{u}(t)$ désigne le vecteur vitesse solution de (2.1)-(2.2) et \mathbf{u}^n le vecteur vitesse solution d'équations discrétisées en temps (2.1)-(2.2), nous remarquons alors que $\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n = (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^n) + (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n)$, où $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n$ désigne notre vecteur vitesse solution des équations discrètes (8.7)-(8.10). L'erreur commise en temps est alors entièrement portée par les équations discrétisées en temps, tandis que l'erreur en espace est quant à elle portée uniquement par notre schéma de projection numérique.

Convergence en temps du schéma de projection.

Pour évaluer l'erreur en temps commise par notre schéma de projection numérique, nous rappelons le schéma de projection semi-discrétisé en temps défini dans [40] : pour \mathbf{u}_0 donné, on cherche pour tout $n \in \{1, \dots, 0\}$ les

fonctions $(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathbf{H}_0^1 \times \mathbf{L}^2 \times L_0^2$ solutions du système suivant

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^n + \delta t \Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \delta t \mathbf{u}^n \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \delta t \mathbf{f} \quad (8.21)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \delta t \nabla p^{n+1} = 0 \quad (8.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (8.23)$$

Dans [40], il est démontré le théorème suivant :

Théorème 8.3.2 *Les solutions de (8.21)-(8.23) convergent vers les solutions (2.1)-(2.2).*

Posons :

$$\mathbf{e}^{n+1} = \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}^{n+1} \quad (8.24)$$

$$\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}(t^{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.25)$$

Alors plus précisément, on a les résultats de convergence suivants :

$$\|\mathbf{e}^{N+1}\|^2 + \|\mathbf{e}^{N+\frac{1}{2}}\|^2 \leq C\delta t \quad (8.26)$$

$$\delta t \sum_{n=0}^N \left(\|\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|_1^2 \right) \leq C\delta t \quad (8.27)$$

$$\sum_{n=0}^N \left(\|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{e}^n\|^2 \right) \leq C\delta t \quad (8.28)$$

$$\delta t \sum_{n=0}^N \|p(t^{n+1}) - p^{n+1}\|^2 \leq C\delta t \quad (8.29)$$

Nous obtenons alors une convergence en norme $L^\infty(\mathbf{L}^2)$, $L^2(\mathbf{H}_0^1)$ pour la vitesse et en norme $L^2(L^2)$ pour la pression, avec un taux en $\sqrt{\delta t}$.

Nous demanderons, en fait, aux solutions du système d'équations (8.21)-(8.23) plus de régularité que celle initialement supposée. Ainsi suivant les hypothèses de l'article [26], nous supposerons la proposition suivante vérifiée :

Hypothèse 8.3.1 *La solution $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, p^{n+1})$ du problème (8.21)-(8.23) est stable respectivement pour les normes $L^\infty(\mathbf{H}^1)$, $L^\infty(\mathbf{H}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{L}^2)$.*

Remarque 8.3.1 *Nous remarquons d'ores et déjà que le schéma proposé ici n'est absolument pas optimal en temps. En effet, nous avons, selon les résultats démontrés dans [40] et rappelés ici, une vitesse de convergence en temps en $O(\sqrt{\delta t})$, alors que la méthode de discrétisation employée nous laissait espérer un taux de convergence en $O(\delta t)$.*

Convergence en espace du schéma de projection.

Suivant la méthode employée dans [26], nous allons déterminer le taux de convergence en espace du schéma (8.7)-(8.10), en considérant celui-ci comme une approximation spatiale du schéma semi-discrétisé (8.21)-(8.23).

Théorème 8.3.3 *Posons les notations suivantes :*

$$\bar{\mathbf{e}}_h^n = \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n \quad (8.30)$$

$$\mathbf{e}_h^{n+1} = \mathbf{P}_h \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1} \quad (8.31)$$

$$\mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{P}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.32)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.33)$$

$$r_h^n = \Pi_h p^n - p_h^n \quad (8.34)$$

Ensuite, supposons que l'on ait l'encadrement suivant :

$$h^2 \leq \delta t \leq h \quad (8.35)$$

Alors les solutions de (8.7)-(8.10) sont telles que :

$$\|\bar{\mathbf{e}}_h^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \left(\|\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + c_0 \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \leq ch^2 \quad (8.36)$$

avec c constante indépendante du pas du maillage h .

Preuve du théorème:

En faisant la différence (8.21)-(8.7) sur $\bar{\mathbf{X}}_h$, on trouve $\forall \bar{\mathbf{v}}_h \in \bar{\mathbf{X}}_h$:

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h) + \delta t (\nabla \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \bar{\mathbf{v}}_h) \\ &= \delta t (R_{nl}^n, \bar{\mathbf{v}}_h) + \delta t (\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_h - \bar{\mathbf{P}}_h^1) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{\mathbf{v}}_h) \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$(R_{nl}^n, \bar{\mathbf{v}}_h) := c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) - c(\mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) \quad (8.38)$$

On effectue également la différence (8.22)-(8.8) sur \mathbf{X}_h , pour obtenir quel que soit $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$:

$$(\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h) + \delta t b_h(\mathbf{v}_h, r_h^{n+1}) = 0 \quad (8.39)$$

$$b_h(\mathbf{e}_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad (8.40)$$

Dans (8.37), on pose $\bar{\mathbf{v}}_h = 2\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}$ et dans (8.39) $\mathbf{v}_h = 2\mathbf{e}_h^{n+1}$. On trouve alors respectivement :

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &= 2\delta t (R_{nl}^n, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + 2\delta t (\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_h - \bar{\mathbf{P}}_h^1) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (8.41)$$

$$\|\mathbf{e}_h^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = 0 \quad (8.42)$$

On constate alors que l'on peut effectuer les majorations suivante sur (8.41) :

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + c_2\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ & \leq 2\delta t (R_{nl}^n, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c_3\delta t \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \end{aligned} \quad (8.43)$$

Il ne nous reste que les termes non linéaires à étudier :

$$\begin{aligned} (R_{nl}^n, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) &= c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c(\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ & \quad - c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c(\bar{\mathbf{e}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ & \quad + c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) - c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c(\bar{\mathbf{e}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ & \quad + c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (8.44)$$

Chacun des trois termes précédents doit être majoré en fonction des quantités du membre de gauche de l'équation (8.41). En conséquence, nous avons

les majorations suivantes :

$$2\delta t c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \leq c\delta t \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n\|^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 + \varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} 2\delta t c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) &\leq c\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_1^2 \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &\quad + \varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &\leq c\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_1^2 h^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 + c\varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \end{aligned} \quad (8.46)$$

$$2\delta t c(\bar{\mathbf{e}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \leq c\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 + \varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \quad (8.47)$$

En utilisant les majorations du théorème de stabilité et l'hypothèse (H 8.3.1), nous trouvons donc au final pour l'inégalité (8.43) :

$$\begin{aligned} &\|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + c_0 \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &\leq c_1 \delta t \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n\|^2 + c_2 \delta t \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &\quad + c_3 \delta t \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + c_4 \delta t h^2 + c_5 \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \end{aligned} \quad (8.48)$$

où ε a été choisi suffisamment petit, et les c_i sont des constantes indépendantes du pas du maillage h .

Nous n'avons plus qu'à sommer les inégalités (8.42) et (8.48) pour obtenir des estimations d'énergie complètes :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{e}_h^{n+1}\|^2 + \|\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + c_0 \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &\leq c_1 \delta t \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n\|^2 + c_2 \delta t \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &\quad + c_3 \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + c_4 \delta t h^2 + c_5 (1 + \delta t) \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \end{aligned} \quad (8.49)$$

car nous avons :

$$\|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \quad (8.50)$$

Certains termes du membre de droite de l'inégalité précédente, ont des majorations connues qui, avec l'hypothèse (H 8.3.1), nous donne :

$$\|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n\|^2 \leq ch^4 |\mathbf{u}^n|_2^2 \leq ch^4 \quad (8.51)$$

$$\|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \leq ch^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \leq ch^2 \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 &\leq \|\mathbf{P}'_h (\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}})\|^2 \\ &\leq c \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\leq ch^4 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \\ &\leq ch^4 \end{aligned} \quad (8.53)$$

Si nous sommions alors sur n jusqu'à un indice N quelconque fixé, nous obtenons une inégalité d'énergie presque définitive :

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{e}}_h^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \left(\|\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + c_0 \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \\ \leq c_1 \frac{h^4}{\delta t} + c_2 h^2 + c_3 h^2 + c_4 h^2 + c_5 \delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \end{aligned} \quad (8.54)$$

L'utilisation du lemme de Gronwall nous permet alors d'obtenir la majoration :

$$\|\bar{\mathbf{e}}_h^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \left(\|\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + c_0 \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \leq c_1 \frac{h^4}{\delta t} + c_2 h^2 \quad (8.55)$$

Pour avoir la majoration énoncée dans le théorème, il suffit donc de prendre $h^2 < \delta t$ et d'utiliser les inégalités triangulaires qui suivent :

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.56)$$

$$\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n = \left(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n \right) + \bar{\mathbf{e}}_h^n \quad (8.57)$$

□

8.4 Etude d'un second schéma de projection.

Les résultats précédents montrent que nous obtenons un résultat de convergence optimal en espace, mais qu'il n'en est rien pour la convergence en temps

(cf. le théorème (8.3.2) et également [40]). Pour palier à cette difficulté, nous introduisons un nouveau schéma de projection dont on espère à la fois un comportement optimal en temps mais également en espace.

8.4.1 Définition du nouveau schéma de projection.

Dans cette partie, on va étudier la convergence du schéma de projection suivant pour tout $(\bar{\mathbf{v}}_h, \mathbf{v}_h, q_h) \in \bar{\mathbf{X}}_h \times \mathbf{X}_h \times M_h$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h) + a(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) + c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) \\ = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{v}}_h) - b_h(p_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h) \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h^{n+1} - p_h^n, \mathbf{v}_h) = 0 \quad (8.59)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad (8.60)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} = P_h(\mathbf{u}_h^{n+1}) \quad (8.61)$$

La principale différence avec le schéma totalement discrétisé précédent, vient de l'ajout dans l'équation de convection-diffusion d'un terme source lié au gradient de pression, et d'un incrément de pression dans l'équation de projection.

La principale difficulté de ce schéma de projection vient de la projection du gradient de pression sur l'espace $\bar{\mathbf{X}}_h$ dans (8.58) : il est bien connu qu'une condition de type Babūška-Brezzi n'est pas vérifiée sur cet espace. C'est pourquoi, on ne peut pas appliquer le même type de raisonnement que pour le schéma précédemment décrit.

8.4.2 Existence et unicité d'une solution au schéma de projection.

La démarche pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution au schéma (8.58)-(8.59) est similaire à celle employée pour (8.7)-(8.10) : on conclut de la même manière par l'existence et l'unicité à chaque pas de temps d'une solution $(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p^{n+1}) \in \bar{\mathbf{X}}_h \times \mathbf{X}_h \times M_h$.

8.4.3 Stabilité du schéma de projection.

Théorème 8.4.1 *Il existe une constante C telle que $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, on ait :*

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \delta t^2 \|\nabla_{\mathbf{h}} p_h^n\|^2 \leq C \\ \delta t \sum_{n=0}^{N-1} & \left(\|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|_1^2 \right) + \sum_{n=0}^{N-1} \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 \leq C \end{aligned}$$

Ces inégalités traduisent la stabilité du schéma pour les normes $L^\infty(\mathbf{L}^2)$ et $L^2(\mathbf{H}_0^1)$ en vitesse, et pour la norme $L^\infty(\mathbf{L}^2)$ pour la "pression".

Preuve du théorème:

On écrit (8.58) avec $\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}} = 2\delta t \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ et puisque la forme trilinéaire est antisymétrique, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ & = 2\delta t (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) - 2\delta t b_h(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, p_h^n) \end{aligned} \quad (8.62)$$

Faisant $v_h = \delta t (\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} + \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}})$ dans (8.59), on trouve :

$$\|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \delta t b_h(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, p_h^{n+1} - p_h^n) = 0 \quad (8.63)$$

Par suite en ajoutant (8.62) et (8.63) :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ & = 2\delta t (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) - \delta t b_h(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, p_h^{n+1} + p_h^n) \end{aligned} \quad (8.64)$$

Mais (8.59) signifie également puisque $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \in \bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}} \subset \mathbf{X}_{\mathbf{h}}$:

$$\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} + \delta t \nabla_{\mathbf{h}}(p_h^{n+1} - p_h^n) \quad (8.65)$$

Maintenant, cela implique que :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ & = 2\delta t (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) - \delta t^2 (\nabla_{\mathbf{h}}(p_h^{n+1} + p_h^n), \nabla_{\mathbf{h}}(p_h^{n+1} - p_h^n)) \end{aligned}$$

Par conséquent, on tire de cette relation :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}_h^{n+1} \|^2 + \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n \|^2 + 2\delta t \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \|_1^2 + \delta t^2 \| \nabla_h p_h^{n+1} \|^2 \\ & = 2\delta t (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + \| \bar{\mathbf{u}}_h^n \|^2 + \delta t^2 \| \nabla_h p_h^n \|^2 \end{aligned}$$

En utilisant Cauchy-Schwartz, puis l'inégalité géométrique classique, on trouve la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} \|^2 + \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n \|^2 + c\delta t \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \|_1^2 + \delta t^2 \| \nabla_h p_h^{n+1} \|^2 \\ & \leq c\delta t \| \mathbf{f} \|^2 + \| \bar{\mathbf{u}}_h^n \|^2 + \delta t^2 \| \nabla_h p_h^n \|^2 \end{aligned} \quad (8.66)$$

On en déduit alors facilement les premières inégalités du théorème.

Reprenant (8.66), et faisant la somme sur $n = 0, \dots, N-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}_h^N \|^2 + \delta t^2 \| \nabla_h p_h^N \|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n \|^2 + c\delta t \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \|_1^2 \right\} \\ & \leq \| \mathbf{u}_h^0 \|^2 + \delta t^2 \| \nabla_h p_h^0 \|^2 + c \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \| \mathbf{f} \|^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne la plupart des inégalités recherchées.

Enfin, on constate, s'il on nomme Λ l'opérateur de projection L^2 -orthogonal sur \mathbf{V}_h , l'égalité vectorielle suivante :

$$\mathbf{u}_h^{n+1} = \Lambda \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.67)$$

Par conséquent, on constate trivialement que l'on a :

$$\| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} \|_h \leq c \| \mathbf{u}_h^{n+1} \|_h = c \| \Lambda \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \|_h \leq c \| \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} \|_1 \quad (8.68)$$

Ce qui permet de conclure quant à la dernière inégalité recherchée. \square

8.4.4 Convergence du schéma de projection.

L'étude de la convergence en temps et en espace du schéma numérique (8.58)- (8.59) suivra le même plan directeur que précédemment. Ainsi, l'étude de la convergence en temps, se fera à travers un schéma semi-discrétisé en temps, avant que l'étude de la convergence en espace ne se fasse en comparant ce même schéma semi-discrétisé en temps avec le schéma (8.58)-(8.59).

Convergence en temps du schéma de projection.

L'erreur en temps précédemment évoquée a été étudiée dans [40], grâce au schéma semi-discrétisé qui va suivre. Nous cherchons donc \mathbf{u}^{n+1} , $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ et p^{n+1} appartenant respectivement à \mathbf{L}^2 , \mathbf{H}_0^1 et L_0^2 , solutions du système variationnel :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}) \\ + (\nabla \cdot \mathbf{v}, p^n) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \quad (8.69)$$

$$\frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{w}) + (\nabla(p^{n+1} - p^n), \mathbf{w}) = 0 \quad (8.70)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, q) = 0 \quad (8.71)$$

avec \mathbf{v}, \mathbf{w} et q quelconques dans respectivement \mathbf{H}_0^1 , \mathbf{L}^2 et L_0^2 .

Ce problème admet une unique solution par pas de temps δt mais on supposera de plus que le domaine est suffisamment régulier pour cette solution appartienne également à chaque pas temps à l'espace suivant $\mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^2 \times H^2$.

Les propriétés de (8.69) ont été démontrées dans [40] et sont rappelées dans le théorème :

Théorème 8.4.2 *Notant $\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^n$ et $r^n = p(t) - p^n$ où $(\mathbf{u}(t), p(t))$ sont les solutions de (2.1)-(2.2), nous avons les majorations d'erreurs suivantes :*

$$\|\mathbf{e}^{N+1}\|^2 + \delta t \sum_{n=0}^N \left(\|\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|_1^2 \right) \leq c \delta t^2 \quad (8.72)$$

$$\delta t \sum_{n=0}^N \|r^{n+1}\|^2 \leq c \delta t^2 \quad (8.73)$$

avec N entier quelconque vérifiant : $0 \leq N \leq \frac{T}{\delta t}$ et c constante quelconque indépendante de δt .

On a donc convergence en norme $L^\infty(\mathbf{L}^2)$ et $L^2(\mathbf{H}_0^1)$ pour la vitesse, et convergence en norme $L^2(\mathbf{L}^2)$ pour la pression avec un taux en δt .

Remarque 8.4.1 *Contrairement à l'énoncé du théorème (8.3.2), nous constatons ici que le schéma semi-discrétisé en temps proposé, se comporte de manière optimal en temps : son taux de convergence est en $O(\delta t)$.*

En fait et conformément au papier [26], nous supposerons même que, compte tenu des hypothèses de régularité, la solution de (8.69) vérifie également les conditions de stabilité supplémentaires suivantes :

Hypothèse 8.4.1 *La solution $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, p^{n+1})$ du problème (8.69) est stable respectivement pour les normes $L^\infty(\mathbf{H}^1)$, $L^\infty(\mathbf{H}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{L}^2)$.*

L'erreur en temps ayant été évaluée grâce au système variationnel ci-dessus, il nous suffit donc, afin d'obtenir l'erreur en espace, de comparer le schéma (8.69) avec notre schéma numérique (8.58)-(8.59).

Convergence en espace du schéma de projection.

Cette partie se consacre entièrement à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 8.4.3 *Notant $\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n$ et $r^n = p^n - p_{\mathbf{h}}^n$ où (\mathbf{u}^n, p^n) sont les solutions de (8.69), nous avons les majorations d'erreurs suivantes :*

$$\|\mathbf{e}^{N+1}\|^2 + \delta t \sum_{n=0}^N \|\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\nabla_{\mathbf{h}} r^{N+1}\|^2 \leq c \left(h^2 + \frac{h^2}{\delta t} + \delta t^2 \right)$$

où c est une constante indépendante du pas du maillage h .

Preuve du théorème:

Les notations employées dans la suite de la démonstration sont identiques à celles du théorème (Th 8.3.3).

Dès lors, en faisant la différence entre la première équation de (8.69) avec l'équation (8.58), nous trouvons sur l'espace $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} (\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^n, \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) + (\nabla \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) + (\nabla_{\mathbf{h}} r_{\mathbf{h}}^n, \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) \\ & = (R_{nl}^n, \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) + (\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) \end{aligned} \quad (8.74)$$

$$(R_{nl}^n, \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) := c(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n; \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) - c(\mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}) \quad (8.75)$$

Dans (8.74), on pose alors $\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}} = 2\delta t \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ et l'on trouve finalement :

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + 2\delta t (\nabla_{\mathbf{h}} r_h^n, \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) \\ & = 2\delta t (R_{nl}^n, \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) - 2\delta t (\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (8.76)$$

En utilisant l'égalité (8.59), nous trouvons :

$$\frac{1}{\delta t} (\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_{\mathbf{h}}) + (\nabla_{\mathbf{h}}(r_h^{n+1} - r_h^n), \mathbf{v}_{\mathbf{h}}) = 0 \quad (8.77)$$

Dans (8.77), on pose alors $\mathbf{v}_{\mathbf{h}} = 2\delta t^2 \nabla_{\mathbf{h}} r_h^n$ et compte tenu des propriétés de divergence nulle de \mathbf{u}^{n+1} et de $\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1}$, nous trouvons aisément :

$$\delta t^2 (\|\nabla_{\mathbf{h}} r_h^{n+1}\|^2 - \|\nabla_{\mathbf{h}} r_h^n\|^2 - \|\nabla_{\mathbf{h}}(r_h^{n+1} - r_h^n)\|^2) = 2\delta t (\nabla_{\mathbf{h}} r_h^n, \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) \quad (8.78)$$

Toujours en utilisant l'équation (8.77), on remarque d'une part :

$$\delta t \nabla_{\mathbf{h}}(r_h^{n+1} - r_h^n) = \mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.79)$$

et que d'autre part en posant $\mathbf{v}_{\mathbf{h}} = 2\delta t \mathbf{e}_h^{n+1}$, nous obtenons :

$$\|\mathbf{e}_h^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = 0 \quad (8.80)$$

Nous remarquons alors qu'il est possible d'utiliser la majoration élémentaire suivante, puisque $\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \in \bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$:

$$\|\mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \quad (8.81)$$

Faisant alors la somme des équations (8.76), (8.78) et (8.80), on obtient une première estimation des erreurs :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{e}_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\nabla_{\mathbf{h}} r_h^{n+1}\|^2 \\ & = \delta t^2 \|\nabla_{\mathbf{h}} r_h^n\|^2 + 2\delta t (R_{nl}^{n+1}, \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) + 2\delta t (\nabla_{\mathbf{h}} r_h^n, \mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ & \quad - 2\delta t (\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1 - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) + \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \end{aligned} \quad (8.82)$$

Il nous reste donc à évaluer en fonction du pas du maillage h et de δt tous les termes du membre de droite (à l'exception du premier) de l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} 2\delta t |(\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1 - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}})| &\leq c\delta t \|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}^1 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1 \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1 \\ &\leq c\delta t h^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 + \varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \end{aligned} \quad (8.83)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 &\leq \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right)\|^2 \\ &\leq c \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\leq ch^4 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \end{aligned} \quad (8.84)$$

$$\begin{aligned} 2\delta t (\nabla_{\mathbf{h}} r_h^n, \mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) &\leq c \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\| \\ &\leq ch^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2 \end{aligned} \quad (8.85)$$

Et pour les termes non linéaires, en tenant compte de l'antisymétrie de $c(\cdot, \cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} (R_{nl}^n, \mathbf{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) &= c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c(\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad - c(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n; \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c(\bar{\mathbf{e}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + c(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) - c(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n; \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c(\bar{\mathbf{e}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + c(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (8.86)$$

Equation dont les termes peuvent se majorer par :

$$2\delta t c(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \leq c\delta t \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n\|^2 \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_2^2 + \varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \quad (8.87)$$

$$\begin{aligned} 2\delta t c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) &\leq c\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_1^2 \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_2^2 \\ &\quad + \varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\ &\leq c\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_1^2 h^2 \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_2^2 + \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \end{aligned} \quad (8.88)$$

$$2\delta t c(\bar{\mathbf{e}}_h^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) \leq c\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_2^2 + \varepsilon \delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \quad (8.89)$$

En réinjectant ces majorations dans (8.82) quitte à choisir un ε suffisamment petit et en utilisant l'hypothèse (H 8.4.1), il vient en sommant sur n :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + \delta t \sum_{n=k}^N \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\nabla_h r_h^{N+1}\|^2 \\ \leq \|\mathbf{e}^0\|^2 + \delta t^2 \|\nabla_h r_h^0\|^2 + ch^2 + \frac{h^4}{\delta t} + \frac{h^2}{\delta t} + c\delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \end{aligned} \quad (8.90)$$

En utilisant le lemme de Gronwall rappelé dans la première partie et avec des conditions initiales appropriées, on trouve finalement :

$$\|\mathbf{e}_h^{N+1}\|^2 + \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 + \delta t \sum_{n=0}^N \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\nabla_h r_h^{N+1}\|^2 \leq ch^2 + \frac{h^2}{\delta t} \quad (8.91)$$

Enfin le théorème s'en déduit facilement en observant que :

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.92)$$

$$\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n = \left(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^n \right) + \bar{\mathbf{e}}_h^n \quad (8.93)$$

□

Remarque 8.4.2 Dans toutes les démonstrations qui précèdent, nous aurions pu choisir comme vitesse transportante dans le terme de convection $c(\cdot; \cdot, \cdot)$, le vecteur \mathbf{u}_h^n au lieu du vecteur vitesse $\bar{\mathbf{u}}_h^n$: les démonstrations n'auraient pas changé, compte tenu de la relation (8.68). Cependant, la vitesse \mathbf{u}_h^n est une vitesse à divergence nulle, ce qui est plus cohérent avec la physique.

8.5 Modification du schéma de projection.

Comme la démonstration précédente le montre, la perte du taux optimal de convergence de l'algorithme vient du fait que l'on ne contrôle pas le projeté du vecteur $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ sur \mathbf{X}_h' , mais également du fait que les espace $\bar{\mathbf{X}}_h$ et \mathbf{V}_h ne sont pas consistant, au sens où il n'existe pas nécessairement d'élément de $\bar{\mathbf{X}}_h$, appartenant au noyau \mathbf{V}_h . L'idée consiste donc à introduire une équation en "prime" supplémentaire dont la tâche sera d'une part, d'apporter un contrôle sur la partie manquante de $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ et d'autre part d'éliminer l'absence de consistance en $\bar{\mathbf{X}}_h$ et \mathbf{V}_h .

8.5.1 Définition du schéma de projection modifié.

Dans cette partie, on va étudier la convergence du schéma de projection suivant pour tout $(\bar{\mathbf{v}}_h, \mathbf{v}_h, q_h) \in \bar{\mathbf{X}}_h \times \mathbf{X}_h \times M_h$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h) + a(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) + c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) \\ = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{v}}_h) - b_h(\bar{\mathbf{v}}_h, p_h^n) \end{aligned} \quad (8.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda \mathbf{u}_h'^n, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1} - p_h^n) \\ = (\lambda \mathbf{f}', \mathbf{v}_h') - b_h(\mathbf{v}_h', p_h^n) \end{aligned} \quad (8.95)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad (8.96)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} = P_h(\mathbf{u}_h^{n+1}) \quad (8.97)$$

où les inconnus à déterminer sont une fois encore $\mathbf{u}_h^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}$ et p_h^{n+1} appartenant respectivement à $\mathbf{X}_h, \bar{\mathbf{X}}_h$ et M_h ; λ étant un paramètre valant 1 ou 0. Notons que l'équation de projection (8.95) diffère des précédents schémas proposés : nous y avons inclus des termes supplémentaires, pondérés par un paramètre λ .

8.5.2 Existence et unicité d'une solution au schéma de projection modifié.

La démarche pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution au schéma (8.94)-(8.95) est similaire à celle employée pour (8.7)-(8.10) : on conclut de la même manière par l'existence et l'unicité à chaque pas de temps d'une solution $(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \bar{\mathbf{X}}_h \times \mathbf{X}_h \times M_h$.

8.5.3 Stabilité du schéma de projection modifié.

L'idée consiste à séparer l'équation (8.95) en deux sous-équations, l'une portant sur l'espace $\bar{\mathbf{X}}_h$ et l'autre portant sur l'espace \mathbf{X}_h' : les estimations usuelles nous donnant alors des énergies dans l'espace $\bar{\mathbf{X}}_h$ et \mathbf{X}_h' orthogonaux, on pourra facilement en déduire l'énergie dans l'espace \mathbf{X}_h complet. De plus, comme il est question d'étudier la stabilité, les termes sources ont été mis à zéro.

Théorème 8.5.1 *Il existe une constante C telle que $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, on ait :*

$$\|\bar{\mathbf{u}}_h^n + \lambda \mathbf{u}_h'^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n\|^2 \leq C \quad (8.98)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)\|^2 \leq C \quad (8.99)$$

$$\begin{aligned} & \delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \left(\|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \lambda \|\mathbf{u}_h'^{n+1} - \mathbf{u}_h'^n\|^2 \right) \leq C \end{aligned} \quad (8.100)$$

Ces inégalités traduisent la stabilité du schéma pour les normes $L^\infty(\mathbf{L}^2)$ et $L^2(\mathbf{H}_0^1)$ en vitesse, et pour la norme $L^\infty(\mathbf{L}^2)$ pour la "pression".

Preuve du théorème:

L'équation (8.94) se traite de la même manière que pour le schéma numérique précédent ; on obtient ainsi les estimations d'énergie suivantes :

$$\|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 = 2\delta t b_h(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, p_h^n) \quad (8.101)$$

La partie dans $\bar{\mathbf{X}}_h$ de l'équation (8.95) permet d'obtenir l'estimation qui suit, en posant $\bar{\mathbf{v}}_h = 2\delta t^2 \bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n$:

$$\begin{aligned} & 2\delta t (\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n) + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^{n+1}\|^2 \\ & - \delta t^2 (\|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n\|^2 - \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)\|^2) = 0 \end{aligned} \quad (8.102)$$

Toujours dans la partie $\bar{\mathbf{X}}_h$ de (8.95), on écrit également les relations :

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ & + 2\delta t (\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^{n+1} - \bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n, \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (8.103)$$

Nous effectuons alors la somme des équations (8.101) à (8.103), ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ & + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^{n+1}\|^2 - \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n\|^2 \\ & + 2\delta t (\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^{n+1}, \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (8.104)$$

De la même façon, la partie dans \mathbf{X}_h' de (8.95) nous donne les énergies suivantes, en posant $\mathbf{v}_h' = 2\delta t \mathbf{P}'_h \mathbf{u}_h^{n+1}$:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 - \lambda \|\mathbf{u}_h'^n\|^2 + \lambda \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h'^n\|^2 \\ & + 2\delta t (\mathbf{P}'_h \nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{P}'_h \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (8.105)$$

Il nous suffit alors de sommer les équations (8.104) et (8.105), pour obtenir (compte tenu des propriétés d'orthogonalité supposées) les inégalités d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_h^n + \lambda \mathbf{u}_h'^n\|^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^{n+1}\|^2 - \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n\|^2 \\ & + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ & + \lambda \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h'^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (8.106)$$

En sommant sur n et en utilisant les propriétés de l'opérateurs de projection $\bar{\mathbf{P}}_h$, l'énoncé du théorème en découle naturellement (la dernière inégalité résultant de la partie $\bar{\mathbf{X}}_h$ de l'équation (8.95)). \square

8.5.4 Convergence du schéma de projection modifié.

L'idée est globalement la même que pour le schéma sans l'équation sur la partie \mathbf{X}_h' , cette dernière intervenant de manière identique à la démonstration de la stabilité.

Convergence en espace du schéma de projection modifié.

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 8.5.2 *Notant $\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n$ et $r^n = p^n - p_h^n$ où (\mathbf{u}^n, p^n) sont les solutions de (8.69), on a les majorations d'erreurs suivantes :*

$$\|\mathbf{e}^{N+1}\|^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r^{N+1}\|^2 + \delta t \sum_{n=0}^N \|\mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \leq c \left(h^2 + \delta t^2 + (1-\lambda) \frac{h^4}{\delta t} \right)$$

où c est une constante indépendante du pas du maillage h .

Preuve du théorème:

Les notations que nous utiliserons dans cette démonstration sont les mêmes que celles employées lors du théorème (Th 8.3.3). Nous aurons toutefois besoin d'utiliser le vecteur suivant :

$$\mathbf{e}_h^m := \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^m - \mathbf{u}_h^m \quad (8.107)$$

$$(8.108)$$

La première égalité du schéma numérique restant inchangée, les premières égalités d'énergie sont représentées par (8.76).

Etudions maintenant les équations de projection, mais restreinte à l'espace $\bar{\mathbf{X}}_h$. Ainsi, si nous remplaçons dans (8.95) \mathbf{v}_h par respectivement $\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^n$ et $\bar{\mathbf{e}}_h^{n+1}$, nous obtenons alors les deux égalités qui suivent :

$$2\delta t (\bar{\mathbf{e}}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^n) + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 - \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^n\|^2 - \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = 0 \quad (8.109)$$

$$\|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + 2\delta t (\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h (r_h^{n+1} - r_h^n), \bar{\mathbf{e}}_h^{n+1}) = 0 \quad (8.110)$$

Cas $\lambda = 0$

Il nous faut utiliser les équations de projection restreinte à \mathbf{X}_h' afin de compléter nos estimations d'énergie. Dans ce cas précis, en posant $\mathbf{v}_h' = 2\delta t \mathbf{e}_h^{m+1}$, nous obtenons :

$$\|\mathbf{e}_h^{m+1}\|^2 - \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{e}_h^{m+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + 2\delta t (\mathbf{P}'_h \nabla_h r_h^{n+1}, \mathbf{e}_h^{m+1}) = 0 \quad (8.111)$$

Additionnons maintenant cette égalité avec les égalités d'énergie (8.109)-(8.110) et l'égalité d'énergie (8.76) due à l'équation de convection diffusion. Nous trouvons alors :

$$\begin{aligned}
& \|e_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{e}_h^n\|^2 - \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{e}_h^n\|^2 \\
& + \|e_h^{n+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + 2\delta t \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 \\
& = \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^n\|^2 + 2\delta t (R_{nl}^{n+1}, \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\
& \quad - 2\delta t (\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_h^1 - \bar{\mathbf{P}}_h) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}})
\end{aligned} \tag{8.112}$$

Nous utilisons alors les majorations déjà écrites plus haut :

$$\begin{aligned}
2\delta t |(\nabla \left((\bar{\mathbf{P}}_h^1 - \bar{\mathbf{P}}_h) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}})| & \leq c\delta t \|\bar{\mathbf{P}}_h^1 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1 \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1 \\
& \leq c\delta t h^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 + \varepsilon \delta t \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2
\end{aligned} \tag{8.113}$$

$$\|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq ch^4 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \tag{8.114}$$

Si nous employons alors ces majorations, nous obtenons une nouvelle estimation :

$$\begin{aligned}
& \|\bar{e}_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{e}_h^n\|^2 + \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{e}_h^n\|^2 + \|e_h^{n+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\
& \quad + c\delta t \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 \\
& = \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^n\|^2 + 2\delta t (R_{nl}^{n+1}, \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) + ch^4 \\
& \quad + c\delta t h^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2
\end{aligned} \tag{8.115}$$

Maintenant, sommions sur n jusqu'à un entier n_0 quelconque inférieur ou égal à N . Nous obtenons alors la majoration d'énergie :

$$\begin{aligned}
& \|e_h^{n_0+1}\|^2 + \delta t^2 \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{e}_h^n\|^2 \\
& \quad + \sum_{n=0}^{n_0} \left(\|e_h^{n+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + c\delta t \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \\
& = 2\delta t \sum_{n=0}^{n_0} (R_{nl}^{n+1}, \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) + \delta t^2 \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 \\
& \quad + c \frac{h^4}{\delta t} + ch^2 |\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}|_2^2
\end{aligned} \tag{8.116}$$

Pour les termes non linéaires, seule l'équation (8.46) nécessite un peu d'attention. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
2\delta t \sum_{n=0}^{n_0} c(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) &\leq 2\delta t \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n\|_1 \|\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_1 \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1 \\
&\leq c\delta t h^2 \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^0\|_1^2 + c\delta t h^2 \sum_{n=0}^{n_0} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_1^2 \\
&\quad + \varepsilon\delta t \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2
\end{aligned} \tag{8.117}$$

Or nous savons d'après l'équation (8.95) projeté sur $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$ que :

$$\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_1^2 \leq c\|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + c\delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\nabla_{\mathbf{h}}(r_h^{n+1} - r_h^n)\|^2 \tag{8.118}$$

$$\|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\nabla_{\mathbf{h}}(r_h^{n+1} - r_h^n)\|^2 \leq \frac{3}{2}\|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\nabla_{\mathbf{h}}r_h^{n+1}\|^2 + \frac{3}{2}\|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\nabla_{\mathbf{h}}r_h^n\|^2 \tag{8.119}$$

Il nous vient donc finalement :

$$\begin{aligned}
2\delta t \sum_{n=0}^{n_0} c(\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}) &\leq c\delta t h^2 + c\delta t h^2 \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\
&\quad + \frac{3c}{2}\delta t^3 \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\nabla_{\mathbf{h}}r_h^{n+1}\|^2 \\
&\quad + \frac{3c}{2}\delta t^3 \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}}\nabla_{\mathbf{h}}r_h^n\|^2 \\
&\quad + \varepsilon\delta t \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2
\end{aligned} \tag{8.120}$$

Nous réinjectons cette majoration dans l'équation (8.116), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{e}_h^{n_0+1}\|^2 + \delta t^2 \left(1 - \frac{3c}{2}\delta t\right) \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \\
& \quad + \sum_{n=0}^{n_0} \left(\|\mathbf{e}'_h^{n+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + c\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \\
& \leq \delta t^2 \left(1 + \frac{3c}{2}\delta t\right) \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 \\
& \quad + c \frac{h^4}{\delta t} + ch^2
\end{aligned} \tag{8.121}$$

Nous remarquons alors que $1 - \frac{3c}{2}\delta t < 1$ et par suite, il est possible de minorer le membre de gauche : il nous suffit de minorer tous les termes positifs à l'aide du coefficient $1 - \frac{3c}{2}\delta t$. Ensuite, nous multiplions cette nouvelle inéquation par $(1 - \frac{3c}{2}\delta t)^{-1}$, et en remarquant que nous avons la majoration $(1 - \frac{3c}{2}\delta t)^{-1} \leq (1 + \frac{3c_1}{2}\delta t)$ avec c_1 constante bien choisie, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{e}_h^{n_0+1}\|^2 + \delta t^2 \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \\
& \quad + \sum_{n=0}^{n_0} \left(\|\mathbf{e}'_h^{n+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + c\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \\
& \leq \delta t^2 \left(1 + \frac{3c_1}{2}\delta t\right) \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^n\|^2 \\
& \quad + c \frac{h^4}{\delta t} + ch^2
\end{aligned} \tag{8.122}$$

Ce qui se réécrit plus simplement :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{e}_h^{n_0+1}\|^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^{n_0+1}\|^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{e}}_h^n\|^2 \\
& + \sum_{n=0}^{n_0} \left(\|\mathbf{e}'_h^{n+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + c\delta t \|\bar{\mathbf{e}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \\
& \leq c\delta t \sum_{n=0}^{n_0} \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 \\
& \quad + c \frac{h^4}{\delta t} + ch^2
\end{aligned} \tag{8.123}$$

Il nous reste à appliquer le lemme de Gronwall discret pour obtenir la majoration donnée dans le théorème.

Cas $\lambda = 1$

Pour ce cas particulier, nous remarquons qu'en projetant sur \mathbf{X}_h' la dernière équation du système (8.69), nous avons une estimation de $\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^n + \delta t \mathbf{f}' - \delta t \mathbf{P}'_h \nabla p^n \\
& + \delta t \mathbf{P}'_h \left(\Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{8.124}$$

Dès lors, les équations de projection restreintes à l'espace \mathbf{X}_h' deviennent, en imposant $\mathbf{v}_h' = 2\delta t \mathbf{e}'_h^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{e}'_h^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{e}'_h^n\|^2 + \|\mathbf{e}'_h^{n+1} - \mathbf{e}'_h^n\|^2 + 2\delta t (\mathbf{P}'_h \nabla_h r_h^{n+1}, \mathbf{e}'_h^{n+1}) \\
& = \delta t (\mathbf{P}'_h \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right), \mathbf{e}'_h^{n+1})
\end{aligned} \tag{8.125}$$

Nous procédons alors comme pour le cas $\lambda = 0$. Nous additionnons cette dernière égalité avec les égalités d'énergie (8.109)- (8.110) ainsi qu'avec l'éga-

lité d'énergie (8.76) et nous trouvons :

$$\begin{aligned}
& \|e_h^{n+1}\|^2 - \|e_h^n\|^2 + \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{e}_h^n\|^2 \\
& + \|e_h^{n+1} - e_h^n\|^2 + 2\delta t \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\bar{P}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 \\
= & \delta t^2 \|\bar{P}_h \nabla_h r_h^n\|^2 + 2\delta t (R_{nl}^{n+1}, \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) - 2\delta t (\nabla \left((\bar{P}_h^1 - \bar{P}_h) u^{n+\frac{1}{2}} \right), \nabla \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) \\
& + \delta t (P_h' \left((u^n \cdot \nabla) u^{n+\frac{1}{2}} - \Delta u^{n+\frac{1}{2}} \right), e_h^{n+1})
\end{aligned} \tag{8.126}$$

En plus des majorations déjà démontrées pour le cas $\lambda = 0$, nous allons devoir utiliser les estimations suivantes :

$$\delta t \|\Delta u^{n+\frac{1}{2}} - \bar{P}_h^1 u^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq c\delta t h^4 |u^{n+\frac{1}{2}}|_2^2 \tag{8.127}$$

$$\begin{aligned}
\delta t \|(u^n \cdot \nabla) u^{n+\frac{1}{2}} - \bar{P}_h (u^n \cdot \nabla) u^{n+\frac{1}{2}}\|^2 & \leq c\delta t h^2 \|(u^n \cdot \nabla) u^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \\
& \leq c\delta t h^2 \|u^n\|_1^2 |u^{n+\frac{1}{2}}|_2^2
\end{aligned} \tag{8.128}$$

$$\delta t \|e_h^{n+1}\|^2 \leq \delta t \|e_h^{n+1}\|^2 \tag{8.129}$$

Nous injectons ces majorations dans l'équation (8.126) afin d'obtenir les estimations :

$$\begin{aligned}
& (1 - \delta t) \|e_h^{n+1}\|^2 - \|e_h^n\|^2 + \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{e}_h^n\|^2 \\
& + \|e_h^{n+1} - e_h^n\|^2 + c\delta t \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \delta t^2 \|\bar{P}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2 \\
= & \delta t^2 \|\bar{P}_h \nabla_h r_h^n\|^2 + 2\delta t (R_{nl}^{n+1}, \bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}) + c\delta t h^2 + c\delta t h^4
\end{aligned} \tag{8.130}$$

Nous recommençons la technique employée pour le cas $\lambda = 0$ à savoir que nous sommes sur n jusqu'à n_0 quelconque fixé, puis nous traitons le terme non-linéaire de la même façon que précédemment. Ainsi, nous aboutissons à l'expression finale :

$$\begin{aligned}
& \|e_h^{n_0+1}\|^2 + \delta t^2 \|\bar{P}_h \nabla_h r_h^{n_0+1}\|^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{e}_h^n\|^2 \\
& + \sum_{n=0}^{n_0} \left(\|e_h^{n+1} - e_h^n\|^2 + c\delta t \|\bar{e}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 \right) \\
\leq & c\delta t \sum_{n=0}^{n_0} (\|e_h^n\|^2 + \delta t^2 \|\bar{P}_h \nabla_h r_h^{n+1}\|^2) \\
& + ch^4 + ch^2
\end{aligned} \tag{8.131}$$

Nous utilisons alors le lemme de Gronwall et les égalités suivantes pour obtenir le résultat annoncé :

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (8.132)$$

$$\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{h}}^n = \left(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^n \right) + \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{h}}^n \quad (8.133)$$

□

8.5.5 Résultats numériques.

Ce paragraphe est uniquement destiné à exhiber les calculs effectués sur quelques cas tests standards. Tous les écoulements seront étudiés sur un domaine carré de longueur 1, et les fluides seront supposés avoir une densité ρ égale à 1 et une viscosité ν égale à 1 également.

Cas de Dirichlet homogène.

Cas 2D. Nous avons traité un écoulement de fluide soumis à des conditions d'adhérence, en deux dimensions. Pour cela, nous avons imposé à la vitesse \mathbf{u} une valeur nulle au bord du domaine Ω -un carré de longueur 1 et d'origine le point $(0,0)$ - et un terme source \mathbf{f} vérifiant :

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la solution (\mathbf{u}, p) attendue est telle que :

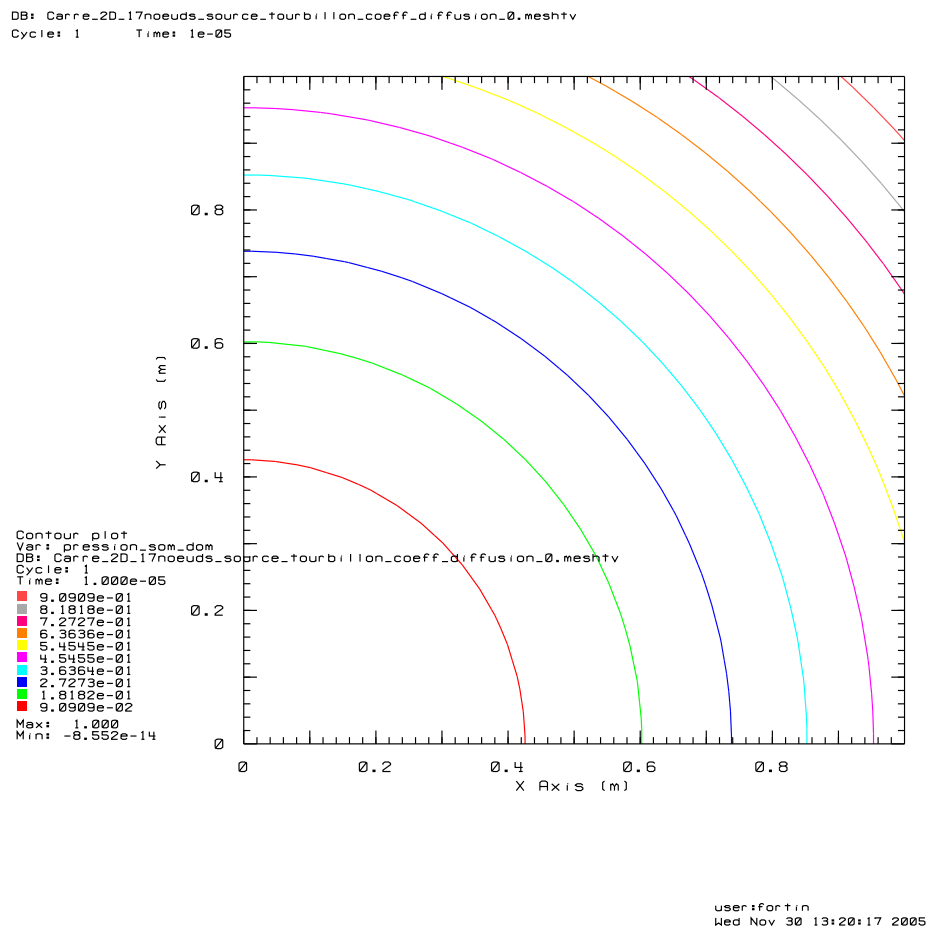
$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Les tests ont été effectués sur un maillage de 1024 triangles, avec les opérateurs de diffusion et de convection centré. Les figures suivantes représentent respectivement la première composante de la vitesse, la seconde composante de la vitesse et la pression.

Nous avons choisi de ne pas représenter, dans les figures qui suivent, les coordonnées de la vitesse car celles-ci, en valeur absolue, sont de l'ordre de

10^{-17} . Toutefois, l'erreur effectivement commise se concentre toujours autour du point $(0, 0)$: ce phénomène est entièrement dû à la méthode d'inversion de matrice employée. En effet, nous avons voulu utiliser une méthode de Cholesky pour inverser la matrice de pression. Or cette matrice n'est pas définie positive. Aussi, pour contourner ce problème, nous avons modifié la matrice de pression de sorte à la rendre définie positive. Ce faisant, cela revenait à modifier les coefficients diagonaux associés au premier élément et au premier sommet du maillage qui sont justement situés au voisinage de $(0, 0)$.



TAB. 8.1 – Courbe de pression : cas 2D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y)^t$.

Cas 3D. Nous simulons à nouveau l'écoulement d'un fluide soumis à des conditions d'adhérence, mais cette fois en dimension trois d'espace. Nous avons donc imposé à la vitesse d'être nulle au bord du domaine de l'écoulement Ω -un cube de longueur 1 et d'origine le point $(0, 0, 0)$ - et appliqué un terme source \mathbf{f} de la forme :

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0. \end{pmatrix}$$

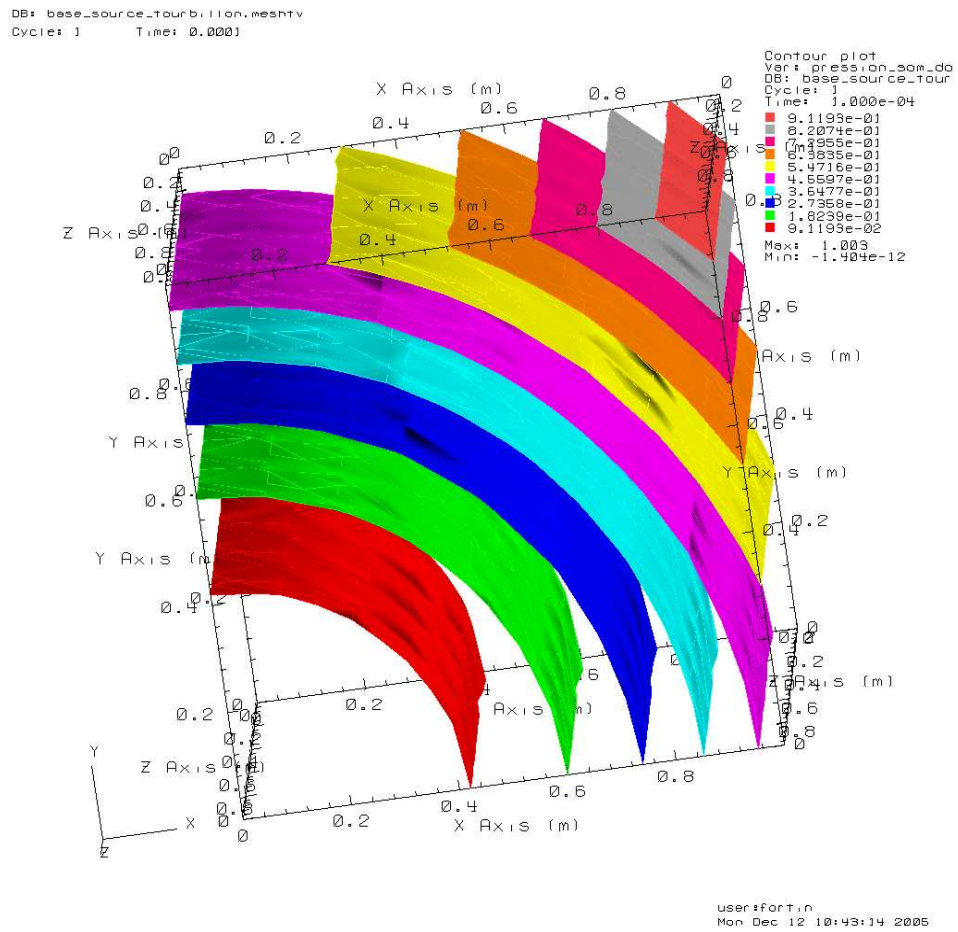
Ces contraintes particulières nous permettent de connaître à priori, les solutions des équations de Navier-Stokes qui doivent être :

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

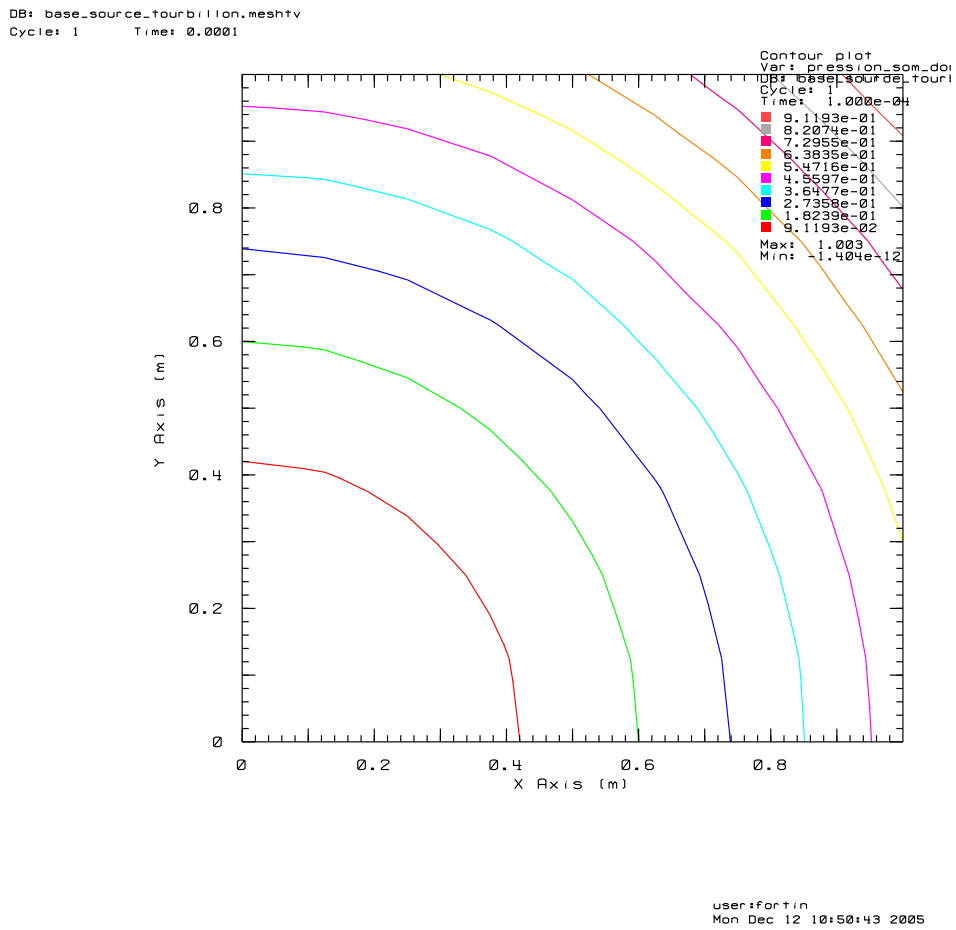
$$p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Enfin et pour être tout à fait complet, les tests ont été effectués sur un maillage composé de 2560 tétraèdres avec les opérateurs de diffusion et de convection centré. Les figures suivantes représentent respectivement la première, la seconde et la troisième composantes de la vitesse dans le cube tandis que les quatre images qui suivent représentent la pression dans le volume et selon des coupes dans le plan (xy) , (xz) et (yz) .

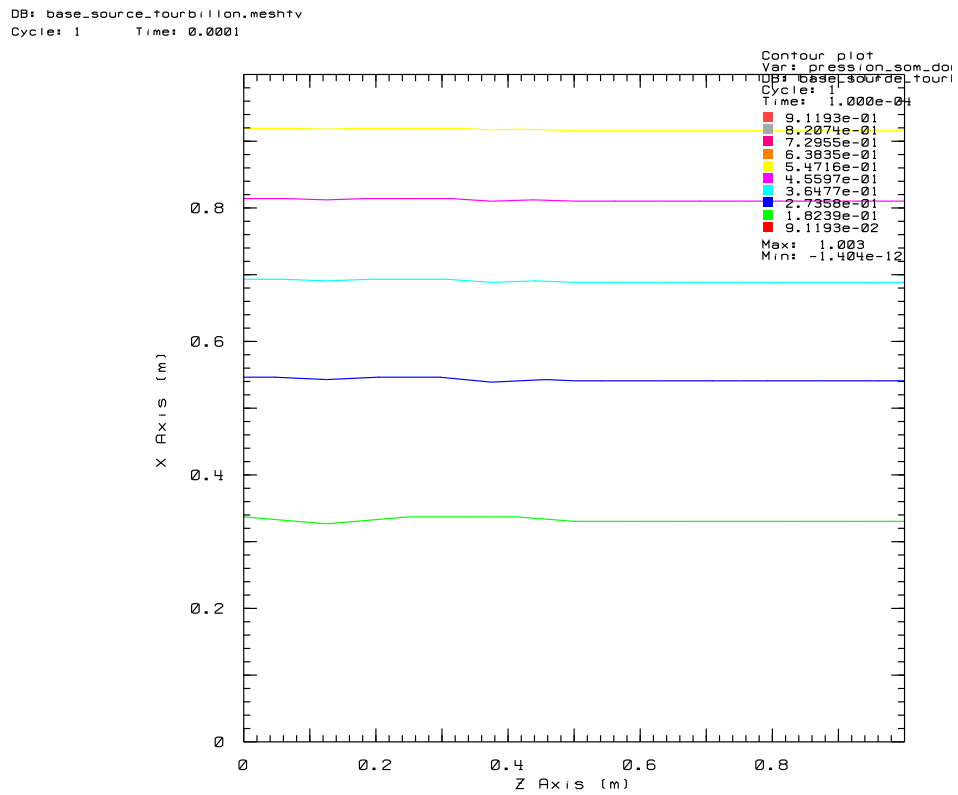
Pour les mêmes raisons que lors du test en deux dimensions, nous n'avons pas représenté les coordonnées du vecteur vitesse, car en valeur absolue, celles-ci n'excèdent jamais 10^{-17} .



TAB. 8.2 – Courbe de pression : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$.

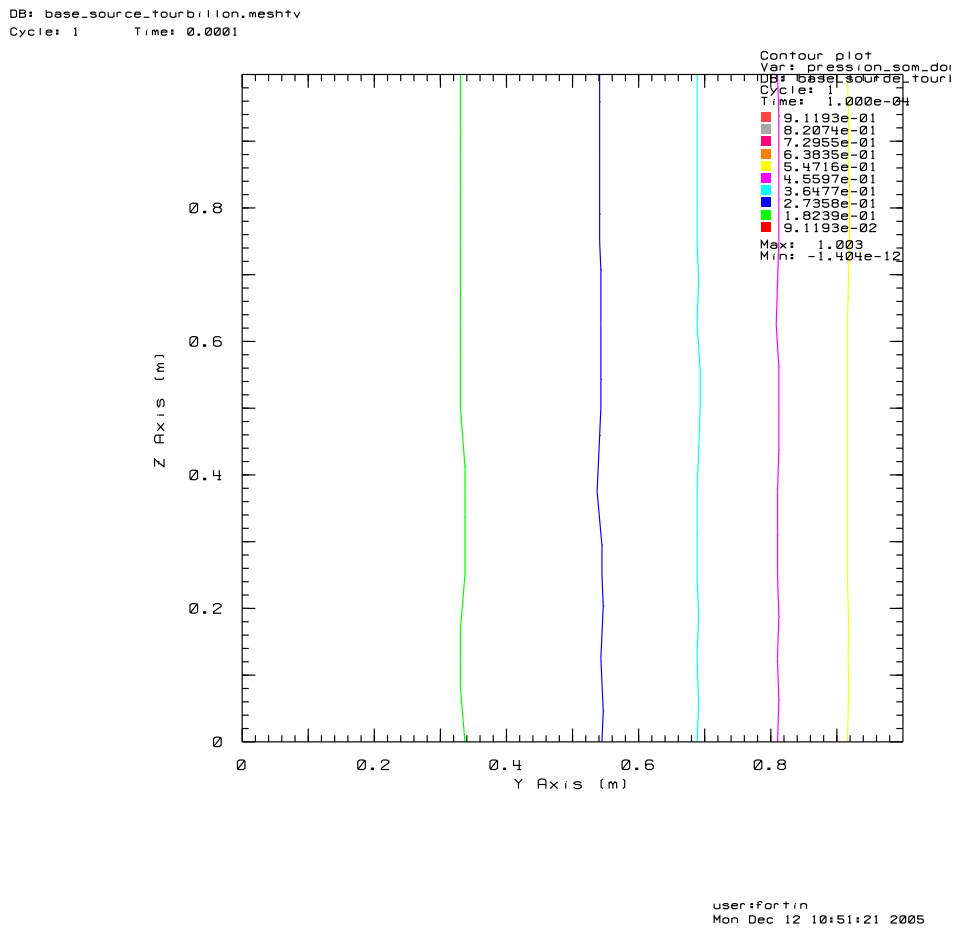


TAB. 8.3 – Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$.



user:fortin
 Mon Dec 12 10:48:49 2005

TAB. 8.4 – Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$.



TAB. 8.5 – Courbe de pression dans le plan (yz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, y, 0)^t$.

Sous les mêmes conditions, nous avons également utilisé le terme source suivant :

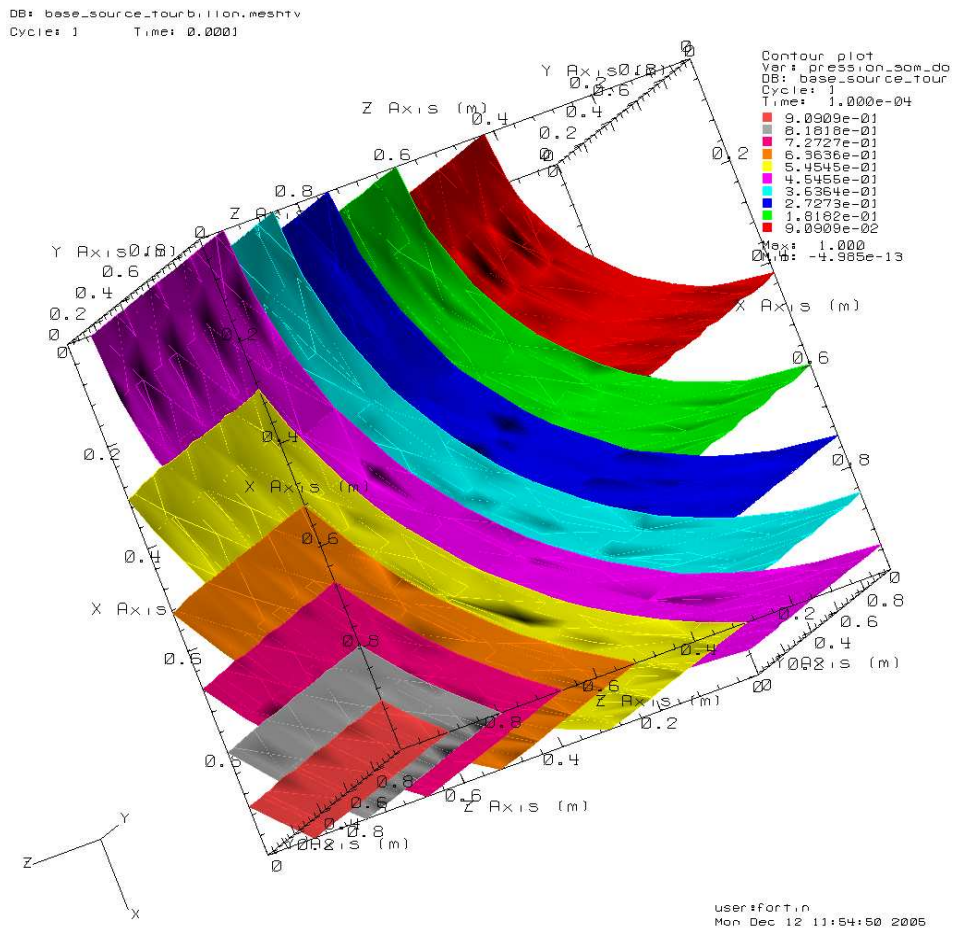
$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

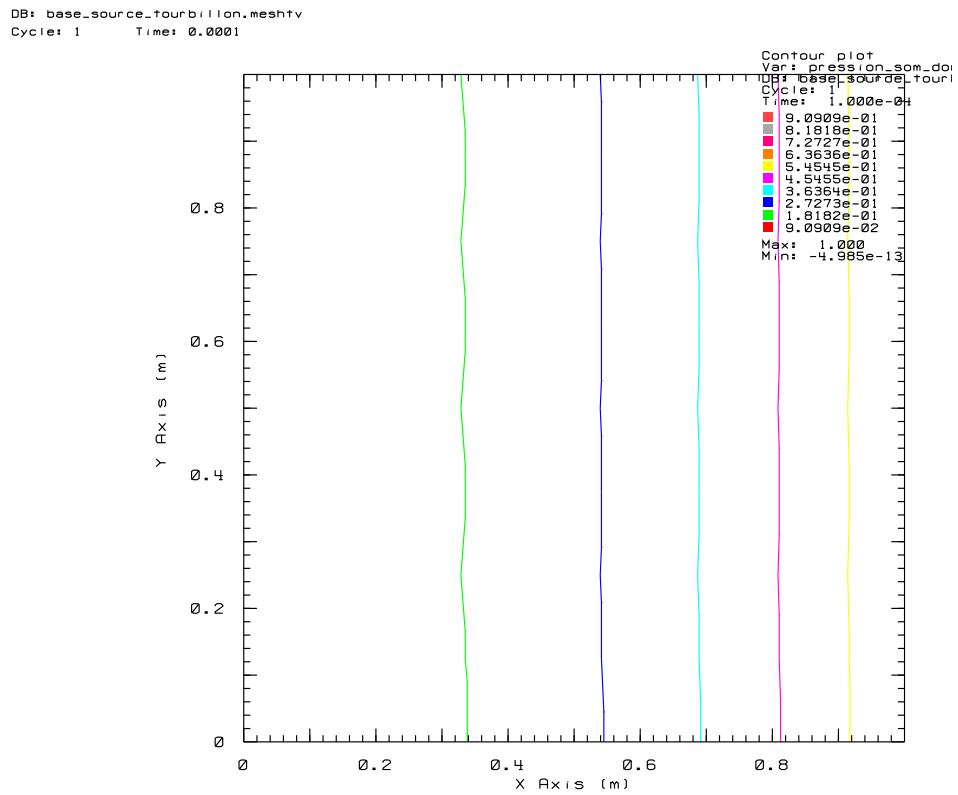
Ce qui est nous donne naturellement, les solutions suivantes :

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$p = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$$

Les figures suivantes respectent la nomenclature précédente à savoir que les trois premières images représentent les trois composantes de la vitesse, la quatrième, la pression dans le volume de l'écoulement et les trois dernières, la pression selon respectivement les plans de coupe (xy) , (xz) et (yz) .

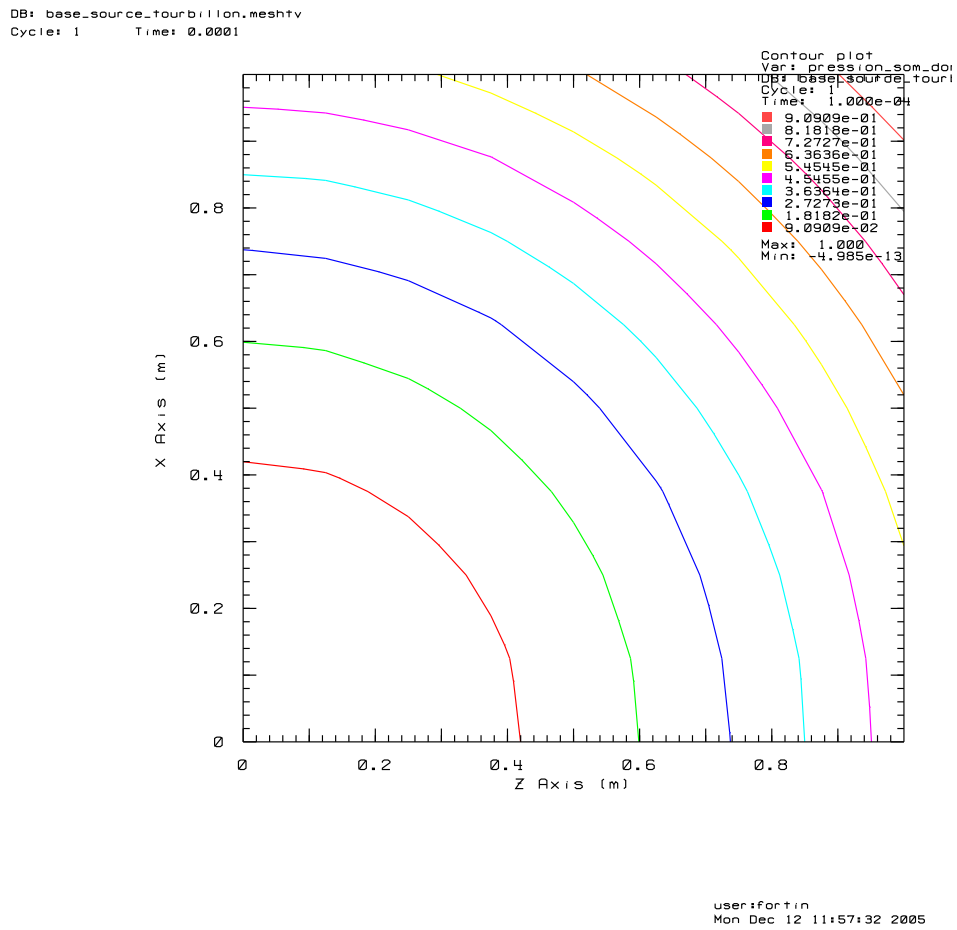
Les coordonnées du vecteur vitesse n'excédant jamais, en valeur absolue, 10^{-17} , nous avons choisi de ne pas les représenter.

TAB. 8.6 – Courbe de pression : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$.

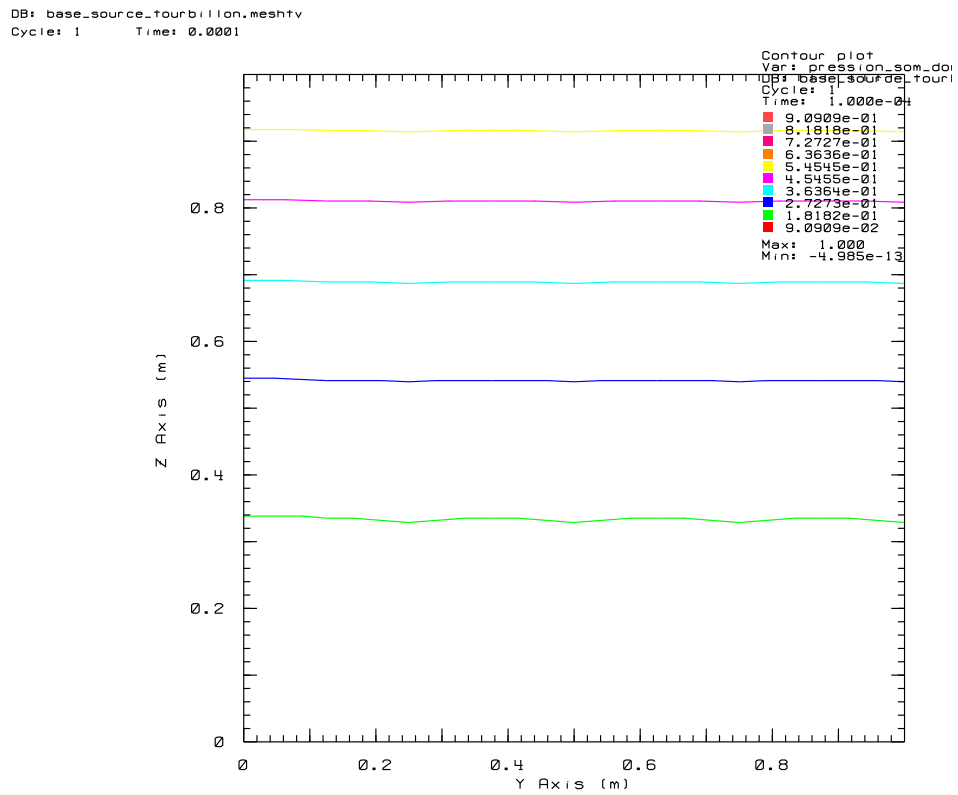


user:fortin
 Mon Dec 12 11:58:07 2005

TAB. 8.7 – Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$.



TAB. 8.8 – Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$.



user:fortin
 Mon Dec 12 11:58:34 2005

TAB. 8.9 – Courbe de pression dans le plan (yz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x, 0, z)^t$.

Comme dernier cas test, nous avons imposé un terme source polynomial de degré 2, pour vérifier les propriétés de superconvergence. Ainsi, nous avons :

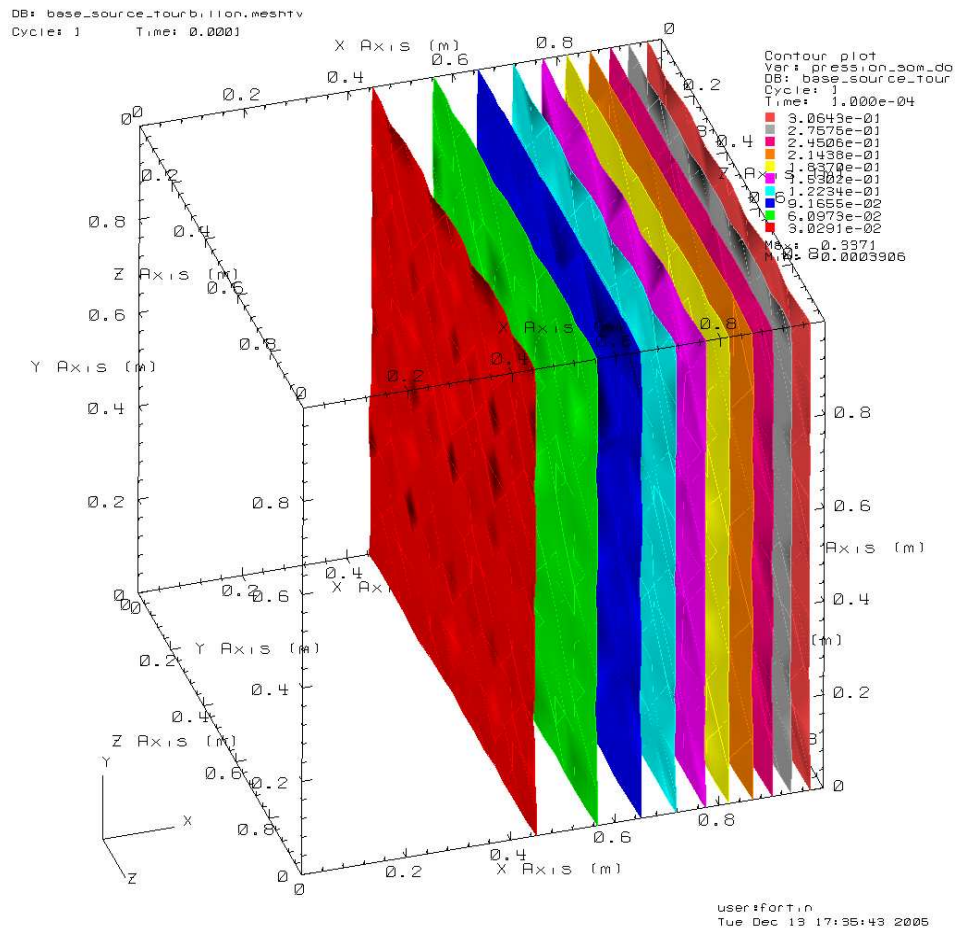
$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est nous permet d'obtenir, les solutions suivantes :

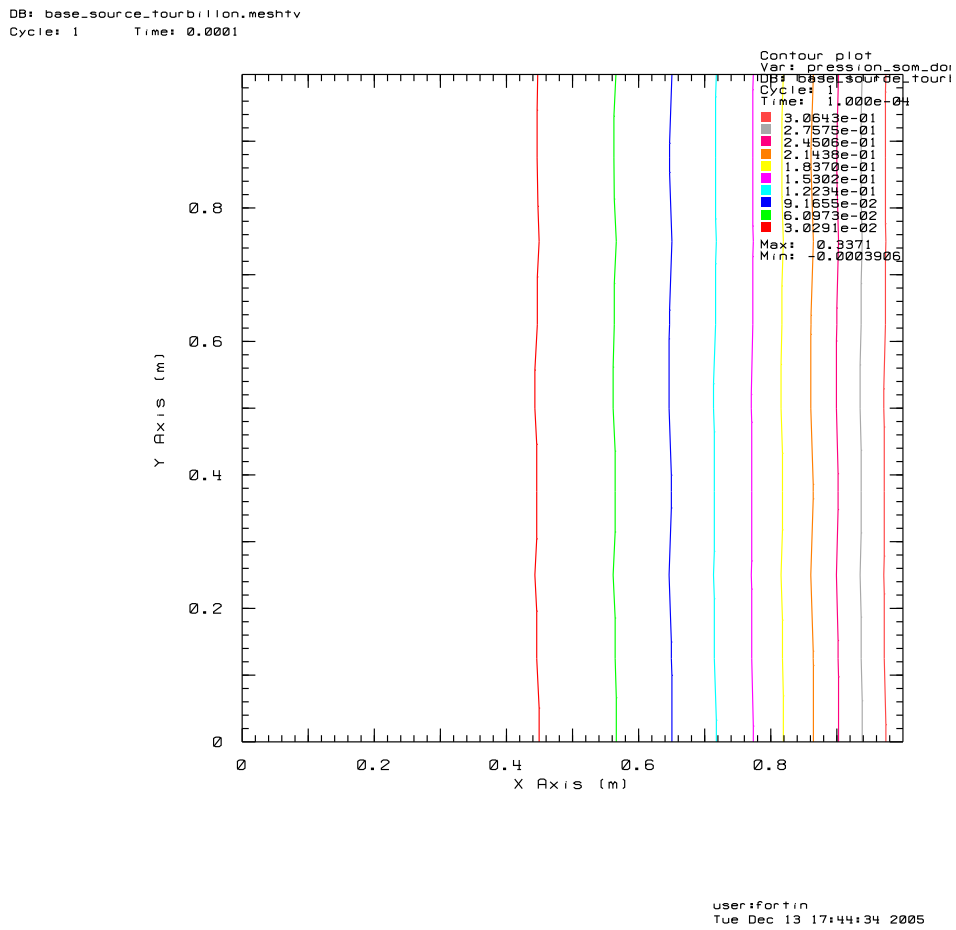
$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$p = \frac{1}{3}x^3$$

Les figures qui suivent, respectent la nomenclature précédemment rappelée, à ceci près que le plan de coupe (yz) de la pression n'est pas représenté (la pression étant rigoureusement nulle le long de ce plan).

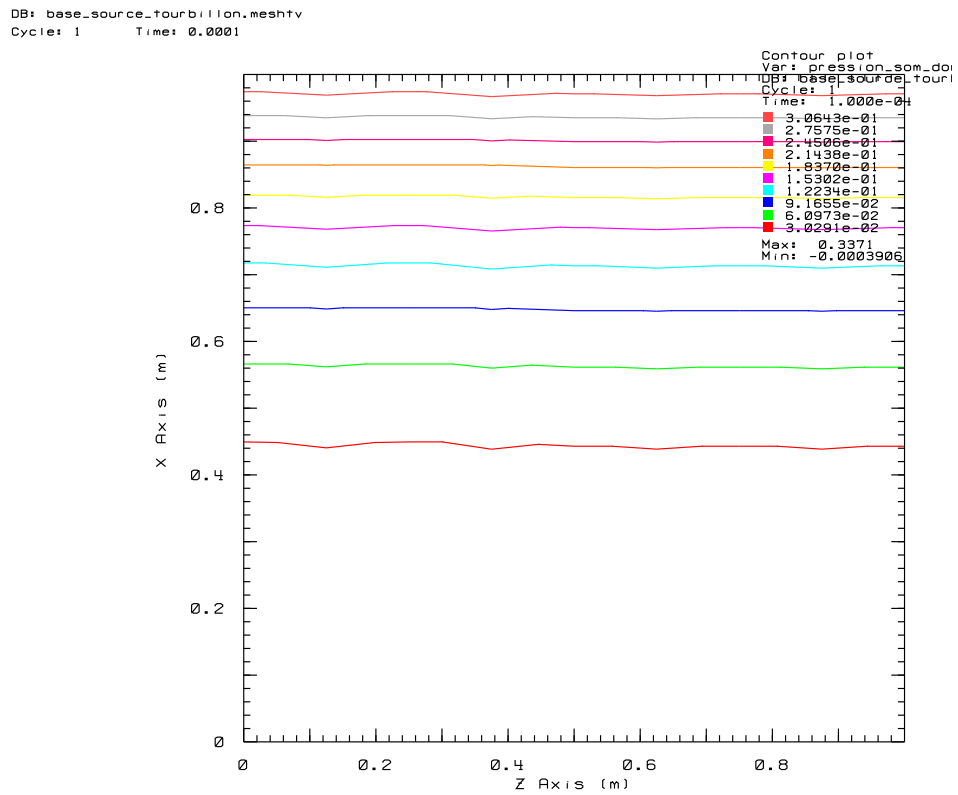
Comme dans les cas précédents, les coordonnées du vecteur vitesse étant, en valeur absolue, très faibles ($\approx 10^{-18}$), nous ne les avons pas représentées.



TAB. 8.10 – Courbe de pression : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x^2, 0, 0)^t$.



TAB. 8.11 – Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x^2, 0, 0)^t$.



user:fortin
 Tue Dec 13 17:43:38 2005

TAB. 8.12 – Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, dirichlet homogène et $\mathbf{f} = (x^2, 0, 0)^t$.

Cas de Dirichlet non homogène.

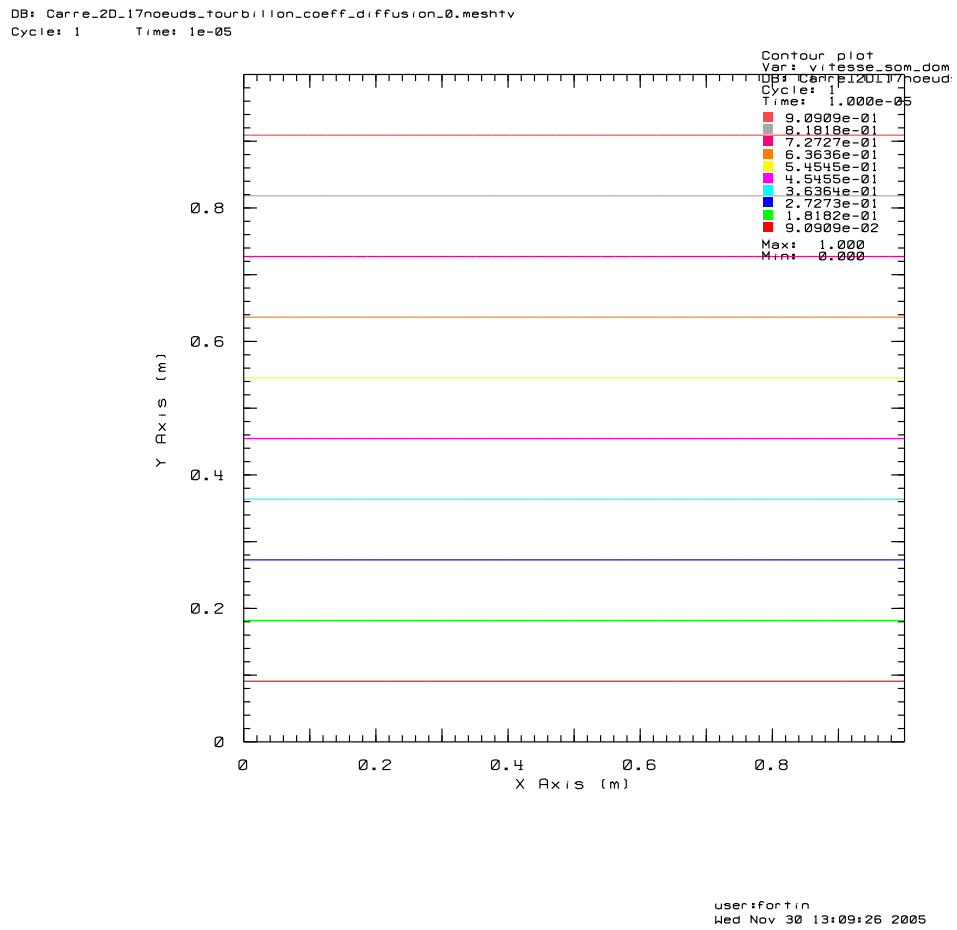
Cas 2D. Nous imposons au fluide les conditions aux limites suivantes sur le bord du domaine Ω -un carré de longueur 1 et d'origine le point $(0,0)$:

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Nous avons également soumis le fluide à un terme source identiquement nul. En conséquence, les solutions continues sont :

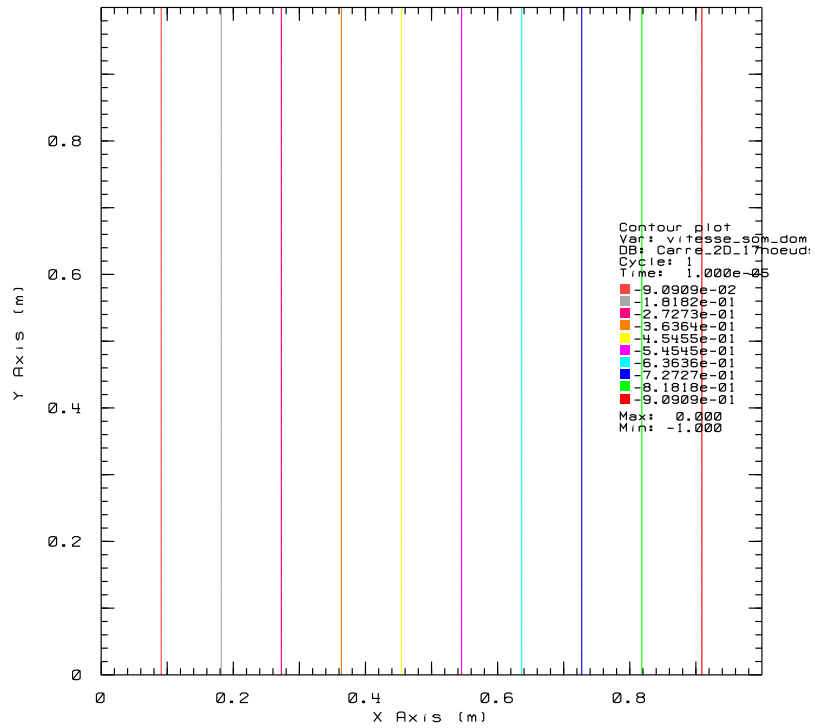
$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$
$$p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Les tests ont été effectués sur un maillage de 1024 triangles, avec les opérateurs de diffusion et de convection centré. Les figures suivantes représentent respectivement la première composante de la vitesse, la seconde composante de la vitesse et la pression.



TAB. 8.13 – Composante x de la vitesse : cas 2D, $\mathbf{u} = (y, -x)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0)^t$.

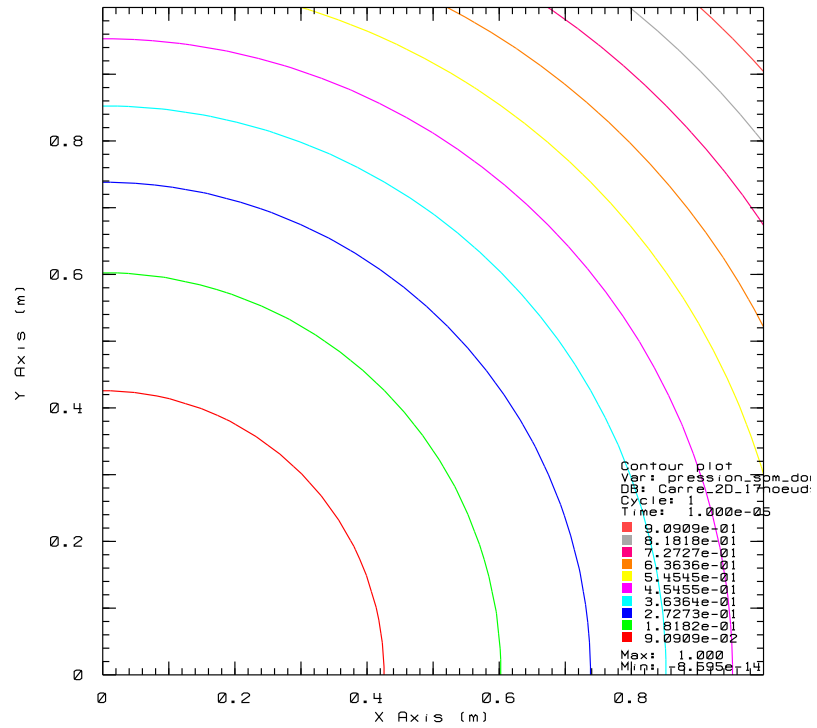
DB: Carre_2D_17noeuds_tourbillon_coefff_diffusion_0.meshtv
 Cycle: 1 Time: 1e-05



user:fortin
 Wed Nov 30 13:10:00 2005

TAB. 8.14 – Composante y de la vitesse : cas 2D, $\mathbf{u} = (y, -x)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0)^t$.

DB: Carre_2D_17noeuds_tourbillon_coeff_diffusion_0.meshtv
 Cycle: 1 Time: 1e-05



user:fortin
 Wed Nov 30 13:10:24 2005

TAB. 8.15 – Courbe de pression : cas 2D, $\mathbf{u} = (y, -x)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0)^t$.

Cas 3D. Nous simulons à nouveau l'écoulement d'un fluide soumis à des conditions aux limites de Dirichlet, mais cette fois en dimension trois d'espace. Nous avons donc imposé la vitesse \mathbf{u} au bord du domaine de l'écoulement Ω -un cube de longueur 1 et d'origine le point $(0, 0, 0)$ - et appliqué un terme source \mathbf{f} de la forme :

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0. \end{pmatrix}$$

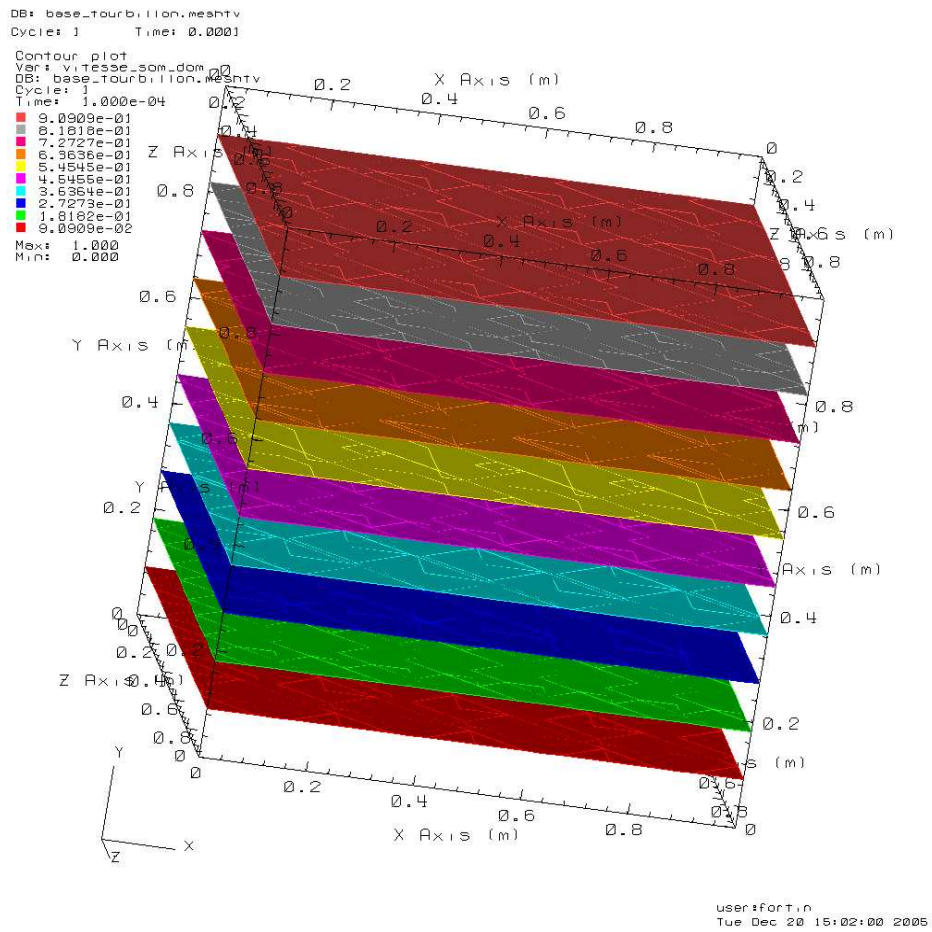
$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Ces contraintes particulières nous permettent de connaître à priori, les solutions des équations de Navier-Stokes (donc en tenant compte de l'opérateur de convection) qui doivent être :

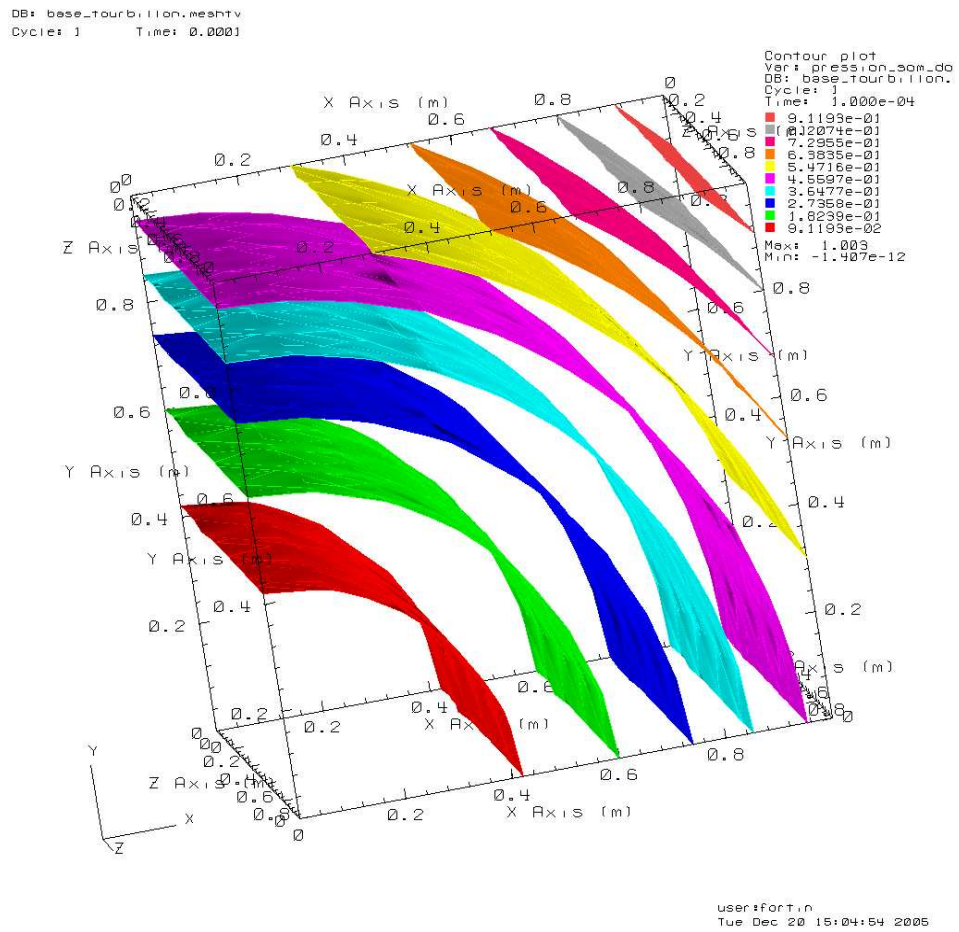
$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0. \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

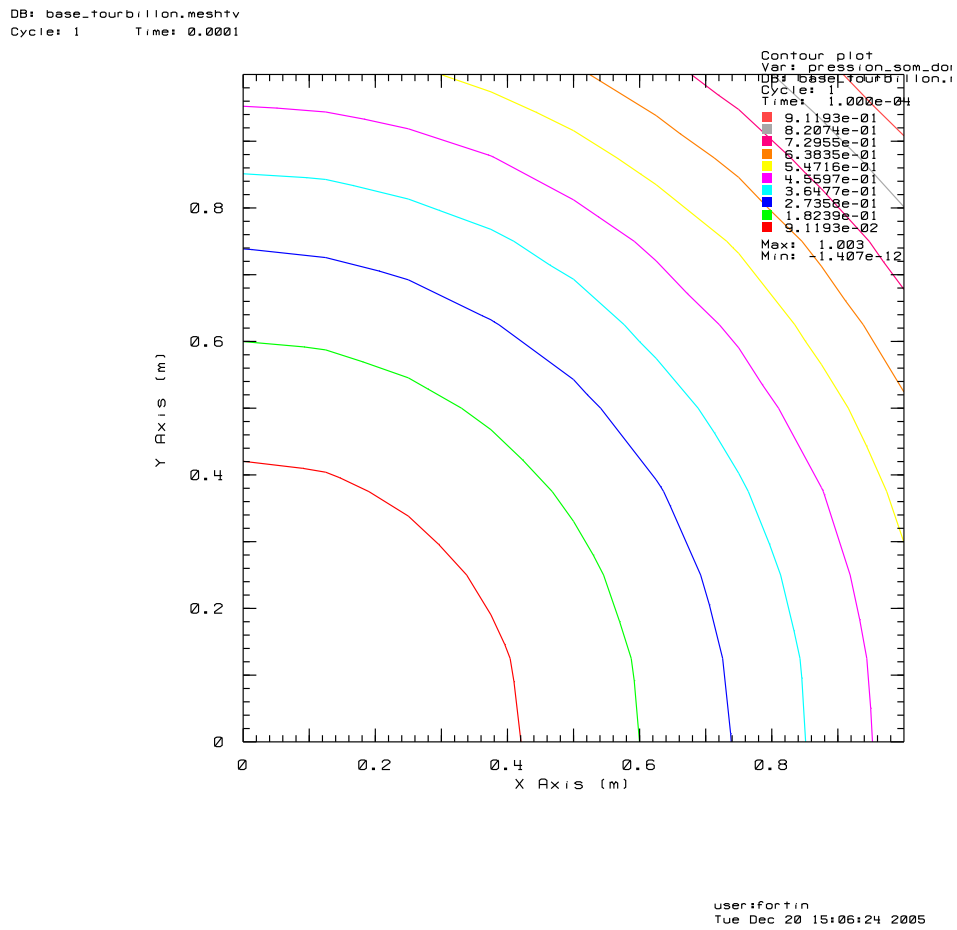
Enfin et pour être tout à fait complet, les tests ont été effectués sur un maillage composé de 2560 tétraèdres avec les opérateurs de diffusion et de convection centré. Les figures suivantes représentent respectivement la première, la seconde et la troisième composantes de la vitesse dans le cube tandis que les quatre images qui suivent représentent la pression dans le volume et selon des coupes dans le plan (xy) , (xz) et (yz) .



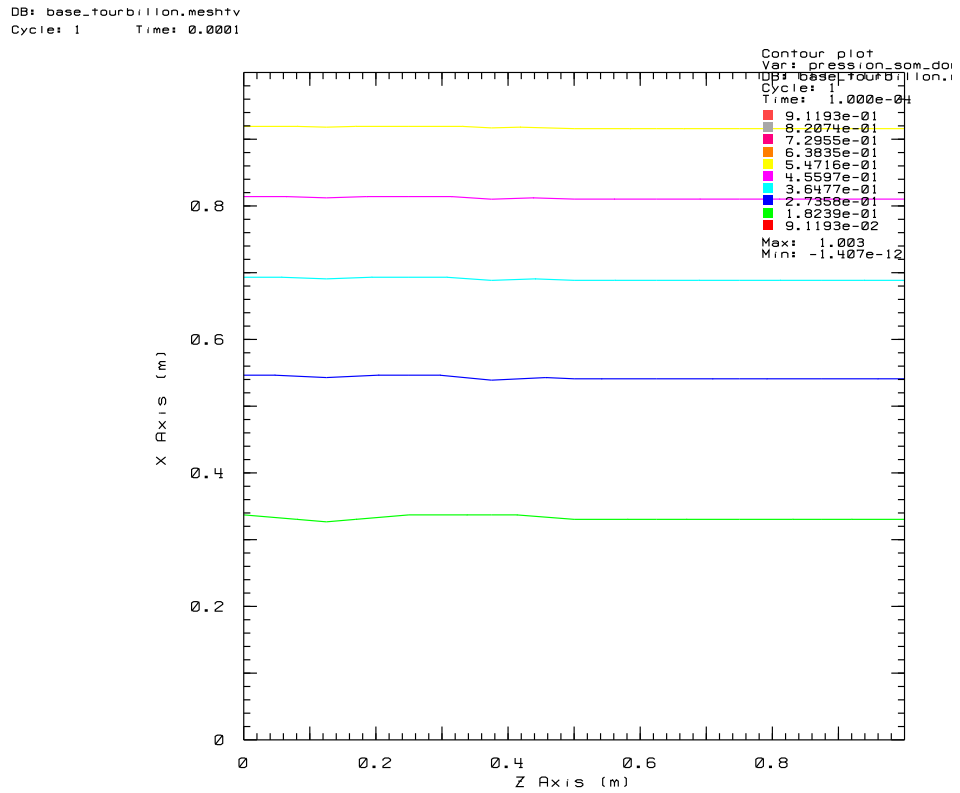
TAB. 8.16 – Composante x de la vitesse : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$.



TAB. 8.18 – Courbe de pression : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$.

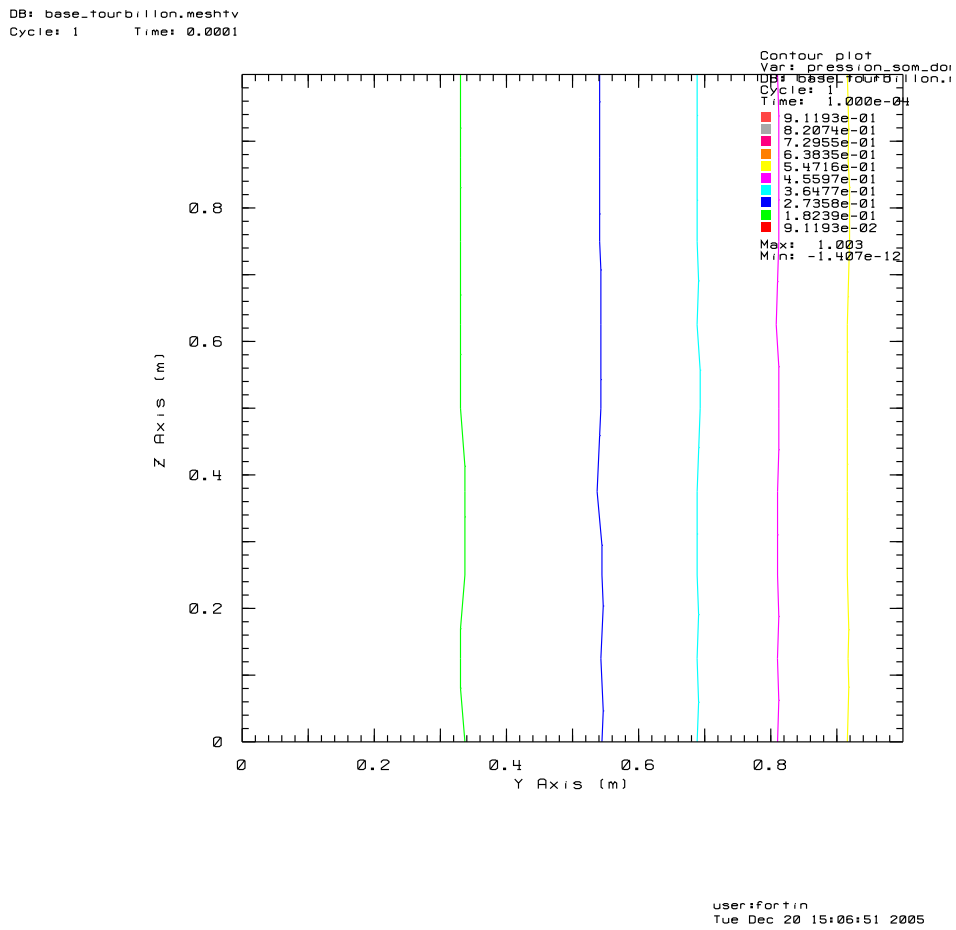


TAB. 8.19 – Courbe de pression dans le plan (xy) : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$.



user:fortin
 Tue Dec 20 15:05:45 2005

TAB. 8.20 – Courbe de pression dans le plan (xz) : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$.



TAB. 8.21 – Courbe de pression dans le plan (yz) : cas 3D, $\mathbf{u} = (y, -x, 0)^t$ et $\mathbf{f} = (0, 0, 0)^t$.

Cas de Poiseuille.

Pour traiter l'écoulement de Poiseuille en deux dimensions, nous avons imposé une condition de périodicité le long de l'axe x , et contraint la vitesse à valoir 0 le long des axes $y = 0$ et $y = 1$. Nous avons ajouté un terme source \mathbf{f} vérifiant l'égalité :

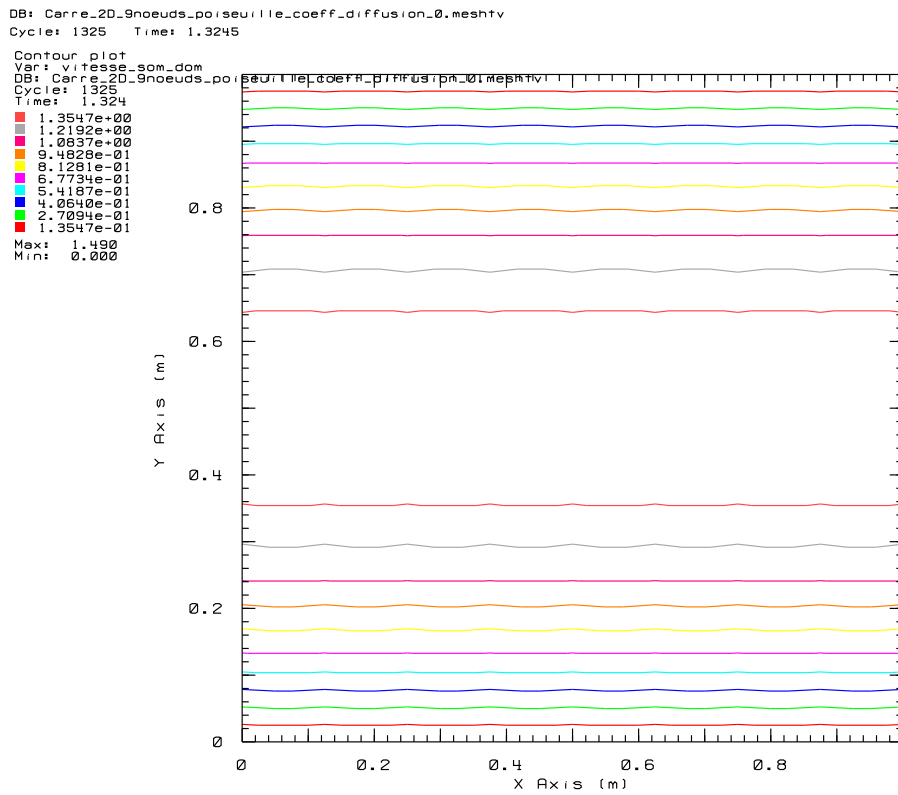
$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sous ces conditions, les solutions (\mathbf{u}, p) attendues sont :

$$\mathbf{u} := \frac{3}{2} \begin{pmatrix} y(1-y) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$p = 0$$

Les tests ont été effectués sur un maillage de 256 triangles, avec les opérateurs de diffusion et de convection centré. Les figures suivantes représentent respectivement la première composante de la vitesse, la seconde composante de la vitesse et la pression.

Nous n'avons représenté que la première composante de la vitesse car la seconde composante n'excède pas en valeur absolue, 10^{-15} et la pression 10^{-13} .



user:fortin
 Wed Nov 30 13:43:49 2005

TAB. 8.22 – Composante x de la vitesse : cas 2D, poiseuille et $\mathbf{f} = (12, 0)^t$.

8.6 Un algorithme de pénalisation.

On souhaiterait se rapprocher de la situation optimale qui voudrait que la vitesse soit continue, et donc dans notre cas P1 conforme, et à divergence nulle : il est établi que cette situation n'est en général pas réalisable sauf à utiliser des espaces de polynômes de degré strictement supérieur à 1.

Toutefois, une manière de s'approcher de cette situation consiste à pénaliser, dans la partie projection de l'algorithme, la divergence de la partie purement non conforme de la vitesse : c'est l'objectif poursuivi par l'algorithme suivant.

8.6.1 Définition du schéma de projection pénalisé.

On commence par introduire la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{aligned} C &: \mathbf{X}_h' \rightarrow \mathbf{X}_h' \\ (C\mathbf{u}'_h, C\mathbf{v}'_h) &= (C^t C\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}'_h) := \frac{1}{\varepsilon} \sum_K (\nabla \cdot \mathbf{u}'_h, \nabla \cdot \mathbf{v}'_h)_K \end{aligned}$$

où K désigne un élément quelconque du maillage \mathcal{T}_h .

Dans ce paragraphe, on va donc s'intéresser au schéma de projection suivant, qui ajoute un terme de pénalisation et où $(\mathbf{v}_h, \bar{\mathbf{v}}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times \bar{\mathbf{X}}_h \times M_h^1$:

$$\frac{1}{\delta t} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}_h) + a(\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) \quad (8.134)$$

$$+ c(\bar{\mathbf{u}}_h^n; \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{\mathbf{v}}_h) + b_h(\bar{\mathbf{v}}_h, p_h^n) - (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{v}}_h) = 0$$

$$\frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h) + (C^t C\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}'_h) \quad (8.135)$$

$$+ b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1} - p_h^n) + b_h(\mathbf{v}'_h, p_h^n) = 0$$

$$b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad (8.136)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1} \quad (8.137)$$

8.6.2 Existence et unicité d'une solution au schéma de projection pénalisé.

Là encore, l'idée élémentaire consiste à séparer dans l'étape de projection, les parties dans $\bar{\mathbf{X}}_h$ et les parties dans \mathbf{X}_h' .

8.6.3 Stabilité du schéma de projection pénalisé.

Théorème 8.6.1 *Il existe une constante C telle que $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, on ait :*

$$\|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \delta t^2 \|\nabla_h p_h^n\|^2 \leq C \quad (8.138)$$

$$\delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left(\|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 \right) + \sum_{n=0}^{N-1} \left(\|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + 2\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 \right) \leq C \quad (8.139)$$

Preuve du théorème:

La démonstration de stabilité suit le même schéma que lors des théorèmes précédents ; la seule différence étant le terme de pénalisation, qui joue le même rôle que l'incrément de pression.

Ainsi, on retrouve les estimations (8.101), (8.102) et (8.103) de l'algorithme de projection modifié précédent. Il ne nous reste qu'à évaluer les équations d'énergie liée à la partie \mathbf{X}_h' de l'équation de projection.

Prenant dans (8.135) $\mathbf{v}'_h = 2\delta t \mathbf{u}_h^{n+1}$, il vient aisément :

$$2\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 + 2\delta t \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 + 2\delta t (\mathbf{P}'_h \nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0 \quad (8.140)$$

Sommant toutes ces équations, on trouve au final :

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{P}}_h \mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 + \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^{n+1}\|^2 \\ & - \delta t^2 \|\bar{\mathbf{P}}_h \nabla_h p_h^n\|^2 + 2\delta t \left(\|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 \right) \\ & + \left(2\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|^2 \right) \leq \delta t \|\mathbf{f}\|^2 \end{aligned} \quad (8.141)$$

Il ne nous reste plus qu'à sommer sur n pour obtenir le résultat énoncé. \square

Remarque 8.6.1 *Pour éviter d'avoir à rajouter un terme en $\mathbf{P}'_h \nabla_h p_h^n$ dans le schéma précédent, nous pouvons pénaliser par le terme $(C(\mathbf{u}'_h{}^{n+1} - \mathbf{u}'_h{}^n), C\mathbf{v}'_h)$, auquel cas la démonstration de stabilité est beaucoup plus simple, puisque ce nouveau terme de pénalisation joue un rôle identique à celui du gradient de l'incrément de pression.*

8.6.4 Démonstration de convergence.

La démonstration de la convergence d'un tel schéma s'appuie essentiellement sur les mêmes méthodes que lors de l'analyse de stabilité. Dès lors, il nous suffit d'écrire les équations d'énergie pour l'erreur commise en espace, uniquement pour l'équation de projection sur l'espace \mathbf{X}_h' .

L'équation d'énergie sur l'erreur en espace s'écrit donc (pour la partie sur \mathbf{X}_h' et en tenant compte du fait que $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$) :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}'_h{}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}'_h{}^{n+1} - \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ & \quad + 2\frac{\delta t}{\varepsilon} \|\nabla \cdot \mathbf{u}'_h{}^{n+1}\|^2 + 2\delta t (\mathbf{P}'_h \nabla_h r_h^{n+1}, \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}'_h{}^{n+1}) \\ & = 2\delta t (\mathbf{P}'_h \nabla_h (\Pi_h p^n), \mathbf{P}'_h \mathbf{e}_h^{n+1}) + 2\frac{\delta t}{\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}'_h{}^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{P}'_h \mathbf{u}^{n+1}) \end{aligned} \quad (8.142)$$

Dès lors, il nous suffit de majorer les termes de droites pour avoir une estimation d'énergie. Mais avant de poursuivre, on rappelle la propriété suivante :

$$\forall \mathbf{v} \in H^1 \text{ ou } \mathbf{H}^1, \forall \varepsilon_0 > 0, \exists h \mid \inf_{\bar{\mathbf{v}}_h \in \bar{\mathbf{X}}_h} \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_h\|_1 \leq \varepsilon_0 \quad (8.143)$$

Dans notre cas précis, les fonctions que nous cherchons à approcher par cette propriété dépendent également du temps : comme nous travaillons à δt fixé, la suite de fonction \mathbf{v}^n contient un nombre fini d'éléments, il nous suffit de prendre $h = \min_n(h^n)$ pour que l'approximation soit uniforme sur les membres de la suite.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
2\delta t (\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \nabla_{\mathbf{h}}(\Pi_h p^n), \mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{e}_h^{n+1}) &\leq 2\delta t \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \nabla_{\mathbf{h}}(\Pi_h p^n) - \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}\| \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}{}^{n+1}\| \\
&\leq c\varepsilon_0 \delta t \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}{}^{n+1}\| \\
&\leq c\delta t^2 + \varepsilon_0^2 \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}{}^{n+1}\|^2
\end{aligned} \tag{8.144}$$

$$\begin{aligned}
2\frac{\delta t}{\varepsilon} (\nabla \cdot \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}{}^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{P}'_{\mathbf{h}} \mathbf{u}^{n+1}) &\leq 2\frac{\delta t}{\varepsilon} \|\nabla \cdot \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}{}^{n+1}\| \|\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} (\mathbf{u}^{n+1} - \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}})\|_1 \\
&\leq c\frac{\varepsilon_0 \delta t}{\varepsilon} \|\nabla \cdot \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}{}^{n+1}\| \\
&\leq c\delta t \varepsilon_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\varepsilon} \|\nabla \cdot \mathbf{u}'_{\mathbf{h}}{}^{n+1}\|^2
\end{aligned} \tag{8.145}$$

Remarque 8.6.2 *Les résultats sont nettement améliorés si les fonctions solutions du problème semi discrétisé en temps sont \mathbf{H}^2 et H^2 et bornées en norme $L^\infty(\mathbf{H}^2)$ et $L^\infty(H^2)$.*

8.7 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons pu mettre en place des méthodes numériques dites de projection, dont la partie diffusion-convection est entièrement élaborée autour de l'espace des vitesses P_1 conforme, $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$: les degrés de liberté étant situés sur les noeuds du maillage, nous obtenons un système linéaire de taille bien plus réduite que si nous avions conservé une discrétisation P_1 non conforme. De plus, nous n'avons jamais précisé la forme de l'espace de pression discrète M_h , tout au plus lui avons nous imposé de vérifier une condition de type inf-sup par rapport à $\bar{\mathbf{X}}_{\mathbf{h}}$.

Il est alors intéressant d'utiliser cette méthode avec les espaces en pression introduit dans le chapitre (Ch 4). En effet, nous avons déjà signalé quelques propriétés de ces espaces de pression par rapport à l'opérateur de convection (cf. chapitre (Ch 6)). Ainsi, si la vitesse transportante $\mathbf{u}_{\mathbf{h}}$ est P_1 non conforme et telle que pour tout élément q_h^2 de M_h^2 nous ayons la relation :

$$\sum_a \int_a q_h^2 [\mathbf{u}_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n}] d\sigma = 0$$

a désignant une face du maillage alors l'opérateur de convection éléments finis centré est conservatif en énergie.

Or, cette condition est justement assurée par les espaces en pression définis dans le chapitre (**Ch** 4) : en combinant les propriétés de ces espaces de pression avec l'opérateur de convection à vitesse transportante P_1 non conforme et à divergence nulle (ce qui est envisageable compte tenu de la remarque (**Rem** 8.4.2)), nous obtenons donc un schéma conservatif en énergie mais doté également de propriété de superconvergence.

Remarque 8.7.1 *Il est tout à fait possible de choisir M_h comme :*

$$M_h := \{q_h \in C^0 \mid \forall K, q_h|_K \in P_1(K)\}$$

Dans ce cas, la pression et la vitesse ont des degrés de liberté situés aux mêmes endroits, c'est-à-dire aux noeuds du maillage : nous obtenons une méthode colocalisée, donc peu chère en place mémoire. Par conséquent, le temps calcul s'en voit également réduit sur toute la phase de convection diffusion.

Toutefois, pour assurer l'existence et l'unicité d'une pression discrète, nous sommes contraint de conserver dans les équations de projection, l'espace \mathbf{X}_h complet. Ceci peut sembler handicapant de prime abord car ce que nous avons gagné sur les équations de convection-diffusion semble perdu lors de cette phase. Cependant, l'utilisation de \mathbf{X}_h nous évite l'utilisation de méthodes d'interpolation type Rhie and Chow, très utilisées mais dont le comportement restent toutefois mal connu : à chaque instant, nous contrôlons effectivement le comportement de notre méthode numérique.

Chapitre 9

Conclusion et perspectives.

Au cours de ce travail de thèse, nous avons essayé de développer différentes méthodes d'éléments finis adaptées aux problèmes des écoulements diphasiques : ces méthodes se devaient d'être d'ordre élevé pour limiter la présence de courants parasites (qui empêchent l'établissement d'équilibre physique) et également de vérifier des propriétés de conservation d'énergie. A cette fin, nous avons proposé quelques solutions qui semblent répondre à ces attentes. Une reformulation du système six équations adaptée aux écoulements diphasiques à bas Mach a également été proposée.

Toutefois, de nombreuses questions restent encore en suspend : la condition inf-sup du nouvel espace en pression en dimension trois reste soumise à une hypothèse que nous n'avons pour l'instant pas pu établir de manière certaine, nous n'avons également pas pu établir la stabilité de la formulation triple en dimension trois du fait de sa complexité. Ce sont là des questions qu'il peut-être intéressant de considérer dans un nouveau travail, car nous aurions alors des méthodes numériques robustes et également dotées de propriétés très intéressantes. Ces méthodes ont été implémentées dans le code Trio_U du SSTH au CEA Grenoble, mais n'ont été testées que sur des configurations académiques : il reste donc à les valider sur des configurations plus complexes et industrielles , notamment dans le cas diphasique.

Bibliographie

- [1] M. Boucker P. Boudier P. Fillion M. Grandotto J.-M. Hérard E. Hervieu P. Péturaud A. Guelfi, D. Bestion. Neptune : a new software platform for advanced nuclear thermal-hydraulics.
- [2] Douglas N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(4) :742–760, August 1982.
- [3] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [4] F. Hecht C. Bernardi. More pressure in the finite element discretization of the stokes problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34(5) :953–980, 2000.
- [5] So-Hsiang Chou. Analysis and convergence of a covolume method for the generalized stokes problem. *Mathematics of Computation*, 66(217) :85–104, January 1997.
- [6] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Studies in mathematics and its applications, 1976.
- [7] Philippe Emonot. *Méthodes de Volumes Eléments finis : Application aux Equations de Navier-Stokes et Résultats de convergence*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, 1992.
- [8] Peter Hansbo Erik Burman. Edge stabilization for galerkin approximations of of convection-diffusion problems. *Chalmers finite element center*.
- [9] Peter Hansbo Erik Burman. Edge stabilization for the generalized stokes problem : a continuous interior penalty method. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*.
- [10] Peter Hansbo Erik Burman. A stabilized nonconforming finite element method for incompressible flow. *Chalmers finite element center*.

- [11] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1986.
- [12] Jean-Luc Guermond. Some implementations of projection methods for navier-stokes equations. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 30(5) :637–667, 1996.
- [13] Yinnian He. A fully discrete stabilized finite-element method for the time-dependent navier-stokes problem. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 4(23) :665–691, 2003.
- [14] Sébastien Heib. *Nouvelles discrétisation non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée*. PhD thesis, Université Paris VI, 2003.
- [15] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 2*. Editions Wiley, 1995.
- [16] Xiaonan Wu Houde Han. A new mixed finite element formulation and the mac method for the stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(2) :560–571, April 1998.
- [17] R. Nicolaides J. Boland. Stability of finite elements under divergence constraints. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(4) :722–731, August 1983.
- [18] M. Bercovier J.-F. Gerbeau, C. Lebris. Spurious velocities in the steady flow of an incompressible fluid subjected to external forces. *International Journal for Numerical Methods in Fluid*, 25(6) :679–695, August 1997.
- [19] L. Quartapelle J.-L. Guermond. On the approximation of the unsteady navier-stokes equations by finite element projection methods. *Numer. Math.*, 80(5) :207–238, 1998.
- [20] L. Combe J.-M. Herard. Un schéma volumes finis pour la simulation d'un modèle bi-fluide d'écoulements diphasiques compressibles gaz-solide. *European Journal of Finite Elements*, 6(2) :197–231, 1997.
- [21] B. NKonga R. Abgrall J. Massoni, R. Saurel. Proposition de méthodes et modèles eulériens pour les problèmes à interface entre fluides compressibles en présence de transfert de chaleur. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(6) :1287–1307, 2002.
- [22] Rolf Rannacher John G. Heywood. Finite element approximation of the nonstationary navier-stokes problem i. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(2) :275–311, April 1982.

- [23] Rolf Rannacher John G. Heywood. Finite element approximation of the nonstationary navier-stokes problem ii. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(4) :750–777, August 1986.
- [24] Rolf Rannacher John G. Heywood. Finite element approximation of the nonstationary navier-stokes problem iii. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(3) :489–512, June 1988.
- [25] Rolf Rannacher John G. Heywood. Finite element approximation of the nonstationary navier-stokes problem iv. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2) :353–384, April 1990.
- [26] Ramon Codina Jordi Blasco. Error estimates for a viscosity-splitting, finite element method for the incompressible navier-stokes equations. *Numerische Mathematik*.
- [27] Jacques-Louis Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Editions Dunod, 2002.
- [28] P.-A. Raviart M. Crouzeix. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations. *R.A.I.R.O. Série Rouge*, 7 :33–75, Décembre 1973.
- [29] D. Silvester N. Kechkar. Analysis of locally stabilized mixed finite element methods for the stokes problem. *Mathematics of Computation*, 58(197) :1–10, January 1992.
- [30] J.M. Thomas P.A. Raviart. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Editions Dunod, 1993.
- [31] Mats G. Larson Peter Hansbo. Discontinuous galerkin and the crouzeix-raviart element : application to elasticity. *Chalmers finite element center*.
- [32] Olivier Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Editions Masson, 1988.
- [33] R. Abgrall R. Saurel. A multiphase godunov method for compressible multfluid and multiphase flows. *J. Comp. Phys.*, 150 :1–43, 1999.
- [34] R. Abgrall R. Saurel. Some models and methods for compressible multfluid and multiphase flows. *J. Comp. Phys.*, 150(2) :425–467, 1999.
- [35] R. Abgrall R. Saurel. Discrete equations for physical and numerical multiphase mixtures. *J. Comp. Phys.*, 186(2) :361–396, 2003.
- [36] Yanping Lin Richard E. Ewing, Tao Lin. On the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(6) :1865–1888, 2002.

- [37] J.-M. Herard S. Boivin, F. Cayre. Un schéma volumes finis pour la simulation d'écoulements diphasiques sur maillages triangulaires. *International Journal of Finite Elements*, 10(5) :539–574, 2001.
- [38] J.-M. Herard S. Clerc, T. Gallouet. Partial review of positivity constraints in some two-phase flow models. *32nd AIAA Fluid Dynamics Conference, Saint Louis, Missouri*, 6 :31–85, 2002.
- [39] Stéphanie Salmon. *Développement numérique de la formulation tourbillon-vitesse-pressure pour le système de Stokes*. PhD thesis, Université Paris VI, 1999.
- [40] Jie Shen. On error estimates of projection methods for navier-stokes equations : first-order schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1) :57–77, February 1992.
- [41] Do Y. Kwak So-Hsiang Chou. A covolume method based on rotated bilinears for the generalized stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(2) :494–507, April 1998.
- [42] Kwang Y. Kim So-Hsiang Chou, Do Y. Kwak. A general framework for constructing and analysing mixed finite volume methods on quadrilateral grids : the overlapping covolume case. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(4) :1170–1196, 2001.
- [43] Panayot S. Vassilevski So-Hsiang Chou, Do Y. Kwak. Mixed covolume methods for elliptic problems on triangular grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(5) :1850–1861, October 1998.
- [44] N. Seguin T. Gallouet, J.-M. Herard. Numerical modelling of two phase flows using the two pressure approach. *Math. Mod. and Meth. in Applied Sciences*, 14(5) :663–700.
- [45] Roger Temam. Une méthode d'approximation de la solution des équations de navier-stokes. *Bull. Soc. Math. France*, 96 :115–152, 1968.
- [46] Roger Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (i). *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 32 :135–153, 1969.
- [47] Roger Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii). *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 33 :377–385, 1969.
- [48] Roger Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

- [49] Rüdiger Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Wiley and Teubner, 1996.
- [50] Xiu Ye. Superconvergence of nonconforming finite element method for the stokes equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 18(2) :143–154, 2002.
- [51] Weiwei Sun Yinnian He, Yanping Lin. Stabilized finite element method for the non-stationary navier-stokes problem. *inconnu*.

Annexe A

Formulation triple non linéaire.

A.1 Introduction.

Afin de ne pas alourdir le discours, nous avons privilégié dans les chapitres principaux de la thèse, l'analyse de la formulation triple des équations de Navier-Stokes linéaires. Nous allons donc nous consacrer, dans cette partie, à l'analyse des équations de Navier-Stokes en dimension 2 et 3, lorsque celle-ci comporte un terme de convection.

Dans un premier temps, nous allons introduire un problème variationnel portant sur les trois variables tourbillon, vitesse et pression. Nous montrerons l'existence et l'unicité d'une solution pour ledit problème. Ensuite, nous montrerons que ces trois variables vérifient un système d'équations aux dérivées partielles particulier, qui sera en fait équivalent aux équations de Navier-Stokes non-linéaires.

A.2 Rappels divers.

Dans ce chapitre, nous allons tenter de trouver le tourbillon ω , la vitesse \mathbf{u} et la pression p solutions des équations non-linéaires suivantes :

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \tag{A.1}$$

$$\nabla^s \times \omega + \omega \times \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \tag{A.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{A.3}$$

Pour nos démonstrations, nous aurons besoin de notions déjà introduites et démontrées auparavant, mais par soucis de commodité, nous les rappellerons ici.

Les espaces continus suivants revêtent une grande importance dans ce qui va suivre :

$$\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \mid b(\mathbf{v}, q) = 0 \forall q \in L_0^2\} \quad (\text{A.4})$$

$$W := \{\eta \in \mathbf{L}^2 \mid c(\eta, \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\} \quad (\text{A.5})$$

$$W^\perp := \{\eta \in \mathbf{L}^2 \mid a(\eta, \phi) = 0 \forall \phi \in W\} \quad (\text{A.6})$$

Nous ferons également usage des formes bilinéaires continues suivantes :

$$a(\eta, \phi) := (\eta, \phi) \quad \forall \eta, \phi \in \mathbf{L}^2 \quad (\text{A.7})$$

$$b(\mathbf{v}, q) := (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_0^1 \times L^2 \quad (\text{A.8})$$

$$c(\eta, \mathbf{v}) := (\eta, \nabla \times \mathbf{v}) \quad \forall (\eta, \mathbf{v}) \in \mathbf{L}^2 \times \mathbf{H}_0^1 \quad (\text{A.9})$$

A cette dernière forme bilinéaire, nous associons les opérateurs adjoints $\nabla \times \cdot$ et $\nabla^s \times \cdot$ définis respectivement dans \mathbf{H}_0^1 et \mathbf{L}^2 et à valeurs dans \mathbf{L}^2 et \mathbf{H}^{-1} .

Nous aurons aussi besoin de la forme trilinéaire $d(\cdot, \cdot, \cdot)$ définie par :

$$d(\eta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\eta \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall (\eta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{L}^2 \times \mathbf{H}_0^1 \times \mathbf{H}_0^1 \quad (\text{A.10})$$

Remarquons que selon de définition de \mathbf{V} , la forme trilinéaire $d(\cdot, \cdot, \cdot)$ possède la propriété remarquable :

$$d(\eta; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \eta \in \mathbf{L}^2, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (\text{A.11})$$

Enfin, nous avons pu montrer plus tôt que la forme bilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition inf-sup sur $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{V}$:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \sup_{\eta \in \mathbf{L}^2} \frac{c(\eta, \mathbf{v})}{\|\eta\|} \geq c|\mathbf{v}|_1 \quad (\text{A.12})$$

où c est une constante ne dépendant que de Ω .

Notons que cette condition nous donne la mise en bijection de \mathbf{V} avec W^\perp par l'opérateur linéaire continu $\nabla \times \cdot$.

A.3 Formulation variationnelle.

A.3.1 Définition.

Nous introduisons le problème variationnel suivant :

$$a(\omega, \phi) - c(\phi, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \phi \in \mathbf{L}^2 \quad (\text{A.13})$$

$$c(\omega, \mathbf{v}) + d(\omega; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (\text{A.14})$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2 \quad (\text{A.15})$$

où les inconnues ω, \mathbf{u} et p évoluent respectivement dans \mathbf{L}^2 , \mathbf{H}_0^1 et L_0^2 , et où $|\cdot|$ représente la norme euclidienne sur R^d .

Ce problème variationnel ne sera bien posé qu'à la seule condition que la forme trilinéaire $d(\cdot; \cdot, \cdot)$ soit continue sur ses espaces de définition. Cette propriété est l'objet du théorème suivant :

Théorème A.3.1 *La forme trilinéaire $d(\cdot; \cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{H}_0^1 \times \mathbf{H}_0^1$. Plus exactement, il existe une constante c telle que l'on ait :*

$$d(\eta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c \|\eta\| \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \eta \in \mathbf{L}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \quad (\text{A.16})$$

Preuve du théorème:

Majorons le terme comportant le tourbillon η . Choisissons donc η dans \mathbf{L}^2 et \mathbf{u}, \mathbf{v} dans \mathbf{H}_0^1 quelconques fixés. Grâce aux règles de commutation entre le produit scalaire et le produit vectoriel, nous pouvons alors modifier ce terme de la manière suivante :

$$(\eta \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \eta) \quad (\text{A.17})$$

Ce qui nous donne, à l'aide d'une relation de Cauchy-Schwartz :

$$(\eta \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\eta\| \quad (\text{A.18})$$

Or pour une dimension inférieure ou égale à 4, l'espace \mathbf{H}_0^1 est inclus continûment dans l'espace \mathbf{L}^4 . Par conséquent, nous avons la majoration suivante :

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \leq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4} \leq c \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad (\text{A.19})$$

où c ne dépend que de la dimension et de Ω .

Nous avons donc bien la majoration souhaitée :

$$(\eta \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 |\eta| \quad (\text{A.20})$$

□

A.3.2 Solution du problème triple.

Nous allons montrer que les équations (A.13)-(A.15) admettent une unique solution, qui de plus sera continue en fonction des données initiales du problème. Ainsi, nous avons le théorème :

Théorème A.3.2 *Les équations (A.13)-(A.15) admettent une solution unique (\mathbf{u}, p, ω) dans $\mathbf{H}_0^1 \times L_0^2 \times \mathbf{L}^2$ qui dépend continuellement des données initiales du problème. Plus exactement, il existe une constante c ne dépendant que du domaine Ω telle que l'on ait :*

$$\|\omega\| + \|\mathbf{u}\|_1 + \|p\| \leq c \|\mathbf{f}\| \quad (\text{A.21})$$

Preuve du théorème:

Nous allons procéder en plusieurs temps distincts. Tout d'abord, nous définirons un problème variationnel approchant le système d'équations (A.13)-(A.15) mais défini sur des espaces vectoriels de dimensions finies. Ensuite, nous montrerons que ce nouveau problème en dimensions finies admet une unique solution, grâce à une méthode de compacité décrite entre autre dans [27]. Enfin, nous ferons tendre les différentes dimensions vers l'infini et démontrerons que les solutions des systèmes variationnels en dimensions finies, tendent vers les solutions du problème initial (A.13)-(A.15).

L'espace \mathbf{H}_0^1 admettant une base hilbertienne, son sous-espace vectoriel \mathbf{V} en possède une également. Parmi ces vecteurs de base, nous choisissons les n premiers, pour former une base, orthonormée pour la norme $|\cdot|_1$, d'un sous-espace de \mathbf{V} , noté \mathbf{V}_n , de dimension finie n . Cette base orthonormée sera notée $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

D'après la condition inf-sup établie pour la forme bilinéaire continue $c(., .)$, nous savons que \mathbf{V} est en bijection avec W^\perp , à travers l'opérateur $\nabla \times \cdot$. Soit donc la suite d'éléments $(\phi_i^\perp)_{1 \leq i \leq n}$ de W^\perp , image par $\nabla \times \cdot$ des vecteurs $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$. Ces éléments ϕ_i^\perp forment une base d'un sous-espace de W^\perp , dénoté de W_n^\perp , de dimension finie n . Cette base possède en outre la propriété d'être orthonormée ; en effet nous avons déjà pu mettre en évidence dans le chapitre (Ch 5) la relation suivante :

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}) = (\nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} \quad (\text{A.22})$$

Par conséquent, la définition des ϕ_i^\perp et l'orthogonalité de \mathbf{v}_i , nous amène à l'équation :

$$(\phi_i^\perp, \phi_j^\perp) = (\nabla \times \mathbf{v}_i, \nabla \times \mathbf{v}_j) = (\nabla \mathbf{v}_i, \nabla \mathbf{v}_j) = \delta_{ij} \quad (\text{A.23})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kroenecker.

Finalement et comme \mathbf{L}^2 admet une base hilbertienne, nous introduisons l'espace de dimension finie W_m inclus dans W et générée par une base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq m}$, orthonormée pour la norme $\|\cdot\|$. Nous noterons également $W_{m,n}$ l'espace de dimension finie $m+n$ dont la définition est donnée par :

$$W_{m,n} := W_m \oplus W_n^\perp \quad \text{au sens } L^2 \quad (\text{A.24})$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer qu'il existe $\mathbf{u}^n, \omega^{m,n}$ appartenant respectivement à $\mathbf{V}_n, W_{m,n}$ solutions du problème suivant :

$$a(\omega^{m,n}, \eta_k) - c(\eta_k, \mathbf{u}^n) = 0 \quad 1 \leq k \leq m+n \quad (\text{A.25})$$

$$c(\omega^{m,n}, \mathbf{v}_i) + d(\omega^{m,n}; \mathbf{u}^n, \mathbf{v}_i) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{A.26})$$

avec $\eta_k = \phi_k^\perp$ si $1 \leq k \leq n$ et $\eta_k = \phi_{k-n}$ si $n+1 \leq k \leq m+n$.

Observons d'ores et déjà que l'équation (A.25) signifie que la donnée d'un élément \mathbf{u}^n de \mathbf{V}^n , nous donne immédiatement l'existence et l'unicité d'un élément $\omega^{m,n}$: ceci est du à l'existence d'une condition de type inf-sup sur $c(., .)$. Cet élément $\omega^{m,n}$ sera par construction l'image de \mathbf{u}^n par l'opérateur $\nabla \times \cdot$.

Par conséquent, il ne nous reste qu'à prouver l'existence et l'unicité d'une vitesse satisfaisant les équations (A.25)-(A.26). Introduisons alors le problème suivant défini pour tout \mathbf{v}_i de \mathbf{V}^n :

$$(\nabla \times \mathbf{u}^n, \nabla \times \mathbf{v}_i) + d(\nabla \times \mathbf{u}^n; \mathbf{u}^n, \mathbf{v}_i) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{A.27})$$

Soit maintenant l'application $\Phi : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ dont la définition est donnée par :

$$(\Phi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) := (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) + d(\nabla \times \mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (\text{A.28})$$

Nous constatons alors que nous obtenons dans le cas où $\mathbf{v} = \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} (\Phi(\mathbf{u}), \mathbf{u}) &= \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{f}, \mathbf{u}) \\ &\geq \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 - c_1 \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}\|_1 \\ &\geq (\|\mathbf{u}\|_1 - c_1 \|\mathbf{f}\|) \|\mathbf{u}\|_1 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

en utilisant la relation (A.22) et avec c_1 constante de l'inégalité de Poincaré.

Introduisons maintenant l'espace $\mathcal{S}_{\mathbf{v}}$ défini par :

$$\mathcal{S}_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n \mid \|\mathbf{v}\|_1 = c_1 \|\mathbf{f}\| + 1\} \quad (\text{A.30})$$

Grâce aux propriétés établies précédemment, nous pouvons facilement constater que, sur la sphère $\mathcal{S}_{\mathbf{v}}$, l'inéquation (A.29) est strictement positive. Par conséquent, d'après un théorème rappelé dans [11] et [27], l'existence et l'unicité d'un élément \mathbf{u}^n de \mathbf{V}^n satisfaisant (A.27) sont établies. Il nous suffit alors de poser $\omega^{m,n} = \nabla \times \mathbf{u}^n$ pour satisfaire les équations initiales (A.25)-(A.26).

Nous venons donc démontrer l'existence des solutions \mathbf{u}^n et $\omega^{m,n}$ du système d'équations (A.25)- (A.26). De plus, ces mêmes équations nous assurent les estimations suivantes :

$$\|\omega^{m,n}\|^2 + \|\mathbf{u}^n\|_1^2 \leq c \|\mathbf{f}\|^2 \quad (\text{A.31})$$

Par conséquent, il existe \mathbf{u} dans \mathbf{V} et ω dans \mathbf{L}^2 tels que nous ayons :

$$\mathbf{u}^n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbf{V} \text{ faible} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{u}^n \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbf{H}_0^1 \text{ fort et p.p.} \quad (\text{A.33})$$

$$\omega^{m,n} \rightarrow \omega \quad \text{dans } \mathbf{L}^2 \text{ faible} \quad (\text{A.34})$$

avec évidemment $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$.

En fait, nous avons une convergence plus forte pour ω . En effet, les $\omega^{m,n}$ étant l'image des \mathbf{u}^n par $\nabla \times \cdot$ et ceux-ci convergeant vers \mathbf{u} fortement dans \mathbf{H}_0^1 , il nous devient possible d'écrire :

$$\omega^{m,n} \rightarrow \omega \quad \text{dans } \mathbf{L}^2 \text{ fort} \quad (\text{A.35})$$

Dès lors, par passage à la limite dans les équations (A.25)- (A.26) nous obtenons :

$$a(\omega, \eta_k) - c(\eta_k, \mathbf{u}) = 0 \quad 1 \leq k \leq m+n \quad (\text{A.36})$$

$$c(\omega, \mathbf{v}_i) + d(\omega; \mathbf{u}, \mathbf{v}_i) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{A.37})$$

Puis par densité des \mathbf{v}_i dans \mathbf{V} et des η_k dans W , nous en concluons que la dernière équation n'est plus seulement valable dans $\mathbf{V}_n \times W_{m,n}$ mais aussi dans $\mathbf{V} \times W$.

De la même manière, le passage à la limite dans l'inégalité (A.31) nous amène à la majoration :

$$\|\omega\|^2 + |\mathbf{u}|_1^2 \leq c\|\mathbf{f}\|^2 \quad (\text{A.38})$$

□

Remarque A.3.1 *Nous souhaitons comparer les solutions \mathbf{u} , p des équations (A.1)-(A.3) aux solutions \mathbf{u}^* et p^* des équations de Navier-Stokes non-linéaires suivantes :*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}^* + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* + \nabla p^* &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \end{aligned}$$

Un simple calcul nous montre que nous avons en fait :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u} \\ p^* &= p + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_e^2 \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_e$ est la norme euclidienne usuelle.

Ceci vient des relations suivantes :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= \nabla^s \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{u}\|_e^2 \end{aligned}$$

Annexe B

Autre forme bilinéaire.

B.1 Introduction.

Compte tenu des hypothèses faites dans le chapitre (**Ch 4**), il peut paraître judicieux de choisir une autre forme bilinéaire de divergence discrète, notée par la suite $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$.

Nous commençons par définir cette nouvelle forme bilinéaire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) &= b_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in (M_h^0 + M_h^1) \cap L_0^2 \\ \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) &= \sum_K \frac{|K|}{4} \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\nabla q_h(G_{f_i}), \mathbf{v}_h(f_i)) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in M_h^a \cap L_0^2\end{aligned}$$

où f_i est la face opposé au sommet i de l'élément K .

B.2 Propriétés.

Il nous faut redémontrer certains théorèmes pour s'assurer que cette nouvelle forme bilinéaire satisfait les contraintes attendues.

B.2.1 Continuité uniforme.

Ainsi, nous commencerons par énoncer le théorème d'uniforme continuité suivant :

Théorème B.2.1 *La forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{X}_h \times (M_h \cap L_0^2)$. Plus exactement, il existe une constante c , indépendante du pas du maillage h , telle que l'on ait :*

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in (M_h \cap L_0^2) \quad |\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq c \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\| \quad (\text{B.1})$$

Preuve du théorème:

Il est inutile de démontrer l'uniforme continuité sur $\mathbf{X}_h \times (M_h^0 + M_h^1) \cap L_0^2$ car sur cet espace, la forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ coïncide avec la forme $b_h(\cdot, \cdot)$.

Soit donc q_h^a un élément quelconque de $M_h^a \cap L_0^2$. Nous remarquons alors que la différence $D(K)$ suivante est invariable pour tout ajout d'un vecteur \mathbf{c} constant :

$$D(K) := \int_K \nabla q_h^a \cdot \mathbf{v}_h d\Omega - \frac{|K|}{4} \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\nabla q_h^a(G_{f_i}), \mathbf{v}_h(f_i))$$

Par passage à l'élément de référence \hat{K} à l'aide de la transformation affine F_K^{-1} , nous avons les majorations suivantes, compte tenu de l'équivalence des normes en dimension finie :

$$\begin{aligned} |D(K)| &:= |K| \int_{\hat{K}} B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{q}_h^a \cdot \hat{\mathbf{v}}_h d\Omega - \frac{|K|}{4} \sum_{i=1, \hat{f}_i \notin \partial\hat{\Omega}}^4 (B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{q}_h^a(\hat{G}_{\hat{f}_i}), \hat{\mathbf{v}}_h(\hat{f}_i)) \\ &\leq c|K| \|B_K^{-1}\| |\hat{q}_h^a|_{1, \hat{K}} \inf_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3} \|\hat{\mathbf{v}}_h - \mathbf{c}\|_{0, \hat{K}} \\ &\leq c|K| \|B_K^{-1}\| |\hat{q}_h^a|_{1, \hat{K}} |\hat{\mathbf{v}}_h|_{1, \hat{K}} \\ &\leq c|K| \|B_K^{-1}\| |\hat{q}_h^a|_{\hat{K}} |\hat{\mathbf{v}}_h|_{1, \hat{K}} \end{aligned}$$

où c est une constante indépendante du pas du maillage h .

Enfin, en repassant à l'élément K à l'aide de la transformation affine F_K , nous trouvons au final :

$$|D(K)| \leq c|K| |\det(B_K^{-1})| \|B_K^{-1}\| \|B_K\| \|q_h^a\|_K |\mathbf{v}_h|_{1, K}$$

Nous obtenons donc la majoration :

$$|D(K)| \leq c \|q_h^a\|_K |\mathbf{v}_h|_{1, K}$$

En sommant sur les éléments K , nous avons évidemment :

$$\left| \int_{\Omega} \nabla q_h^a \cdot \mathbf{v}_h d\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{4} \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\nabla q_h^a(G_{f_i}), \mathbf{v}_h(f_i)) \right| \leq c \|q_h^a\| \|\mathbf{v}_h\|_h$$

La conclusion du théorème apparaît donc naturellement en remarquant que :

$$\left| \int_{\Omega} \nabla q_h^a \cdot \mathbf{v}_h d\Omega \right| \leq c \|q_h^a\| \|\mathbf{v}_h\|_h$$

□

Remarque B.2.1 *Il est également évident de vérifier que la forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition d'uniforme continuité suivante :*

$$\exists c \neq c(h) \mid \forall q_h^a \in M_h^a; \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h; \left| \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^a) \right| \leq c \|q_h^a\|_1 \|\mathbf{v}_h\|$$

B.2.2 Première Condition inf-sup.

Nous aurons besoin d'utiliser dans cette section, l'espace vectoriel \mathbf{X}_h^t , défini dans le chapitre (Ch 4). Aussi, par soucis de clarté, nous rappellerons ici sa définition :

$$\mathbf{X}_h^t := \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \mid \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_f) \cdot \mathbf{n}_f = 0 \quad \forall f \}$$

où f désigne une face du maillage \mathcal{T}_h .

A l'aide de cet espace, nous allons définir le sous-espace vectoriel $M_h^{1,p}$ de M_h^a : ce sous-espace est constitué de modes "parasites" en pression. Plus précisément, nous avons la définition suivante :

$$M_h^{1,p} := \{ q_h^a \in M_h^a \cap L_0^2 \mid \exists q_h^1 \in M_h^1 \cap L_0^2; \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t; \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^a) = \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^1) \}$$

Remarque B.2.2 *Ceci signifie simplement que le sous-espace vectoriel $M_h^{1,p}$ est de dimension N_s , où N_s est le nombre total de sommets dans le maillage \mathcal{T}_h .*

Remarque B.2.3 *La relation définissant $M_h^{1,p}$ nous assure également le fait que la relation suivante est vérifiée :*

$$q_h^{1,p} \in M_h^{1,p} \Leftrightarrow \exists q_h^1 \in M_h^1 \mid \forall f \subset \mathcal{T}_h; \nabla q_h^{1,p}(G_f) \times \mathbf{n}_f = \nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_f$$

où f désigne une face du maillage \mathcal{T}_h .

De plus, nous pouvons montrer qu'il existe deux constantes c_0 et c_1 indépendantes de h telles que :

$$c_0 |q_h^1|_1 \leq |q_h^{1,p}|_1 \leq c_1 |q_h^1|_1$$

La minoration provient de la condition inf-sup vérifiée sur $(M_h^1 \cap L_0^2) \times \mathbf{X}_h$ dotés respectivement des normes $|\cdot|_1$ et $\|\cdot\|$ et de la remarque (**Rem B.2.1**), tandis que la majoration vient du fait que tout élément de $M_h^{1,p}$ vérifie une condition inf-sup sur \mathbf{X}_h^t doté de la norme $\|\cdot\|$ (démonstration analogue à (**Th B.2.3**)) et de la succession d'inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \beta |q_h^{1,p}|_1 &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t} \frac{\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^{1,p})}{\|\mathbf{v}_h\|} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t} \frac{\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^1)}{\|\mathbf{v}_h\|} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^1)}{\|\mathbf{v}_h\|} \\ &\leq \alpha |q_h^1|_1 \end{aligned}$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème B.2.2 Soit q_h^a un élément quelconque de $M_h^{1,p}$. Soit N_a le nombre d'arêtes du maillage \mathcal{T}_h et N_s le nombre de sommets de \mathcal{T}_h . Soit a_{ij} le coefficient de q_h^a sur l'arête $[ij]$ de sommets i et j dans la base associée à l'espace M_h^a . Alors, il existe N_s coefficients a_i tels que

$$a_{ij} = a_i + a_j \quad \forall i, j \neq i \quad (\text{B.2})$$

Preuve du théorème:

Par définition de l'espace $M_h^{1,p}$, nous avons la relation suivante :

$$\exists q_h^1 \in M_h^1 \cap L_0^2 \mid \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t; \sum_K |K| \sum_{i=1}^4 (\nabla q_h^a(G_{f_i}), \mathbf{v}_h(G_{f_i})) = (\nabla q_h^1, \mathbf{v}_h(G_{f_i}))$$

Soit maintenant un élément K quelconque fixé du maillage \mathcal{T}_h et f une face quelconque de K . Prenons ensuite, un vecteur \mathbf{v}_h de \mathbf{X}_h^t vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h(G_f) &= \tau \\ \mathbf{v}_h(G_{\hat{f}}) &= 0 \quad \forall \hat{f} \neq f \end{aligned}$$

où τ est un vecteur unitaire quelconque parallèle à la face f .

Par conséquent, nous avons la relation :

$$\nabla q_h^a(G_f) \times \mathbf{n}_f = \nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_f$$

Désignons par a_i les N_s coefficients de la fonction q_h^1 . L'égalité précédente nous autorise alors à écrire l'égalité suivante :

$$a_{ij} - a_i - a_j = cste; \quad i \neq j$$

où i et j désignent des sommets de la face f .

Par conséquent, pour toute face f de l'élément K , nous obtenons l'équation :

$$a_{ij} - a_i - a_j = cste; \quad i \neq j$$

où cette fois i et j désignent des sommets quelconques de l'élément K .

En effectuant les mêmes manipulations sur chaque élément K du maillage \mathcal{T}_h , nous obtenons :

$$a_{ij} - a_i - a_j = cste; \quad i \neq j$$

où cette fois i et j désignent des sommets quelconques de \mathcal{T}_h .

Il suffit ensuite de poser $a_i := a_i + \frac{cste}{2}$ et ce pour tout sommet i du maillage pour conclure. \square

Une fois définis les modes "parasites" en pression, nous allons pouvoir choisir un sous-espace vectoriel de M_h^a compatible avec M_h^1 au sens de la condition inf-sup sur \mathbf{X}_h^t . Ainsi, nous définissons à l'aide de la remarque (**Rem B.2.3**), le sous-espace vectoriel $M_h^a/M_h^{1,p}$ comme suit :

$$M_h^a/M_h^{1,p} := \left\{ q_h^a \in M_h^a \mid \sum_K |K| \sum_{i=1}^4 (\nabla q_h^a(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}, \nabla q_h^1 \times \mathbf{n}_{f_i}) = 0 \quad \forall q_h^1 \in M_h^1 \right\}$$

où i est un sommet quelconque de l'élément K , f_i la face opposée au sommet i dans K , G_{f_i} le barycentre de f_i et \mathbf{n}_{f_i} le vecteur normal à f_i unitaire et extérieur à K .

Toujours sous l'hypothèse **(H 4.4.1)** donnée dans le chapitre **(Ch 4)**, nous avons alors un théorème démontrant l'existence d'une condition de type Babůska-Brezzi uniforme pour cette nouvelle forme bilinéaire.

Théorème B.2.3 *Sous l' hypothèse **(H 4.4.1)**, la forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition de type Babůska-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{X}_h^t \times ((M_h^a/M_h^{1,p}) + M_h^1) \cap (\cup_K L_0^2(K))$. Plus précisément, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h telle que l'on ait :*

$$\forall q_h \in ((M_h^a/M_h^{1,p}) + M_h^1) \cap (\cup_K L_0^2(K)) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t} \frac{\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h\| \quad (\text{B.3})$$

Preuve du théorème:

Le début de cette démonstration est identique à celle réalisée pour le théorème **(Th 4.4.2)**, tant et si bien que nous obtenons, en gardant les mêmes notations que dans le chapitre **(Ch 4)** :

$$I(K) = \frac{|K|}{4} \sum_{j=1, f_j \not\subset \partial\Omega}^4 \mathbf{v}_h(G_{f_j}) \cdot (\nabla q_h^a(G_{f_j}) + \nabla q_h^1)$$

avec K élément quelconque fixé du maillage \mathcal{T}_h , f_i la face opposée au sommet i de K .

Imposons alors au vecteur \mathbf{v}_h de vérifier la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h(f_i) \times \mathbf{n}_{f_i} &= h_-^2 (\nabla q_h^a(G_{f_i}) + \nabla q_h^1) \times \mathbf{n}_{f_i} \quad 1 \leq i \leq 4, f_i \not\subset \partial\Omega \\ \mathbf{v}_h(f) &= 0 \quad \forall f \subset \partial\Omega \end{aligned}$$

avec $h_- := \min_K(h_K)$.

Rappelons que par hypothèse, il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de \mathcal{T}_h telle que :

$$h_- \geq \sigma h$$

où h est le pas de \mathcal{T}_h .

Ensuite, il nous suffit d'utiliser la définition de l'espace $M_h^a/M_h^{1,p}$ et le résultat du lemme (**Lemme** 4.4.1), afin d'obtenir :

$$\sum_K I(K) \geq c \sum_K h_K^2 (|q_h^a|_{1,K}^2 + |q_h^1|_{1,K}^2)$$

en ayant remarqué au préalable qu'il existe une constante c_1 indépendante de h telle que $h_-^2 \geq \sigma^2 h^2$ et que $h^2 \geq h_K^2$.

Il nous suffit alors de procéder comme lors du théorème (**Th** 4.4.2) du chapitre (**Ch** 4) pour pouvoir conclure. \square

Dès lors, nous pouvons tout comme dans le chapitre (**Ch** 4), en déduire l'existence d'une condition de type Babůska-Brezzi sur notre espace en pression complet. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème B.2.4 *La forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition de type Babůska-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{X}_h \times M_h$. Plus précisément, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h telle que l'on ait :*

$$\forall q_h \in M_h \cap L_0^2 \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h\| \quad (\text{B.4})$$

avec $M_h := (M_h^0 + M_h^1 + M_h^a/M_h^{1,p}) \cap L_0^2$

B.2.3 Seconde Condition inf-sup.

Avant d'aborder la suite, nous devons également démontrer une condition inf-sup sur un autre couple d'espace en pression. Ainsi, nous définissons un autre mode "parasite" en pression, noté $M_h^{1,c}$ et défini par :

$$M_h^{1,c} := \{q_h^a \in M_h^a \cap L_0^2 \mid \exists q_h^1 \in M_h^1 \cap L_0^2; \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h; \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^a) = \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^1)\}$$

De manière tout à fait analogue au cas précédent, nous définissons le sous-espace vectoriel $M_h^a/M_h^{1,c}$ comme un supplémentaire quelconque de $M_h^{1,c}$ dans M_h^a .

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème B.2.5 *Sous l' hypothèse (H 4.4.1), la forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition de type Babůska-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{X}_h^t \times ((M_h^a/M_h^{1,c}) + M_h^1) \cap (\cup_K L_0^2(K))$. Plus précisément, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h telle que l'on ait :*

$$\forall q_h \in ((M_h^a/M_h^{1,c}) + M_h^1) \cap (\cup_K L_0^2(K)) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t} \frac{\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h\| \quad (\text{B.5})$$

Preuve du théorème:

Soit q_h un élément quelconque fixé de $(M_h^a/M_h^{1,c}) + M_h^1$. Par définition de cet espace, il existe un élément q_h^a de $M_h^a/M_h^{1,c}$ et un élément q_h^1 de M_h^1 tels que nous puissions écrire :

$$q_h := q_h^a + q_h^1$$

Or d'après les définitions de $M_h^a/M_h^{1,p}$ et $M_h^{1,p}$ définis dans le paragraphe précédent, il existe un élément \tilde{q}_h^a dans $M_h^a/M_h^{1,p}$ et un élément $q_h^{1,p}$ dans $M_h^{1,p}$ tels que nous ayons :

$$q_h^a := \tilde{q}_h^a + q_h^{1,p}$$

Dès lors, la forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ se réduit pour q_h et un élément \mathbf{v}_h quelconque de \mathbf{X}_h^t :

$$\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h^a + q_h^{1,p} + q_h^1)$$

Cependant, nous savons que sur l'espace vectoriel \mathbf{X}_h^t , tout élément de $M_h^{1,p}$ vérifie l'égalité suivante :

$$\forall q_h^{1,p} \in M_h^{1,p} \exists \tilde{q}_h^1 \in M_h^1 \mid \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h^t \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h^{1,p}) = \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h^1)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \tilde{b}_h(\mathbf{v}_h, \tilde{q}_h^a + \tilde{q}_h^1 + q_h^1)$$

Il suffit alors de reprendre la démonstration du théorème (Th B.2.3) et d'utiliser en toute fin l'inégalité $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$ ainsi que la remarque (Rem B.2.3) pour pouvoir conclure. \square

Nous avons alors évidemment une condition de type Babůska-Brezzi pour l'espace M_h complet :

Théorème B.2.6 *La forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition de type Babůska-Brezzi sur l'espace produit $\mathbf{X}_h \times M_h$. Plus précisément, il existe une constante c indépendante du pas du maillage h telle que l'on ait :*

$$\forall q_h \in M_h \cap L_0^2 \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq c \|q_h\| \quad (\text{B.6})$$

avec $M_h := (M_h^0 + M_h^1 + M_h^a/M_h^{1,c}) \cap L_0^2$

Remarque B.2.4 *Ces deux théorèmes sont indispensables pour que la décomposition de \mathbf{L}^2 qui suit, soit effectivement vérifiée.*

B.2.4 Meilleure décomposition de \mathbf{L}^2 .

Nous allons également démontrer deux théorèmes, similaires aux théorèmes (Th 4.4.5) et (Th 4.4.6) du chapitre (Ch 4), assurant une meilleure décomposition de \mathbf{L}^2 . Ainsi, nous commencerons par énoncer le théorème suivant :

Théorème B.2.7 *Soit ϕ un élément quelconque fixé de $H^4 \cap L_0^2$ et tel que $|\phi|_4$ soit non nul. Soit \mathbf{V}_d^ϕ , l'espace vectoriel défini par :*

$$\mathbf{V}_d^\phi := \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2 \mid \int_{\Omega} \mathbf{w} \nabla \phi \, d\Omega = 0; \int_{\Omega} \mathbf{w} \nabla q_h \, d\Omega = 0 \quad \forall q_h \in M_h^2 \cap L_0^2 \right\}$$

Alors, quel que soit \mathbf{v}_h dans \mathbf{V}_h , noyau de la forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$, il existe un vecteur \mathbf{v}_d^ϕ de \mathbf{V}_d^ϕ tel que l'on ait la majoration suivante :

$$\|\mathbf{v}_d^\phi - \mathbf{v}_h\| \leq c(\phi) h^2 \|\mathbf{v}_h\|_h$$

où $c(\phi)$ ne dépend que de la fonction ϕ .

Preuve du théorème:

Soit un vecteur \mathbf{v}_h de \mathbf{V}_h quelconque fixé.

Dès lors et compte tenu de la définition du noyau de $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla \phi \, d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h^2 \, d\Omega - \sum_K \frac{|K|}{4} \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\nabla q_h^2(G_{f_i}), \mathbf{v}_h(f_i)) \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla(\phi - q_h^2) \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où q_h^2 est un élément quelconque de l'espace vectoriel des éléments finis P_2 de Lagrange.

En effet, il suffit de remarquer que le gradient d'un élément q_h^2 de M_h^2 s'écrit comme la somme d'un gradient d'un élément q_h^1 de M_h^1 et d'un gradient d'un élément q_h^a de M_h^a :

$$\begin{aligned} \nabla q_h^a|_K &= \sum_{i=1}^4 (a_i \nabla \lambda_i + a_{ii} \nabla (\lambda_i (2\lambda_i - 1))) + \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i} a_{ij} \nabla (4\lambda_i \lambda_j) \\ &= \sum_{i=1}^4 (a_i + a_{ii}) \nabla \lambda_i + \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i} (4a_{ij} - 2a_{ii} - 2a_{jj}) \nabla (\lambda_i \lambda_j) \end{aligned}$$

où nous avons remarqué que $\lambda_i = 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_j$ et où K est un élément quelconque du maillage \mathcal{T}_h .

Le dernier terme de l'expression (B.7) se traite de la même manière que lors de la démonstration du théorème (**Th** 4.4.5), si bien que nous obtenons :

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla (\phi - q_h^2) d\Omega \right| \leq c(\phi, \Omega) h^3 \|\mathbf{v}_h\|_h$$

Tandis que le premier terme est un terme d'erreur qu'il nous est possible d'évaluer. En effet, il nous suffit de constater que pour tout ajout d'un polynôme scalaire de degré 1, noté q_1 , et tout vecteur constant \mathbf{c} , l'expression suivante est invariable :

$$\int_K \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h^2 d\Omega - \sum_K \frac{|K|}{4} \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\nabla q_h^2(G_{f_i}), \mathbf{v}_h(f_i))_e$$

Par conséquent (quitte à revenir à l'élément de référence \hat{K} et à procéder comme lors de la démonstration du théorème (**Th** B.2.1)), il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$\left| \int_K \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h^2 d\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{4} \sum_{i=1, f_i \notin \partial\Omega}^4 (\nabla q_h^2(G_{f_i}), \mathbf{v}_h(f_i))_e \right| \leq c|\phi|_{3,K} h_K^2 |\mathbf{v}_h|_{1,K}$$

En sommant sur K l'expression ci-dessus puis en réunissant les deux estimations précédentes, nous obtenons le résultat énoncé. \square

Enfin, nous avons le dernier théorème suivant :

Théorème B.2.8 Soit ϕ un élément quelconque fixé de $H^4 \cap L_0^2$ et tel que $|\phi|_4$ soit non nul. Soit \mathbf{u}_h et p_h deux éléments de, respectivement, \mathbf{X}_h et M_h solutions des équations de Stokes particulières suivantes :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\nabla \phi, \mathbf{v}_h) \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

où \mathbf{v}_h et q_h sont des éléments quelconques de \mathbf{X}_h et M_h et où nous avons également posé :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \nu \sum_K (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_K \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \quad (\text{B.9})$$

Alors, nous avons les propriétés de superconvergence suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h &\leq c(\phi)h^4 \\ \|p_h - \phi\| &\leq c(\phi)h^2 \end{aligned}$$

où $c(\phi)$ ne dépend que de la fonction ϕ .

Preuve du théorème:

Soit q_h^2 un élément quelconque fixé de M_h^2 . Soit M_h^ϕ l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} M_h^\phi &:= \{q_h^\phi \in \mathcal{C}^0 \mid \exists q_h^2 \in M_h^2; \forall K, \exists a_K \in R \mid \\ & q_h^\phi|_K := q_h^2|_K + a_K \Pi_{i=1}^d \lambda_i; (\nabla q_h^\phi, \nabla \phi) = 0\} \end{aligned}$$

où les λ_i sont les fonctions de formes du P_1 sur l'élément K , d la dimension du problème.

Comme \mathbf{u}_h appartient à \mathbf{V}_h , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sum_K \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h^\phi &= \sum_K \int_{\partial K} q_h^\phi \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_K \int_{\partial K} q_h^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_K \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h^2 \end{aligned}$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal et extérieur à K .

Soit \mathbf{V}_d^ϕ , l'espace vectoriel défini par la relation suivante, pour tout q_h^ϕ élément de M_h^ϕ :

$$\mathbf{V}_d^\phi := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2 \mid \int_{\Omega} \mathbf{w} \nabla \phi \, d\Omega = 0; \int_{\Omega} \mathbf{w} \nabla q_h^\phi \, d\Omega = 0\}$$

Nous choisissons le vecteur \mathbf{v} de \mathbf{V}_d^ϕ défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &:= \mathbf{u}_h + \alpha \nabla \phi \\ \alpha &:= -\frac{\int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \phi}{\|\nabla \phi\|^2} \end{aligned}$$

Dès lors, nous avons les relations suivantes avec l'aide du théorème (Th B.2.7) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}_h\| &= |\alpha| \|\nabla \phi\| \\ &= \frac{1}{|\phi|_1^2} \left| \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \phi \, d\Omega \right| \\ &\leq c(\phi, \Omega) h^2 \|\mathbf{u}_h\|_h \end{aligned}$$

Pour l'estimation en vitesse, il suffit que nous prenions $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans les équations données dans le théorème pour trouver :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \phi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \mathbf{v}) \cdot \nabla (\phi - q_h^\phi) \, d\Omega \end{aligned}$$

Dès lors, l'utilisation d'une inégalité de type Cauchy-Schwartz, nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_h^2 &\leq |\phi - q_h^\phi|_1 \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}\| \\ &\leq (ch^2 |\phi|_3) (c(\phi) h^2 \|\mathbf{u}_h\|_h) \\ &\leq c(\phi) h^4 \|\mathbf{u}_h\|_h \end{aligned}$$

Il nous reste à établir la convergence en pression. Pour cela, nous utilisons tout d'abord l'inégalité triangulaire classique :

$$\begin{aligned} \|\phi - p_h\| &\leq \|\phi - q_h^1\| + \|p_h - q_h^1\| \\ &\leq \|\phi - q_h^3\| + \|q_h^3 - q_h^1\| + \|p_h - q_h^1\| \end{aligned} \tag{B.10}$$

où q_h^1 est un élément quelconque fixé de M_h^1 et q_h^3 un élément quelconque fixé de M_h^3 .

Ensuite, grâce à la condition inf-sup uniforme vérifiée par la forme bilinéaire $\tilde{b}_h(\cdot, \cdot)$ et le théorème (**Th** B.2.1), nous avons la succession de majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \|p_h - q_h^1\| &\leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \nabla(\phi - q_h^1) d\Omega - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \\ &\leq c \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot (\nabla(\phi - q_h^3) + \nabla(q_h^3 - q_h^1)) d\Omega - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \\ &\leq c (|\phi - q_h^3|_1 + \|q_h^3 - q_h^1\| + \|\mathbf{u}_h\|_h) \end{aligned}$$

où c est une constante indépendante de h .

Dès lors, avec l'inégalité triangulaire (B.10), en choisissant convenablement q_h^3 et q_h^1 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\phi - p_h\| &\leq c(|\phi - q_h^3|_1 + \|\phi - q_h^3\| + \|q_h^3 - q_h^1\| + \|\mathbf{u}_h\|_h) \\ &\leq c(h^3|\phi|_4 + h^4|\phi|_4 + h^2|\phi|_2 + h^4) \\ &\leq c(\phi)h^2 \end{aligned}$$

□

B.3 Continuité de la constante $c_0(K)$.

Dans tout ce paragraphe, nous noterons $P^a(K)$ l'ensemble suivant :

$$P^a(K) := \{p \in P_2(K) \mid p = 4 \sum_{i=1}^4 \sum_{j>i}^4 a_{ij} \lambda_i \lambda_j\}$$

où a_{ij} sont des réels quelconques et les λ_i le polynôme de degré 1 défini sur K valant 1 au sommet i et 0 sur les autres sommets.

Nous rappelons que le tétraèdre référence \hat{K} est défini par ses sommets situés en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ et que pour tout tétraèdre K , il existe une application affine bijective $F_K : \hat{K} \rightarrow K$, dont la matrice sera

donnée par B_K .

Nous noterons également $\widehat{P}^a(\widehat{K})$ les fonctions \widehat{p} définies sur \widehat{K} :

$$\widehat{p} := p \circ F_K$$

Nous rappelons la définition de la constante $c_0(K)$:

$$c_0(K) := \sup_{p \in P^a(K)} \frac{\sum_{i=1}^4 \|\sum_{j=1}^4 \nabla p(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_i}\|_e}{\sum_{i=1}^4 \|\nabla p(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}\|_e}$$

où f_i est la face opposée au sommet i et \mathbf{n}_{f_i} est le vecteur normal à la face f_i , unitaire et extérieur à K .

Enfin, nous utiliserons fréquemment l'une des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \sup_{x \in \Theta} a(x) - \sup_{x \in \Theta} b(x) \right| &\leq \left| \sup_{x \in \Theta} (a(x) - b(x)) \right| \\ &\leq \sup_{x \in \Theta} |a(x) - b(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \Theta} |a(x)| + \sup_{x \in \Theta} |b(x)| \end{aligned} \tag{B.11}$$

où Θ est un ensemble quelconque, $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ des fonctions définies sur Θ et à valeurs réelles quelconques.

Voici, le théorème qui nous intéresse :

Théorème B.3.1 *La constante $c_0(K)$ définie ci-dessus est une fonction de K continue en \widehat{K} , tétraèdre de référence.*

Preuve :

Nous commencerons par écrire la différence suivante :

$$\begin{aligned} &|c_0(K) - c_0(\widehat{K})| \\ = &\left| \sup_{p \in P^a(K)} \frac{\sum_{i=1}^4 \|\sum_{j=1}^4 \nabla p(G_{f_j}) \times \mathbf{n}_{f_i}\|_e}{\sum_{i=1}^4 \|\nabla p(G_{f_i}) \times \mathbf{n}_{f_i}\|_e} - \sup_{\widehat{p} \in \widehat{P}^a(\widehat{K})} \frac{\sum_{i=1}^4 \|\sum_{j=1}^4 \widehat{\nabla} \widehat{p}(\widehat{G}_{\widehat{f}_j}) \times \widehat{\mathbf{n}}_{\widehat{f}_i}\|_e}{\sum_{i=1}^4 \|\widehat{\nabla} \widehat{p}(\widehat{G}_{\widehat{f}_i}) \times \widehat{\mathbf{n}}_{\widehat{f}_i}\|_e} \right| \end{aligned}$$

En utilisant la transformation affine F_K , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} &|c_0(K) - c_0(\widehat{K})| \\ = &\left| \sup_{\widehat{p} \in \widehat{P}^a(\widehat{K})} \frac{\sum_{i=1}^4 \|B_K^{-T} \sum_{j=1}^4 \widehat{\nabla} \widehat{p}(\widehat{G}_{\widehat{f}_j}) \times \widehat{\mathbf{n}}_{\widehat{f}_i}\|_e}{\sum_{i=1}^4 \|B_K^{-T} \widehat{\nabla} \widehat{p}(\widehat{G}_{\widehat{f}_i}) \times \widehat{\mathbf{n}}_{\widehat{f}_i}\|_e} - \sup_{\widehat{p} \in \widehat{P}^a(\widehat{K})} \frac{\sum_{i=1}^4 \|\sum_{j=1}^4 \widehat{\nabla} \widehat{p}(\widehat{G}_{\widehat{f}_j}) \times \widehat{\mathbf{n}}_{\widehat{f}_i}\|_e}{\sum_{i=1}^4 \|\widehat{\nabla} \widehat{p}(\widehat{G}_{\widehat{f}_i}) \times \widehat{\mathbf{n}}_{\widehat{f}_i}\|_e} \right| \end{aligned}$$

Nous utilisons alors la première inégalité de (B.11) afin d'avoir :

$$= \left| \sup_{\hat{p} \in \widehat{P^a}(\hat{K})} \left\{ \frac{|c_0(K) - c_0(\hat{K})|}{\sum_{i=1}^4 \|B_K^{-T} \sum_{j=1}^4 \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_j}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e} - \frac{\sum_{i=1}^4 \|\sum_{j=1}^4 \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_j}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e}{\sum_{i=1}^4 \|\hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e} \right\} \right|$$

Nous réduisons alors au même dénominateur l'expression ci-dessus et nous utilisons à nouveau les inégalités (B.11) afin d'écrire finalement :

$$\begin{aligned} & |c_0(K) - c_0(\hat{K})| \\ \leq & \sup_{\hat{p} \in \widehat{P^a}(\hat{K})} \left| \frac{\sum_{i=1}^4 \|B_K^{-T} \sum_{j=1}^4 \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_j}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e - \sum_{i=1}^4 \|\sum_{j=1}^4 \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_j}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e}{\|B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e} \right| \\ + & \sup_{\hat{p} \in \widehat{P^a}(\hat{K})} \left| \frac{\left(\sum_{i=1}^4 \|B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e - \sum_{i=1}^4 \|\hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e \right) \sum_{i=1}^4 \|\sum_{j=1}^4 \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_j}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e}{\sum_{i=1}^4 \|\hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e \sum_{i=1}^4 \|B_K^{-T} \hat{\nabla} \hat{p}(\hat{G}_{f_i}) \times \hat{\mathbf{n}}_{\hat{\mathbf{f}}_i}\|_e} \right| \end{aligned}$$

Nous employons alors les inégalités suivantes valables pour la norme euclidienne $\|\cdot\|_e$ usuelle :

$$\begin{aligned} \|B_K^{-T} \mathbf{v}\|_e & \geq \frac{1}{\|B_K\|_e} \|\mathbf{v}\|_e \\ | \|\mathbf{v}\|_e - \|\mathbf{w}\|_e | & \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_e \end{aligned}$$

où \mathbf{v} et \mathbf{w} sont des vecteurs quelconques de R^3 .

Ce qui nous permet alors d'écrire la relation suivante qui suffit à démontrer le théorème :

$$|c_0(K) - c_0(\hat{K})| \leq 2 \|B_K\|_e \|Id - B_K^{-T}\|_e c_0(\hat{K})$$

□

Annexe C

Nomenclature.

$:=$: opérateur binaire indiquant que le terme de droite est la définition du terme de gauche

Ω : domaine de R^2 ou de R^3 borné, généralement considéré comme “régulier”

$\partial\Omega$: frontière de Ω

$u, v, t \dots$: grandeurs scalaires

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t} \dots$: grandeurs vectorielles

$L^q(\Omega)$ ou L^q : espace des fonctions scalaires dont le module élevé à la puissance q est intégrable sur Ω . q est un entier compris entre 1 et ∞

$L_0^2(\Omega)$ ou L_0^2 : sous-espace de L^2 dont les membres sont d'intégrale nulle sur Ω

$H^m(\Omega)$ ou H^m : espace des fonctions scalaires de carré intégrable sur Ω et dont les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre m sont de carré intégrable sur Ω . m est un entier naturel quelconque compris entre 0 et ∞

$H_0^m(\Omega)$ ou H_0^m : sous-espace vectoriel de H^m , dont les éléments admettent une trace nulle sur le bord $\partial\Omega$ de Ω

\mathbf{L}^2 , \mathbf{H}^m , \mathbf{H}_0^m , ... : espace de fonctions vectorielles dont les composantes appartiennent respectivement à L^2 , H^m , H_0^m ...

$\|\cdot\|_e$: norme euclidienne usuelle d'une grandeur vectorielle quelconque

$\|\cdot\|$: norme associée aux espaces vectoriels L^2 ou \mathbf{L}^2 (selon le contexte)

$\|\cdot\|_m$: norme associée aux espaces vectoriels H^m ou \mathbf{H}^m (selon le contexte)

$|\cdot|_m$: semi-norme associée aux espaces vectoriels H^m ou \mathbf{H}^m (selon le contexte). Également norme des espaces vectoriels H_0^m ou \mathbf{H}_0^m (selon le contexte)

$L^q(0, T; X)$ ou $L^q(X)$: X désignant un espace de Banach quelconque, désigne l'ensemble des fonctions de $[0, T]$ à valeurs dans X et dont la norme sur X élevée à la puissance q est intégrable sur $[0, T]$. q est entier compris entre 1 et ∞

\mathcal{T}_h : maillage de Ω composé de tétraèdres en dimension 3 ou de triangles en dimension 2

$|f|$: mesure de Lebesgue de l'élément géométrique f du maillage \mathcal{T}_h

h : généralement la longueur de la plus grande arête de \mathcal{T}_h . Également appelé pas du maillage

K : élément d'un maillage \mathcal{T}_h . Cet élément est un triangle en dimension 2 et un tétraèdre en dimension 3

h_K : la longueur de la plus grande arête de l'élément K

u_h, v_h, t_h ... : grandeurs scalaires discrètes définies à partir d'un maillage \mathcal{T}_h dont le pas est h

$\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{t}_h$... : grandeurs vectorielles discrètes définies à partir d'un maillage \mathcal{T}_h dont le pas est h

\mathbf{X}_h : espace vectoriel de dimension finie défini à partir d'un maillage \mathcal{T}_h de

Ω . Cet espace est l'ensemble des fonctions qui se réduisent à des polynômes de degré 1 sur chaque K de \mathcal{T}_h , continues au milieu des arêtes (en dimension 2) ou des faces (en dimension 3) de deux éléments adjacents et nulles sur les arêtes situées au bord du maillage \mathcal{T}_h (espace dit de Crouzeix-Raviart)

$\bar{\mathbf{X}}_h$: sous-espace vectoriel de \mathbf{X}_h . Ensemble des fonctions qui se réduisent à des polynômes de degré 1 sur chaque élément K , continues en chaque sommet du maillage et nulles sur les sommets situés au bord du maillage \mathcal{T}_h

\mathbf{X}_h' : sous-espace vectoriel de \mathbf{X}_h . Il est défini de sorte qu'il soit un supplémentaire de $\bar{\mathbf{X}}_h$ dans \mathbf{X}_h , i.e. $\mathbf{X}_h := \bar{\mathbf{X}}_h \oplus \mathbf{X}_h'$

\mathbf{P}_h : projeté \mathbf{L}^2 d'une fonction vectorielle sur \mathbf{X}_h

$\bar{\mathbf{P}}_h$: projeté \mathbf{L}^2 d'une fonction vectorielle sur $\bar{\mathbf{X}}_h$

\mathbf{P}_h' : projeté \mathbf{L}^2 d'une fonction vectorielle sur \mathbf{X}_h'

\mathbf{P}_h^1 : projeté \mathbf{H}_0^1 d'une fonction vectorielle sur \mathbf{X}_h

$\bar{\mathbf{P}}_h^1$: projeté \mathbf{H}_0^1 d'une fonction vectorielle sur $\bar{\mathbf{X}}_h$

$\|\cdot\|_K$: norme L^2 (respectivement \mathbf{L}^2) de fonctions scalaires (respectivement vectorielles) définies sur K

$\|\cdot\|_{m,K}$: norme H^m (respectivement \mathbf{H}_m) de fonctions scalaires (respectivement vectorielles) définies sur K

$|\cdot|_{m,K}$: semi-norme H^m (respectivement \mathbf{H}_m) de fonctions scalaires (respectivement vectorielles) définies sur K . Également norme H_0^m (respectivement \mathbf{H}_0^m) de fonctions scalaires (respectivement vectorielles) de support inclus dans K

$\|\cdot\|_h$: norme sur \mathbf{X}_h dont la définition est donnée par la relation suivante

$$\|\cdot\|_h := \sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\cdot|_{1,K}^2}$$