

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité
Mécanique

Présentée par
Marion CHANDESRIS

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS 6

Laboratoire d'accueil:

Commissariat à l'Energie Atomique
Direction de l'Energie Nucléaire
Département d'Etude des Réacteurs
Service de Simulation en Thermo-Hydraulique
Laboratoire de Modélisation et de Développement de Logiciels

MODÉLISATION DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS DANS LES MILIEUX POREUX ET À L'INTERFACE AVEC UN MILIEU LIBRE

Thèse soutenue le 1er Décembre 2006 devant le jury composé de :

M.	Ghislain DE MARSILY	Université Paris 6	Président du Jury
M.	Benoît GOYEAU	Université Paris 6	Examineur
M.	Didier JAMET	CEA Grenoble	Encadrant
M.	Djamel LAKEHAL	ETH-Zurich	Rapporteur
M.	Michel QUINTARD	IMF-Toulouse	Rapporteur
M.	Pierre SAGAUT	Université Paris 6	Directeur de thèse

*à la famille,
aux copains,
et à mon bibi.*

Remerciements

Tout projet de thèse a son histoire et ses multiples acteurs. Je tiens ici à remercier l'ensemble des personnes qui m'ont encadrée, soutenue et aidée à faire aboutir ce projet.

En premier lieu, je voudrais remercier Fabien Boulanger, chef du laboratoire lors de mon arrivée, pour la confiance qu'il m'a accordée et grâce à qui ce projet a pu démarrer. Je souhaite également remercier Frédéric Ducros, qui lui a succédé, ainsi que Bernard Faydide, chef du service de Modélisation en Thermo-Hydraulique pour m'avoir accueillie dans d'excellentes conditions de travail.

Je tiens à remercier Pierre Sagaut pour avoir assuré la direction scientifique de ce travail, pour la confiance qu'il m'a accordée et la grande liberté qu'il m'a laissée dans la conduite de ma recherche. Merci aux rapporteurs, Djamel Lakehal et Michel Quintard, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail et la pertinence de leurs remarques. Merci à Benoît Goyeau d'avoir accepté de participer à mon Jury de thèse. J'espère que nous aurons l'occasion de poursuivre nos discussions animées sur cette interface libre/poreux. Un grand merci également à Ghislain de Marsily pour avoir présidé ce Jury de thèse de façon si vivante.

Merci à Gauthier Fauchet, qui a assuré l'encadrement initial de cette thèse, qui m'a laissé une grande liberté quant aux orientations de ce travail et m'a encouragée dans mes échanges avec les autres membres du laboratoire. J'ai ainsi pu travailler de façon très étroite avec Guillaume Serre sur la turbulence, puis avec Didier Jamet sur la question des interfaces. Vous m'avez beaucoup apporté, chacun à votre manière et cela a été une grande richesse pour moi de bénéficier de la diversité de vos conseils et de vos points de vue. Je vous en suis très reconnaissante. Un grand merci en particulier à Didier pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, sa patience, sa rigueur scientifique et son soutien sans failles.

Je souhaite également remercier très chaleureusement l'ensemble des membres du laboratoire, qui ont rendu ces trois années de thèse particulièrement riches, à la fois scientifiquement et humainement. Je voudrais souligner ici l'ouverture d'esprit, les compétences pointues, la diversité, la richesse et la force de caractère des personnes de cette équipe. C'est une équipe au sein de laquelle j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler. Merci à Valérie Barthel, Sylvie Béty, Ulrich Bieder (je crois que je commence à comprendre à quoi peut bien ressembler un cœur de réacteur), Olivier Cioni, Marc Elmo, Philippe Emonot, Emile Garré, Olivier Lebaigue, Pierre Ledac, Benoît Mathieu, Fabien Perdu, Patrick Quéméré, Simone Vandroux-Koenig et Marinette Wursten. Bien entendu, un laboratoire n'est rien sans ses thésards, ses post-docs et ses pauses café. Merci à Younès Benarafa, Anne Boulin, Alexandre Chatelain, Thomas Fortin, Benoît Fournier, Aparicio Henriques, Emmanuel Labourasse, Eli Laucoin (j'espère que le SAV pour ubuntu sera prolongé au-delà de la thèse !), Pierre Ruyer, Nicolas Tauveron, Adrien Toutant et Guillaume Vitali pour leur patience, leurs précieux conseils et surtout leur bonne humeur. Et bonne chance à tous les petits nouveaux !

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Problématique pour l'étude d'un cœur de réacteur nucléaire	2
1.2	État de l'art	3
1.2.1	Modélisation de la turbulence dans les milieux poreux	3
1.2.2	Transferts à une interface libre/poreux	6
1.3	Plan du mémoire	8
2	Les méthodes de changement d'échelle	11
2.1	Introduction à l'étude des écoulements dans les milieux poreux	11
2.2	La méthode de prise de moyenne volumique	14
2.2.1	Définitions et propriétés des opérateurs de moyennes volumiques	14
2.2.2	Illustration sur un exemple simple	16
2.3	L'interface milieu libre/milieu poreux	21
2.3.1	Les différents niveaux de description de l'interface libre/poreux	22
2.3.2	Méthodes de changement d'échelle pour le passage micro/méso	23
2.3.3	Méthodes de changement d'échelle pour le passage méso/macro	24
2.4	Conclusion	28
3	Modélisation de la turbulence dans un milieu poreux homogène	29
3.1	Introduction	29
3.2	Article 1 : A macroscopic turbulence model for flow in porous media suited for channel, pipe and rod bundle flows	31
3.2.1	Introduction	32
3.2.2	Macroscopic governing equations	34
3.2.3	The closure problem	36
3.2.4	Determination of the model constants	40
3.2.5	Assessment of the macroscopic model	45
3.2.6	Conclusion	47
3.3	Conclusion	48
4	Étude de l'interface libre/poreux pour des écoulements laminaires	51
4.1	Introduction	51
4.2	Article 2 : Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow	52
4.2.1	Introduction	53
4.2.2	Macroscopic governing equations	55
4.2.3	One dimensional problem	58
4.2.4	Comparisons with experimental data	67
4.2.5	Discussion	71
4.2.6	Conclusion	71
4.3	Conclusion	72

5	Étude de la position de l'interface et estimation a priori des coefficients de saut	73
5.1	Introduction	73
5.2	Article 3 : Boundary conditions at a fluid-porous interface : An a priori estimation of the stress jump coefficients	74
5.2.1	Introduction	74
5.2.2	Results obtained with the matched asymptotic expansions	77
5.2.3	Definition and properties of the excess quantities	80
5.2.4	Matched asymptotic expansions under conservation constraint	83
5.2.5	Comparisons to numerical results	87
5.2.6	Discussion	91
5.2.7	Conclusion	92
5.3	Conclusion	95
6	Généralisation de l'étude à un écoulement tridimensionnel	99
6.1	Introduction	99
6.2	Écoulement mono-dimensionnel perpendiculaire à l'interface	102
6.3	Analyse générique des processus interfaciaux	103
6.4	Étude analytique	106
6.4.1	Hypothèse simplificatrice	108
6.4.2	Étude du problème à l'ordre 0 en ε	108
6.4.3	Étude du problème à l'ordre 1 en ε	109
6.5	Résultats et discussion	111
6.5.1	Résultat exprimé sous forme dimensionnelle	111
6.5.2	Comparaison avec les résultats de l'analyse générique	114
6.5.3	Comparaison avec la généralisation proposée par Breugem	115
6.5.4	Comparaison avec les conditions de saut classiques en diphasique	116
6.6	Écoulement laminaire dans un modèle simplifié de cœur	118
6.6.1	Présentation de la configuration étudiée	118
6.6.2	Détermination des paramètres du modèle à l'échelle macroscopique	118
6.6.3	Résultats	122
6.7	Conclusion	123
6.8	Bilan de l'étude laminaire	128
7	Étude de l'interface libre/poreux pour l'écoulement de Poiseuille turbulent	133
7.1	Introduction	133
7.2	Changement d'échelle micro/méso	136
7.2.1	Équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique	137
7.2.2	Équations gouvernant le problème à l'échelle mésoscopique	137
7.2.3	Fermeture du modèle à l'échelle mésoscopique	141
7.3	Conditions de saut pour l'écoulement de Poiseuille turbulent	144
7.3.1	Problème mono-dimensionnel	144
7.3.2	Condition de saut pour l'équation de bilan de quantité de mouvement	145
7.3.3	Conditions de saut pour les équations de transport des quantités turbulentes	146
7.4	Détermination des grandeurs en excès	147
7.4.1	Description de la configuration de référence	148
7.4.2	Relation de fermeture pour la force de frottement surfacique en excès	148
7.4.3	Relations de fermeture pour les conditions de saut sur les grandeurs turbulentes	150
7.5	Résultats	151
7.5.1	Profils de vitesse	152
7.5.2	Énergie cinétique turbulente et dissipation	152

7.5.3	Contraintes de cisaillement	153
7.5.4	Viscosité turbulente	154
7.6	Conclusion	156
8	Écoulement turbulent perpendiculaire à l'interface libre/poreux	159
8.1	Introduction	159
8.2	Changement d'échelle méso/macro	160
8.2.1	Problème mono-dimensionnel	160
8.2.2	Condition de saut pour l'équation de bilan de quantité de mouvement	162
8.2.3	Conditions de saut pour les équations de transport des quantités turbulentes	163
8.3	Détermination des grandeurs en excès	164
8.3.1	Description de la configuration étudiée	164
8.3.2	Relations de fermeture	166
8.3.3	Premier Essai	167
8.3.4	Limites du modèle macroscopique dans la région libre	168
8.4	Modèle de turbulence macroscopique pour la zone de sillage de la région libre	171
8.4.1	Modélisation du terme sous-filtre P_k	172
8.4.2	Modélisation du terme sous-filtre P_ϵ	173
8.4.3	Évaluation du modèle macroscopique de sillage	175
8.5	Résultats pour l'écoulement perpendiculaire à l'interface	175
8.5.1	Détermination des paramètres de saut pour les grandeurs turbulentes	175
8.5.2	Résultats	178
8.6	Bilan des conditions de saut pour les écoulements turbulents	179
8.7	Écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur	181
8.7.1	Présentation de la configuration étudiée	181
8.7.2	Paramètres du modèle à l'échelle de description macroscopique	181
8.7.3	Résultats	182
8.7.4	Discussion	184
8.8	Conclusion	189
9	Conclusion et perspectives	191
A	Estimation du coût de calcul pour un cœur de réacteur nucléaire	195
B	Éléments de calcul tensoriel dans le repère lié à l'interface	197
B.1	Système de coordonnées associée à l'interface	197
B.2	Opérateurs de dérivation	198
B.2.1	Variations de la base naturelle	198
B.2.2	Opérateur gradient	198
B.2.3	Opérateur divergence	199
B.2.4	Opérateur laplacien	199
B.3	Coefficients de Christoffel	201
B.4	Opérateurs surfaciques	201
C	Étude analytique 3D	203
C.1	Expression du problème étudié dans le système de coordonnées induit par l'interface	203
C.1.1	Problème extérieur	203
C.1.2	Problème intérieur	204
C.1.3	Raccord entre la région intérieure et les régions extérieures	207
C.2	Étude du problème à l'ordre 0 en ϵ	207
C.2.1	Condition de saut sur la vitesse	207

C.2.2	Condition de saut sur le gradient de vitesse normal	207
C.2.3	Condition de saut sur la pression	208
C.3	Étude du problème à l'ordre 1 en ε	208
C.3.1	Condition de saut sur la vitesse	208
C.3.2	Condition de saut sur le gradient de vitesse normal	208
C.3.3	Condition de saut sur la pression	210
D	Mise en œuvre numérique	213
D.1	Présentation de la mise en œuvre numérique pour la méthode des volumes finis	213
D.1.1	Discrétisation en maillage structuré	214
D.1.2	Opérateur de diffusion	214
D.1.3	Opérateur de convection	215
D.1.4	Termes sources	216
D.2	Prise en compte des conditions de saut	216
D.2.1	Formulation mono-fluide	217
D.2.2	Implémentation des conditions de saut	221
D.3	Résultats obtenus sur maillages non-structurés	222
	Bibliographie	225

Nomenclature

Lettres latines

A_i	interface fluide-solide
c	concentration du scalaire passif
c_1, c_2, C_μ	constantes du modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard
c_p	constante du modèle de turbulence macroscopique
C_s	coefficient de perte de charge singulière
$C_{ks}, C_{\epsilon s}$	paramètres de saut associés aux conditions de saut sur les grandeurs turbulentes
C_f	coefficient de frottement
D	coefficient de diffusion
\mathbf{D}_{eff}	tenseur de diffusion effective
D_a	nombre de Darcy
d_p	taille caractéristique du diamètre des pores
D_h	diamètre hydraulique
E	moyenne volumique de ϵ à l'échelle de description macroscopique
E_f	moyenne volumique intrinsèque de ϵ à l'échelle de description macroscopique
\mathbf{F}	tenseur de Forchheimer
g	gravité
h	hauteur du canal
h_b	hauteur du milieu poreux
k	énergie cinétique turbulente
\mathcal{K}	moyenne volumique de k à l'échelle de description macroscopique
\mathcal{K}_f	moyenne volumique intrinsèque de k à l'échelle de description macroscopique
k	conductivité hydraulique
\mathbf{K}	tenseur de perméabilité
K	perméabilité
K_p	perméabilité du milieu poreux homogène
L_c	longueur de la région combustible du modèle simplifié de cœur de réacteur
m	fonction de filtrage
m_V	fonction de filtrage définie par la moyenne sur le volume élémentaire
\mathbf{n}	vecteur normal à l'interface (fluide/solide ou libre/poreux)
p	pression
p_A	pression, solution des développements asymptotiques raccordés à l'ordre 1 : $p_A = \langle p \rangle_f^{(0)} + \varepsilon \langle p \rangle_f^{(1)}$
P_f	moyenne volumique intrinsèque de la pression à l'échelle de description macroscopique
P	production de turbulence

P_k	terme source additionnel de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$
P_ϵ	terme source additionnel de l'équation de transport de $\langle \epsilon \rangle_f$
P_w	terme de production de turbulence du modèle de sillage
Q	débit
Re	nombre de Reynolds
Re_c	nombre de Reynolds basé sur la demie-hauteur de canal et la vitesse au centre du canal
Re_H	nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique et la vitesse débitante
\mathbf{S}	tenseur des déformations
S_w	surface de frottement
$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$	vecteurs unitaires tangents à l'interface
\mathbf{u}	vecteur vitesse
u_A	vitesse, solution des développements asymptotiques raccordés à l'ordre 1 : $u_A = \langle u \rangle^{(0)} + \varepsilon \langle u \rangle^{(1)}$
u_B	vitesse de glissement
\mathbf{U}	moyenne volumique de la vitesse à l'échelle de description macroscopique
\mathbf{U}_f	moyenne volumique intrinsèque de la vitesse à l'échelle de description macroscopique
U_d	vitesse débitante
U_D	vitesse de Darcy
u_i	composante du vecteur vitesse
U_∞	valeur asymptotique de la vitesse dans le milieu poreux lorsque $y \rightarrow -\infty$
u_τ	vitesse de frottement
V	volume du VER
y_{lim}^+	constante du modèle de turbulence macroscopique
y_i	position arbitraire de l'interface dans la zone de transition
y_M	position de l'interface de discontinuité
y_ψ	position du centre de gravité de la grandeur ψ (cf. Eq. (5.21))
$y_{\phi/K} + \Delta y$	position du centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès (cf. Eq. (5.28))
y_{imp}	position de la paroi imperméable équivalente
y_{nom}	position de l'interface nominale

Lettres grecques

α	paramètre de glissement de Beavers et Joseph (1967)
β	coefficient de saut de Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a)
β_p	coefficient de saut de notre étude
δ	épaisseur de la zone de transition
ε	petit paramètre de la méthode des développements asymptotiques raccordés
ϵ	taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente
ϕ	porosité
ϕ_p	porosité du milieu poreux homogène
κ	constante de Von Karman
λ_c	coefficient de perte de charge
μ	viscosité dynamique
μ_{eff}	viscosité effective
ν	viscosité cinématique
ν_t	viscosité turbulente
ν_{t_ϕ}	viscosité turbulente macroscopique

Nomenclature

(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	système de coordonnées induit par l'interface
$\tilde{\xi}$	ξ_3/ε , variable <i>intérieure</i> mesurant la distance selon la coordonnée normale à l'interface
ξ_M	position de l'interface de discontinuité dans le système de coordonnées généralisés
ρ	masse volumique
σ	$1/\sqrt{Da}$
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	nombres de Prandtl
$\tilde{\sigma}_k, \tilde{\sigma}_\varepsilon$	nombres de Prandtl macroscopiques
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes
$\boldsymbol{\tau}^t$	tenseur des échelles sous-filtre associé à la vitesse
$\boldsymbol{\tau}^k$	tenseur des échelles sous-filtre associé au transport de k
$\boldsymbol{\tau}^\varepsilon$	tenseur des échelles sous-filtres associé au transport de ε
χ	fonction indicatrice de la phase fluide

Indices

ψ_+, ψ_- valeurs asymptotiques de la grandeur ψ hors de la zone de transition

Exposants

ψ^+	variable adimensionnée
ψ^{EX}	définition générale de la grandeur en excès associée à la variable ψ (cf. Eq. (2.34))
ψ^{ex}	première définition du calcul de la grandeur en excès (interface placée en $y = 0$)
ψ^{exM}	deuxième définition du calcul de la grandeur en excès (interface placée en $y = y_M$)
$\psi^{ex\Delta}$	troisième définition du calcul de la grandeur en excès (prise en compte de la contrainte de conservation des forces)

Symboles spéciaux

$\bar{\psi}$	moyenne statistique de la grandeur ψ
ψ'	fluctuation par rapport à la moyenne statistique
$\langle \psi \rangle$	moyenne volumique de phase (ou superficielle) de la grandeur ψ
$\langle \psi \rangle_f$	moyenne volumique intrinsèque de la grandeur ψ
$\tilde{\psi}$	déviations de ψ autour de sa moyenne intrinsèque
$\tilde{\psi}$	variable <i>intérieure</i>
$[\Psi]$	saut de la quantité macroscopique Ψ au niveau de l'interface

Abréviations

DNS	<i>Direct numerical simulation</i> en anglais, Simulation numérique directe en français
LES	<i>Large Eddy Simulation</i> en anglais, Simulation des grandes échelles en français
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes equations
VANS	Volume Averaged Navier Stokes equations
REP	Réacteur à eau pressurisée
VER	Volume élémentaire représentatif (ou REV, <i>Representative Elementary Volume</i> en anglais)

Chapitre 1

Introduction

La simulation numérique en mécanique des fluides s'est considérablement développée durant ces trente dernières années. Elle est actuellement utilisée comme un outil d'étude des écoulements dans de nombreux domaines industriels : aéronautique, nucléaire, automobile, industrie pétrolière, etc.

Si la puissance toujours croissante des calculateurs a rendu possible ce développement, la simulation numérique directe (DNS, pour *Direct Numerical Simulation* en anglais) des écoulements turbulents reste restreinte à des systèmes simples, à faible nombre de Reynolds ($Re \sim [10^3 - 10^4]$). En effet, la résolution en maillage requise pour une simulation tridimensionnelle est proportionnelle à $Re^{9/4}$, alors que la capacité des calculateurs et les temps de restitution des simulations limitent aujourd'hui les études à des maillages de l'ordre de $[10^8 - 10^9]$ noeuds de calculs. La DNS ne peut ainsi pas être utilisée pour traiter des configurations industrielles à hauts nombres de Reynolds ($Re \sim 10^6$). En revanche, la DNS, qui présente l'avantage de n'introduire aucun modèle, est devenue un outil complémentaire à l'expérience. Elle permet d'avoir accès aux grandeurs locales instantanées dans l'ensemble de l'écoulement et ainsi d'obtenir une meilleure compréhension des phénomènes physiques complexes qui régissent les écoulements turbulents.

Afin de réduire les coûts de calcul, des modèles de turbulence ont été développés. Ils permettent de simuler des écoulements turbulents à hauts nombres de Reynolds, dans des géométries complexes. Les approches RANS (pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes* en anglais) s'appuient sur l'utilisation d'une moyenne statistique et la décomposition de chaque quantité en une quantité moyennée et une quantité fluctuante. L'ensemble des échelles turbulentes est modélisé. La résolution des équations issues de ce type d'approche donne uniquement accès aux caractéristiques moyennes de l'écoulement. Si le coût de calcul associé à ces modèles reste faible, le nombre de degré de liberté à calculer ayant été considérablement réduit, sa capacité à reproduire la physique de l'écoulement repose intégralement sur le modèle de fermeture utilisé. Or, les modèles de fermeture restent extrêmement dépendants de l'écoulement étudié. Ce type d'approche souffre en général d'un manque d'universalité.

La simulation des grandes échelles (LES, pour *Large Eddy Simulation* en anglais) se situe à mi-chemin entre la DNS et les méthodes RANS. Les structures turbulentes de l'écoulement dont la taille est supérieure à une échelle de coupure sont explicitement calculées comme dans le cas d'une DNS. Quant aux petites échelles de la turbulence (celles dont le caractère est supposé être le plus universel), leur effet sur les grandes échelles est modélisé par des modèles de sous-filtre. Le principal avantage de cette approche repose sur le caractère universel de la modélisation sous-filtre. De plus, comme dans le cas d'une DNS, cette méthode permet de capturer le caractère instationnaire de l'écoulement. Néanmoins, le coût de calcul de ces méthodes reste élevé et leur utilisation dans un cadre industriel reste limité à des écoulements où le nombre de Reynolds est modéré (Re de l'ordre de $[10^4 - 10^5]$).

Dans un autre registre, la simulation numérique directe peut également être utilisée pour étudier les écoulements dans les milieux poreux. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté nécessaire pour simuler précisément l'écoulement dépend avant tout de la description du milieu poreux à l'échelle fine. Or, le milieu poreux est souvent constitué d'un grand nombre de grains, dont la taille est très petite devant la taille du système étudié, et dont la morphologie peut s'avérer très complexe. Pour surmonter cette difficulté de description et réduire le nombre de degré de liberté à calculer, le milieu poreux est en général modélisé par un *milieu continu équivalent*. Ce milieu continu équivalent est alors doté de propriétés effectives qui rendent compte à grande échelle, de la physique du problème étudié à l'échelle du pore. On notera que ce type de description "milieu poreux", où la description du milieu à l'échelle fine est remplacée par un milieu équivalent, est utilisée pour une large gamme d'application : hydrodynamique, transport d'un scalaire, neutronique, etc.

1.1 Problématique pour l'étude d'un cœur de réacteur nucléaire

Un cœur de réacteur nucléaire possède une géométrie très complexe, due en particulier à la présence en son sein d'un très grand nombre de structures solides. Pour donner une idée de cette géométrie, une description schématique d'un cœur de réacteur est présentée sur la figure 1.1. La région du cœur qui contient les assemblages combustibles, la région combustible, est extrêmement encombrée de structures solides. Pour donner un ordre de grandeur, un REP (*Réacteur à Eau Pressurisée*) contient de l'ordre de 150 assemblages combustibles, un assemblage combustible étant constitué d'environ 300 crayons. La complexité de cette structure et le nombre de degrés de liberté nécessaire à sa description rend prohibitif l'utilisation de modèles de turbulence de type RANS ou LES pour simuler l'écoulement dans l'ensemble du cœur (une estimation du coût d'un tel calcul est proposée dans l'annexe A). Pour réaliser ce type de simulation, une autre description de la région combustible, moins fine donc moins coûteuse en temps de calcul, doit être envisagée. La région combustible peut être vue comme un milieu poreux. En effet, les assemblages combustibles composent une structure solide qui s'oppose au passage du fluide. Dans une description de type milieu poreux, la structure fine de la région combustible n'est pas représentée, elle est modélisée par un milieu continu équivalent. Cette échelle de description de type milieu poreux est en général qualifiée de macroscopique. L'utilisation de modèles macroscopiques, basés sur une description de type milieu poreux, semble ainsi appropriée pour décrire l'écoulement dans la région combustible. Cette description de type milieu poreux sera d'ailleurs facilitée par le fait que la région combustible est composée d'un très grand nombre d'éléments identiques qui constituent ainsi un milieu poreux homogène.

L'écoulement est turbulent au sein de la région combustible. Pour rendre compte du caractère turbulent d'un écoulement, on peut utiliser des modèles de turbulence. Mais, lorsque l'on se situe dans une approche moyennée, on peut également se contenter de modèles de fermeture pour l'équation de quantité de mouvement, uniquement basés sur le nombre de Reynolds de l'écoulement. Cette approche est par exemple utilisée pour évaluer les pertes de charge dans les tuyaux. Nous souhaitons utiliser un modèle de turbulence à l'échelle macroscopique pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la connaissance de l'évolution des grandeurs caractéristiques de la turbulence, comme l'énergie cinétique turbulente est importante pour nos études. En effet, elle peut s'avérer déterminante pour l'évaluation d'autres phénomènes qui se produisent au sein du cœur de réacteur comme les transferts de chaleur ou encore la coalescence et la fragmentation de bulles. De plus, comme nous le verrons au paragraphe suivant, le modèle utilisé dans la région combustible doit être raccordé aux modèles de turbulences qui sont utilisés pour simuler l'écoulement dans le reste du cœur. Nous pensons que ce travail sur les conditions de raccord est facilité si les grandeurs caractéristiques de la turbulence dans la région combustible sont connues au niveau du raccord entre les modèles. On souhaite donc développer un modèle de turbulence macroscopique pour modéliser à grande échelle l'écoulement turbulent de la région combustible. Ce type d'approche permet de réduire grandement les coûts de calculs, mais il nécessite en revanche un travail de modélisation.

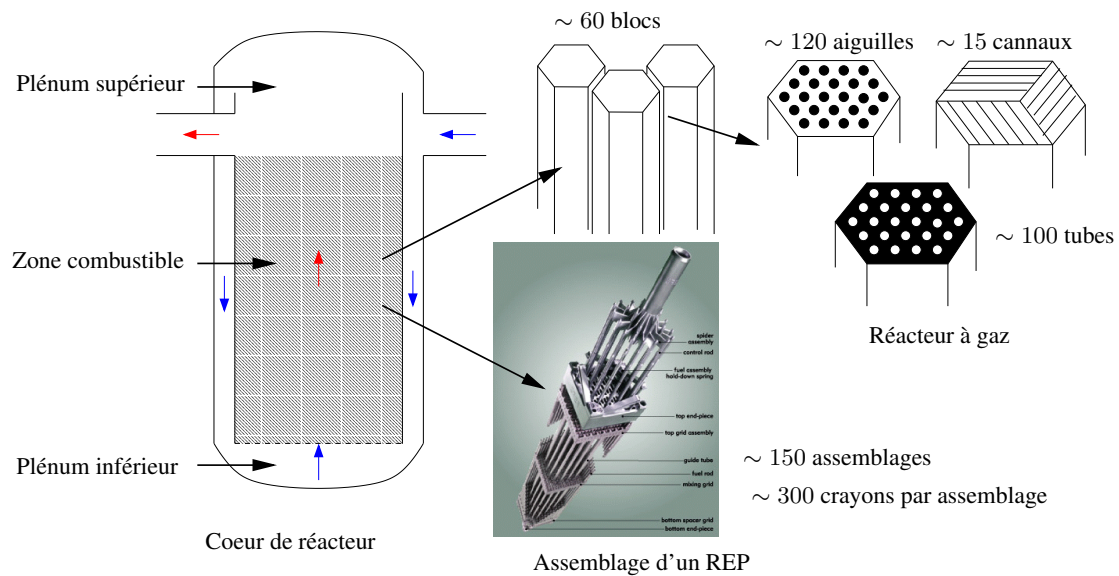


FIG. 1.1 – Description schématique d'un cœur de réacteur.

Comme on peut le voir sur la figure 1.1, un cœur de réacteur nucléaire se compose de façon schématique comme la succession de trois milieux de natures différentes : un milieu relativement libre (le plénum inférieur) suivi d'un milieu chargé (la zone combustible) puis à nouveau d'un milieu libre (le plénum supérieur). Nous venons de voir que pour simuler l'écoulement dans la zone combustible, l'utilisation de modèles macroscopiques, basés sur une description de type milieu poreux, est nécessaire. Si l'on veut par la suite pouvoir simuler l'écoulement dans l'ensemble du cœur, le modèle de turbulence macroscopique de la zone combustible doit être consistant avec les modèles de turbulence plus classiques utilisés dans les régions libres. Il faut également être capable de raccorder les modèles de turbulence utilisés dans les régions libres, avec le modèle de turbulence macroscopique de la zone combustible. Ainsi, une fois que le modèle de turbulence adapté au milieu chargé est connu, il faut étudier la question des conditions de raccord associées à ce modèle de turbulence macroscopique lorsque l'on se trouve aux interfaces entre le milieu libre et le milieu chargé. L'analyse bibliographique montre que la question du raccord entre des modèles macroscopiques à une interface libre/poreux n'est pas simple, même dans le cas où l'écoulement est laminaire.

1.2 État de l'art

1.2.1 Modélisation de la turbulence dans les milieux poreux

La modélisation de la turbulence dans les milieux poreux rassemble deux difficultés : une difficulté inhérente à tout travail de modélisation de la turbulence et une difficulté associée à la modélisation des phénomènes de transport au sein d'un milieu poreux. Pour modéliser la turbulence, l'idée de base commune aux approches RANS et LES est d'appliquer un filtre (statistique, temporel ou spatial selon la méthode utilisée) aux équations de Navier-Stokes, puis de modéliser l'effet des termes sous-filtre sur les grandeurs filtrées (Sagaut, 2003). Pour modéliser les écoulements dans les milieux poreux, d'autres types d'approches telles que l'homogénéisation, la prise de moyenne volumique ou encore les méthodes probabilistes peuvent être employées (Kaviany, 1995). Une des premières étapes de ce travail consiste à choisir deux méthodes, une pour modéliser la turbulence, l'autre pour modéliser l'influence du milieu poreux, qui sauront "dialoguer" entre elles, sans que le niveau de complexité de l'étude ne devienne rédhibitoire.

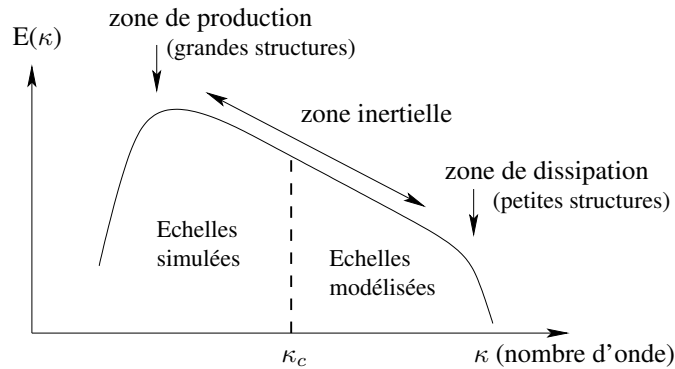


FIG. 1.2 – Spectre d’énergie cinétique turbulente et nombre d’onde de coupure κ_c de la LES.

Dans la littérature, on rencontre principalement deux familles d’approche pour modéliser la turbulence dans les milieux poreux. La première approche consiste à introduire dans des modèles de turbulence de type LES (filtre spatial) des termes supplémentaires liés au frottement généré par la présence du milieu poreux (Shaw et Schumann, 1992). Cette approche est essentiellement utilisée en météorologie pour l’étude des écoulements turbulents au-dessus de la canopée (Finnigan, 2000; Watanabe, 2004), la canopée étant alors vue comme un milieu poreux de forte porosité. La seconde approche consiste à combiner les modèles de turbulence de type RANS (filtre statistique ou temporel) avec la méthode de prise de moyenne volumique (filtre spatial sur un volume élémentaire représentatif du milieu poreux) (Antohe et Lage, 1997; Nakayama et Kuwahara, 1999; Getachew *et al.*, 2000; Pedras et De Lemos, 2000, 2001a).

La première approche a l’avantage d’assurer la capture du caractère instationnaire de l’écoulement. Cependant, l’utilisation d’un filtre unique pour modéliser à la fois la turbulence et la présence du milieu poreux complexifie l’étape de fermeture. De plus, le choix de la taille du filtre ne s’appuie pas sur les mêmes contraintes pour la turbulence et le milieu poreux. Par exemple, pour un réseau de canaux, le filtre “milieu poreux” doit inclure au moins un motif élémentaire, *i.e.* la section d’un canal. De leur côté, les modèles de LES sont basés sur l’hypothèse que l’échelle de coupure, qui est directement liée à la taille du filtre, se situe dans la zone inertielle du spectre d’énergie cinétique turbulente (voir figure 1.2). Or, si le filtre “milieu poreux” inclut la section du canal, cela implique que sa taille est supérieure aux grandes structures présentes à l’intérieur du canal. En effet, au sein du réseau de canaux, la taille des grandes structures de la turbulence est contrainte par la taille de la section d’un canal (voir figure 1.3). L’échelle de coupure associée au filtre “milieu poreux” ne se situe donc pas dans la zone inertielle du spectre de l’énergie cinétique turbulente. Ainsi, pour cette taille de filtre “milieu poreux”, les modèles classiques de turbulence LES sous-filtre n’ont pas de sens. De ce fait, cette approche n’est pas adaptée à l’étude de la turbulence au sein d’un milieu poreux homogène, loin d’une interface avec un milieu libre. En météorologie, cette approche basée sur des modèles de turbulence LES, est utilisée pour étudier l’influence de la canopée sur les écoulements turbulents qui se développent au-dessus d’elle, et non en son sein. En effet, la taille de la canopée est petite devant la couche atmosphérique, et c’est cette dernière qui est au centre des études. Dans ce cas, la taille des structures turbulentes, qui se développent dans la région libre (couche atmosphérique), est effectivement supérieure à la taille du motif élémentaire du milieu poreux, qui détermine la taille du filtre “milieu poreux” (voir figure 1.3). L’utilisation d’un unique filtre pour modéliser la turbulence et la présence du milieu poreux a donc bien un sens, même si l’étape de fermeture est complexifiée par l’utilisation de ce filtre unique.

D’un point de vue théorique, la deuxième approche, qui combine modèles de turbulence de type RANS et prise de moyenne volumique, permet de dissocier les deux étapes de fermeture (turbulence

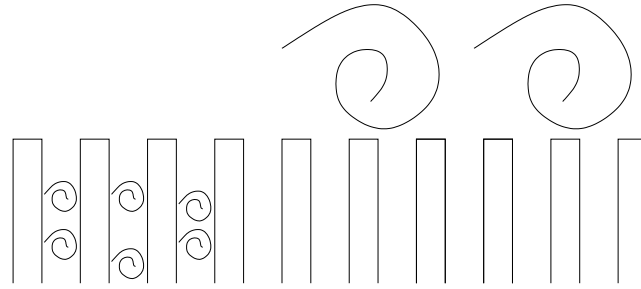


FIG. 1.3 – Représentation schématique des grandes structures de la turbulence qui se développent au sein d'un milieu poreux constitué d'un réseau de canaux (à gauche) ou dans la région libre au-dessus du milieu poreux (à droite).

/milieu poreux) par l'utilisation de deux filtres successifs. Une discussion approfondie existe en ce qui concerne l'ordre d'application des filtres (Antohe et Lage, 1997; Getachew *et al.*, 2000; Nakayama et Kuwahara, 1999; Pedras et De Lemos, 2000; Nield, 2001; Pinson, 2006). D'un point de vue strictement mathématique, puisque les moyennes statistiques et spatiales commutent, l'ordre d'application des moyennes aux équations de Navier-Stokes n'a pas d'importance. Le problème de l'ordre d'application des moyennes réside dans la modélisation des équations doublement moyennées. Initialement, certains auteurs (Antohe et Lage, 1997; Getachew *et al.*, 2000) appliquaient le filtre spatial, effectuaient une première étape de modélisation, puis appliquaient le filtre statistique. Or, lorsque le filtre statistique est appliqué à des grandeurs macroscopiques et non à des grandeurs locales instantanées, il perd son sens habituel et les modèles classiques de fermeture associés ne sont pas valides. En effet, si on prend l'exemple d'un écoulement dans un milieu poreux uniforme, isotrope et infini, la moyenne volumique de la vitesse est constante, ce qui implique que les fluctuations statistiques de la moyenne volumique de la vitesse sont nulles. L'utilisation de modèles de turbulence statistiques à ce stade de la modélisation n'a alors pas de sens, même si à l'échelle du pore l'écoulement est turbulent. Pour se prémunir face à ce type d'erreurs, Pinson (2006) conseille de faire intervenir l'étape de modélisation après l'application des deux moyennes. Néanmoins, dans ce cas, l'étape de fermeture devient très complexe car il faut modéliser dans un même temps la turbulence et la présence du milieu poreux. D'autres auteurs (Nakayama et Kuwahara, 1999; Pedras et De Lemos, 2000) suggèrent d'appliquer en premier le filtre statistique, de s'appuyer sur les fermetures classiques de type RANS pour effectuer une première étape de modélisation, puis d'appliquer le filtre spatial pour modéliser la présence du milieu poreux. Dans ce cas, les deux étapes de modélisation s'effectuent bien dans leur cadre de validité respectif. De plus, cette approche permet de s'appuyer sur les méthodes de fermeture propres à chaque phénomène, *i.e.* turbulence et milieu poreux, ce qui permet de simplifier le problème de la fermeture des équations doublement moyennées. De nombreux résultats ont déjà été établis en utilisant cette approche pour l'étude des écoulements dans des milieux poreux homogènes. Plusieurs modèles de fermeture ont été proposés, essentiellement pour des géométries constituées de motifs élémentaires cubiques (Nakayama et Kuwahara, 1999), circulaires (Pedras et De Lemos, 2001c) ou elliptiques (Pedras et De Lemos, 2001b). Ainsi, cette approche nous paraît particulièrement adaptée à notre problème, *i.e.* pour modéliser l'écoulement turbulent dans la région combustible à l'aide d'un modèle de turbulence macroscopique. Nous nous appuyons donc sur cette approche et sur les travaux disponibles dans la littérature pour proposer un modèle de turbulence macroscopique, valable dans la région poreuse homogène et adapté à la géométrie de la région combustible, qui peut être constituée de réseaux de canaux plans, de crayons ou de tubes, suivant le concept de cœur de réacteur nucléaire étudié.

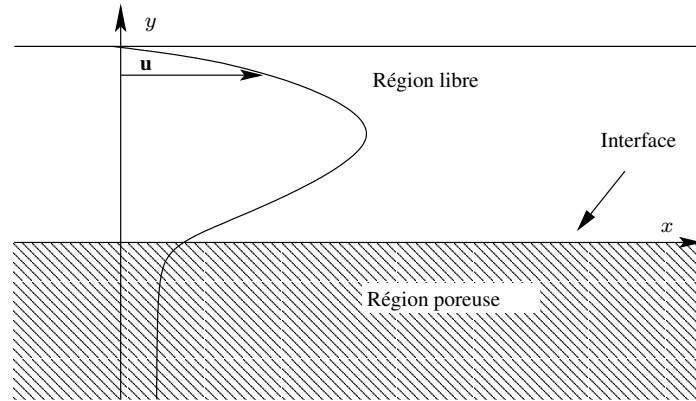


FIG. 1.4 – Description schématique de l’expérience réalisée par [Beavers et Joseph \(1967\)](#).

1.2.2 Transferts à une interface libre/poreux

L’étude des transferts hydrodynamiques à une interface libre/poreux rassemble plusieurs difficultés : une difficulté inhérente à tout travail de modélisation des interfaces, une difficulté associée à la modélisation des phénomènes de transport dans la couche limite qui se développe dans la région poreuse proche de l’interface et enfin, si le régime d’écoulement est turbulent, une difficulté supplémentaire liée à la modélisation de la turbulence. Le transfert à une interface libre/poreux est la plupart du temps étudié en s’appuyant sur un problème académique, formulé à partir de l’étude expérimentale réalisée par [Beavers et Joseph \(1967\)](#). Dans cette expérience, qui est présentée sur la figure 1.4, [Beavers et Joseph](#) étudient un écoulement laminaire dans un canal partiellement occupé par un milieu poreux. L’écoulement moyen est ainsi parallèle à l’interface libre/poreux. Pour modéliser ce problème, ils proposent de considérer une région libre et une région poreuse homogène séparées par une interface décrite comme une surface de discontinuité. Pour raccorder les modèles utilisés dans chacune des deux régions, [Beavers et Joseph](#) proposent d’utiliser une condition aux limites de glissement établie semi-empiriquement :

$$\frac{du}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (u_B - U_D) \quad (1.1)$$

où u_B est la vitesse du fluide à l’interface, encore appelée vitesse de glissement, U_D est la vitesse dans le milieu poreux loin de l’interface, K est la perméabilité du milieu poreux et α est un paramètre de glissement. Cette approche permet de rendre compte de l’influence du milieu poreux sur le débit dans la partie libre du canal à l’aide d’un unique paramètre macroscopique supplémentaire : α . Cependant, la valeur de ce paramètre n’est pas reliée aux propriétés macroscopiques du milieu poreux et plusieurs données expérimentales sont nécessaires pour déterminer sa valeur. Un autre inconvénient de cette approche réside dans la détermination de la localisation de l’interface de discontinuité qui sépare les deux milieux. En effet, l’interface est une représentation idéalisée d’une région où le milieu passe continûment de poreux à libre et la localisation exacte de l’interface n’est pas nécessairement aisée. Or, de nombreux auteurs ([Larson et Higdon, 1986, 1987](#); [Sahraoui et Kaviany, 1992](#); [Saffman, 1971](#)) ont montré que la valeur du paramètre de glissement dépend de la position de l’interface de discontinuité sans néanmoins expliciter cette dépendance.

En gardant ce niveau de description du problème, *i.e.* en considérant une région libre et une région poreuse homogène séparées par une interface de discontinuité, plusieurs auteurs ont suggéré des améliorations au modèle de [Beavers et Joseph \(1967\)](#). [Neale et Nader \(1974\)](#) proposent par exemple de décrire l’écoulement dans la région poreuse à l’aide de la loi de Darcy-Brinkman, et supposent que la vitesse et la contrainte de cisaillement sont continues à la traversée de l’interface. Cependant, si l’hypothèse de

continuité de la vitesse et de la contrainte de cisaillement est clairement valide à l'échelle microscopique (dans les pores), Nield (1991) souligne que rien n'indique qu'elle est toujours valable à l'échelle macroscopique.

Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a,b) proposent alors une méthode alternative afin de **dériver** les conditions limites à appliquer entre les deux modèles au niveau de l'interface de discontinuité. Leur idée est basée sur trois niveaux de description de l'interface et sur l'utilisation de deux méthodes de changement d'échelle successives. A l'échelle *microscopique*, aucun modèle n'est introduit. L'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes à la fois dans la région libre et au sein des pores du milieu poreux. A l'échelle que nous qualifierons de *mésoscopique*, les phases fluides et solides sont remplacées par un milieu continu équivalent. Ce niveau de description est obtenu, à partir de la description à l'échelle microscopique, en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique. A ce niveau de description continu, la zone située entre les deux régions homogènes (libre et poreuse) est une zone de transition continue, où les propriétés du milieu varient continûment. Enfin, le troisième niveau de description de l'interface que nous qualifierons de *macroscopique* est celui initialement proposé par Beavers et Joseph, et est constitué d'une région libre et d'une région poreuse homogène séparées par une interface de discontinuité. Pour passer de la description mésoscopique, à la description macroscopique de l'interface, Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a,b) utilisent une technique de changement d'échelle couramment rencontrée pour l'étude des interfaces liquide/vapeur ou liquide/solide (Edwards *et al.*, 1991). Ils montrent alors que la contrainte de cisaillement est discontinue au niveau de l'interface et ils modélisent cette discontinuité à l'aide d'une condition de saut qui fait intervenir un unique paramètre de saut β :

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} - \frac{1}{\phi_p} \frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} = -\frac{\beta}{\sqrt{K}} \langle u \rangle \Big|_{y=0} \quad (1.2)$$

où ϕ_p est la porosité du milieu poreux homogène et $\langle u \rangle$ est la moyenne volumique de la vitesse. Malheureusement, comme pour la condition au limite de Beavers et Joseph, la valeur de ce paramètre n'est pas reliée aux propriétés macroscopiques du milieu poreux et elle est extrêmement sensible à la localisation de l'interface de discontinuité (Breugem *et al.*, 2004). Néanmoins, cette idée de dériver les conditions limites à appliquer entre les deux modèles au niveau de l'interface, en partant de ce qui est connu à l'échelle microscopique, et en utilisant des méthodes de changement d'échelle, est extrêmement attrayante, en particulier de par son caractère générique.

Notre objectif final est de proposer des conditions de raccord entre le modèle de turbulence macroscopique de la région combustible et le modèle de turbulence de la région libre, à l'échelle de description macroscopique de l'interface. En effet, c'est ce niveau de description de l'interface qui semble le plus approprié dans un contexte industriel. Pour dériver ces conditions de raccord, nous souhaitons nous appuyer sur l'idée de Ochoa-Tapia et Whitaker qui est basée sur un changement d'échelle en deux étapes, en partant de ce qui est connu à l'échelle microscopique. Cependant, les méthodes de changement d'échelle utilisées par Ochoa-Tapia et Whitaker souffrent de limitations puisque les questions de la valeur du paramètre de saut et de la localisation de l'interface restent des questions ouvertes. Pour répondre à ces deux questions, qui sont fondamentales en vue d'une utilisation pratique des conditions de saut, nous proposons d'utiliser une nouvelle méthode de changement d'échelle, la méthode des développements asymptotiques raccordés, pour étudier le passage entre les descriptions mésoscopiques et macroscopiques de l'interface. Du fait de la complexité de ce problème, nous l'étudierons tout d'abord pour le cas simplifié des écoulements laminaires. L'approche étant générique, nous l'appliquerons ensuite à l'étude des écoulements turbulents à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux. A notre connaissance, cette idée d'utiliser des méthodes de changement d'échelle afin de dériver les conditions limites à appliquer à l'interface de discontinuité entre un milieu libre et un milieu poreux, n'a encore jamais été utilisée pour l'étude des écoulements turbulents.

Nous précisons ici que notre étude se limite à la question de la modélisation de l'hydrodynamique de l'écoulement. Nous n'abordons pas dans ce mémoire la question du transport et des transferts de chaleur, bien que cette question soit fondamentale pour l'étude d'un cœur de réacteur nucléaire. Nous avons fait ce choix car la modélisation de l'hydrodynamique soulève déjà de nombreuses questions. De plus, la modélisation de l'hydrodynamique est un pré-requis pour l'étude des phénomènes de transport, quels qu'ils soient. Enfin, l'approche proposée dans ce mémoire est suffisamment générique pour envisager sa transposition à l'étude des transferts thermiques.

1.3 Plan du mémoire

Dans le chapitre 2, nous présentons les différentes méthodes de changement d'échelle qui seront utilisées dans ce mémoire. La méthode de prise de moyenne volumique permet, en partant d'une description à l'échelle microscopique, de modéliser les écoulements dans les milieux poreux par une approche continue. Puis la notion d'interface libre/poreux, ainsi que ses différents niveaux de description (microscopique, mésoscopique et macroscopique) sont introduits. Nous insistons en particulier sur les méthodes de passage d'un niveau de description à un autre.

Dans le chapitre 3, l'objectif est de proposer un modèle de turbulence macroscopique pour modéliser l'écoulement dans la région combustible, qui est alors considérée comme une région poreuse homogène. Pour cela, nous nous appuyons sur une approche de modélisation qui combine un modèle de type RANS pour décrire la turbulence, et la méthode de prise de moyenne volumique pour décrire l'influence du milieu poreux sur l'écoulement. Les résultats de la littérature sont étendus à la géométrie de la région combustible, qui peut être constituée de réseaux de canaux plans, de crayons ou de tubes, suivant le concept de cœur de réacteur nucléaire étudié. Plus précisément, il s'agit de proposer des relations de fermeture pour les équations de transport des quantités turbulentes moyennées dans la zone poreuse homogène, pour ces géométries particulières.

Les problèmes de fermeture dans les régions homogènes étant résolus, nous nous concentrerons dans la suite de ce mémoire à la question de la modélisation des interfaces libre/poreux pour des écoulements *laminaires* (Chap. 4, 5 et 6), puis pour des écoulements *turbulents* (Chap. 7 et 8).

Dans le chapitre 4, nous étudions l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux. L'idée est d'utiliser une nouvelle méthode de changement d'échelle, la méthode des développements asymptotiques raccordés, pour étudier le passage de la description mésoscopique à la description macroscopique de l'interface. Cette méthode originale permet de déduire la forme des conditions de saut à appliquer à l'interface de discontinuité et surtout, elle permet de relier la valeur des coefficients de saut à des paramètres interfaciaux. Ce résultat est fondamental en vue d'une utilisation pratique de ces conditions de saut. Cette méthode est ensuite approfondie dans le chapitre 5 afin d'obtenir une relation explicite entre la position de l'interface de discontinuité, les variations de porosité et de perméabilité dans la zone de transition et la valeur des coefficients de saut.

L'objectif du chapitre 6 est de généraliser les résultats obtenus au cas d'un écoulement tridimensionnel. Les résultats sont d'abord étendus au cas d'un écoulement mono-dimensionnel perpendiculaire à l'interface, puis au cas général d'un écoulement tridimensionnel et d'une interface quelconque. Mis à part un terme en laplacien de vitesse qui apparaît dans la condition de saut sur la pression, les relations de saut obtenues pour les écoulements mono-dimensionnels sont également valables localement dans le cas général tridimensionnel. De plus, les relations de saut obtenues sont indépendantes de la courbure de l'interface. Ainsi, l'interface peut être approximée localement par son plan tangent. Nous sommes alors en mesure d'illustrer notre approche de modélisation en étudiant un écoulement laminaire dans un modèle simplifié de cœur de réacteur.

Dans le chapitre 7, nous revenons à l'étude d'un écoulement au-dessus d'un milieu poreux, mais dans le cas turbulent cette fois. Nous étudions les conditions de saut à appliquer à l'échelle de description macroscopique en utilisant une autre méthode de changement d'échelle, l'analyse générique des processus interfaciaux. Cette méthode permet d'obtenir relativement aisément la forme des conditions de saut à appliquer à l'interface, mais les conditions de saut obtenues ne sont pas fermées. En nous appuyant sur les résultats obtenus dans le cas laminaire, nous proposons alors des relations de fermeture pour une position particulière de l'interface et pour un milieu poreux particulier, constitué de petits cubes.

L'écoulement moyen au sein d'un cœur de réacteur étant principalement perpendiculaire au niveau des interfaces plénum-inférieur/région combustible et région combustible/plénum supérieur, l'objectif du chapitre 8 est d'étudier les conditions de saut lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'interface. Pour effectuer cette étude, nous utilisons, comme dans le chapitre 7, l'analyse générique des processus interfaciaux. Les conditions de saut obtenues n'étant pas fermées, nous étudions les relations de fermeture pour un milieu poreux particulier, constitué de canaux plans, et pour une position particulière de l'interface.

Finalement, la combinaison des résultats obtenus pour la modélisation de la turbulence dans la région poreuse (Chap. 3) et sur les conditions de saut pour des écoulements turbulents parallèles (Chap. 7) et perpendiculaires (Chap. 8) à l'interface, permet d'étudier un écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur de réacteur en utilisant une approche de type milieu poreux.

Chapitre 2

Les méthodes de changement d'échelle

Dans ce chapitre, nous présentons une introduction à l'étude des écoulements dans les milieux poreux. Nous insistons plus particulièrement sur les méthodes de changement d'échelles qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire, à savoir la méthode de prise de moyenne volumique et les méthodes de changement d'échelles associées à l'étude de l'interface libre/poreux.

2.1 Introduction à l'étude des écoulements dans les milieux poreux

Henry Darcy est l'un des premiers scientifiques à avoir mené une étude approfondie des écoulements dans les milieux poreux. Dans son rapport sur *les fontaines publiques de la ville de Dijon* (Darcy, 1856), il aborde en particulier la question relative à la clarification de l'eau par filtration. Afin d'analyser cette technique, il réalise des expériences de filtration d'eau à travers une colonne remplie de sable (voir figure 2.1). A partir de ces expériences, il propose la relation empirique suivante pour estimer le débit Q à travers la colonne :

$$Q = kA \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho g L} \right) \quad (2.1)$$

où A est la surface de la section de la colonne, ρ la masse volumique du fluide, g l'accélération gravitationnelle, L l'épaisseur de la couche de sable, p_1 et p_2 les pressions mesurées en haut et en bas de la couche de sable à l'aide de manomètres, et k la *conductivité hydraulique* mesurée en $m.s^{-1}$. Par la suite, il a été montré que la conductivité hydraulique dépendait de la viscosité cinématique du fluide ν . Afin de dissocier la propriété associée au milieu poreux, des propriétés du fluide qui le traverse, la notion de *perméabilité* a été introduite. La perméabilité, notée K ($k = gK/\mu$) et mesurée en m^2 , est indépendante des propriétés du fluide et ne dépend que de la structure de la matrice solide. La loi de Darcy est en général exprimée en utilisant cette notion de perméabilité :

$$- \frac{dp}{dx} = \mu \frac{U_D}{K} \quad (2.2)$$

où U_D est la vitesse de Darcy et correspond au débit de fluide par unité de surface, et μ est la viscosité dynamique du fluide. Ainsi, la résistance à l'écoulement est modélisée par le terme de droite de l'équation (2.2). Ce terme rend compte, à l'échelle macroscopique, des forces visqueuses qui se développent au sein de l'écoulement à l'échelle microscopique. A travers cette étude, Darcy a introduit l'idée de ne pas considérer le massif de sable comme un milieu constitué d'une multitude de grains, mais de le regarder de plus loin comme un matériau homogène doté de propriétés macroscopiques comme la perméabilité.

La loi de Darcy est valide uniquement pour des écoulements à très faible vitesse, dans des milieux poreux uniformes et isotropes. Les successeurs de Darcy ont donc été amenés à ajouter de nouveaux termes à cette loi, afin de prendre en compte d'autres phénomènes physiques observés. Lage (1998)

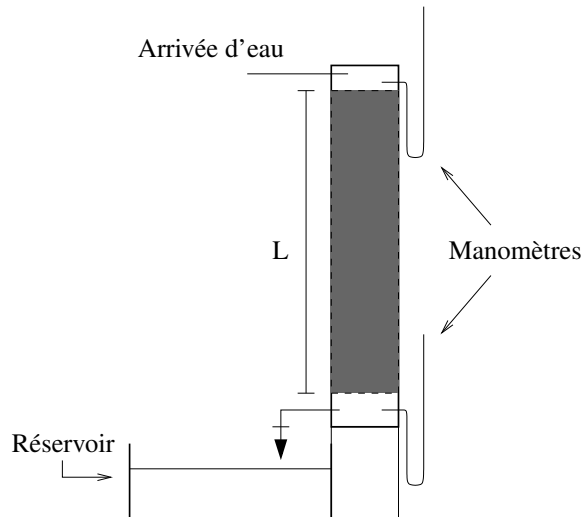


FIG. 2.1 – Schéma du dispositif expérimental utilisé par Darcy.

propose une synthèse très intéressante de l'histoire de l'établissement et de la généralisation de la loi de Darcy.

La loi de Darcy n'étant pas capable de rendre compte d'expériences à plus haute vitesse débitante, Forchheimer (1901) propose d'ajouter un terme quadratique en vitesse à l'équation (2.2) :

$$-\frac{dp}{dx} = \mu \frac{U_D}{K} + C\rho U_D^2 \quad (2.3)$$

où C est un coefficient qui dépend de la géométrie et de la porosité du milieu poreux considéré. La résistance à l'écoulement, modélisée par les deux termes de droite de l'équation (2.3), rend compte à l'échelle macroscopique, à la fois des forces visqueuse (linéaire en vitesse) et inertielle (quadratique en vitesse) qui se développent au sein de l'écoulement à l'échelle microscopique. Si le terme inertiel est négligeable à faible vitesse, il domine à grande vitesse, ce qui se traduit par la présence du terme quadratique en vitesse dans le modèle à l'échelle macroscopique. Une synthèse des différentes corrélations utilisées pour modéliser le coefficient C peut être trouvée dans Kaviany (1995).

En 1948, Brinkman étudie les limites de l'équation de Darcy dans le cas de très fortes perméabilités (Brinkman, 1948). Il prend l'exemple d'un fluide chargé de particules fixes, de très petites tailles par rapport à la distance qui les séparent. Pour rendre compte de la capacité de l'écoulement à transmettre une force par le biais de la contrainte visqueuse et en effectuant un parallèle avec l'équation de Stokes, Brinkman ajoute un terme en laplacien à l'équation (2.2) :

$$-\frac{dp}{dx} = \mu \frac{U_D}{K} - \mu_{\text{eff}} \frac{d^2 U_D}{dy^2} \quad (2.4)$$

où μ_{eff} est la viscosité effective du fluide. L'introduction d'une grandeur effective, μ_{eff} , associée au terme en laplacien de l'équation (2.4), est compréhensible, dans le sens où ce terme en laplacien rend compte à l'échelle macroscopique, de l'effet intégré de la contrainte visqueuse locale. La viscosité effective dépend a priori à la fois de la viscosité du fluide et de la géométrie du milieu poreux.

Parallèlement au développement de ces lois semi-empiriques, une réflexion s'est amorcée sur la notion de changement d'échelle. La description de l'écoulement à l'échelle du pore dans une colonne de sable n'étant ni envisageable ni souhaitable, l'objectif du changement d'échelle est de représenter le milieu poreux par un *milieu continu équivalent* à l'échelle macroscopique. Ce milieu continu équivalent

est alors doté de propriétés de transport effectives qui rendent compte à l'échelle macroscopique, de la physique à l'échelle du pore. Un des objectifs des méthodes de changement d'échelle est de montrer que l'on peut dériver les lois semi-empiriques utilisées à l'échelle macroscopique, en se basant sur les équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique. Par exemple, Whitaker (1986; 1996) a dérivé à partir des équations de Navier-Stokes, l'équation de Darcy (2.2), puis l'équation de Darcy-Forchheimer (2.3) en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique. D'autres auteurs, comme Vafai et Tien (1981), utilisent ces méthodes de changement d'échelle pour essayer de généraliser au maximum la loi de Darcy. En se basant sur une méthode de prise de moyenne semi-empirique, Vafai et Tien (1981) dérivent la loi vectorielle suivante :

$$\frac{\rho}{\phi} \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\nabla \langle p \rangle_f + \frac{\mu}{\phi} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle - \mu \frac{\langle \mathbf{u} \rangle}{K} - C \rho |\langle \mathbf{u} \rangle| \langle \mathbf{u} \rangle \quad (2.5)$$

où ϕ est la porosité du milieu poreux et $\langle \mathbf{u} \rangle$ est la moyenne volumique de la vitesse. On reconnaît dans le membre de droite de cette équation, le terme de Darcy, le terme de Forchheimer ainsi que le terme de Brinkman où la viscosité effective est modélisée par $\mu_{\text{eff}} = \mu/\phi$. En revanche, un nouveau terme, qui rendrait compte des forces inertielles et instationnaires à l'échelle macroscopique, apparaît dans le membre de gauche de cette équation. Un autre objectif des méthodes de changement d'échelle est l'évaluation des paramètres macroscopiques tels que la perméabilité, le coefficient de Forchheimer ou la viscosité effective. En effet, l'évaluation de ces paramètres est primordiale en vue de l'utilisation pratique des modèles macroscopiques. Or les mesures expérimentales ne permettent pas toujours d'avoir accès aux valeurs de ces paramètres. Les méthodes de changement d'échelle se divisent en trois grandes familles que nous allons présenter brièvement.

Les méthodes **probabilistes** ou **stochastiques** reposent sur l'idée suivante : en raison de son irrégularité et de l'impossibilité pratique de connaître en détail sa géométrie fine, le milieu poreux est considéré comme aléatoire. Plus précisément, sa porosité ponctuelle $\omega(x)$, égale à 0 dans les grains et à 1 dans les pores, est considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire ergodique et stationnaire. Toute les grandeurs définies à l'échelle du pore sont alors considérées comme des variables aléatoires. Le passage au niveau de description macroscopique du problème s'effectue par des opérations linéaires et les propriétés macroscopiques du milieu se déduisent de la loi de $\omega(x)$ par le biais d'espérances mathématiques. En utilisant cette méthode, Matheron (1967) rend compte de la forme de la loi de Darcy. Néanmoins, le calcul de la perméabilité effective à partir de la seule loi spatiale de $\omega(x)$ reste inaccessible, excepté pour des milieux poreux simplifiés comme un milieu constitué de réseaux de canaux cylindriques. Une autre limite de cette méthode est la difficulté rencontrée pour spécifier la loi de probabilité vérifiée par $\omega(x)$ pour un milieu poreux réel donné. On notera néanmoins que ces méthodes sont très utilisées pour l'étude des milieux poreux naturels à l'échelle de l'aquifère. Plus précisément, elles sont utilisées pour effectuer le changement d'échelle à un niveau supérieur, entre la perméabilité locale du milieu poreux et la perméabilité effective à l'échelle de l'aquifère (Renard et de Marsily, 1997).

Cette méthode est peu adaptée à notre problème. En effet, à la différence des milieux poreux réels, la géométrie de la structure combustible, qui sera modélisée par une approche de type milieu poreux, est connue de façon déterministe.

La méthode d'**homogénéisation** est basée sur l'introduction de deux échelles de longueur : une échelle macroscopique L associée à la taille du système étudié, et une échelle microscopique l associée à la distance entre les pores. Étant donné un milieu poreux périodique, une solution périodique des équations gouvernant le problème est recherchée. Le comportement asymptotique de cette solution est ensuite étudié lorsque le rapport l/L tend vers zéro (Sanchez-Palencia, 1974; Mikelić, 2000). Cette méthode mathématique extrêmement rigoureuse permet par exemple de démontrer la convergence de l'homogénéisation des équations de Stokes vers une loi de Darcy (Allaire, 1989). Cependant, elle est difficile d'accès et paraît au premier abord très éloignée de la physique des phénomènes entrant en jeu.

D'ailleurs, cette méthode met surtout l'accent sur la régularité et le caractère bien posé des solutions obtenues et s'intéresse peu à l'évaluation des paramètres macroscopiques des modèles.

La **méthode de prise de moyenne volumique** consiste à intégrer sur un *volume élémentaire représentatif* (VER), les équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique afin de dériver un système d'équations à l'échelle macroscopique. Ce processus permet d'obtenir les équations d'évolution des grandeurs macroscopiques. Cependant, ce processus fait également apparaître des termes qui sont fonction des quantités microscopiques. Ces termes doivent être modélisés afin de fermer le problème à l'échelle macroscopique. La difficulté principale de cette approche réside dans cette étape de modélisation. Cette méthode peut sembler moins rigoureuse que la méthode d'homogénéisation car l'étape de modélisation repose généralement sur des simplifications a posteriori basées sur des analyses d'ordre de grandeurs. Cependant, cette méthode a l'avantage d'être relativement facile d'accès, de rester proche des phénomènes physiques étudiés et de permettre une évaluation assez simple des paramètres macroscopiques des modèles. De plus, comme nous l'avons souligné dans l'introduction, l'utilisation de cette méthode permet de combiner la modélisation de la turbulence et la modélisation de l'écoulement au sein d'un milieu poreux par l'utilisation de deux filtres successifs. Ainsi, nous nous appuyerons sur cette méthode de changement d'échelle et nous allons la présenter de façon plus détaillée dans la section suivante.

2.2 La méthode de prise de moyenne volumique

2.2.1 Définitions et propriétés des opérateurs de moyennes volumiques

La méthode de prise de moyenne volumique est basée sur la définition d'un opérateur de moyenne volumique qui, appliqué aux équations de transport gouvernant le phénomène à l'échelle microscopique, permet de dériver les équations de transport de ce même phénomène à l'échelle macroscopique. Cet opérateur de moyenne est défini sur un volume de prise de moyenne appelé *volume élémentaire représentatif*. Le choix de la taille du volume élémentaire représentatif est important. En effet, cette taille doit être suffisamment grande, afin que les quantités filtrées aient un sens et suffisamment petite afin de préserver le plus d'information possible. La figure 2.2 présente les volumes élémentaires représentatifs associés à des milieux poreux ordonnés et désordonnés. Quant à la figure 2.3, elle donne un exemple de variation possible de la porosité en fonction de la taille du VER.

Lors de l'étude des écoulements multi-phasiques, deux opérateurs de moyennes volumiques sont couramment introduits (Whitaker, 1986). Le premier opérateur est la *moyenne volumique de phase*, appelée également *moyenne superficielle*. Pour toute grandeur ψ , elle est définie par :

$$\langle \psi \rangle (\mathbf{x}) \doteq \int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \chi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.6)$$

où \mathbf{x} est la position du centre du VER, χ est la fonction indicatrice de la phase fluide et m est une fonction de filtrage qui vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (2.7)$$

Différents filtres peuvent être choisis. En général, le filtre choisi est à support compact, ce qui permet de faire un lien direct entre le support du filtre et le volume élémentaire représentatif du milieu poreux. On notera que le filtre choisi peut ne pas être à support compact (*i.e.* filtre gaussien), mais cela entraîne alors des difficultés d'interprétation de la notion de VER. Le filtre le plus utilisé reste celui de la moyenne sur le volume élémentaire :

$$m_V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1/V & \text{si } \mathbf{r} \text{ est dans le VER} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

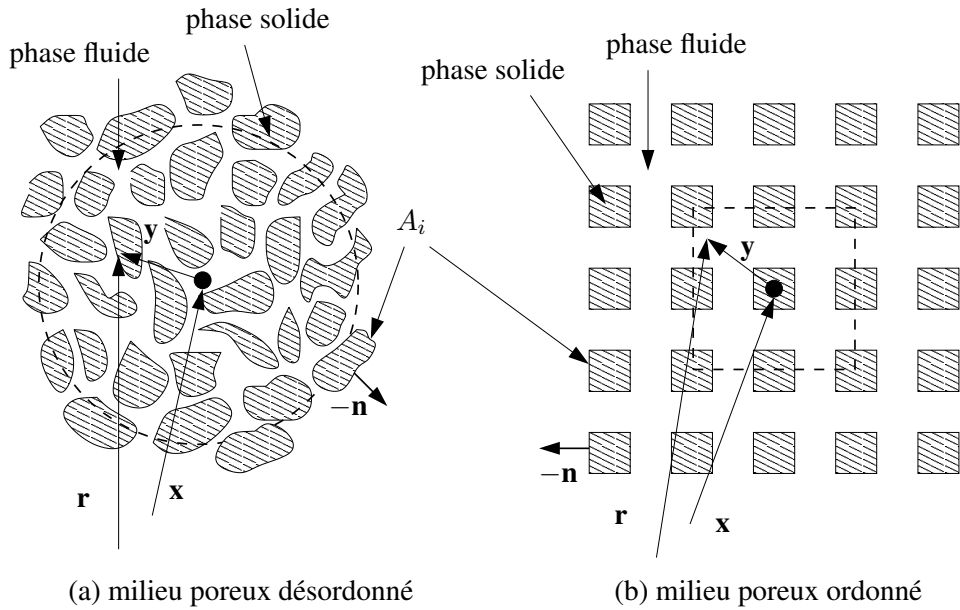


FIG. 2.2 – Volumes élémentaires représentatifs associés à des milieux poreux ordonnés et désordonnés.

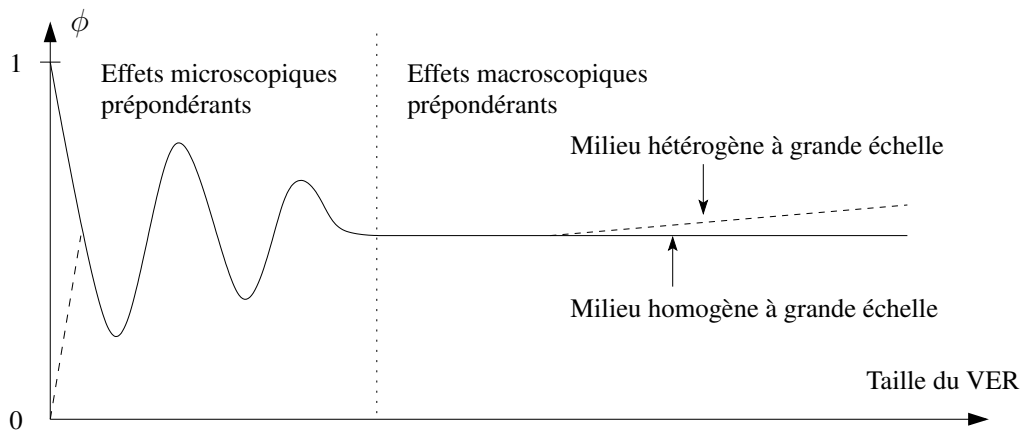


FIG. 2.3 – Exemple de variation de la valeur de la porosité en fonction de la taille du VER.

où V est le volume du VER. La porosité ϕ est une fonction issue de l'opération de filtrage de la fonction caractéristique de la phase fluide. D'après la définition (2.6), elle vérifie :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \chi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.9)$$

Et on remarque que :

$$\phi = \langle 1 \rangle \quad (2.10)$$

Puisque $\langle \psi \rangle$ n'est pas égal à ψ lorsque ψ est une constante, un deuxième opérateur, la *moyenne volumique intrinsèque*, est introduit. Cette moyenne volumique intrinsèque, qui est plus représentative de la phase fluide, est définie par :

$$\langle \psi \rangle_f \triangleq \frac{\langle \psi \rangle}{\phi} \quad (2.11)$$

On notera que par simple jeu d'écriture, on peut réexprimer l'équation (2.6) à l'aide d'un produit de convolution.

La méthode de prise de moyenne consiste à appliquer l'opérateur de moyenne volumique de phase aux équations de transport décrivant le système à l'échelle microscopique. Puisque ces équations de transport font en général intervenir des dérivées spatiales et temporelles, il faut spécifier les règles de permutation entre la moyenne volumique de phase et les opérateurs de dérivation. Ces règles sont présentées dans de nombreux travaux (Slattery, 1972; Whitaker, 1969). Pour le cas d'un solide fixe, qui est le cas que nous considérons dans cette étude, elles s'écrivent :

$$\langle \nabla \psi \rangle = \nabla \langle \psi \rangle + \int_{A_i} m(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{r}) \mathbf{n} d\mathbf{r} \quad (2.12)$$

$$\langle \nabla \cdot \psi \rangle = \nabla \cdot \langle \psi \rangle + \int_{A_i} m(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{r} \quad (2.13)$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi \rangle \quad (2.14)$$

où $\mathbf{y} = \mathbf{r} - \mathbf{x}$ est le vecteur position relatif, A_i est l'interface fluide/solide et \mathbf{n} la normale à cette interface dirigée vers l'extérieur de la phase fluide, dans la phase solide (voir la figure 2.2). Pour que les relations (2.12) et (2.13) soient bien définies, il faut que la fonction ψ soit dérivable. En effet, l'opérateur de dérivation utilisé dans les expressions (2.12) et (2.13) est à prendre au sens des fonctions et non des distributions. Or en général, les grandeurs physiques ne sont pas continues à l'interface fluide/solide. Cependant, comme la moyenne volumique de ψ caractérise la grandeur ψ uniquement dans la phase fluide, on peut restreindre la fonction ψ définie dans l'ensemble du domaine, à la fonction définie uniquement dans la phase fluide, puis prolonger la fonction obtenue à la phase solide de telle façon que la nouvelle fonction ψ définie dans l'ensemble du domaine soit dérivable. Ainsi, lorsque la grandeur étudiée n'est pas continue à la traversée de l'interface, il est sous-entendu que l'on effectue ce prolongement avant d'utiliser les théorèmes de transport (2.12) et (2.13).

En substituant $\psi = 1$ dans l'expression (2.12), on obtient la relation suivante :

$$\nabla \phi = - \int_{A_i} m \mathbf{n} dS \quad (2.15)$$

Cette relation sera utilisée par la suite pour simplifier un certain nombre de calculs.

Pour finir sur les principales notations et définitions, toute grandeur ψ peut s'écrire comme la somme de sa moyenne volumique intrinsèque $\langle \psi \rangle_f$ et de sa déviation $\tilde{\psi}$ autour de sa valeur moyenne :

$$\psi = \langle \psi \rangle_f + \tilde{\psi} \quad (2.16)$$

Cette décomposition est communément appelée *décomposition de Gray* (1975). Si ψ est constante, alors $\tilde{\psi} = 0$. C'est cette propriété qui conduit à baser cette décomposition spatiale sur $\langle \psi \rangle_f$ et non sur $\langle \psi \rangle$. Comme le souligne Whitaker (1999, chap1), cette décomposition représente une décomposition des échelles de longueur. En effet, $\langle \psi \rangle_f$ varie de façon significative sur des échelles de longueur supérieures à la taille du VER, tandis que la longueur caractéristique des variations de $\tilde{\psi}$ est l'échelle du pore.

2.2.2 Illustration sur un exemple simple

Nous avons choisi de présenter les différentes étapes de la méthode de prise de moyenne volumique sur l'exemple simple de la diffusion d'un scalaire passif dans un fluide au repos, au sein d'un milieu poreux homogène. En effet, une présentation de la méthode sans équations serait certainement incompréhensible pour le lecteur. Et une présentation sur un système d'équations général serait beaucoup trop compliquée. C'est pourquoi nous avons choisi cet exemple, qui bien que simple, permet de mettre en

2.2 La méthode de prise de moyenne volumique

lumière les différentes étapes liées à l'application de cette méthode et les principales difficultés de modélisation associées.

A l'échelle microscopique, le problème s'écrit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c) \quad (2.17)$$

où c est la concentration du scalaire à l'échelle du pore, et D est le coefficient de diffusion, supposé constant. La paroi est supposée imperméable au scalaire passif :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla c = 0, \quad \text{sur } A_i \quad (2.18)$$

En appliquant l'opérateur de moyenne volumique de phase à l'équation (2.17), et en utilisant les théorèmes de transport généraux (2.14) et (2.13), il vient :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot \langle D \nabla c \rangle + \int_{A_i} m D \nabla c \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.19)$$

En utilisant de nouveau le théorème (2.13) ainsi que la condition de non-pénétration du scalaire passif dans la paroi (2.18) et le fait que D est constant, l'équation (2.19) devient :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = D \nabla \cdot \left(\nabla \langle c \rangle + \int_{A_i} m c \mathbf{n} dS \right) \quad (2.20)$$

Pour fermer le problème et le résoudre à l'échelle macroscopique, il faut maintenant exprimer l'intégrale de surface de l'équation (2.20), qui fait intervenir la concentration à l'échelle microscopique c , en fonction de la concentration à l'échelle macroscopique $\langle c \rangle$. Pour cela, on utilise la décomposition de Gray (2.16) et on réécrit cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = D \nabla \cdot \left(\nabla \langle c \rangle + \int_{A_i} m \langle c \rangle_f \mathbf{n} dS + \int_{A_i} m \tilde{c} \mathbf{n} dS \right) \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) est qualifiée de *non-locale* car des quantités moyennées sont présentes dans la première intégrale de surface. Cela signifie que l'évaluation de cette intégrale de surface dépend a priori de la structure de l'écoulement à l'extérieur du VER *via* l'évaluation de la quantité moyennée $\langle c \rangle_f$. Heureusement, cette intégrale peut être simplifiée. Intuitivement, $\langle c \rangle_f$, dont l'échelle caractéristique de variation est supérieure à la taille du VER, est quasi constante sur le domaine d'intégration considéré. Carbonell et Whitaker (1984) ont montré que la relation suivante était effectivement vérifiée :

$$\int_{A_i} m \langle c \rangle_f \mathbf{n} dS \approx \langle c \rangle_f \int_{A_i} m \mathbf{n} dS \quad (2.22)$$

à condition que la taille du VER soit petite devant l'échelle de variation de $\langle c \rangle_f$. En général, cette condition est vérifiée. On notera néanmoins que cette condition n'est pas nécessairement valide dans la région de transition entre un milieu libre et un milieu poreux. En effet, dans cette région, les quantités macroscopiques subissent de fortes variations sur de courtes distances.

En utilisant la relation (2.22), ainsi que les relations (2.15) et (2.11), la forme *locale* de l'équation (2.21) s'écrit :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = \phi \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial t} = D \nabla \cdot \left(\phi \nabla \langle c \rangle_f + \int_{A_i} m \tilde{c} \mathbf{n} dS \right) \quad (2.23)$$

Cette équation est qualifiée de *locale* car les intégrales de surface ne font plus intervenir de quantités moyennées. Cependant, le problème n'est toujours pas fermé à l'échelle macroscopique. On doit toujours exprimer une intégrale de surface faisant intervenir des contributions microscopiques, en fonction de la concentration macroscopique $\langle c \rangle_f$. A ce stade, on distingue deux approches pour réaliser la fermeture de l'équation (2.23) : la méthodologie de Whitaker et l'homogénéisation numérique.

Méthodologie de Whitaker

Cette méthode repose sur l'étude de l'équation d'évolution de la déviation \tilde{c} sur un volume élémentaire représentatif du milieu poreux, afin de déterminer l'expression de la déviation en fonction des grandeurs macroscopiques. Cette expression est alors introduite dans l'intégrale de surface afin d'obtenir la forme fermée de l'équation (2.23). Cette méthode est brièvement présentée ici, même si nous ne l'utiliserons pas dans la suite de ce mémoire, afin de mettre en lumière les hypothèses sur lesquelles elle repose.

L'équation d'évolution de la déviation est obtenue en appliquant la décomposition de Gray à l'équation (2.17) et en lui soustrayant l'équation (2.23) divisée par la porosité, qui est ici supposée constante :

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} = D \nabla \cdot \nabla \tilde{c} - \frac{1}{\phi} D \nabla \cdot \left(\int_{A_i} m \tilde{c} \mathbf{n} dS \right) \quad (2.24)$$

La condition de non-pénétration du scalaire passif (2.18) devient :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{c} = - \mathbf{n} \cdot \nabla \langle c \rangle_f, \quad \text{sur } A_i \quad (2.25)$$

La résolution du système (2.24)-(2.25) ne présente aucun intérêt car ce système est équivalent au problème microscopique. L'approche de Whitaker consiste alors à réaliser une analyse des ordres de grandeurs des différents termes de l'équation (2.24) afin de la simplifier. La simplification la plus courante consiste à faire l'hypothèse que le problème en déviation est quasi-stationnaire. Ainsi, le premier terme de l'équation (2.24) est négligé. En outre, une analyse d'ordre de grandeur montre que l'on peut négliger le terme d'intégrale de surface devant le terme en laplacien s'il y a séparation des échelles, *i.e.* si l'échelle caractéristique des variations des grandeurs microscopiques est petite devant l'échelle caractéristique des variations des grandeurs moyennées. L'équation (2.24) se réduit alors à :

$$D \nabla \cdot \nabla \tilde{c} = 0 \quad (2.26)$$

A ce stade de l'étude du problème de fermeture, la méthodologie de Whitaker s'appuie sur l'étude des termes *sources* (ou encore termes *non-homogènes*) du problème en déviation. Ils sont caractérisés par le fait qu'ils ne font pas intervenir la déviation, et que s'ils étaient nuls, alors la solution du problème en déviation serait nulle ($\tilde{c} = 0$). Pour le problème de diffusion du scalaire passif, le seul terme source est le terme $\nabla \langle c \rangle_f$ présent dans l'équation (2.25). Le problème en déviation étant linéaire, Whitaker propose alors de chercher la solution du problème en déviation en fonction de ces termes sources :

$$\tilde{c} = \mathbf{b} \cdot \nabla \langle c \rangle_f + \xi \quad (2.27)$$

où \mathbf{b} est un vecteur et ξ est un scalaire. Ces coefficients sont appelés *variables de fermeture*. Le problème en déviation est alors transformé en plusieurs *problèmes de fermeture* écrits sur les variables de fermeture. Pour cela, la relation (2.27) est injectée dans le problème en déviation simplifié (2.26). Sur la base de l'hypothèse de séparation des échelles de longueurs, les termes sources ($\nabla \langle c \rangle_f$ pour notre problème) sont alors supposés indépendants et constants sur le volume élémentaire représentatif. De plus, pour simplifier les calculs, on utilise en général le fait que la contribution de ξ dans l'équation macroscopique est négligeable, voir nulle pour des milieux poreux spatialement périodiques (Carbonell et Whitaker, 1984). Le problème de fermeture sur \mathbf{b} s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{b} = 0 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{b} = -\mathbf{n}, \quad \text{sur } A_i \quad (2.29)$$

Finalement, en injectant la relation de fermeture (2.27), dans laquelle on néglige ξ , dans l'équation (2.23), on obtient la forme fermée de l'équation macroscopique :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_{\text{eff}} \nabla \langle c \rangle_f \right) \quad (2.30)$$

où \mathbf{D}_{eff} est le tenseur de diffusion effective, définie par :

$$\mathbf{D}_{\text{eff}} = D \left(\phi \mathbf{I} + \int_{A_i} m \mathbf{n} \mathbf{b} dS \right) \quad (2.31)$$

La valeur du tenseur de diffusion effective dépend de la valeur de \mathbf{b} . Cette dernière est déterminée numériquement en résolvant le problème de fermeture (2.28)-(2.29) sur un volume élémentaire représentatif du milieu poreux étudié, en utilisant des conditions aux limites de périodicité. Nous soulignons que lorsque le problème étudié est plus complexe, plusieurs problèmes de fermeture, toujours relativement simples, doivent être résolus. D'une certaine façon, cette méthodologie permet de décomposer l'étude d'un problème complexe en l'étude de plusieurs petits problèmes simplifiés que sont les problèmes de fermeture.

Pour résumer, la méthodologie de Whitaker permet de faire apparaître naturellement le tenseur de diffusion effective dans l'équation de diffusion macroscopique. Elle permet également de calculer les relations de fermeture et d'obtenir ainsi un problème complètement fermé. Cependant, elle repose sur une hypothèse de linéarité de la solution en déviation vis-à-vis des termes sources du problème en déviation (cf. Eq. (2.27)). Or cette hypothèse est très forte et elle peut-être discutable, en particulier pour des problèmes non-linéaires. Néanmoins, nous retiendrons que cette méthode permet (i) de dériver la forme des équations à grande échelle, dans un cadre rigoureux, où les hypothèses utilisées sont explicitées, (ii) de déterminer les propriétés effectives du problème étudié par la résolution des problèmes de fermeture.

Homogénéisation numérique

Il existe une autre façon d'aborder le problème de la fermeture de l'équation (2.23), que nous qualifierons d'homogénéisation numérique. Cette approche repose sur l'hypothèse de base que l'on connaît *a priori* la forme de l'équation à l'échelle macroscopique :

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_{\text{eff}} \nabla \langle c \rangle_f \right) \quad (2.32)$$

La méthode consiste alors à résoudre numériquement les équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique sur une cellule élémentaire représentative du milieu étudié, en utilisant des conditions aux limites de périodicité et en faisant l'hypothèse que le problème est stationnaire. En effet, les propriétés effectives du milieux poreux sont *a priori* indépendantes du temps. On détermine ainsi une solution stationnaire à l'échelle microscopique c . A partir de cette solution, le champ macroscopique correspondant, $\langle c \rangle$, est obtenu par intégration sur la cellule élémentaire. La valeur de la propriété effective du milieu étudié, D_{eff} , est alors calculée en injectant la valeur du champ macroscopique dans l'équation à l'échelle macroscopique (2.32), supposée stationnaire. On notera que dans certains cas, le problème à l'échelle microscopique est suffisamment simple pour être résolu de façon analytique.

Cette approche est moins générique que la méthodologie de Whitaker car elle ne permet pas de déterminer la forme de l'équation gouvernant le problème à l'échelle macroscopique. Cependant, si la forme de l'équation à l'échelle macroscopique est connue, ou même simplement postulée, elle permet d'évaluer simplement les propriétés effectives du milieu et ainsi d'étudier leur dépendance à la variation d'un certain nombre de paramètres comme par exemple la porosité, la forme ou l'agencement des grains solides.

L'avantage de cette méthode est, qu'à la différence de la méthodologie de Whitaker, elle permet d'aborder des problèmes où les équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique sont non-linéaires. Ainsi, c'est cette approche qui est utilisée par [Nakayama et Kuwahara \(1999\)](#) et [Pedras et De Lemos \(2001a\)](#) lors de l'étude des écoulements turbulents dans un milieu poreux. Cette approche leur permet de dériver simplement des relations de fermeture pour leurs modèles.

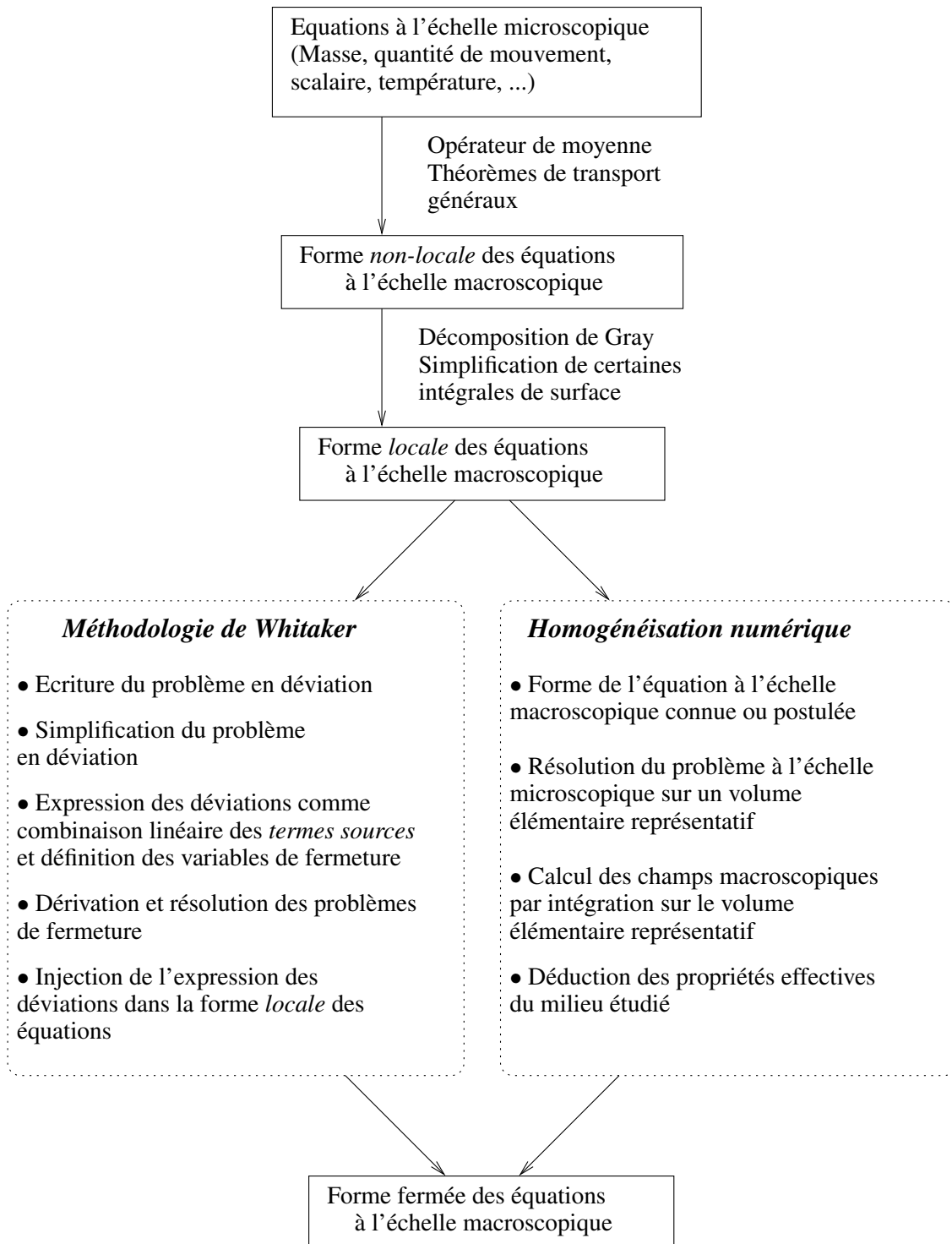


FIG. 2.4 – Synthèse des grandes étapes de la méthode de prise de moyenne volumique.

Cette méthode permet également d'étudier les zones de fortes hétérogénéités du milieu poreux. Dans ce cas, la démarche est la même que dans le cas d'un milieu poreux homogène, mis à part que le problème à l'échelle microscopique est résolu dans l'ensemble de la zone hétérogène. Les variations des propriétés effectives du milieu poreux dans la zone hétérogène sont alors déduites à partir de la forme de l'équation gouvernant le problème à l'échelle macroscopique.

Ainsi, malgré son caractère peu générique, cette méthode permet d'aborder des problèmes qui n'entrent pas dans le cadre des hypothèses de la méthodologie de Whitaker. Néanmoins, il faut parfois être prudent avec les résultats obtenus à l'aide de cette méthode d'homogénéisation numérique. En effet, dans la littérature on trouve parfois des exemples où les propriétés effectives du milieu sont obtenues à partir de problèmes microscopiques simplifiés (milieu homogène, milieu infini (*i.e.* pas de présence de parois solides ou d'un milieu libre), ...), et sont ensuite utilisées à l'échelle macroscopique dans un cadre plus général sans justification. Or l'utilisation de ces propriétés effectives dans un cadre différent de celui où elles ont été dérivées n'est pas nécessairement correcte.

Pour clore cette section, une synthèse des grandes étapes de la méthode de prise de moyenne volumique est présentée sur la figure 2.4.

2.3 L'interface milieu libre/milieu poreux

Lors de l'étude des écoulements à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux, il se trouve que l'un des aspects les plus ambigus est la prescription de la localisation exacte de l'interface (Kaviany, 1995; Sahraoui et Kaviany, 1992). Pour préciser cette localisation, Beavers et Joseph (1967) introduisent la notion d'*interface nominale*. Elle est définie comme la surface plane tangente au grain supérieur du milieu poreux. Une illustration de cette définition est proposée sur la figure 2.5. Cependant cette définition est arbitraire et peut s'avérer délicate d'utilisation dans certaines situations, comme le soulignent Beavers et Joseph eux-mêmes. Or de nombreux auteurs ont montré que la valeur des paramètres macroscopiques associés à l'interface, comme le paramètre de glissement α de la loi semi-empirique proposée par Beavers et Joseph (voir Eq. 1.1), dépend de la localisation de l'interface (Larson et Higdon, 1986, 1987; Sahraoui et Kaviany, 1992; Saffman, 1971), sans néanmoins être capable d'explicitier cette dépendance. De notre point de vue, cette ambiguïté sur la localisation de l'interface est significative de la confusion qui existe entre les différentes échelles de représentation de l'interface, les modèles qui y sont associés et la façon dont sont dérivés ces modèles. Dans la suite de cette section, nous rappelons tout d'abord les différents niveaux de description de l'interface utilisés dans ce mémoire et déjà présentés brièvement dans l'introduction. Puis, nous présentons différentes méthodes de changement d'échelle qui permettent de passer d'un niveau de description de l'interface à un autre.

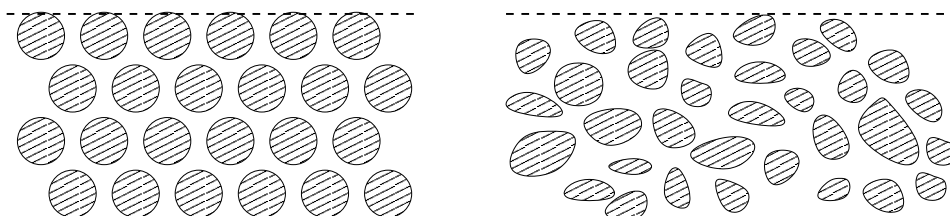


FIG. 2.5 – Localisation de l'interface nominale pour un milieu poreux ordonné et un milieu poreux désordonné.

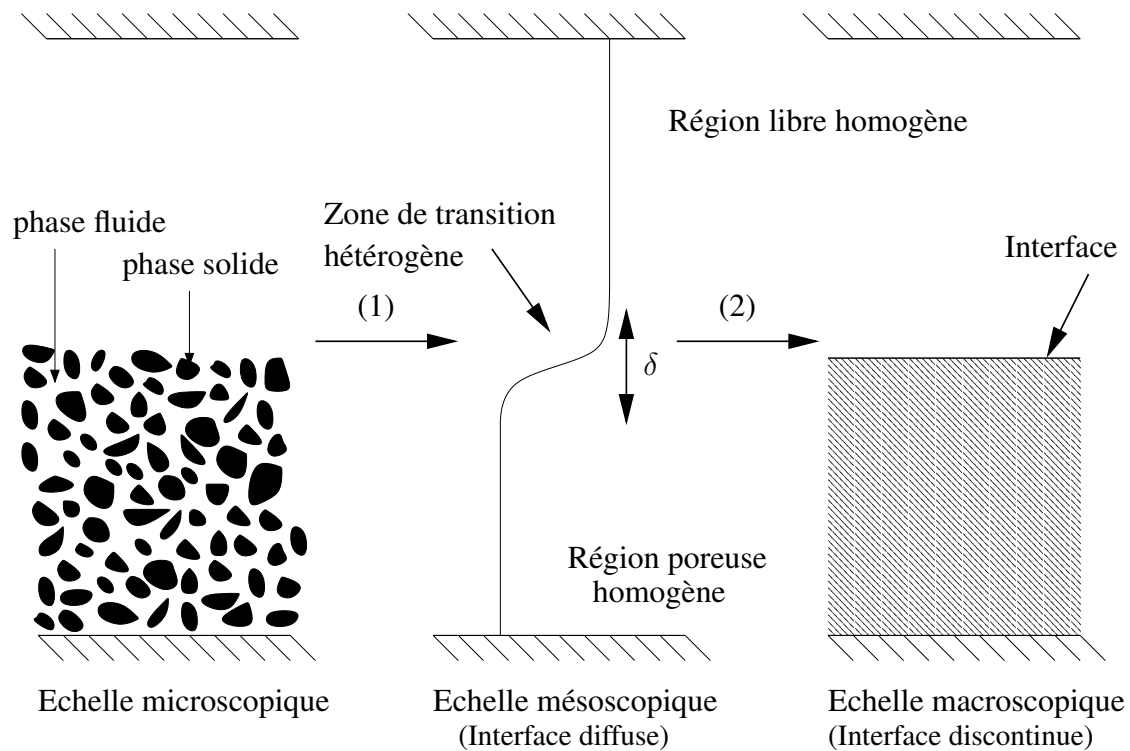


FIG. 2.6 – Les trois niveaux de description d'une interface libre/poreux.

2.3.1 Les différents niveaux de description de l'interface libre/poreux

Pour étudier les échanges hydrodynamiques à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux, nous choisissons de considérer trois niveaux de description (voir figure 2.6).

A l'échelle *microscopique*, aucun modèle n'est introduit. La géométrie de la structure solide est décrite précisément et l'écoulement est gouverné dans la phase fluide, *i.e.* dans la région libre et au sein des pores du milieu poreux, par les équations de Navier-Stokes. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, la simulation des équations de Navier-Stokes dans l'ensemble du domaine n'est en général pas envisageable à cause du nombre de degrés de liberté nécessaires à la représentation précise de la morphologie du milieu poreux. On est alors amené à introduire d'autres niveaux de description pour étudier les transferts hydrodynamiques à une interface libre/poreux.

A l'échelle *mésoscopique*, les phases fluides et solides sont remplacées par un milieu continu équivalent, obtenu par la méthode de prise de moyenne volumique. Pour visualiser ce niveau de description continu, le plus simple est de se représenter le profil de porosité obtenu en appliquant l'opérateur de moyenne volumique à la fonction indicatrice de la phase fluide. La porosité est constante dans chacune des régions libres et poreuses, loin de l'interface nominale. Et elle varie continûment, de sa valeur dans la région poreuse à sa valeur dans la région libre, dans une zone de transition hétérogène située entre les deux régions homogènes.

Enfin, à l'échelle *macroscopique*, le domaine est caractérisé par deux régions homogènes, où les propriétés macroscopiques du milieu sont constantes, séparées par une interface de discontinuité.

Pour réaliser le passage entre ces trois niveaux de description de l'interface libre/poreux, nous distinguons deux catégories de méthodes de changement d'échelle : (1) les méthodes qui permettent de passer de la description microscopique à la description mésoscopique de l'interface ; (2) les méthodes qui permettent de passer de la description mésoscopique à la description macroscopique de l'interface.

2.3.2 Méthodes de changement d'échelle pour le passage micro/mésos

Le niveau de description mésoscopique de l'interface est obtenu en appliquant la méthode de prise de moyenne volumique, présentée dans la section 2.2, aux équations gouvernant le problème à l'échelle de description microscopique de l'interface. Cette méthode permet dans un premier temps de dériver la forme *non-locale* des équations gouvernant le problème à l'échelle mésoscopique. On rappelle que la forme non-locale des équations à l'échelle moyennée fait toujours intervenir des intégrales surfaciques de quantités microscopiques, et que ces équations ne sont donc pas fermées. Pour réaliser la fermeture de ce problème, il faut exprimer ces intégrales surfaciques en fonction des grandeurs moyennées.

Dans les deux régions homogènes, libre et poreuse, on peut s'appuyer sur la méthodologie de Whitaker, ou encore sur les résultats disponibles dans la littérature, pour résoudre le problème de fermeture. En revanche, dans la région de transition hétérogène, *i.e.* là où la porosité varie, les hypothèses nécessaires pour utiliser la méthodologie de Whitaker ne sont plus valables. Tout d'abord, dans cette région de transition hétérogène, la taille du VER, définie à partir de la morphologie du milieu poreux homogène, n'est pas petite devant l'échelle de variation des grandeurs moyennées. Elle est du même ordre de grandeur. De plus, la définition d'un volume élémentaire représentatif de la zone de transition n'est pas aussi aisée que dans la région homogène. En effet, au sein de la région homogène, le VER est défini de telle façon que si l'on augmente sa taille, les propriétés moyennées comme la porosité ne varient pas. On utilise le fait qu'une asymptote est atteinte. Dans la région de transition, lorsque la taille du VER augmente, aucune asymptote n'est atteinte. La région de variation de la porosité augmente linéairement avec la taille du VER. Ainsi, la méthodologie de Whitaker présentée dans la section 2.2.2 n'est pas applicable pour étudier la fermeture du problème dans la région de transition hétérogène. On notera cependant les essais récents de certains auteurs (Wood *et al.*, 2000; Valdes-Parada et Ochoa-Tapia, 2005; Valdes-Parada *et al.*, 2006) pour généraliser cette méthodologie à l'étude des conditions de saut entre un catalyseur et un milieu libre. Cependant, à notre connaissance, cette méthode complexe n'a pas encore été étendue à l'étude des transferts hydrodynamiques à une interface libre/poreux.

En revanche, on peut utiliser la méthode d'homogénéisation numérique pour résoudre le problème de fermeture dans la région de transition hétérogène. En effet, pour une forme donnée des équations à l'échelle moyennée, on peut en déduire, après calcul des champs moyennés, la variation des propriétés effectives du milieu étudié dans la zone de transition. C'est cette approche qui est suivie par Breugem *et al.* (2004) pour déterminer la variation de la perméabilité dans la région de transition hétérogène. Néanmoins, cette approche nécessite de postuler la forme des équations à l'échelle moyennée. Or, il n'existe toujours pas de consensus sur la forme des équations moyennées à utiliser dans la zone de transition hétérogène pour étudier les transferts hydrodynamiques à une interface libre/poreux. Un certain nombre d'auteurs (Kaviany, 1995; Sahraoui et Kaviany, 1992; Goyeau *et al.*, 2003) utilisent l'équation de Darcy-Brinkman (équation (2.4)) et supposent que la porosité et la perméabilité varient dans la zone de transition. De leur côté, Ochoa-Tapia et Whitaker (1995b) ainsi que Breugem et Boersma (2005) introduisent une *deuxième correction de Brinkman* dans la forme des équations moyennées :

$$-\frac{d\langle p \rangle_f}{dx} = \mu \frac{\langle u \rangle}{K} - \frac{\mu}{\phi} \frac{d^2 \langle u \rangle}{dy^2} - \frac{\mu}{\phi} \frac{d\phi}{dy} \frac{d}{dy} \left(\frac{\langle u \rangle}{\phi} \right) \quad (2.33)$$

On reconnaît dans le membre de droite de cette équation, le terme de Darcy ainsi que le terme de Brinkman où la viscosité effective est modélisée par $\mu_{\text{eff}} = \mu/\phi$. Le dernier terme, qui fait intervenir le gradient de porosité, est la *deuxième correction de Brinkman*. Ce terme est non nul uniquement dans les régions où la porosité est variable.

Pour étudier le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique de description de l'interface, nous avons choisi d'utiliser la méthode d'homogénéisation numérique car cette méthode permet de

déterminer facilement les variations de porosité et de perméabilité dans la zone de transition hétérogène, pour une forme donnée des équations à l'échelle moyennée. Ainsi, nous pouvons focaliser notre attention sur l'étape suivante du changement d'échelle, *i.e.* le passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique de description de l'interface. En effet, c'est à cette seconde étape de changement d'échelle que sont associées les questions non résolues comme la forme des conditions de saut, la localisation de l'interface de discontinuité ou encore la détermination de la valeur des paramètres de saut.

2.3.3 Méthodes de changement d'échelle pour le passage méso/macro

Pour passer de la description mésoscopique à la description macroscopique de l'interface, [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#) se basent sur une technique de changement d'échelle proche de celles utilisées pour l'étude des écoulements diphasiques et des interfaces liquide/vapeur ou liquide/solide. Pour ces écoulements diphasiques, à très petite échelle, l'interface est une zone volumique de transition entre deux phases, au sein de laquelle les grandeurs physiques du fluide varient continûment. L'épaisseur de l'interface est alors de l'ordre d'une dizaine d'Angströms. Cette épaisseur étant extrêmement petite, l'interface est modélisée par une surface de discontinuité, dotée de propriétés comme la tension interfaciale, et des équations de transport sont développées pour régir le comportement de cette interface. Ces équations de transport se traduisent en général par des conditions aux limites à imposer à l'interface entre les deux phases. Une des approches pour développer ces conditions aux limites consiste à les dériver à partir de la description de l'interface comme zone volumique de transition ([Anderson et al., 1999](#)). Comme le souligne [Edwards et al. \(1991\)](#), cette approche offre l'avantage de mettre en lumière l'origine des propriétés associées à l'interface. Ainsi, une des problématiques abordées pour l'étude des interfaces pour les écoulements diphasiques est identique à la nôtre : dériver les conditions aux limites à imposer à grande échelle à l'interface entre deux phases, à partir d'une description continue de l'interface à petite échelle.

Étant donnée cette analogie, nous nous sommes appuyés pour réaliser notre étude, sur des techniques de changement d'échelle usuelles pour l'étude des écoulements diphasiques. Nous présentons ici les deux méthodes utilisées dans la suite de ce mémoire.

L'analyse générique des processus interfaciaux

Cette première méthode de changement d'échelle pour le passage méso/macro, que nous qualifions d'analyse générique des processus interfaciaux, est présentée en détail dans l'ouvrage de [Edwards et al. \(1991\)](#). Cette analyse s'appuie sur la distinction de deux échelles de longueur auxquelles sont associés deux observateurs. Une échelle de longueur mésoscopique δ , de l'ordre de l'épaisseur de la zone de transition et une échelle de longueur macroscopique h associée à la taille du problème. A l'échelle macroscopique h , l'observateur n'est pas capable de distinguer des longueurs de l'ordre de l'épaisseur de la zone de transition. Il observe un champ discontinu à l'interface : Ψ . A l'échelle mésoscopique δ , l'observateur voit un champ continu : ψ . Il ne voit pas d'interface mais une zone volumique de transition. Ainsi, l'interface n'existe qu'à travers le regard d'un observateur qui voit les échelles de longueur macroscopiques, mais ne peut distinguer les échelles de longueur mésoscopiques. Les champs Ψ et ψ ne sont différents qu'à proximité de l'interface (voir figure 2.7). L'intégrale de la différence entre représentation mésoscopique et macroscopique de la quantité ψ dans la zone interfaciale, est la *valeur en excès* de la quantité ψ . Elle est notée ψ^{EX} . Pour un point donné de l'interface, elle est définie par :

$$\psi^{EX} \hat{=} \int_{\mathcal{L}} (\psi - \Psi) d\mathcal{L} \quad (2.34)$$

où \mathcal{L} est la ligne normale à l'interface, passant par le point donné. Cette grandeur en excès, qui est représentée par l'aire de la surface hachurée sur la figure 2.7, est une grandeur associée à l'interface. Elle

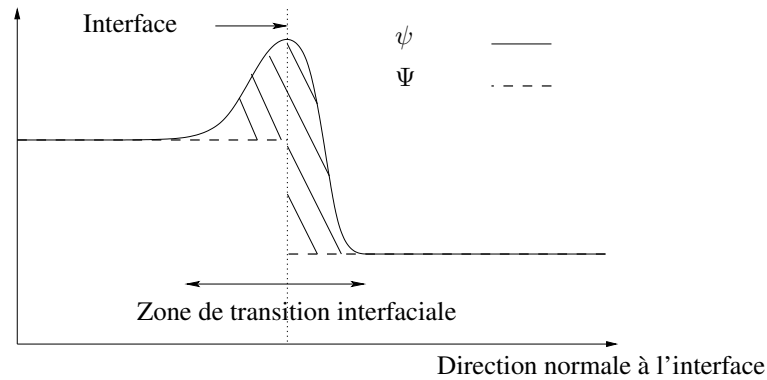


FIG. 2.7 – Définition d'une grandeur en excès.

permet de faire le lien entre les représentations mésoscopique et macroscopique du problème. L'idée est alors d'étudier les équations que vérifient les grandeurs en excès. Pour cela, les équations d'évolution du champ Ψ ainsi que les conditions de saut vues par l'observateur à l'échelle macroscopique sont dérivées en s'appuyant sur les équations d'évolution du champ ψ à l'échelle mésoscopique, la définition des grandeurs en excès (2.34), et en faisant tendre le rapport δ/h vers zéro. Dans cette approche, l'interface de discontinuité ne possède pas d'existence physique a priori. Elle n'existe que dans la limite asymptotique $\delta/h \rightarrow 0$.

L'avantage fondamental de cette approche est son caractère générique. D'ailleurs, [Edwards et al. \(1991\)](#) appliquent cette méthode d'analyse à des équations de bilans génériques (voir les chapitres 15 et 16). Elle permet de connaître relativement facilement la forme générale des conditions de saut, même dans un cas tridimensionnel. Sa limite vient du fait que les conditions de saut obtenues sont exprimées en fonction de grandeurs en excès des variables inconnues du problème. Or, les grandeurs en excès font intervenir les quantités mésoscopiques (voir Eq. 2.34). Les quantités mésoscopiques des variables inconnues du problème ne sont évidemment pas connues lorsque l'on résout le problème à l'échelle macroscopique. Ainsi, la solution obtenue n'est pas fermée et une étape supplémentaire de modélisation ou simplement de caractérisation de ces grandeurs en excès est nécessaire pour réaliser la fermeture du problème. Nous retiendrons que cette méthode permet de déterminer la **forme** des conditions de saut à l'échelle macroscopique, même pour des problèmes relativement complexes, mais qu'elle ne s'intéresse pas à la détermination des **valeurs** des paramètres en excès.

La méthode des développements asymptotiques raccordés

La méthode des développements asymptotiques raccordés permet de résoudre des équations différentielles dans lesquelles un petit paramètre est présent. Le petit paramètre qui est présent dans notre problème est le rapport $\varepsilon = \delta/h$, où δ est l'épaisseur de la zone de transition et h est une longueur caractéristique de la taille du système étudié. La première étape de cette méthode consiste à séparer le domaine en différentes sous-régions : des *régions extérieures* où les grandeurs physiques du problème varient faiblement et une *région intérieure* où les grandeurs physiques du problème varient fortement. Dans notre étude, les régions extérieures sont les deux régions homogènes et la région intérieure est la zone de transition hétérogène. Un changement de variable est effectué dans la région interne pour tenir compte des fortes variations des grandeurs physiques. Les équations différentielles sont alors développées à l'aide d'un développement asymptotique en ε . Les équations différentielles obtenues par ce développement sont résolues séparément dans chacune des régions, extérieures et interne. Les solutions des différentes régions sont ensuite raccordées en se basant sur des principes de raccord, valables lorsque

$\varepsilon \rightarrow 0$ (Zwillinger, 1989). On obtient ainsi une solution approchée des équations différentielles que l'on voulait résoudre. Lorsque ε tend vers zéro, la zone de transition tend vers une surface de discontinuité. Ainsi, à partir de la solution approchée des équations différentielles, on dérive analytiquement les conditions aux limites à appliquer à l'interface entre les solutions des problèmes des régions extérieures.

Cette méthode permet d'exprimer les conditions aux limites à appliquer à l'interface, uniquement en fonction de grandeurs macroscopiques. Les quantités mésoscopiques des inconnues du problème n'interviennent plus. Ainsi, le problème obtenu à l'échelle de description macroscopique est fermé. En revanche, cette méthode nécessite la résolution analytique d'équations aux dérivées partielles dans chacune des régions. Cette méthode est donc principalement utilisée pour la résolution de problèmes mono-dimensionnels, et à condition que des solutions analytiques des équations différentielles à résoudre soient accessibles.

Avant d'utiliser cette méthode pour l'étude complexe des transferts hydrodynamiques à l'interface libre/poreux, nous présentons cette méthode sur un exemple simple afin d'illustrer les différentes étapes que nous venons de décrire. Nous considérons l'équation différentielle suivante, qui représente un modèle simple de couche limite (Van Dyke, 1975; Zwillinger, 1989) :

$$\varepsilon \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = a, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad (2.35)$$

où ε est un petit paramètre. Pour résoudre cette équation, on cherche tout d'abord la solution sous la forme d'un développement en ε :

$$f(x; \varepsilon) = f^{(0)}(x) + \varepsilon f^{(1)}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.36)$$

En injectant la relation (2.36) dans l'équation (2.35), il vient à l'ordre zéro :

$$\frac{df^{(0)}}{dx} = a, \quad f^{(0)}(0) = 0, \quad f^{(0)}(1) = 1 \quad (2.37)$$

La solution $f^{(0)}$ ne peut pas vérifier à la fois les deux conditions aux limites, sauf si $a = 1$. Ainsi, la méthode des perturbations régulières ne permet pas de résoudre ce problème et on suspecte l'existence d'une couche limite.

On suppose que la couche limite est en $x = 0$, et qu'il existe donc une région de variation rapide de f près de la frontière $x = 0$. (Si jamais on arrivait à une contradiction vis-à-vis de la localisation de la couche limite, on recommencerait en plaçant la couche limite en $x = 1$). Cette région de variation rapide est qualifiée de *région intérieure* et le reste du domaine, où la variable f varie moins rapidement, est qualifié de *région extérieure*. Puisqu'on s'attend à des variations d'ordre 1 dans la région intérieure, on effectue le changement de variable suivant :

$$\check{x} = \frac{x}{\varepsilon}, \quad f(x; \varepsilon) = \check{f}(\check{x}; \varepsilon) \quad (2.38)$$

En introduisant cette nouvelle variable dans l'équation (2.35), il vient :

$$\frac{d^2 \check{f}}{d\check{x}^2} + \frac{d\check{f}}{d\check{x}} = \varepsilon a \quad (2.39)$$

Pour résoudre cette équation, on cherche la solution sous la forme d'un développement en ε :

$$\check{f}(\check{x}; \varepsilon) = \check{f}^{(0)}(\check{x}) + \varepsilon \check{f}^{(1)}(\check{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.40)$$

Il vient à l'ordre zéro :

$$\frac{d^2 \check{f}^{(0)}}{d\check{x}^2} + \frac{d\check{f}^{(0)}}{d\check{x}} = 0 \quad (2.41)$$

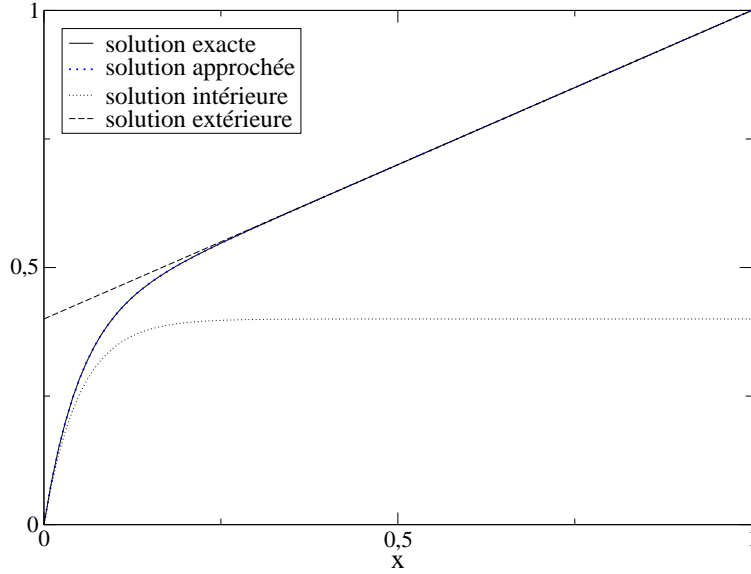


FIG. 2.8 – Solutions du problème de couche limite.

Pour ce qui est des conditions aux limites, comme nous avons supposé que la couche limite était du côté $x = 0$, la solution du problème intérieur \check{f} doit vérifier la condition au limite en $x = 0$: $\check{f}(0) = 0$. Elle est donc de la forme :

$$\check{f}^{(0)}(\check{x}) = A(e^{-\check{x}} - 1) \quad (2.42)$$

où A est une constante d'intégration à déterminer. La solution du problème extérieur ne s'étend plus jusqu'en $x = 0$, à cause de la présence de la couche limite, mais s'étend toujours jusque $x = 1$: $f(1) = 1$. La solution du problème extérieur à l'ordre zéro est donnée par :

$$f^{(0)}(x) = (1 - a) + ax \quad (2.43)$$

Pour déterminer la solution du problème intérieur à l'ordre zéro, il manque encore un principe de raccord entre les solutions intérieures et extérieures. La couche limite étant située en $x = 0$, le principe de raccord s'écrit :

$$\lim_{\check{x} \rightarrow +\infty} \check{f}(\check{x}; \varepsilon) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x; \varepsilon) \hat{=} f_i \quad (2.44)$$

et on note f_i la valeur de ce raccord. A l'ordre zéro, il vient :

$$\lim_{\check{x} \rightarrow +\infty} \check{f}^{(0)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(0)} \quad (2.45)$$

La solution du problème intérieur à l'ordre zéro est déterminée en utilisant ce principe de raccord. Il vient :

$$\check{f}^{(0)}(\check{x}) = (1 - a)(1 - e^{-\check{x}}) \quad (2.46)$$

Pour finir, il faut combiner les solutions intérieures et extérieures pour obtenir une solution approchée f_{app} sur l'ensemble du domaine. Cette solution approchée est définie comme la somme des solutions intérieures et extérieures à laquelle on retranche la valeur du raccord entre les solutions f_i . Il vient :

$$f_{app}^{(0)}(x) = (1 - a)(1 - e^{-x/\varepsilon}) + ax \quad (2.47)$$

la solution exacte du problème étant donnée par :

$$f(x) = (1 - a) \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} + ax \quad (2.48)$$

Les différentes solutions de ce problème de couche limite sont présentées sur la figure 2.8 pour $a = 0.6$ et $\varepsilon = 0.02$. On voit sur cette figure que la solution intérieure permet de très bien approcher la solution exacte au niveau de la couche limite, alors que la solution extérieure permet de très bien approcher la solution exacte au-delà de la couche limite.

On notera que pour l'étude des transferts hydrodynamiques à l'interface libre/poreux, la question de la localisation de la région intérieure ne se pose pas. On sait qu'elle se situe dans la zone de transition hétérogène. En revanche, pour le cas de l'étude de l'interface libre/poreux, la résolution du problème sera complexifiée par le fait que les variations de porosité et de perméabilité ne sont pas connues analytiquement a priori. On sait seulement que la porosité et la perméabilité varient fortement dans la zone de transition hétérogène.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales méthodes de changement d'échelles concernant l'étude des écoulements dans les milieux poreux et à l'interface avec un milieu libre. A la lumière des hypothèses sur lesquelles reposent ces différentes méthodes, nous avons choisi un certain nombre d'entre elles pour effectuer notre étude.

Tout d'abord, nous avons rappelé l'origine semi-empirique des premières lois macroscopiques utilisées pour l'étude des écoulements au sein de milieux poreux. Puis nous avons évoqué la nécessité de dériver ces lois semi-empiriques en s'appuyant sur la connaissance de l'écoulement à l'échelle des pores et en utilisant des méthodes de changement d'échelle.

La méthode de prise de moyenne volumique étant la méthode de changement d'échelle la plus adaptée à l'étude de notre problème, nous l'avons présentée de façon détaillée dans la section 2.2, ainsi que ses deux déclinaisons. Si la méthodologie de Whitaker permet de dériver dans un cadre rigoureux la forme des équations à grande échelle, ainsi que les valeurs des propriétés effectives, les hypothèses sur lesquelles elle repose ne sont plus valides lorsque l'on étudie un écoulement turbulent, le problème étant alors non-linéaire, ou lorsque l'on se trouve proche de l'interface avec un milieu libre. Ainsi, nous utiliserons l'approche homogénéisation numérique de la méthode de prise de moyenne volumique dans la suite de cette étude.

En ce qui concerne l'étude de l'interface libre/poreux, nous avons présenté les trois niveaux de description de l'interface (microscopique, mésoscopique et macroscopique), puis nous avons détaillé les méthodes de changement d'échelles pour passer d'un niveau de description à un autre. Notre étude se focalisera essentiellement sur le changement d'échelle mésoscopique/macroscopique, car c'est à ce changement d'échelle que sont associées les questions non résolues comme la forme des conditions de saut, la localisation de l'interface de discontinuité ou encore la détermination de la valeur des paramètres de saut. Nous avons constaté une forte analogie entre l'étude de ce changement d'échelle et l'étude des interfaces pour les écoulements diphasiques liquide/vapeur ou liquide/solide. Étant donné cette analogie nous proposons de transposer les méthodes de changement d'échelle usuelles pour l'étude des écoulements diphasiques, à l'étude de notre problème.

Chapitre 3

Modélisation de la turbulence dans un milieu poreux homogène

3.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 1 que la simulation des écoulements turbulents dans la région combustible d'un cœur de réacteur nucléaire nécessite d'utiliser une approche de type milieu poreux. De plus, nous voulons connaître l'évolution des grandeurs caractéristiques de la turbulence dans cette région combustible. Pour ces raisons, un modèle de turbulence macroscopique, basé sur une approche de type milieu poreux, semble le plus approprié pour décrire l'écoulement au sein de cette région.

Nous avons choisi d'utiliser une approche de modélisation qui combine un modèle de type RANS pour décrire la turbulence et la méthode de prise de moyenne volumique pour décrire l'influence du milieu poreux sur l'écoulement. Pour être plus précis, la modélisation se déroule en deux étapes. Dans un premier temps, le filtre associé à la turbulence (filtre statistique) est appliqué aux équations de Navier-Stokes qui gouvernent le problème à l'échelle du pore. Le modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard est alors utilisé pour fermer les équations filtrées. **L'écoulement est ainsi décrit à l'échelle du pore à l'aide du modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard.** Dans un deuxième temps, un second filtre associé à la modélisation du milieu poreux, la moyenne volumique, est appliqué à ce modèle de turbulence. On obtient ainsi un **modèle de turbulence à l'échelle macroscopique**. Néanmoins, des termes non fermés apparaissent lors de ce processus de filtrage et nous devons **résoudre un problème de fermeture** afin de les modéliser. Le problème étudié étant non-linéaire (voir par exemple les équations de transport des grandeurs turbulentes), la méthodologie de Whitaker, présentée dans la section 2.2.2, n'est pas adaptée pour résoudre ce problème de fermeture. En revanche, **la méthode d'homogénéisation numérique**, présentée également dans la section 2.2.2, permet d'évaluer les termes non fermés et de proposer des relations de fermeture.

Cette approche de modélisation a déjà été utilisée par un certain nombre d'auteurs (Nakayama et Kuwahara, 1999; De Lemos et Pedras, 2001; Pedras et De Lemos, 2001a, 2003) pour modéliser des écoulements turbulents dans des milieux poreux homogènes. Cependant, dans leurs études, Nakayama et Kuwahara (1999) et Pedras et De Lemos (2001a,c, 2003) ont uniquement considéré des géométries élémentaires où l'écoulement est transverse à des réseaux de crayons de sections circulaires, carrés ou elliptiques (voir figure 3.1(a)). Or, au sein d'un cœur de réacteur nucléaire, qui peut-être composé de réseaux de canaux, de crayons ou de tubes suivant les concepts étudiés, l'écoulement est principalement longitudinal (voir figure 3.1(b)).

Les modèles proposés par Nakayama et Kuwahara (1999) et Pedras et De Lemos (2001a) pour fermer le modèle de turbulence à l'échelle macroscopique sont différents. Cependant, ils utilisent la même méthode, la méthode d'homogénéisation numérique, pour déterminer les corrélations ou les constantes de leurs modèles. La forme des équations à résoudre à l'échelle macroscopique étant connue ou simplement postulée, les corrélations ou les constantes associées à ces équations sont obtenues uniquement en

intégrant les résultats de simulations numériques réalisées sur une cellule élémentaire. Pour les géométries qui nous intéressent, la physique de l'écoulement est relativement simple quand l'écoulement est longitudinal. Ainsi, nous pouvons également nous appuyer sur la connaissance de la physique de l'écoulement pour déterminer les corrélations de notre modèle.

L'objectif de ce chapitre est donc double : (i) adapter le modèle proposé par Nakayama et Kuwahara (1999) aux géométries de la région combustible pour le cas d'écoulements longitudinaux, (ii) profiter de la simplicité des géométries étudiées pour établir les relations de fermeture en s'appuyant à la fois sur la méthode d'homogénéisation numérique et sur la connaissance de la physique de l'écoulement.

Les résultats obtenus pour cette étude ont fait l'objet d'une publication dans une revue à comité de lecture (Chandesris *et al.*, 2006). Cet article est reproduit dans la section suivante¹.

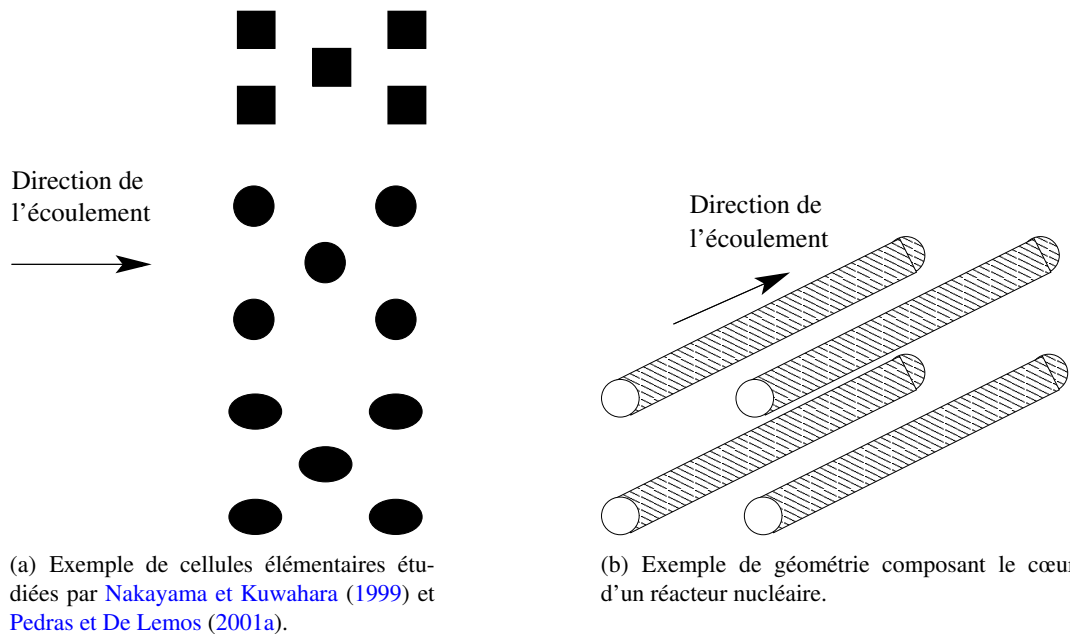


FIG. 3.1 – (a) L'écoulement est transverse au réseau de crayons. (b) L'écoulement est longitudinal au réseau de crayons.

¹Dans un souci de cohérence globale du mémoire, quelques notations ont été changées par rapport à la publication originale.

3.2 Article 1 : A macroscopic turbulence model for flow in porous media suited for channel, pipe and rod bundle flows

M. Chandesris ^a, G. Serre ^a, P. Sagaut ^b

International Journal of Heat and Mass Transfer 49 (2006) 2739-2750

^a Laboratoire de Modélisation et Développement Logiciels,
DEN/DER/SSTH, CEA Grenoble,
17 rue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex 9, France

^b Laboratoire de Modélisation en Mécanique UMPC-CNRS,
4, place Jussieu, Tour 66, case 162, 75252 Paris Cedex 05, France

Abstract: In the literature, a macroscopic two-equation turbulence model is proposed for analyzing turbulent flows through porous media of particular morphologies (arrays of square or circular rods, packed spheres). This model has been adapted to longitudinal flows in channels, pipes and rod bundles, in order to be able to analyze turbulent flows within nuclear power reactor circuits and core using a macroscopic turbulence model. The additional source terms of the macroscopic $k - \epsilon$ equations, which appear as an output of the volume-averaging process, are modeled using the kinetic energy balance and physical considerations. The two unknown constants of the closure expression are determined from the spatial averaging of microscopic $k - \epsilon$ computations and from numerical and experimental results available in the literature. This present model has been first successfully evaluated in various simple geometries such as channel and pipe. Good agreement was also obtained between this present model and an experiment of decreasing turbulence inside a rod bundle.

Keywords: Turbulence modeling, Porous media, Incompressible flow, Volume-average.

Nomenclature

c_1, c_2, C_μ	turbulence model constants	$\langle \psi \rangle_f$	intrinsic average
C_f	friction coefficient	$\bar{\psi}$	ensemble mean
c_p, y_{lim}^+	macroscopic turbulence model constants	ψ'	fluctuation
D_h	hydraulic diameter	$\tilde{\psi}$	deviation from intrinsic average
k	turbulent kinetic energy	<i>Greek symbols</i>	
K	permeability	ϕ	porosity
p	pressure	ϵ	dissipation rate of turbulent kinetic energy
Re_H	Reynolds number	ν	kinematic viscosity
S_w	wall friction surface	ν_t	turbulent viscosity
u_i	velocity	$\nu_{t\phi}$	macroscopic turbulent viscosity
<i>Special symbols</i>		ρ	fluid density
$\langle \psi \rangle$	volume average	$\tilde{\sigma}_k, \tilde{\sigma}_\epsilon$	macroscopic Prandtl numbers

3.2.1 Introduction

In the core of a nuclear power reactor, complex thermal-hydraulic phenomena occur and a detailed description of the flow may be required. Time-dependent, high resolution simulations based on Large Eddy Simulation (LES) or on Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) models are able to give the desired detailed flow field prediction. However, the exorbitant run time associated with such simulations and the current limit of the calculators restrict their use to a limited region of the system. Furthermore, these simulations depend on the state of the flow in the remaining part of the system. This requires either an artificial isolation of the interesting region, or, preferably a coupling between the high resolution description on that region and another description of the remaining part of the system based on a less detailed, cheaper resolution. Macroscopic descriptions such as those developed in the porous medium framework, could fulfill this need for a coarse resolution. Indeed, with a porous medium formulation, all the complex geometry of the core reactor would not be described, reducing the cost of the computation, but the overall effect of the solid would be taken into account in the model. Therefore, a porous medium formulation seems well adapted to the development of a turbulence model dedicated to charged media such as those encountered in the core of a nuclear reactor. However, in order to be able to later consider the coupling between the different levels of description, the macroscopic turbulent model has to be consistent with microscopic turbulent models, and thus to be properly derived.

In the study of flows through porous media, the first works were mainly based on semi-empirical laws (Darcy, 1856). It is only recently that general equations for flows through porous media were formally derived using the volume averaging technique (Vafai et Tien, 1981). Lage (1998) gives a very interesting and comprehensive review of this history of the modeling of flow through porous media starting from the work of Darcy. The volume-averaging technique is a rigorous mathematical procedure used to derive the governing mass, momentum and energy equations in porous media (Bear, 1972; Whitaker, 1969). Different authors use this formalism to derive macroscopic turbulence models. For instance, Masuoka and Takatsu (1996) derive a 0-equation turbulence model using the local volume averaging technique. They model the effective eddy diffusivity as the algebraic sum of the eddy diffusivities estimated from two types of vortices: the pseudo vortex and the interstitial vortex. Studying also turbulent flow and heat transfer through stacked spheres, Alvarez *et al.* (2003) propose a 1-equation turbulence model.

Two-equation macroscopic turbulence models are also proposed in the literature. Antohe and Lage (1997) derive a two-equation macroscopic turbulence model applying the time averaging operator to the extended Darcy-Forchheimer model. Getachew *et al.* (2000) extend this work by taking into account higher order terms. Following another approach, Nakayama and Kuwahara (1999) propose a two-equation macroscopic turbulence model obtained by spatially averaging the Reynolds-averaged Navier Stokes equations. However, for turbulent flows, the order of application of the two operators (time-averaging for turbulence and volume averaging) is important. Pedras and de Lemos (2000) show that the two approaches lead to similar equations for the mean flow, but that the turbulence kinetic energies resulting from the two different approaches are different. In particular, they show that, applying first the time-averaging operator, allows to take into account the turbulence inside the pores. Thus, the latter approach will be used in our study.

Applying the volume averaging theory to the microscopic transport equations of turbulent kinetic energy and its dissipation rate, Nakayama and Kuwahara (1999), and Pedras and de Lemos (2001a), establish a macroscopic two-equation turbulence model. They obtain a new set of equations for the transport of the volumetric averaged turbulence kinetic energy and its dissipation rate. These new equations involve additional terms which quantify the influence of the medium morphology on the turbulent kinetic energy and dissipation level. The main difficulty of the approach is to propose a closure for

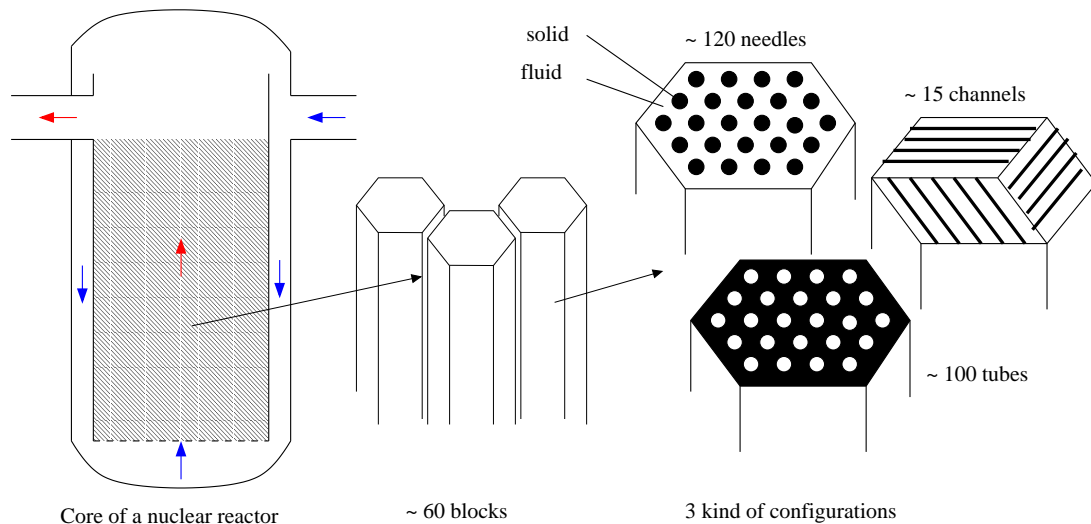


Figure 3.2: Example of geometries under study for the core of a nuclear reactor.

these additional terms and unfortunately there is no general well-developed closure expression valid for any kind of porous medium morphology for these additional terms. Nakayama and Kuwahara (1999), and Pedras and de Lemos (2001a) propose different models for these additional terms. The important point is that the correlations, or the constants of their models are obtained by integrating microscopic results obtained from numerical experiments over a unit porous structure. Different unit porous structures have been already considered: regular morphology made of square (Nakayama et al. Kuwahara, 1999), circular (Pedras et al. De Lemos, 2001c) or elliptic (Pedras et al. De Lemos, 2001b) rods. This method of integrating microscopic results obtained from numerical experiments over a unit porous structure has also been used with success by Kuwahara *et al.* (1996, 2001) and Nakayama *et al.* (2004) to study thermal dispersion and interfacial heat transfer coefficient in porous media.

We are interested in modeling the core of nuclear power reactors using the porous medium approach. The different nuclear cores that are under study are characterized by elongated geometries, and by a large number of identical elements. As can be seen in Fig. 3.2, which shows examples of gas cooled reactors, we can have to compute the turbulent flows around more than thousands of needles, and we are interested in different geometries: channels, tubes and needles. Furthermore, in the core of the reactor, the flow is longitudinal whereas in the studies by Kuwahara *et al.* (1998), Nakayama and Kuwahara (1999), and Pedras and de Lemos (2001a; 2001b; 2001c) only transverse flows were considered. Chung *et al.* (2003) have already studied a porous medium made of channels. However, their work is based on the model of Antohe and Lage (1997). As mentioned previously, this model does not allow to take into account the turbulent kinetic energy inside the interstices, while we are precisely interested in knowing the level of turbulence inside the channels. Thus, our purpose is twofold. First, to study the additional source terms for longitudinal flows through various geometries, using the approach proposed by Nakayama and Kuwahara (1999). Second, to take advantage of the simplicity of the studied geometries to establish the closure expressions not only by solving the microscopic flow inside periodic elementary cells, as was done for transverse flows, but also by using physical considerations.

The first part of this paper will focus on the mathematical formalism of the volume averaging theory. Then the macroscopic equations of mass, momentum, turbulent kinetic energy and its dissipation rate obtained by applying the time-averaging operator prior to the volume-averaging operator are presented. In the second part, closure expressions for the additional source terms appearing in the macroscopic

$k - \epsilon$ transport equations are obtained based on physical considerations. These closure expressions are dedicated to longitudinal flows through elongated geometries. The unknown constants of this model are established in the third part using numerical and experimental results. Finally, the macroscopic turbulence model is evaluated for unidirectional turbulent flows using two sets of data of decreasing turbulence, one numerical and the other experimental.

3.2.2 Macroscopic governing equations

3.2.2.1 The volume-averaging method for flows in porous media

The main idea of the volume averaging theory is to apply a volume averaging operator over a representative elementary volume (REV) to the set of equations governing the considered problem at the microscopic scale (mass, momentum, scalar transport,...) in order to obtain a set of equations at the macroscopic level. The choice of the size of the REV is important. The size of the REV should be sufficiently small in order to preserve as much information of the unfiltered flow field as possible in the volume-averaged flow field. On the other hand, the size of the REV should be such that $\langle\langle\psi\rangle\rangle \approx \langle\psi\rangle$, *i.e.* the volume-averaged flow field should present negligible variations on scales smaller than the filter length. This restriction is important, because it implies that the scale of variation of the averaged flow field is larger than the size of the REV, and gives sense to the use of the volume averaging operator. Additional terms appear due to this averaging process and the main difficulty of the approach is to propose a closure model for these additional terms.

In the study of multiphase transport phenomena, two types of volume averages are commonly introduced (Whitaker, 1986). The first one is the *phase average* (or volumetric average) which is defined by:

$$\langle\psi\rangle = \frac{1}{V} \int_V \chi \psi dV = \frac{1}{V} \int_{V_f} \psi dV \quad (3.1)$$

for any physical variable ψ , where V_f represents the volume of the fluid phase contained within the averaging volume V and χ is the phase indicator function:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{in the fluid phase} \\ 0 & \text{in the solid phase} \end{cases} \quad (3.2)$$

However, $\langle\psi\rangle$ is not equal to ψ when the latter is a constant. Therefore a second average, the *intrinsic phase average*, is defined by:

$$\langle\psi\rangle_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \psi dV \quad (3.3)$$

which is more representative of the condition in the fluid phase. These two averages are related through the porosity ϕ by:

$$\langle\psi\rangle = \phi \langle\psi\rangle_f, \quad \phi = \frac{V_f}{V} \quad (3.4)$$

Using this formalism, and neglecting the classical spatial commutation error, it is possible to derive the relations between the volumetric intrinsic average of derivatives and the derivatives of volumetric intrinsic average. These relations are presented in different works (Slattery, 1972; Whitaker, 1969) and are known as theorems of local volumetric average. For the case of a fixed solid, they can be written as:

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle\psi\rangle_f) + \frac{1}{V_f} \int_{A_i} \psi n_i dS \quad (3.5)$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi\rangle_f \quad (3.6)$$

where A_i is the interface between the fluid and the solids, while n_i is the i^{th} component of the unit normal vector oriented outward from the fluid.

3.2.2.2 Macroscopic continuity and momentum equations

Applying the phase average operator to the microscopic Reynolds averaged equations, and using the fact that velocity fluctuations vanish at the fluid-solid interface A_i , the following result is obtained:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} &= 0 \\ \phi \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \langle \bar{p} \rangle_f \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle_f \right) + R - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

where

$$R = \frac{1}{V} \int_{A_i} \left(\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\bar{p}}{\rho} \delta_{ij} \right) \cdot n_j dS \quad (3.8)$$

represents the volume average of the surface drag force due to the presence of solids. $\tilde{\psi}$ denotes the deviation of ψ from its intrinsic average $\langle \psi \rangle_f$ such that:

$$\tilde{\psi} = \psi - \langle \psi \rangle_f \quad (3.9)$$

The closure of this system is realized through the modeling of the last three unknown terms appearing in (3.7). The first term can be interpreted as an inertial dispersion term and the second one as a surface drag term. The inertial effects become appreciable only for high speed flows and cause an increase in the form drag. Furthermore, these two terms have the same effect. They generate a pressure drop through frictional drag. Since, for steady, macroscopically uniform flows, equation (3.7) should reduce to the semi-empirical well-known Darcy-Forchheimer law which relates the pressure drop to the flow velocity and the square of the flow velocity, Vafai and Tien (1981) modeled these two terms together using the Forchheimer-extended Darcy's law. For simple and well-known geometries (plane, pipe or rod bundle flows), considering longitudinal flows, the pressure drop due to friction is known through wall friction pressure loss correlations (Dean, 1978; Idel'cik, 1969). Therefore, these two terms are modeled together through a friction force F .

The last term, the macroscopic Reynolds stress tensor, is modeled following an idea proposed by Pedras and de Lemos (2001a). They introduce a macroscopic turbulent viscosity $\nu_{t\phi}$ which verifies:

$$\nu_{t\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle = \langle \nu_t \bar{S}_{ij} \rangle \quad (3.10)$$

where

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.11)$$

Since \bar{u} vanishes at the wall surface, it comes

$$\langle \bar{S}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \quad (3.12)$$

and the macroscopic Reynolds stress tensor is given by

$$-\phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f = 2\phi \langle \nu_t \bar{S}_{ij} \rangle_f - \frac{2}{3} \phi \langle k \rangle_f \delta_{ij} = 2\nu_{t\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \phi \langle k \rangle_f \delta_{ij} \quad (3.13)$$

Thus, the macroscopic momentum equation can be written as follows:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f \right) = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \langle \bar{p} \rangle_f + \frac{2}{3} \phi \rho \langle k \rangle_f \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_{t_\phi}) \left(\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \right) + \phi F_i \end{aligned} \quad (3.14)$$

A method has to be proposed to compute ν_{t_ϕ} . Both Nakayama and Kuwahara (1999), and Pedras and de Lemos (2001a) use the expression:

$$\nu_{t_\phi} = C_\mu \frac{\langle k \rangle_f^2}{\langle \epsilon \rangle_f} \quad (3.15)$$

which is a very simple expression inspired by the modeling at the microscopic scale. This choice will be discussed later.

3.2.2.3 Macroscopic transport equations for k and ϵ

In their work, Nakayama and Kuwahara (1999) obtained the macroscopic transport equations for $\langle k \rangle_f$ and $\langle \epsilon \rangle_f$ by applying the intrinsic average operator to the classical two equation $k - \epsilon$ turbulent model using the modeling constants recommended by Launder and Spalding (1972). Another approach was followed by Pedras and de Lemos (2001a), who worked on the transport equations for k and ϵ without introducing a priori any microscopic turbulence model. Comparing their results, one can see that their macroscopic transport equations for $\langle k \rangle_f$ and $\langle \epsilon \rangle_f$ are very similar, except for the modeling of the additional source terms and considering that the turbulent viscosity of Nakayama and Kuwahara's model is a macroscopic turbulent viscosity. Noting P_k and P_ϵ the additional source terms, the set of transport equations for $\langle k \rangle_f$ and $\langle \epsilon \rangle_f$ is:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle k \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \bar{u}_j \rangle_f \langle k \rangle_f \right) = & 2 \phi \nu_{t_\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ & - \phi \langle \epsilon \rangle_f + \phi P_k \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \epsilon \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \bar{u}_j \rangle_f \langle \epsilon \rangle_f \right) = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \frac{\partial \phi \langle \epsilon \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ & + \phi \left(2 c_1 \nu_{t_\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f - c_2 \langle \epsilon \rangle_f \right) \frac{\langle \epsilon \rangle_f}{\langle k \rangle_f} + \phi P_\epsilon \end{aligned} \quad (3.17)$$

where (c_1, c_2) are the two constants of the microscopic $k - \epsilon$ model, and $(\tilde{\sigma}_k, \tilde{\sigma}_\epsilon)$ are macroscopic turbulent Prandtl numbers. These macroscopic turbulence model equations present two extra source terms P_k and P_ϵ which represent 'internal' production of turbulence kinetic energy and its dissipation rate due to the presence of solids and for which a closure model has to be proposed. The turbulence source terms models of Nakayama and Kuwahara (1999) and Pedras and de Lemos (2001a) are summarized in table 3.1.

3.2.3 The closure problem

To close the model, the easiest way is to consider the equilibrium for which it is possible to evaluate the unknown source terms (Eqs. (3.16)-(3.17)) and to deduce correlations. Here, the flow is said to be at equilibrium when the flow is steady and spatially uniform from the macroscopic point of view ($D \langle k \rangle_f / Dt = D \langle \epsilon \rangle_f / Dt = 0$), and when the turbulence is fully developed. However, it does not give the expression of the unknown source terms out of equilibrium. Then, two different ways can be followed:

Table 3.1: Source terms for the macroscopic turbulence models.

	P_k	P_ϵ	
Nakayama et al. (1999)	ϵ_∞	$c_2 \frac{\epsilon_\infty^2}{k_\infty}$	$\epsilon_\infty = 39 \phi^2 (1 - \phi)^{5/2} \langle \bar{u} \rangle_f^3 / D$ $k_\infty = 3.7 (1 - \phi) \phi^{3/2} \langle \bar{u} \rangle_f^2$
Pedras et al. (2001)	$c_k \frac{\langle k \rangle_f \langle \bar{u} \rangle}{\sqrt{K}}$	$c_2 c_k \frac{\langle \epsilon \rangle_f \langle \bar{u} \rangle}{\sqrt{K}}$	$K = \frac{\phi^3 D^2}{144(1-\phi)^2}$ $c_k = 0.28$

- The general expression proposed to model the unknown source terms has to reduce to an expression at least valid at equilibrium. This is the point of view adopted by Pedras and de Lemos (2001a). According to them, the extra source terms are linked to the current level of turbulence of the considered flow (see Table 3.1).
- The correlations obtained at equilibrium are valid out of equilibrium without generalizing their expressions. This is the point of view adopted by Nakayama and Kuwahara (1999).

The second point of view was chosen in this study because we have physical arguments to explain the expressions of the production terms at equilibrium. Unfortunately, these physical arguments are not directly transposable out of equilibrium.

3.2.3.1 Theoretical approach for longitudinal flows

The two internal source terms directly depend on the medium morphology. One can easily imagine that the turbulent kinetic energy production of a porous medium made of spheres is not the same as the one for straight parallel channels or pipes. This is why we do not use the closure expressions currently available. They are designed for transverse flows in arrays of square (or circular) rods, or packing of spheres and we are interested in longitudinal flows in geometries made of channels, pipes or needles as illustrated in Fig. 3.2.

Production of turbulent kinetic energy: P_k

For fully developed, uniform, one-dimensional flows at equilibrium, Eq. (3.16) reduces to

$$P_k = \langle \epsilon \rangle_f = \epsilon_\infty \quad (3.18)$$

ϵ_∞ being the value reached by $\langle \epsilon \rangle_f$ at equilibrium. As expected, the 'internal' production of turbulent kinetic energy P_k is balanced by the dissipation since the flow is at equilibrium and since there is no macroscopic production of turbulence. The internal production term P_k is evaluated writing the total kinetic energy balance. For fully developed, uniform, one-dimensional flows, all the kinetic energy lost by the mean flow turns partly into heat (direct viscous dissipation), partly into turbulence through the production term that has to be evaluated:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \bar{u}_j = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.19)$$

The kinetic energy balance is integrated over a control volume. For arrays of channels (or pipes), the REV includes the section of one channel (or one pipe). For needles, the REV consists in one elementary cell as depicted in Fig. 3.3. The relation between the pressure gradient and the friction force is used to

obtain:

$$\frac{1}{\rho} F_j \langle \bar{u}_j \rangle_f = \frac{\nu}{V_f} \int_{V_f} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 dV - \underbrace{\left\langle \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} \right\rangle_f}_{P_k} \quad (3.20)$$

where the friction force F is non zero only in the mean flow direction, and can be related to the macroscopic velocity through a friction coefficient C_f :

$$F = \frac{1}{2} \rho \langle \bar{u} \rangle_f^2 \frac{4 C_f}{D_h} \quad (3.21)$$

D_h is the hydraulic diameter and can be defined for longitudinal flows by:

$$D_h = 4 \frac{V_f}{S_w} \quad (3.22)$$

where S_w is the wall friction surface. Since most of the viscous dissipation occurs very close to the wall for longitudinal flows, *i.e.* where mean velocity gradients are very large, the kinetic energy transferred to heat is estimated by integrating the expression for the dissipation only in the viscous region. The velocity profile is known in this region and is given by the linear law $U^+ = y^+$. U^+ stands for the velocity reduced by u_τ , u_τ being the friction velocity, and y^+ is the normal coordinate expressed in wall units. Since the thickness of the viscous layer is very small at high Reynolds number compared to the other dimension of the integration domain, the volume of the viscous region is well estimated by taking the product of the thickness of the viscous layer by the wall friction surface. It comes:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{V_f} \int_{V_f} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 dV &\approx \frac{\nu}{V_f} S_w \int_0^{\frac{\nu}{u_\tau} y_{\text{lim}}^+} \frac{u_\tau^4}{\nu^2} dy \\ &\approx \frac{4}{D_h} y_{\text{lim}}^+ u_\tau^3 \end{aligned} \quad (3.23)$$

This expression is valid for longitudinal geometries with a constant section. y_{lim}^+ corresponds to the limit of the integration zone expressed in wall units. Its value should be equal to the thickness of the viscous region. This limit is located somewhere in the buffer layer ($5 \leq y_{\text{lim}}^+ \leq 30$). The overestimation of the dissipation in the buffer layer, due to the use of the linear law, should be approximately compensated by the fact that the dissipation is neglected beyond the limit given by y_{lim}^+ . For fully developed longitudinal flows, the friction velocity is related to the macroscopic velocity through the friction coefficient C_f :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{C_f}{2}} \langle \bar{u} \rangle_f \quad (3.24)$$

Finally, using equations (3.20), (3.21), (3.23) and (3.24), the following model is obtained for P_k

$$P_k = 2 C_f \frac{\langle \bar{u} \rangle_f^3}{D_h} \left(1 - y_{\text{lim}}^+ \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) \quad (3.25)$$

The production of turbulent kinetic energy is directly linked to the power of the friction forces on the walls. However, this power is corrected by the direct dissipation of kinetic energy into heat, a term that is often neglected in the literature. The geometry is taken into account only through the friction coefficient C_f .

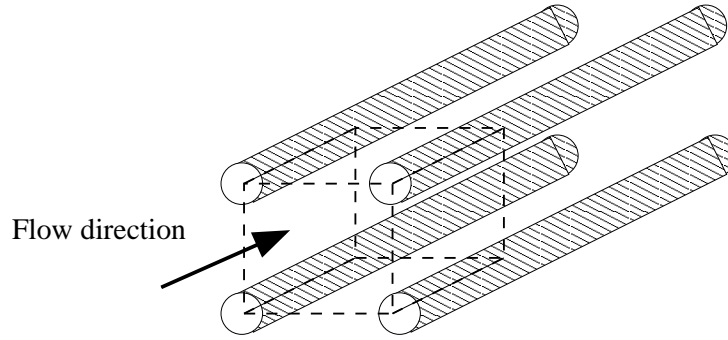


Figure 3.3: REV for the array of needles.

Production of dissipation: P_ϵ

The equation for $\langle \epsilon \rangle_f$ (3.17) does not contain any explicit production term of dissipation (except for the macroscopic production term of dissipation $(2 c_1 \nu_{t\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f \langle \epsilon \rangle_f / \langle k \rangle_f)$ which is zero for macroscopic uniform flows with zero mean shear), whereas it should. Thus P_ϵ has to represent at least a production term of dissipation. However, it does not mean that this term represents only production. But, since no information on other phenomena is available, the assumption is made that P_ϵ represents only the net production of dissipation inside the integration domain.

To model this production of dissipation, we go back to the ideas used to derived the standard $k - \epsilon$ model. The production of dissipation should be proportional to the kinetic energy production. This idea comes from the fact that the dissipation rate is also the spectral flux of energy (cascade from the largest to the smallest eddies), and depends on the energy contained in the largest scales, which is directly linked to the production of kinetic energy. The production of dissipation should involve a production time scale. Indeed, the original dissipation equation for homogeneous flows is classically interpreted as a time scale balance:

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} = c_1 \frac{P}{k} - c_2 \frac{\epsilon}{k} \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{\tau_\epsilon} \approx \frac{1}{\tau_p} - \frac{1}{\tau_k} \quad (3.27)$$

The time scale of dissipation τ_ϵ is balanced by the production time scale τ_p and the decay time scale τ_k . Finally, the source term has to be coherent with the equilibrium state. The simplest solution that verifies these three conditions is:

$$P_\epsilon = c_2 \frac{P_k}{\tau_p} \quad (3.28)$$

Several time scales can be proposed for τ_p :

1. the decay time scale:

$$\tau_p = \frac{\langle k \rangle_f}{\langle \epsilon \rangle_f} \quad (3.29)$$

It leads to an expression similar to the traditional form of the $k - \epsilon$ model. However, this solution constrains the system too much, and does not allow to separate the effects of production and destruction.

2. a production time scale:

$$\tau_p = \frac{\langle k \rangle_f}{P_k} \quad (3.30)$$

This time scale was introduced by Chen and Kim (1987) in the dissipation equation of the $k - \epsilon$ model in order to improve the standard model. This is this time scale that Nakayama and Kuwahara (1999) have indirectly chosen, with the value of $\langle k \rangle_f$ at equilibrium (noted k_∞).

We chose to use this time scale (3.30) since Nakayama and Kuwahara obtained good results for their studies. It comes:

$$P_\epsilon = c_2 \frac{P_k^2}{k_\infty} \quad (3.31)$$

A model has been already proposed for P_k (Eq. (3.25)). However, a model has to be proposed for k_∞ . Furthermore, this small development shows how to propose a model for the production of dissipation and can be used to propose models where other phenomena have to be taken into account (singularities due to spacer grids, two-phase flows,...).

For fully developed, uniform, one-dimensional flows, using Eq. (3.31), the transport equation of dissipation (3.17) reduces to:

$$\langle k \rangle_f = k_\infty \quad (3.32)$$

k_∞ is evaluated using the classical local relation for fully developed turbulence:

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{L} \quad (3.33)$$

where L is a characteristic turbulence length scale. This relation, often used at the microscopic level, is not directly transposable to the macroscopic level since the average of a product is not equal to the product of the averages. However, we make the hypothesis that this relation still holds at the macroscopic level using the *ad hoc* length scale which naturally appears in equation (3.25):

$$\epsilon_\infty = \frac{k_\infty^{3/2}}{L_M} \quad , \quad L_M \propto \frac{D_h}{1 - y_{\text{lim}}^+ \sqrt{\frac{C_f}{2}}} \quad (3.34)$$

Using relations (3.18), (3.25) and (3.34), it comes:

$$k_\infty = c \langle \bar{u} \rangle_f^2 C_f^{2/3} \quad (3.35)$$

This relation gives an estimation of the average level of turbulent kinetic energy when the turbulence is developed, knowing the bulk velocity and the friction coefficient. Using the Reynolds dependence at the power $-1/4$ of the friction coefficient for pipe and channel flows (Dean, 1978; Idel'cik, 1969) this relation can also be written in the following form:

$$k_\infty = c_p \langle \bar{u} \rangle_f^2 Re_H^{-1/6} \quad (3.36)$$

where Re_H is the Reynolds number based on the hydraulic diameter and the bulk velocity, c_p is a constant that has to be evaluated. We could also evaluate the constant c . However it is equivalent since for most geometries empirical relations link the friction coefficient and the Reynolds number.

3.2.4 Determination of the model constants

Two constants remain unknown in our model: c_p and y_{lim}^+ . They are established by integrating microscopic results obtained from experiments and numerical computations for fully developed, uniform pipe and channel flows, *i.e.* when relations (3.18) and (3.32) hold. Having the microscopic turbulence fields, the intrinsic volume averaged values are obtained by integrating the microscopic turbulent quantities over the fluid phase in a section of the pipe or channel (the turbulent quantities do not depend on the mean flow direction).

3.2.4.1 Numerical procedure

All the computations of that study are carried out using the TRIO_U code (Calvin *et al.*, 2002) developed at CEA (French Atomic Agency). This object oriented software is dedicated to the simulation of thermal-hydraulics problems encountered in the nuclear industry. It is able to deal with both LES and RANS models. The numerical model is based on a finite volume method which can be applied either to structured or unstructured grids. The discrete form of the equations is solved using a matrix projection scheme which is a sequel of the SOLA method originally developed by Hirt *et al.* (1975) (more details about this projection method can be found in Emonot (1992)). In our study, calculations were carried out on a structured and staggered Cartesian grid: scalar quantities are estimated at the center of the cells and velocity components at the center of the cell faces. Time integration and spatial discretization schemes were common to all computations. Time advancement was ensured by a 3rd order Runge-Kutta explicit scheme. We used a centered scheme for convection and diffusion terms in the momentum equation, and an upwind scheme for the convection in the transport equations of k and ϵ .

The microscopic calculation domain considered here, is either one channel or one pipe. For the channel, the model reduces to a two-dimensional model, since the considered quantities do not depend on the spanwise direction. For the pipe, the microscopic set of governing equations reduces to a two-dimensional axisymmetric problem, using the axial symmetry around the cylinder's axis. On the solid walls, wall functions are applied in order to avoid the cost of a mesh refinement. The first computational node is located in the logarithmic zone ($y^+ > 30$) of the velocity profile where

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + A \quad (3.37)$$

κ is the Von Karman constant ($\kappa = 0.415$) and A is another constant equal to 5.32 in our study. Furthermore, in the logarithmic region, the equilibrium assumption between production and dissipation leads to the following estimations for k and ϵ :

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad , \quad \epsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (3.38)$$

These relations are used to compute the values of k and ϵ at the first node. In order to obtain fully developed, uniform flows, periodic conditions are applied at the ongoing-outgoing boundaries. Calculations are carried out for a wide range of Reynolds number Re_H : $[2, 5.10^4 - 5.10^5]$ for the channel, $[5.10^4 - 10^6]$ for the pipe. For each computation, the grid size in the normal direction is chosen such that the first velocity node is at a distance $y^+ = 40$ from the wall, so that the use of the wall function is valid. The largest mesh is obtained for the largest Re_H : 100×440 nodes. It has been verified that the results were grid-independent, and that the microscopic pressure gradients obtained, agreed well with the existing correlations for channel and pipe flows.

3.2.4.2 Results from microscopic model

For the channel, the results obtained from the DNS of Moser *et al.* (1999), the experimental results obtained by Comte-Bellot (1965) and our own numerical results obtained with the standard $k - \epsilon$ model are integrated over the channel section to obtain the values of k_∞ and $\epsilon_\infty = P_k$. Then c_p and y_{lim}^+ can be computed:

$$c_p = \frac{k_\infty}{\langle \bar{u} \rangle_f^2} Re_H^{1/6} \quad , \quad y_{\text{lim}}^+ = \left(1 - \frac{P_k D_h}{2 C_f \langle \bar{u} \rangle_f^3} \right) \sqrt{\frac{2}{C_f}} \quad (3.39)$$

The results are presented in Fig. 3.4. We could not compute the values of y_{lim}^+ of Comte-Bellot's experiment, since we only had access to the turbulent kinetic energy, and not to its dissipation rate.

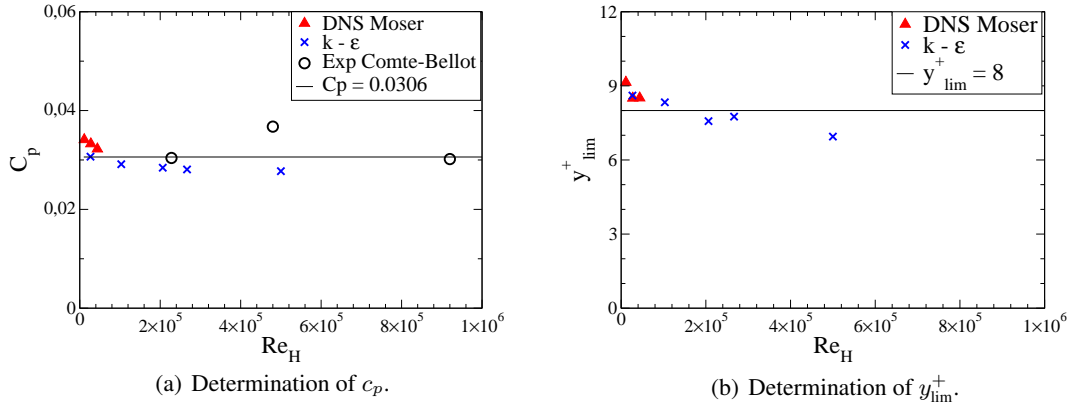


Figure 3.4: Effect of Reynolds Number on the two constants for the channel.

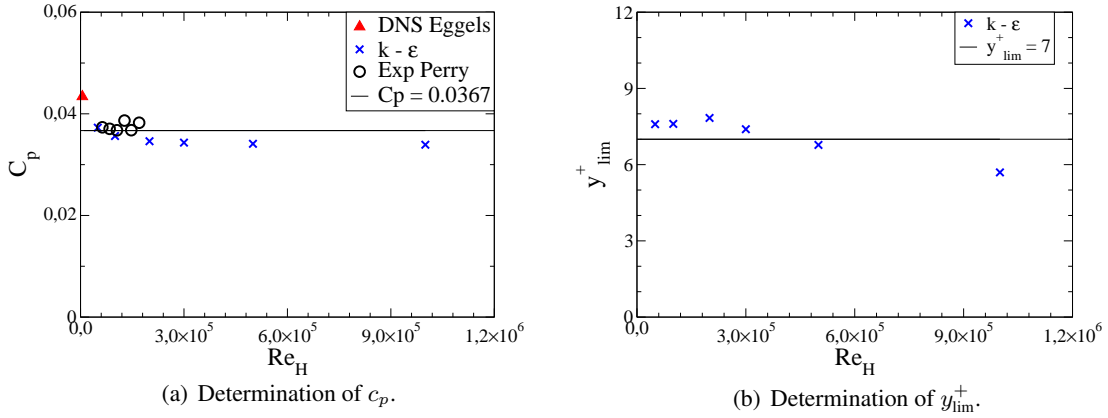


Figure 3.5: Effect of Reynolds Number on the two constants for the pipe.

For the pipe, the results of the DNS of [Eggels *et al.* \(1994\)](#), the experimental results of [Perry *et al.* \(1986\)](#) and also our own numerical results obtained with the standard $k - \epsilon$ model are integrated. The results for c_p and y_{lim}^+ are presented in Fig. 3.5. Here again, we cannot present the values of y_{lim}^+ for the DNS and the experiment, since the results for the dissipation rate are not available.

Figs. 3.4(a) and 3.5(a) show that the value of c_p does not depend on the Reynolds number for both geometries. This result implies that k_∞ does depend on the Reynolds number, which is a result different from the one obtained by [Nakayama and Kuwahara \(1999\)](#) (see table 3.1). This can be explained by the fact that the studied topologies are of very different kind. Contrary to longitudinal flows in channels or pipes, transverse flows in arrays of rods present form drag. These figures also show a dependence of c_p on the geometry. Figs. 3.4(b) and 3.5(b) show that the values of y_{lim}^+ do not depend too much on the Reynolds number, even though we observe that y_{lim}^+ decreases slightly with Re_H . Furthermore, as predicted in Section 3.2.3, y_{lim}^+ belongs to the buffer layer. These figures comfort the validity of our theoretical developments and suggest the following values for the two constants:

$$\text{channel: } c_p = 0.0306, \quad y_{lim}^+ = 8 \quad (3.40)$$

$$\text{pipe: } c_p = 0.0367, \quad y_{lim}^+ = 7 \quad (3.41)$$

One could argue that the dependence of c_p on the geometry, even for very similar geometries is a failure of the model. However, the aim was to understand the form of the correlations, a result that is achieved

and we recall that even the correlations for pressure head loss are different for pipes and channels:

$$\text{channel: } \lambda = 0.292 Re^{-1/4} \quad (\text{Dean correlation}) \quad (3.42)$$

$$\text{pipe: } \lambda = 0.3164 Re^{-1/4} \quad (\text{Blasius correlation}) \quad (3.43)$$

These results, obtained in channels and pipes, are also compared with results obtained by Pedras and de Lemos (2001a) for arrays of circular rods. To draw a comparison, we compute their constant c_k which only depends on the state of the flow when it is uniform and fully-developed, and is given in their geometry by:

$$c_k = \frac{\epsilon_\infty \sqrt{K}}{k_\infty \langle \bar{u} \rangle} \quad (3.44)$$

where K is the permeability of the porous media. c_k is the ratio between two time scales: a convective time scale (T_c) associated to the porous media, $\sqrt{K}/\langle \bar{u} \rangle$ and the turbulent time scale (T_t) associated to the internal production of turbulent kinetic energy introduced in Section 3.2.2.3: k_∞/P_k ($= k_\infty/\epsilon_\infty$ at equilibrium). For one channel (or one pipe) the permeability is obtained from the head loss for laminar flows: $K = D_h^2/48$ for the channel (respectively $K = D_h^2/32$ for the pipe). For arrays of channels or pipes the permeability depends on the porosity: $K = \phi D_h^2/48$ for channels (respectively $K = \phi D_h^2/32$ for pipes). The length given by \sqrt{K} behave as $\sqrt{\phi} D_h$. With the same interstice length (D_h), one can have different permeabilities. \sqrt{K} is no longer the most appropriate length scale to describe the length of the pores, as it was for transverse flows. Thus, for longitudinal flows, c_k is redefined using the hydraulic diameter, which is a more appropriate length scale to describe the length of the interstices:

$$c_k = \frac{\epsilon_\infty D_h}{k_\infty \langle \bar{u} \rangle_f 4} \quad (3.45)$$

As can be seen on Fig. 3.6 (a), the order of magnitude for c_k is the same as the one found by Pedras and de Lemos (2001a). However, for our geometries, c_k shows a slight dependence on the Reynolds number and on the geometry. This dependence is also seen when computing c_k using relations (3.25) and (3.35):

$$c_k = \frac{C_f^{1/3}}{2 c_p} \left(1 - y_{\text{lim}}^+ \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) \quad (3.46)$$

Since C_f is a function of the Reynolds number, we recover the dependence of c_k on the Reynolds number. The constant c_k is also computed based on the correlations obtained by Nakayama and Kuwahara (1999) for arrays of square rods:

$$c_k = 0.878 \phi \sqrt{1 - \phi} \quad (3.47)$$

Fig. 3.6 (b) shows the comparison. The order of magnitude for the values of c_k is still the same. However, the values of c_k obtained by Nakayama and Kuwahara do depend on the porosity.

The order of magnitude of c_k is the same for these 4 different geometries (pipe, channel, arrays of square and circular rods). Indeed, at equilibrium, the ratio of the convective time scale to turbulent time scale is located in a narrow range of values: $[0.16 - 0.34]$ (see table 3.2). An interpretation could be: Assuming the validity, at first order, of the equilibrium relation between averaged turbulent quantities:

$$\epsilon_\infty \sim \frac{k_\infty^{3/2}}{l} \quad (3.48)$$

l being the energy carrying eddies length scale, c_k can be expressed as follows:

$$c_k = \frac{T_c}{T_t} \sim \frac{\sqrt{K}}{\langle \bar{u} \rangle} \frac{\sqrt{k_\infty}}{l} \quad (3.49)$$

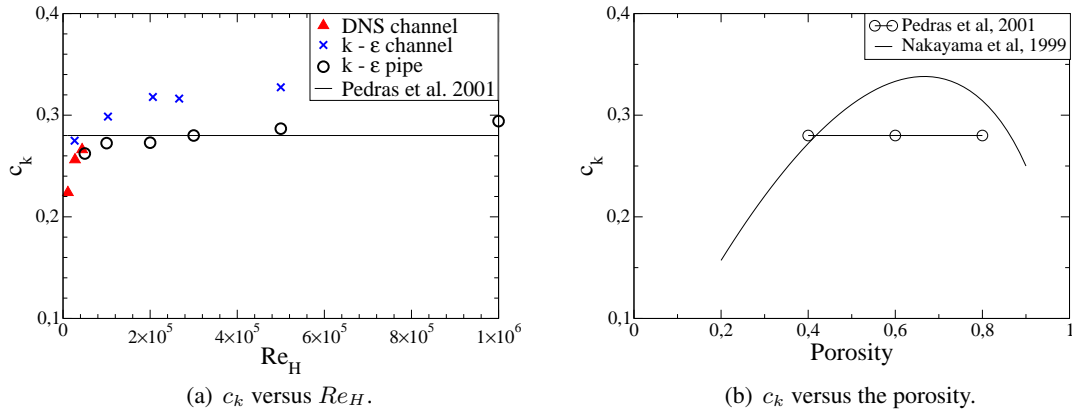

 Figure 3.6: Comparison for c_k .

 Table 3.2: Expression and range of values of c_k for different geometries.

Geometry	analytical expression	range of values
arrays of circular rods (Pedras et al. - 2001)	0.28	0.28
arrays of square rods (Nakayama et al. - 1999)	$0.878 \phi \sqrt{1 - \phi}$	[0.16 – 0.34]
channel and pipe (Present results)	$\frac{C_f^{1/3}}{2 c_p} \left(1 - y_{\text{lim}}^+ \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right)$	[0.22 – 0.34]

Admitting that the energy carrying eddies length scale is limited by the characteristic porous length scale ($\sqrt{K} \sim l$), it comes:

$$c_k \sim \frac{\sqrt{k_\infty}}{\langle \bar{u} \rangle} \sim I \quad (3.50)$$

I being the turbulent intensity. Thus, the average of the turbulent intensity over a porous unit structure shows a very little dependence on the topology of the porous media. This result can be observed thanks to the use of the intrinsic average operator.

In spite of this result, we do not use the correlations proposed by Pedras and de Lemos (2001a) for different reasons. First, even if the order of magnitude of c_k is constant, c_k does vary for our geometries and we are interested in computing as accurately as possible the mean level of turbulent kinetic energy. Secondly, the closure expressions proposed by Pedras and de Lemos (2001a) are directly linked to turbulent quantities (see table 3.1). This choice leads to an overestimation of the dissipation of turbulent kinetic energy as can be seen on their figure 5 (Pedras et De Lemos, 2001a). Furthermore, Guo *et al.* (2003) also find out that the model proposed by Nakayama and Kuwahara (1999) is the best in predicting a reasonable eddy diffusivity for gas flow in a packed bed. However, we acknowledge that a strong hypothesis is done when considering that the extra source terms are only linked to the state of the flow when it is at equilibrium.

When solving the closure problem, we showed that the production of turbulent kinetic energy is directly linked to the power of the friction forces corrected by the direct dissipation of kinetic energy into heat. Since this last term is often neglected in the literature, we present on Fig. 3.7 the percentage of the

energy which is directly dissipated η , and which is given by:

$$\eta = 1 - \frac{P_k}{2 C_f \frac{\langle \bar{w} \rangle_f^3}{D_h}} \quad (3.51)$$

As can be seen on this figure, this percentage decreases with the Reynolds number and is clearly not negligible.

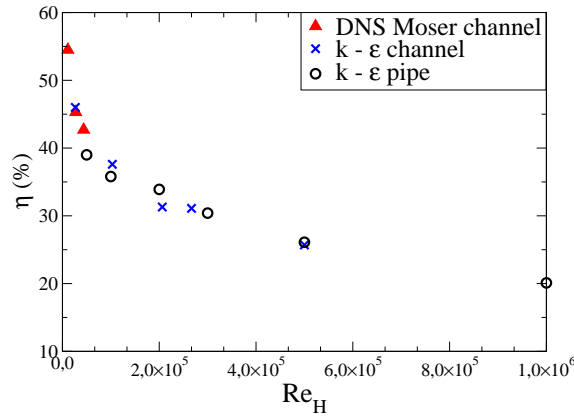


Figure 3.7: Relative importance of the direct dissipation term.

3.2.5 Assessment of the macroscopic model

3.2.5.1 Channel flow

In order to assess the macroscopic turbulence model, we study first the decay of turbulence inside a channel of length $5 D_h$ at $Re_H = 10^5$, from both microscopic and macroscopic points of view. This problem is two-dimensional, since there is no dependence in the spanwise direction. At the microscopic scale, the flow is computed using the standard $k - \epsilon$ model. Then the microscopic results for turbulence quantities are integrated over the section of the channel, to obtain the decay of turbulence. The grid size in the normal direction is still chosen such that the first velocity node is at a distance $y^+ = 40$ from the wall (we use wall functions on the solid walls). The size of the mesh is quite small for that Reynolds number: 100×62 . At the macroscopic scale, the macroscopic turbulence model equations proposed here are solved. Symmetry conditions are used for the upper and lower boundaries, since the averaging of the no-slip condition at the wall leads to a symmetry condition. In the normal direction, only one node is taken, since the problem reduces to a one-dimensional problem, and in the streamwise direction, we set $\Delta x = D_h/20$ to have a sufficient resolution for the first points, however, it is possible to consider larger Δx . For both calculations, the inlet turbulence kinetic energy and its dissipation rate are set to $\langle k \rangle_f = 8 k_\infty$ and $\langle \epsilon \rangle_f = 15 \epsilon_\infty$. In both macroscopic and microscopic computations, the grid-independence of the solutions was checked. Figs. 3.8(a) and (b) show the decay predicted by the present macroscopic model along with the intrinsically averaged values obtained with the microscopic computation. Good agreement between the two sets of results gives support to the present model. In particular, the use of correlations obtained at equilibrium, out of equilibrium seems to be valid since a good prediction of the decay of turbulence is obtained.

3.2.5.2 Bundle of rods (AGATE)

We also compare our model with the results of a decaying turbulence experiment *AGATE* (Falk et Momponteil, 1998) at $Re_H = 8,7 \cdot 10^4$. The experiment consists of a bundle of 25 rods (5×5) inside a

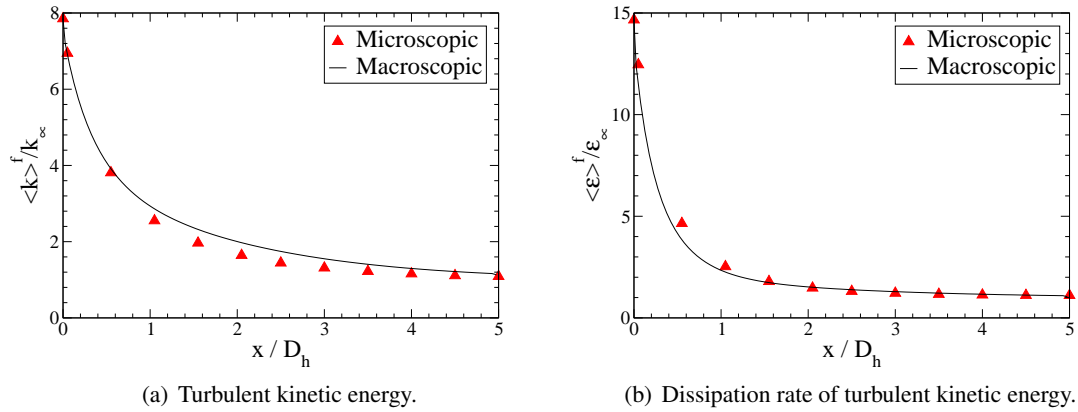


Figure 3.8: Decay of turbulence.

cylinder of square section with a spacer grid at the entrance (Fig. 3.9). The grid generates turbulence at the entrance. Behind the grid the turbulence decays and reaches an asymptotic non null value due to the turbulence production by the rods. The main flow is longitudinal. The velocities and their fluctuations are measured in the section at several locations downstream the grid. The microscopic results of turbulence quantities are integrated over the fluid section to obtain the level of turbulence. The experiment only gives access to the values of the turbulent kinetic energy, and not to the dissipation rate.

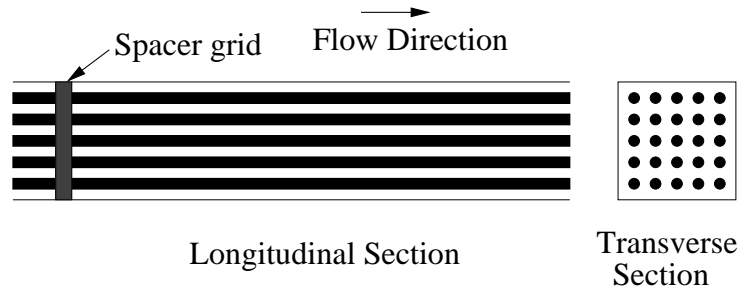


Figure 3.9: Geometry of the AGATE experiment.

Then, we look at the experiment from a macroscopic point of view. The porosity is given by the ratio between the fluid section and the total section of the experiment: $\phi = 0.594$. The value of the hydraulic diameter is computed from the geometry $D_h = 0.01028m$, and the value of the longitudinal friction coefficient C_f is given by empirical correlations (Kakac *et al.*, 1987) for this rod bundle geometry. The macroscopic turbulence model equations proposed here is solved. Symmetry conditions are used for the upper and lower boundaries, and for the lateral boundaries. In the normal and spanwise directions, only one node is taken, since the problem reduces to a one-dimensional problem. In the streamwise direction we take 50 nodes to ensure a sufficient resolution. The computation is started at a distance of $x / D_h = 2$ downstream the grid where is situated the first experimental measurement point. The results of $\langle k \rangle_f$ and an estimation of $\langle \epsilon \rangle_f$ obtained from the experiment are used as inlet conditions. The estimation of $\langle \epsilon \rangle_f$ is obtained using Eq (3.16) and the first two experimental values of $\langle k \rangle_f$. The value for c_p is obtained from the experimental measurements far away from the grid, in the region where the flow is established: $c_p = 0.0368$. This is a value very close to the one obtained for flows inside pipes. Since we do not have access to the dissipation rate, the value of y_{lim}^+ is unknown. We choose the value which gives the best result: $y_{lim}^+ = 16$, which is still in the estimated range $[5 - 30]$. Fig. 3.10 shows the decay predicted by the present macroscopic model along with the intrinsically averaged values of the experiment. Results

are presented in a dimensionless form. $\langle k \rangle_f$ at the equilibrium is the reference value for the macroscopic turbulent kinetic energy, and D_h is the reference for the distance. The good agreement between the two sets of results gives support to our model.

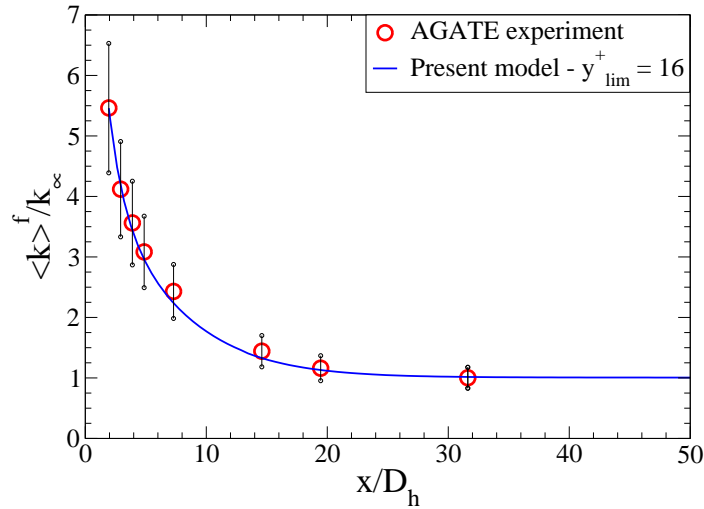


Figure 3.10: Decay of turbulent kinetic energy.

The value of y_{lim}^+ that gives the right solution for this study is larger than the value recommended for pipe or channel flows. It could be explained either by a stronger direct dissipation in tube bundles than in pipes, or by the strong mean velocity gradients induced by the grid inside the core flow which create a strong direct dissipation that is not taken into account by our model (with our model, we only evaluate the dissipation due to the walls). We do not know which phenomena is predominant since we do not have any estimation of the dissipation rate inside the experiment. A microscopic calculation of the experiment could be undertaken to get an insight, however it is not in the scope of this article.

Note: With these two test cases, it is impossible to check the assumption made for the macroscopic turbulent viscosity (3.15). Indeed, the macroscopic turbulent viscosity only appears in diffusion terms in the macroscopic set of equations (3.14), (3.16) and (3.17), and these diffusion terms are always negligible in the selected test cases. Another test case should be chosen to check this assumption if the user wants to use the model when macroscopic diffusion is not negligible. The same remark can be made for the macroscopic turbulent Prandtl numbers appearing in equations (3.16) and (3.17).

3.2.6 Conclusion

In the literature, a macroscopic two-equation turbulence model obtained applying the volume averaging theory to the microscopic two-equation turbulence model is proposed. The additional turbulent source terms appearing as an output of the averaging process are production terms of turbulent kinetic energy and its dissipation rate, and give account of the effect of the solids inside the flow, in the integration domain. These additional turbulent source terms have been modeled using the assumption that correlations obtained at equilibrium (uniform flows) are still valid out of equilibrium. The form of the dissipation turbulent source term has also been discussed. This study focus on longitudinal flows in arrays of channels, pipes or needles. The correlations have been established for longitudinal flows using the kinetic energy balance, an estimation of the direct viscous dissipation and by introducing an *ad hoc* length scale. The two unknown constants of this model have been determined using both numerical and

experimental results. Thus, the model is valid for uniform fully developed flows at equilibrium in pipes and channels. The model has been also successfully evaluated against two sets of data of decreasing turbulence: a channel flow (3D calculation) and a rod bundle flow (experiment). Further investigation is needed to find out if the macroscopic models developed for transverse flows (square and circular rods) and longitudinal flows (channel, pipe and rod bundle flows) can be gathered in a unified model that could deal with any kind of porous media morphology.

3.3 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de proposer un modèle de turbulence macroscopique pour modéliser l'écoulement dans la région combustible, en s'appuyant sur une approche qui combine un modèle de type RANS pour décrire la turbulence, et la méthode de prise de moyenne volumique pour décrire l'influence du milieu poreux sur l'écoulement. Pour cela nous nous sommes basés sur les équations de transport des quantités turbulentes moyennées (Eqs. (3.16) et (3.17)) proposées dans la littérature et nous avons proposé des relations de fermeture adaptées aux géométries de la région combustible (Eqs. (3.25), (3.31) et (3.36)) pour modéliser les termes non fermés de ces équations de transport. Une récapitulation de ce modèle de turbulence macroscopique est présentée dans l'encadré de la page 49.

Ce modèle de turbulence macroscopique permet de décrire l'évolution des grandeurs caractéristiques de la turbulence, $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$, dans la région combustible. Une viscosité turbulente macroscopique $\nu_{t\phi}$ basée sur ces grandeurs turbulentes (Eq. (3.15)) est présente dans ce modèle. Néanmoins, nous soulignons ici que, pour les écoulements mono-dimensionnels étudiés dans ce chapitre, comme la vitesse macroscopique $\langle u \rangle$ est constante, la connaissance de cette viscosité turbulente macroscopique n'est pas nécessaire pour fermer l'équation d'évolution de la quantité de mouvement. De plus, cette viscosité turbulente macroscopique n'apparaît que dans les termes de diffusion des équations d'évolution de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$. Or, ces termes de diffusion sont négligeables pour les cas test que nous avons étudiés. Ainsi, l'hypothèse de modélisation basée sur une viscosité turbulente macroscopique n'a pas réellement été testée jusqu'ici. Nous reviendrons sur l'étude de cette viscosité turbulente macroscopique lors de l'étude de configurations plus complexes dans les chapitres 7 et 8.

La question de la modélisation de l'écoulement dans la région combustible étant résolue, nous nous focalisons dans la suite de ce mémoire sur la question du raccord entre ce modèle de turbulence macroscopique et le modèle de turbulence de la région libre. Cette question étant complexe, nous commençons par étudier le cas où l'écoulement est laminaire.

$$\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = 0 \quad (3.52a)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_{t\phi}) \left(\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle_f}{\partial x_i} + \phi F_i \end{aligned} \quad (3.52b)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle k \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \bar{u}_j \rangle_f \langle k \rangle_f \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k}) \frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial x_j} \right) + 2 \phi \nu_{t\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f - \phi \langle \epsilon \rangle_f \\ &\quad + \phi P_k \end{aligned} \quad (3.52c)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \epsilon \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\phi \langle \bar{u}_j \rangle_f \langle \epsilon \rangle_f \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon}) \frac{\partial \phi \langle \epsilon \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ &\quad + \phi \left(2 c_1 \nu_{t\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f - c_2 \langle \epsilon \rangle_f \right) \frac{\langle \epsilon \rangle_f}{\langle k \rangle_f} + \phi P_\epsilon \end{aligned} \quad (3.52d)$$

$$\nu_{t\phi} = C_\mu \frac{\langle k \rangle_f^2}{\langle \epsilon \rangle_f} \quad (3.52e)$$

$$P_k = 2 C_f \frac{\langle \bar{u} \rangle_f^3}{D_h} \left(1 - y_{lim}^+ \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) \quad (3.52f)$$

$$P_\epsilon = c_2 \frac{P_k^2}{k_\infty} \quad \text{avec} \quad k_\infty = c_p \langle \bar{u} \rangle_f^2 Re_H^{-1/6} \quad (3.52g)$$

$$\begin{aligned} \text{cannal plan : } c_p &= 0.0306 \quad ; \quad y_{lim}^+ = 8 \\ \text{tuyau : } c_p &= 0.0367 \quad ; \quad y_{lim}^+ = 7 \end{aligned}$$

TAB. 3.3 – Modèle de turbulence macroscopique adapté à la région combustible du cœur de réacteur.

Chapitre 4

Étude de l'interface libre/poreux pour des écoulements laminaires

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé un modèle de turbulence macroscopique pour modéliser l'écoulement au sein de la région combustible du cœur d'un réacteur nucléaire. Pour simuler l'écoulement dans l'ensemble du cœur, *i.e.* dans les régions libres et la région combustible, il faut être capable de raccorder les modèles utilisés dans les différentes régions.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, de nombreuses questions demeurent ouvertes concernant la spécification des conditions aux limites à appliquer à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux, même dans le cas où l'écoulement est laminaire. Nous pensons en particulier aux questions de la localisation de l'interface de discontinuité, ainsi que de la détermination de la valeur des paramètres de saut. Or, la réponse à ces deux questions est fondamentale en vue d'une utilisation pratique de ces conditions aux limites.

Une idée très attrayante, proposée par [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#), consiste à dériver les conditions aux limites à appliquer à l'interface de discontinuité en partant de ce qui est connu à l'échelle microscopique et en utilisant des méthodes de changement d'échelle. Cette approche leur a permis de dériver la forme des conditions de saut à appliquer sur le tenseur des contraintes (cf. Eq. (1.2)). Cependant, la méthode de changement d'échelle qu'ils utilisent pour le passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique ne leur permet pas de déterminer la valeur de leur paramètre de saut β . De plus, [Breugem *et al.* \(2004\)](#) montrent que la valeur de ce paramètre de saut dépend de la localisation de l'interface de discontinuité, sans néanmoins être capable d'explicitement cette dépendance.

Nous proposons d'utiliser une nouvelle méthode de changement d'échelle, la méthode des développements asymptotiques raccordés, afin de répondre aux questions de la localisation de l'interface et de la détermination de la valeur des paramètres de saut. Cette méthode de changement d'échelle étant relativement complexe, nous avons choisi de l'appliquer dans un premier temps au problème de l'écoulement de Poiseuille, qui est un écoulement laminaire, au-dessus d'un milieu poreux. Ce problème correspond au problème académique formulé à partir de l'étude expérimentale réalisée par [Beavers et Joseph \(1967\)](#) (voir section 1.2.2).

Les résultats obtenus en utilisant cette nouvelle méthode de changement d'échelle pour étudier le passage de la description mésoscopique à la description macroscopique de l'interface, sont présentés dans la section suivante à travers un article¹ publié dans une revue avec comité de lecture ([Chandesris et Jamet, 2006](#)).

¹Dans un souci de cohérence globale du mémoire, quelques notations ont été changées par rapport à la publication originale.

4.2 Article 2 : Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow

M. Chandesris, D. Jamet

International Journal of Heat and Mass Transfer 49 (2006) 2137-2150

Laboratoire de Modélisation et Développement Logiciels,
DEN/DER/SSTH, CEA Grenoble,
17 rue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex 9, France.

Abstract: The velocity boundary condition that must be imposed at an interface between a porous medium and a free fluid is investigated. A heterogeneous transition zone characterized by rapidly varying properties is introduced between the two homogeneous porous and free fluid regions. The problem is solved using the method of matched asymptotic expansions and boundary conditions between the two homogeneous regions are obtained. The continuity of the velocity is recovered and a jump in the stress built using the viscosity (and not the effective viscosity) appears. This result also provides an explicit dependence of the stress jump coefficient to the internal structure of the transition zone and its sensitivity to this micro structure is recovered.

Keywords: Interface, Boundary conditions, Porous media, Incompressible flow, Matched asymptotic expansions.

Nomenclature

Da	Darcy number	<i>Greek symbols</i>	
d_p	pore size diameter	α	slip coefficient of Beavers and Joseph
h	height of the fluid channel	β	stress jump coefficient of Ochoa-Tapia <i>et al.</i>
\mathbf{K}	permeability tensor	β_p	stress jump coefficient of the present study
K_p	permeability of the homogeneous porous medium	δ	thickness of the boundary region
p	pressure	ε	δ/h , small parameter
\mathbf{u}	velocity	ϕ	porosity
U_D	Darcy velocity	ϕ_p	porosity of the homogeneous porous medium
u_B	slip velocity	Φ	fractional increase in mass flow rate
U_∞	asymptotic value of the volumetric average velocity in the porous medium as $y \rightarrow -\infty$	μ	viscosity of the fluid
<i>Special symbols</i>		μ_{eff}	effective viscosity of the porous medium
$\langle \psi \rangle$	volumetric average (or phase average)	σ	$1/\sqrt{Da}$
$\langle \psi \rangle_f$	intrinsic phase average	<i>Superscripts</i>	
		ψ^+	non-dimensional variable
		$\check{\psi}$	inner variable

4.2.1 Introduction

Transport phenomena at the interface between a porous medium and an adjacent free fluid have been the object of considerable interest because they occur in a wide range of technological applications. In all problems, the knowledge of the momentum transfer across the interface is decisive for an accurate description of the other involved transfer phenomena: heat, species,... The main modeling issues remain in the definition of appropriate boundary conditions at the fluid/porous interface, as well as in the choice of the appropriate model in the porous region.

In the study of Beavers and Joseph (1967), which is recalled in Fig. 4.1, the momentum transport in the free fluid region is described by the Stokes equations, while the Darcy's law

$$-\frac{\mu}{K_p} \langle u \rangle = \frac{d \langle p \rangle_f}{dx} \quad (4.1)$$

is used in the porous medium. Here, $\langle u \rangle$ is the volumetric average of the velocity, μ is the fluid dynamic viscosity, K_p is the permeability of the porous medium and $\langle p \rangle_f$ denotes the intrinsic average of the pressure. Since the Stokes and Darcy equations are partial differential equations of a different order, a simple semi-empirical slip boundary condition is proposed at the interface, which takes into account the Darcy velocity inside the porous layer (U_D), the permeability of the porous medium (K_p) and a slip parameter α :

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{\alpha}{\sqrt{K_p}} (u_B - U_D) \quad (4.2)$$

where $u_B = \langle u \rangle|_{y=0}$ is the free fluid velocity at the interface (slip velocity). α is a dimensionless constant which characterizes the geometry of the transition region between the free fluid region and the porous medium. This constant needs to be adjusted to obtain good agreement with the experimental data provided by Beavers and Joseph (1967).

Neale and Nader (1974) proposed to use the Darcy-Brinkman equations

$$\mu_{\text{eff}} \frac{d^2 \langle u \rangle}{dy^2} - \frac{\mu}{K_p} \langle u \rangle = \frac{d \langle p \rangle_f}{dx} \quad (4.3)$$

for the flow inside the porous medium in order to explain the semi-empirical theory of Beavers and Joseph. Here, μ_{eff} denotes the effective viscosity of the fluid in the porous medium. Since the Stokes and Brinkman equations are of the same order, they assumed continuity of both velocity and stress (built on the effective viscosity) at the interface. In that case, they obtained a solution identical to the one of Beavers and Joseph in the free fluid region ($y > 0$) provided that $\alpha = \sqrt{\mu_{\text{eff}}/\mu}$. With this formulation, it is possible to obtain information about what is happening in the boundary layer region beneath the surface of the permeable channel wall and some authors use this formulation (Rudraiah, 1985; Poulikakos et Kazmierczak, 1987; Vafai et Thiyagaraja, 1987). The main limitation of this approach lies in the fact that it is still not possible to predict accurately the effective viscosity μ_{eff} of a given porous medium. In fact, even the validity of the Brinkman correction, in which the effective viscosity appears, is challenged (Vafai et Kim, 1990; Nield, 1991; Vafai et Kim, 1995). Furthermore, Sahraoui and Kaviany (1992) have shown that with this kind of formulation (*i.e.* Brinkman and Stokes), a variable effective viscosity has to be used for an accurate prediction of the local velocity near the interface inside the porous medium.

An alternative approach has been proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a; 1995b), who developed a jump condition to account for the momentum transfer that occurs at the interface. Their work is based on the continuity of volume averaged quantities in the entire domain. They use volume averaged transport equations in the whole domain, including the heterogeneous transition region and propose a

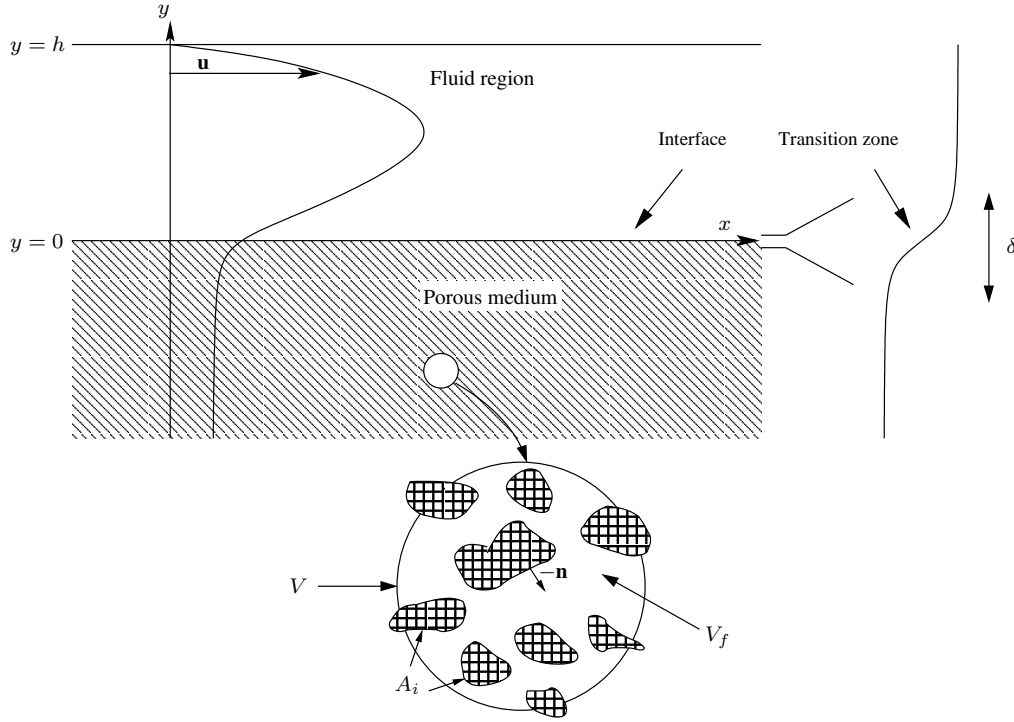


Figure 4.1: Fluid flow parallel to an infinite porous medium.

methodology to derive the corresponding jump conditions to be applied at the interface between the two homogeneous regions. They obtain the following jump condition:

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} - \frac{1}{\phi_p} \frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} = -\frac{\beta}{\sqrt{K_p}} \langle u \rangle \Big|_{y=0} \quad (4.4)$$

where β is a dimensionless parameter of the order of one. They obtain good agreement with the experimental data of Beavers and Joseph (1967) by adjusting this parameter. In their analysis, β is a complex function of a closure problem that they could not solve, even numerically. Thus, they propose to use a variable porosity model in a transition zone between the two homogeneous regions, as a substitute for the jump condition to try to make explicit the dependence of β with the structure of this transition zone. However, their approach was not successful.

Following the same idea, Goyeau *et al.* (2003) recall that “an interface is an ideal representation of a region with *continuous spatial changes of the macroscopic properties* and that the knowledge of these evolving heterogeneities is necessary for an accurate description of transport phenomena near the interface”. Thus, they introduce a heterogeneous continuously varying transition zone between the two outer homogeneous regions. They are then able to obtain an explicit function for the stress jump coefficient β and they show that β is related to the continuous spatial variations of the porous structure within the transition zone. The main limitation of their approach lies in the fact that β is also related to the variations of the velocity, which is an unknown of the problem.

In order to study this problem, different levels of description can be considered. At the microscopic level, the flow is governed by the Stokes equations in the free fluid channel and inside the pores of the permeable media. At a second level of description, the fluid and solid phases are replaced by an equivalent medium obtained by using the volume averaging method. This is the basis of the continuum approach for flows in porous media. At this continuous level, the zone located in between the two ho-

ogeneous regions (*i.e.* porous medium and free fluid), is a continuous heterogeneous transition zone, where the properties of the medium (*e.g.* porosity) encounter strong but nevertheless continuous variations. Finally, a third level of description characterized by two homogeneous regions, separated by an interface of discontinuity can be considered. The use of a single volume averaged transport equation in the whole domain, as well as the representation of this problem using a heterogeneous continuously varying transition zone of thickness δ between two outer homogeneous regions (second level approach) are attractive. Goyeau *et al.* (2003) could not give an expression for β that does not depend on the variations of the velocity because they do not explicitly solve the problem inside the heterogeneous transition zone. The objective of our study is to show that, given a transport equation in the whole domain (second level of description), it is possible to solve the problem inside the heterogeneous transition zone using the method of matched asymptotic expansions and thus to formally derive the boundary conditions to be applied at the interface separating the two homogeneous regions (third level of description). An explicit function for the stress jump coefficient which only depends on the characteristics of the porous medium (porosity and permeability) in the transition zone is thus obtained.

In the first part of this paper, the derivation of the macroscopic continuity and momentum equations in the framework of the volume averaging method are recalled, and the hypotheses used in this study are presented. Then, the problem is solved using the method of matched asymptotic expansions and boundary conditions at the interface are derived. Finally, the result is compared to the experimental data of Beavers and Joseph (1967), and to the analytical solution of Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b).

4.2.2 Macroscopic governing equations

4.2.2.1 Volume averaging

The method of volume averaging is a technique used to rigorously derive continuous macroscopic equations from the description of the problem at a microscopic scale for multiphase systems. This method allows to change the scale of description of the problem. The main steps of the method will be described, for completeness and to highlight the hypotheses used in this study.

For the problem under consideration in the present study, the flow is laminar. The Reynolds number inside the pores is supposed to be small, so that inertia effects can be neglected. The governing differential equations at the microscopic scale in the entire fluid domain (free fluid region and pores of the porous medium) are given by the Stokes equations:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.5)$$

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (4.6)$$

The boundary condition is:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{at the fluid-solid interface} \quad (4.7)$$

The macroscopic governing equations can be obtained by volume averaging the corresponding microscopic equations (4.5)-(4.6) over a representative elementary volume (REV). In the study of multiphase transport phenomena, two types of volume averages are commonly introduced (Whitaker, 1986). The first one is the *phase average* (or volumetric average) which is defined by:

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} \psi \, dV \quad (4.8)$$

for any physical variable ψ , where V_f represents the volume of the fluid phase contained within the averaging volume V (see Fig. 4.1). However, $\langle \psi \rangle$ is not equal to ψ when the latter is a constant. Therefore

a second average, the *intrinsic phase average*, is defined by:

$$\langle \psi \rangle_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \psi \, dV \quad (4.9)$$

which is more representative of the condition in the fluid phase. These two averages are related through the porosity ϕ by:

$$\langle \psi \rangle = \phi \langle \psi \rangle_f, \quad \phi = \frac{V_f}{V} \quad (4.10)$$

To derive the macroscopic governing equations, relations between the volumetric averages of derivatives and the derivatives of volumetric averages are needed. These relations are presented in a number of works (Slattery, 1972; Whitaker, 1969) and are known as the theorems of local volumetric average. For the case of a fixed solid, they can be written as:

$$\langle \nabla \psi \rangle = \nabla \langle \psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \psi \, \mathbf{n} \, dS \quad (4.11)$$

$$\langle \nabla \cdot \psi \rangle = \nabla \cdot \langle \psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_i} \psi \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (4.12)$$

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi \rangle \quad (4.13)$$

where A_i is the fluid-solid interfacial area and \mathbf{n} is the unity normal vector oriented outward from the fluid into the solid phase (see Fig. 4.1). Note that these theorems are general and that, in particular, no length scale constraint is associated to their validity.

4.2.2.2 Macroscopic continuity and momentum equations

Applying the *phase average operator* to the microscopic equations (4.5) and (4.6), using the fact that the velocity vanishes at the fluid-solid interface and that the viscosity of the fluid is constant, the following result is obtained:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (4.14)$$

$$-\nabla \langle p \rangle + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{1}{V} \int_{A_i} (\mu \nabla \mathbf{u} - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (4.15)$$

In the analysis of flows in porous media, the phase average velocity $\langle \mathbf{u} \rangle$ is preferred to the *intrinsic phase average velocity* $\langle \mathbf{u} \rangle_f$ because (i) it is representative of the mass flow rate and (ii) it is solenoidal (Eq.(4.14)). However, the *intrinsic phase average* of the pressure $\langle p \rangle_f$ is preferably used, since it more closely corresponds to the measured value of the pressure. When the size of the REV r_0 is small compared to the characteristic length scale of variation of the macroscopic quantities L , but still sufficiently large such that the local average properties (porosity) are statistically meaningful, Carbonell and Whitaker (1984) showed that:

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} \langle \psi \rangle_f \, \mathbf{n} \, dS = \langle \psi \rangle_f \frac{1}{V} \int_{A_i} \mathbf{n} \, dS \quad (4.16)$$

Another important lemma is obtained, substituting $\psi = 1$ in relation (4.11)

$$\frac{1}{V} \int_{A_i} \mathbf{n} \, dS = -\nabla \phi \quad (4.17)$$

Using Eqs. (4.10), (4.16), (4.17) and Gray's decomposition (Gray, 1975):

$$\psi = \langle \psi \rangle_f + \tilde{\psi} \quad (4.18)$$

Eq. (4.15) can be rewritten in the form (Whitaker, 1986):

$$-\nabla \langle p \rangle_f + \frac{\mu}{\phi} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle - \frac{\mu}{\phi} \nabla \phi \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle_f = -\frac{1}{V_f} \int_{A_i} (\mu \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{p} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.19)$$

The first viscous term that appears in Eq. (4.19) is the Brinkman correction. One can note that the viscosity associated with this term is the fluid viscosity μ divided by the porosity ϕ . Thus, the effective viscosity is $\mu_{\text{eff}} = \mu/\phi$. The second viscous term is referred to as the *second Brinkman correction* by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a). The closure of Eq. (4.19) is realized through the modeling of the term appearing in its right hand side which involves microscopic quantities.

Homogeneous porous region:

It has been shown (Whitaker, 1986; Quintard et Whitaker, 1994a,b) that Eq. (4.19) reduces to a simple form for a viscous flow in a homogeneous porous medium:

$$\frac{\mu}{\phi} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle - \mu \mathbf{K}^{-1} \langle \mathbf{u} \rangle = \nabla \langle p \rangle_f \quad (4.20)$$

where \mathbf{K} is the Darcy's law permeability tensor. Note that, since the porosity gradient is zero in the homogeneous porous region, the *second Brinkman correction* is null in this region.

Homogeneous fluid region:

In the homogeneous fluid region, the right hand side of Eq. (4.19) is of course zero since there is no solid, and the *second Brinkman correction* is null since the porosity is constant (equal to 1). Furthermore, for a viscous flow, Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) have shown that the point velocity is equal to the volume average velocity:

$$\langle \mathbf{u} \rangle |_{x} = \mathbf{u} |_{x} \quad (4.21)$$

when the size of the REV r_0 is small compared to the characteristic length scale of variation of the velocity. Thus, Eq. (4.19) reduces to the Stokes equation. Noting that the permeability is infinite in the homogeneous fluid region and that $\phi = 1$, Eq. (4.20) is also valid in this region.

Heterogeneous transition zone:

Representing the boundary between the porous medium and the free fluid region as a sharp interface is only an idealization of a region where the properties of the medium encounter strong but nevertheless continuous variations. At the boundary between a porous medium and either a homogeneous fluid or a homogeneous solid, the porosity varies rapidly. Thus, the *second Brinkman correction* can be important. However, in this transition zone, the length scale constraint $r_0 \ll L$ used to obtain the *second Brinkman correction* (see Eq. (4.16)) is not necessarily valid, since the macroscopic quantities encounter strong variations on a short distance. As pointed out by Whitaker (1986), there is no simple solution to the closure problem in this thin region of rapid variations.

Then, two different modeling approaches can be proposed: (i) to derive and solve a closure problem for $\tilde{\mathbf{u}}$ and \tilde{p} in the heterogeneous transition region. This approach has been used to derive jump conditions at the boundary between a porous catalyst and a homogeneous fluid (Wood *et al.*, 2000; Valdes-Parada et Ochoa-Tapia, 2005). However, to the authors knowledge, it has not been yet extended to the study of momentum transfer due to the complexity of the approach; (ii) to postulate the form of the closed equation, and to study the consequence of this choice. The second approach is followed in this study.

In order to propose a form to close Eq. (4.19) in the heterogeneous region, we suppose that no other forces than the ones acting in the homogeneous porous medium have to be taken into account in the heterogeneous transition zone. We assume that this heterogeneous transition zone of thickness δ is well represented by considering that the macroscopic properties of the medium ϕ and \mathbf{K} are continuously varying from their values in the homogeneous porous region, to their values in the homogeneous fluid

region, and that the effects of the *second Brinkman correction* are taken into account through these variations of ϕ and \mathbf{K} . We have made this choice for different reasons. First, not taking into account the *second Brinkman correction* slightly simplifies the problem. Furthermore, when studying variable porosity models for the heterogeneous transition zone, Goyeau *et al.* (2003) were able to recover the jump conditions proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker without the *second Brinkman correction*, whereas Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b) could not while using the *second Brinkman correction*. With this assumption, equation (4.20) is valid everywhere. We are aware that this is a modeling choice. However, having chosen this particular model, we propose a rigorous method to determine the relevant form for the boundary conditions that must be applied at the interface separating the porous and free fluid media. Even though this choice is questionable, we show that the derived boundary conditions are consistent with observed data and they allow to improve the results of precedent models. Furthermore, the day the closure problem would be solved in the highly heterogeneous region, this method, applied here in a simple case, could be used.

To solve the system (4.14), (4.20), one needs to specify the exact variations of ϕ and \mathbf{K} within the transition zone as well as the thickness of the transition zone δ in order to close the system. The objective of this study is to obtain a sufficiently accurate approximate solution of this system using the method of matched asymptotic expansions, without specifying *a priori* the functional dependence of ϕ and \mathbf{K} within the transition zone, in order to construct acceptable jump conditions between the two homogeneous regions.

4.2.3 One dimensional problem

For the steady-state one-dimensional flow process illustrated in Fig. 4.1, we assume that the variables are not x -dependent except for the pressure. From the continuity equation and the fact that the velocity vanishes at the upper wall (at $y = h$), it comes that the y -component of the velocity is zero. Thus, the set of equations (4.14), (4.20) reduces to:

$$\frac{\mu}{\phi} \frac{d^2 \langle u \rangle}{dy^2} - \mu K^{-1} \langle u \rangle = \frac{\partial \langle p \rangle_f}{\partial x} \quad (4.22)$$

$$\langle u \rangle = 0, \quad y = h \quad \text{no slip condition} \quad (4.23)$$

$$\langle u \rangle \quad \text{is bounded as} \quad y \rightarrow -\infty \quad (4.24)$$

where u represents the x -component of the velocity vector and K the permeability of the porous medium in the x -direction. Since the pressure gradient is zero in the y -direction (projection of the momentum equation on the y -axis), it follows that the pressure gradient $d \langle p \rangle_f / dx$ is a constant. The porosity ϕ and the permeability K are only y dependent.

4.2.3.1 Non-dimensional form of the problem

To make the system of equations (4.22)-(4.24) non-dimensional, the following scales are considered:

- h , height of the fluid channel: macroscopic length associated to the fluid region.
- $\sqrt{K_p}$, K_p being the permeability of the homogeneous porous medium: macroscopic length associated to the homogeneous porous medium.
- U_∞ , asymptotic value of the volumetric average velocity in the porous medium as $y \rightarrow -\infty$.
- δ , thickness of the boundary region.

Let us denote the non-dimensional variables by a superscript $+$. The following dimensionless variables are introduced:

$$y^+ = \frac{y}{h}, \quad U^+ = \frac{\langle u \rangle}{U_\infty}, \quad K^+ = \frac{K}{K_p}, \quad P^+ = \langle p \rangle_f \frac{h}{U_\infty \mu}, \quad \phi^+ = \phi \quad (4.25)$$

The Darcy number $Da = K_p/h^2$ is also introduced. The dimensionless form of the boundary value problem (4.22)-(4.24) is given by:

$$\frac{1}{\phi^+} \frac{d^2 U^+}{dy^{+2}} - \frac{1}{Da} \frac{U^+}{K^+} = \frac{dP^+}{dx^+} \quad (4.26)$$

$$U^+ = 0, \quad y^+ = 1 \quad \text{no slip condition} \quad (4.27)$$

$$U^+ \rightarrow 1 \quad \text{when} \quad y^+ \rightarrow -\infty \quad (4.28)$$

4.2.3.2 Method of matched asymptotic expansions

The method of matched asymptotic expansions is applicable to the resolution of differential equations in which a small parameter is present. This method is classical (Zwillinger, 1989; Zeytounian, 1986; Van Dyke, 1975) and commonly used to study diffuse interface problems (Emmerich, 2003). The main steps of the method, and in particular the origin of the matching conditions, are given only for completeness concern. In the present study, the small parameter is the ratio δ/h and will be noted ε . This method consists in dividing the resolution domain in different sub-regions: an *outer region*, where the variables of the system are slowly varying, and an *inner region*, where these variables are rapidly varying. In our study, the heterogeneous transition zone is the inner region where the variables such as the porosity, the permeability and the velocity are rapidly varying, while each homogeneous region (porous medium and free fluid) is an outer region. Then a change of variable is made in the inner region, since variations of order one are expected to take place in this thin region and a new space variable is introduced:

$$\check{y}^+ = \frac{y^+}{\varepsilon} \quad (4.29)$$

Let f be any physical variable. Then, \check{f} is introduced in the inner region:

$$\check{f}(\check{y}^+) = f\left(\frac{y^+}{\varepsilon}\right) \quad (4.30)$$

$\check{f}(\check{y}^+)$ varies more slowly than $f(y^+)$ in the inner region. Hereafter, the notation f will designate any variable in the outer regions, while \check{f} will designate this variable in the inner region.

The differential equations are solved separately in each region, using an asymptotic expansion in ε . For example, at first order, the solutions are sought for in the form:

$$f(y^+, \varepsilon) = f^{(0)}(y^+) + \varepsilon f^{(1)}(y^+) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.31)$$

$$\check{f}(\check{y}^+, \varepsilon) = \check{f}^{(0)}(\check{y}^+) + \varepsilon \check{f}^{(1)}(\check{y}^+) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.32)$$

However, in order to solve completely the differential equations in each region, boundary conditions are needed. The missing boundary conditions are obtained by matching the solutions of the different regions using the following matching principles (Zwillinger, 1989):

$$\lim_{y^+ \rightarrow 0^+} f(y^+, \varepsilon) = \lim_{\check{y}^+ \rightarrow +\infty} \check{f}(\check{y}^+, \varepsilon) \hat{=} f_i^+ \quad (4.33)$$

$$\lim_{y^+ \rightarrow 0^-} f(y^+, \varepsilon) = \lim_{\check{y}^+ \rightarrow -\infty} \check{f}(\check{y}^+, \varepsilon) \hat{=} f_i^- \quad (4.34)$$

These relations mean that, for the study of the outer regions, the interface is viewed as a surface of discontinuity located in 0^+ (respectively 0^-), and for the study of the inner region, the outer regions are supposed to be reached asymptotically in $+\infty$ and $-\infty$. f_i^+ (respectively f_i^-) is the value of f at the interface “side +” (respectively “side -”, and is the same in the inner and the outer studies. Relations

(4.33) and (4.34) are then made explicit. Using an asymptotic expansion of $f^{(0)}(y^+)$ as $y^+ \rightarrow 0^+$ (respectively $y^+ \rightarrow 0^-$), equation (4.31) can be rewritten at first order:

$$f(y^+, \varepsilon) = \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} f^{(0)}(y^+) + \varepsilon \left(\check{y}^+ \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} \frac{df^{(0)}}{dy^+} + \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} f^{(1)}(y^+) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.35)$$

Using equations (4.32), (4.33), (4.34) and (4.35), the following matching conditions are obtained at first order:

$$\lim_{\check{y}^+ \rightarrow \pm\infty} \check{f}^{(0)} = \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} f^{(0)} \quad (4.36)$$

$$\lim_{\check{y}^+ \rightarrow \pm\infty} \check{f}^{(1)} = \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} f^{(1)} + \check{y}^+ \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} \frac{df^{(0)}}{dy^+} \quad (4.37)$$

Following this approach, matching conditions can be derived at higher order and for the derivatives of f (e.g. Zwillinger (1989), Fouillet (2003)). In this study, the following matching conditions will also be used:

$$\lim_{\check{y}^+ \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{f}^{(0)}}{d\check{y}^+} = 0 \quad (4.38)$$

$$\lim_{\check{y}^+ \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{f}^{(1)}}{d\check{y}^+} = \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} \frac{df^{(0)}}{dy^+} \quad (4.39)$$

$$\lim_{\check{y}^+ \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{f}^{(2)}}{d\check{y}^+} = \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} \frac{df^{(1)}}{dy^+} + \check{y}^+ \lim_{y^+ \rightarrow 0^\pm} \frac{d^2 f^{(0)}}{dy^{+2}} \quad (4.40)$$

Using these relations to match the solutions in the different regions, an approximate solution of the equations is obtained in the whole domain. Further explanations about this method can be found in (Zwillinger, 1989; Zeytounian, 1986; Van Dyke, 1975; Fouillet, 2003).

Outer region:

To make an asymptotic expansion in ε of Eq. (4.26), we need to specify the variations of the porosity and the permeability in the outer region. At this point, we just assume that they are constant at least to second order:

$$\phi^+ = \begin{cases} \phi_p + o(\varepsilon^2), & y^+ < 0 \\ 1 + o(\varepsilon^2), & y^+ > 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{K^+} = \begin{cases} 1 + o(\varepsilon^2), & y^+ < 0 \\ 0 + o(\varepsilon^2), & y^+ > 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

Such variations can be obtained by considering, for example, that the porosity and the inverse of the permeability vary as hyperbolic tangent functions:

$$\phi^+ = \frac{1 - \phi_p}{2} \tanh\left(\frac{y^+}{\varepsilon}\right) + \frac{1 + \phi_p}{2} \quad (4.43)$$

$$\frac{1}{K^+} = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{y^+}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} \quad (4.44)$$

For $y^+ < 0$, Eq. (4.26) reduces to:

$$\frac{1}{\phi_p} \frac{d^2 (U^{+(0)} + \varepsilon U^{+(1)} + o(\varepsilon))}{dy^{+2}} - \frac{(U^{+(0)} + \varepsilon U^{+(1)} + o(\varepsilon))}{Da} = \frac{dP^+}{dx^+} \quad (4.45)$$

The analytical solutions of these two problems (at order 0 and order 1) are easily determined:

$$U^{+(0)}(y^+) = 1 + C_1^{(0)} \exp\left(\sqrt{\frac{\phi_p}{Da}} y^+\right), \quad y^+ < 0 \quad (4.46)$$

$$U^{+(1)}(y^+) = C_1^{(1)} \exp\left(\sqrt{\frac{\phi_p}{Da}} y^+\right), \quad y^+ < 0 \quad (4.47)$$

and the following relation is also obtained:

$$-Da \frac{dP^+}{dx^+} = 1 \quad (4.48)$$

For $0 < y^+ < 1$, Eq. (4.26) reduces to:

$$\frac{d^2 (U^{+(0)} + \varepsilon U^{+(1)} + o(\varepsilon))}{dy^{+2}} = \frac{dP^+}{dx^+} \quad (4.49)$$

The analytical solutions of these two problems are given by:

$$U^{+(0)}(y^+) = -\frac{1}{2Da} ((y^+)^2 - 1) + C_2^{(0)}(y^+ - 1), \quad 0 < y^+ < 1 \quad (4.50)$$

$$U^{+(1)}(y^+) = C_2^{(1)}(y^+ - 1), \quad 0 < y^+ < 1 \quad (4.51)$$

The four constants of integration $C_1^{(0)}$, $C_1^{(1)}$, $C_2^{(0)}$ and $C_2^{(1)}$ in the expressions for the velocity will be determined later, using the inner solutions and the matching conditions.

Inner region:

In order to study the inner problem, the space variable (4.29) is used. Using this variable, Eq. (4.26) can be written as:

$$\frac{1}{\check{\phi}^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 \check{U}^+}{d\check{y}^{+2}} - \frac{1}{Da} \frac{\check{U}^+}{\check{K}^+} = \frac{dP^+}{dx^+} \quad (4.52)$$

To solve this equation, we need to specify the functional dependence of the porosity and the permeability in the transition zone. At this point, we just assume that these functions are varying as y/δ . It only implies that they are rapidly varying in the transition zone, as expected. Furthermore, since $\check{y}^+ = y^+/\varepsilon = y/\delta$, it follows that $\check{\phi}^+$ and \check{K}^+ do not depend on ε . Thus, the asymptotic expansion in ε of Eq. (4.52) reads:

$$\frac{1}{\check{\phi}^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 (\check{U}^{+(0)} + \varepsilon \check{U}^{+(1)} + \varepsilon^2 \check{U}^{+(2)} + o(\varepsilon^2))}{d\check{y}^{+2}} - \frac{1}{Da} \frac{(\check{U}^{+(0)} + o(1))}{\check{K}^+} = \frac{dP^+}{dx^+} \quad (4.53)$$

and we have:

$$\text{Order 0:} \quad \frac{d^2 \check{U}^{+(0)}}{d\check{y}^{+2}} = 0 \quad (4.54)$$

$$\text{Order 1:} \quad \frac{d^2 \check{U}^{+(1)}}{d\check{y}^{+2}} = 0 \quad (4.55)$$

$$\text{Order 2:} \quad \frac{d^2 \check{U}^{+(2)}}{d\check{y}^{+2}} = \check{\phi}^+ \frac{dP^+}{dx^+} + \frac{\check{\phi}^+}{Da} \frac{\check{U}^{+(0)}}{\check{K}^+} \quad (4.56)$$

The zeroth and first order analytical solutions can be expressed as:

$$\check{U}^{+(0)} = k_1 \check{y}^+ + k_2 \quad (4.57)$$

$$\check{U}^{+(1)} = k_3 \check{y}^+ + k_4 \quad (4.58)$$

where the constants of integration $k_i, i \in \{1..4\}$ in the expressions for the velocity will be determined using the outer solutions and the matching conditions.

Zeroth order solution:

The inner solution of the problem is given by Eqs. (4.56), (4.57) and (4.58) . In particular, these equations are valid for all $\check{y}^+ \in \mathbb{R}$. Accounting for the matching conditions (4.36), (4.38) and (4.39) applied to the velocity, it comes:

$$k_1 = 0, \quad \text{Thus} \quad \check{U}^{+(0)} = k_2 \quad (4.59)$$

$$k_2 = \frac{1}{2 Da} - C_2^{(0)} = 1 + C_1^{(0)} \quad (4.60)$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{\phi_p}{Da}} C_1^{(0)} = C_2^{(0)} = \frac{dU^{+(0)}}{dy^+} \Big|_{y^+=0} \quad (4.61)$$

The system formed by Eqs. (4.60) and (4.61) is then solved:

$$C_1^{(0)} = \frac{\sigma^2 - 2}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \quad (4.62)$$

$$C_2^{(0)} = \sigma\sqrt{\phi_p} \frac{\sigma^2 - 2}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \quad (4.63)$$

where $\sigma = 1/\sqrt{Da}$, following the nomenclature introduced by Beavers and Joseph (1967).

Thus, we obtain the following boundary conditions *at order 0*:

$$\langle u \rangle \Big|_{y=0^+} = \langle u \rangle \Big|_{y=0^-} \quad (4.64)$$

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} = \frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} \quad (4.65)$$

These relations mean that, *at order 0*, the volume average velocity $\langle u \rangle$ and the constraint built on the volume average velocity and the viscosity of the fluid $\mu d\langle u \rangle / dy$ are constant across the interface. The second boundary condition (Eq. (4.65)) is different from that used by Neale and Nader (1974). Indeed, Neale and Nader assume the continuity of the shear stress built using the effective viscosity (“effective” stress) whereas our development shows that it is the stress built using the viscosity of the fluid which is continuous at zeroth order across the interface. In fact this result is linked to the form of Eq. (4.20). If the ratio μ/ϕ was inside the divergence operator, we would obtain a jump condition for the “effective” stress. It is not easy to conclude if one should or not put this ratio inside the divergence operator. Indeed, the closure expression given by Eq. (4.20) is obtained for a homogeneous porous medium, for which both formulations are equivalent since the porosity is constant. And for highly heterogeneous porous media, for which the difference is important, it is not possible to close the problem as discussed in Section 4.2.2.2. We made the choice to let the ratio μ/ϕ outside the divergence operator because, using the up-scaling method, it appears first outside of the divergence. In the literature, both approaches can be found. Neale and Nader (1974) keep this ratio $1/\phi$ (or similarly μ_{eff}) outside the divergence operator, while Goyeau *et al.* (2003) put this ratio inside the divergence operator. In the study of Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a; 1995b), the situation is even more complex since the ratio μ/ϕ is first kept outside the divergence operator, before being introduced inside the divergence operator in order to arrange the Brinkman correction term into the form of a divergence to derive the jump conditions for the effective stress. We emphasize that the location of this ratio will remain a modeling choice until the closure problem will be solved in the highly heterogeneous region. However, once the choice is made to let this ratio outside of the divergence operator, our development shows that it is the stress built with the fluid viscosity which is continuous across the interface at zeroth order and not the stress built with the effective viscosity.

The zeroth order solution of the problem is given in the outer regions by:

$$\langle u \rangle = U_\infty \left(1 + \frac{\sigma^2 - 2}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \exp \left(\sqrt{\frac{\phi_p}{K_p}} y \right) \right), \quad y \leq 0 \quad (4.66)$$

$$\langle u \rangle = U_\infty \left(\frac{\sigma(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} + \sqrt{\phi_p} \frac{\sigma^2 - 2}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \left(\frac{y}{\sqrt{K_p}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{K_p}} \right)^2 \right), \quad 0 \leq y \leq \quad (4.67)$$

This result is different from the one obtained by Neale and Nader (1974), though very similar. The solution in the free fluid region ($y > 0$) is identical provided that their parameter $\beta = \sqrt{\mu_{\text{eff}}/\mu}$ is replaced everywhere by $\sqrt{\phi_p}$. However, this identification does not work for the solution in the porous medium region ($y < 0$) because their parameter β should be replaced by $1/\sqrt{\phi_p}$ in the exponential function. Furthermore, we note that only the second identification $\sqrt{\mu_{\text{eff}}/\mu} = 1/\sqrt{\phi_p}$ is consistent with our model (see Eq. (4.20)). This difference between the two results is a direct consequence of the boundary condition (4.65) which is different from their hypothesis to consider the continuity of the effective shear stress at the interface and is itself a consequence of our choice to keep the ratio μ/ϕ outside the divergence operator.

First order solution:

Accounting for the matching condition (4.37) applied to the velocity, the following result is obtained:

$$k_4 = C_1^{(1)} = -C_2^{(1)} \quad (4.68)$$

This relation shows that, *at order 1* in ε , the volume average velocity across the interface is still constant. To obtain another relation between $C_1^{(1)}$ and $C_2^{(1)}$, we have to solve the inner problem at second order. Using Eq. (4.48), equation (4.56) can be written as follows:

$$\frac{d}{d\check{y}^+} \left(\frac{d\check{U}^{+(2)}}{d\check{y}^+} + \check{y}^+ \left(-\phi_\pm \frac{dP^+}{dx^+} - \frac{\phi_\pm U_\pm}{Da K_\pm} \right) \right) = (\check{\phi}^+ - \phi_\pm) \frac{dP^+}{dx^+} + \left(\frac{\check{\phi}^+ \check{U}^{+(0)}}{Da \check{K}^+} - \frac{\phi_\pm U_\pm}{Da K_\pm} \right) \quad (4.69)$$

where ψ_\pm are the constant asymptotic values of the corresponding quantities as $\check{y}^+ \rightarrow \pm\infty$. Accounting for the matching condition (4.40), it comes:

$$\lim_{\check{y}^+ \rightarrow +\infty} \frac{d\check{U}^{+(2)}}{d\check{y}^+} = C_2^{(1)} - \frac{\check{y}^+}{Da} \quad (4.70)$$

$$\lim_{\check{y}^+ \rightarrow -\infty} \frac{d\check{U}^{+(2)}}{d\check{y}^+} = \sqrt{\frac{\phi_p}{Da}} C_1^{(1)} + \check{y}^+ \frac{\phi_p}{Da} C_1^{(0)} \quad (4.71)$$

Equation (4.69) is first integrated from y_i , the exact position of the interface which is located somewhere in the heterogeneous transition zone, to $+\infty$. Using the asymptotic values at $+\infty$ and relation (4.70), one gets:

$$C_2^{(1)} - \frac{d\check{U}^{+(2)}}{d\check{y}^+}(y_i) = \frac{-1}{Da} \int_{y_i}^{+\infty} (\check{\phi}^+ - \phi_+) + \int_{y_i}^{+\infty} \left(\frac{\check{\phi}^+ \check{U}^{+(0)}}{Da \check{K}^+} \right) + \frac{y_i}{Da} \quad (4.72)$$

Equation (4.69) is then integrated from $-\infty$ to y_i . Using the asymptotic values at $-\infty$ and relation (4.71), one gets:

$$\frac{d\check{U}^{+(2)}}{d\check{y}^+}(y_i) - \sqrt{\frac{\phi_p}{Da}} C_1^{(1)} = \frac{-1}{Da} \int_{-\infty}^{y_i} (\check{\phi}^+ - \phi_-) + \int_{-\infty}^{y_i} \left(\frac{\check{\phi}^+ \check{U}^{+(0)}}{Da \check{K}^+} - \frac{\phi_p \check{U}^{+(0)}}{Da} \right) - y_i \frac{\phi_p}{Da} + y_i \frac{\phi_p \check{U}^{+(0)}}{Da} \quad (4.73)$$

By adding Eqs. (4.72) and (4.73), and using the fact that $\check{U}^{+(0)}$ is constant in the transition zone, we obtain the following result:

$$C_2^{(1)} - \sqrt{\frac{\phi_p}{Da}} C_1^{(1)} = \frac{\check{U}^{+(0)}}{Da} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} - \frac{1}{Da} (\check{\phi}^+)^{ex} \quad (4.74)$$

where the *excess quantity* is defined by:

$$\psi^{ex} = y_i (\psi_- - \psi_+) + \int_{-\infty}^{y_i} (\psi - \psi_-) + \int_{y_i}^{+\infty} (\psi - \psi_+) \quad (4.75)$$

for any physical variable ψ . Equation (4.74) shows that, *at order 1 in ε* , the constraint is not continuous.

In Fig. 4.2 we have plotted ψ , ψ_+ and ψ_- . The corresponding *excess quantity* ψ^{ex} is related to the shaded areas. Using this definition for the *excess quantity*, one can verify that *its value is independent of the exact location of the interface y_i* . This is important since the exact location of the interface cannot be known. Indeed, as already mentioned, the interface is only an ideal representation of a region with continuous but rapidly varying properties. For the model proposed by Beavers and Joseph, Saffman (1971), Sahraoui and Kaviany (1992) and Larson and Higdon (1986) underlined the dependence of α on the exact location of the interface, whereas this precise location could not be accurately determined. Our development shows that such dependence does not exist, even though there does exist a dependence on the structure of the transition zone through the excess quantities as shown in the following section.

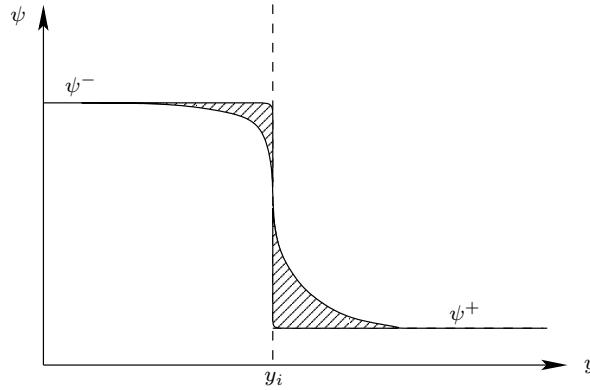


Figure 4.2: Determination of an excess function.

Then the system formed by Eqs. (4.68) and (4.74) is solved to determine $C_1^{(1)}$ and $C_2^{(1)}$:

$$C_2^{(1)} = \frac{\sigma^2}{(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \left(\check{U}^{+(0)} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} - (\check{\phi}^+)^{ex} \right) = -C_1^{(1)} \quad (4.76)$$

The first order solution of the problem is given in the outer regions by:

$$\langle u \rangle = U_\infty \left(\left[\sqrt{\phi_p} \frac{\sigma^2 - 2}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} + \frac{\delta}{h} \frac{\sigma}{1 + \sigma\sqrt{\phi_p}} \left(\frac{\sigma(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} - (\check{\phi}^+)^{ex} \right] \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{y}{\sqrt{K_p}} - \sigma \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{K_p}} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right), \quad 0 \leq y \leq h \quad (4.77) \right.$$

$$\langle u \rangle = U_\infty \left(1 + \left(\frac{\sigma^2 - 2}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} + \frac{\delta}{h} \frac{\sigma^2}{(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \left(-\frac{\sigma(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} + \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} \right) \exp \left(\sqrt{\frac{\phi_p}{K_p}} y \right) \right), \quad y \leq 0 \quad (4.78)$$

This solution verifies the following boundary conditions:

$$\langle u \rangle \Big|_{y=0^+} = \langle u \rangle \Big|_{y=0^-} \quad (4.79)$$

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} = U_\infty \frac{\delta}{K_p} \left(\frac{\sigma(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} - \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} \right) \quad (4.80)$$

We note that the volume average velocity is still continuous at first order in ε , whereas the stress exhibits a discontinuity at first order in ε . Since the velocity is continuous at the interface, this result can be expressed using the slip velocity defined here as $u_B = \langle u \rangle \Big|_{y=0}$:

$$\langle u \rangle \Big|_{y=0} = U_\infty \frac{\sigma(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \quad (4.81)$$

and the pressure gradient:

$$-\frac{d\langle p \rangle_f}{dx} = \mu \frac{U_\infty}{K_p} \quad (4.82)$$

Then, Eq. (4.80) reduces to:

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} = \frac{\delta}{K_p} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} \langle u \rangle \Big|_{y=0} + \frac{\delta}{\mu} \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \quad (4.83)$$

This expression is relevant to understand the phenomena to which the different excess quantities are related. However, in order to compare this result with the one proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a), the jump is expressed using only the slip velocity $\langle u \rangle \Big|_{y=0}$. At first order, it comes:

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} - \frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} = \frac{\delta}{K_p} \left(\left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} - \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} \frac{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})}{\sigma(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})} \right) \langle u \rangle \Big|_{y=0} \quad (4.84)$$

This result is similar to the one proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a), and comparing with their result (4.4), we have:

$$\beta_p = -\frac{\delta}{\sqrt{K_p}} \left(\left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} - \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} \frac{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})}{\sigma(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})} \right) \quad (4.85)$$

This result provides an explicit dependence of β_p with the structure of the transition zone. One has to note that the jump condition (Eq. (4.83)) is built on the 'fluid' stress, whereas the jump condition proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) was built on the 'effective' stress. It explains why the porosity does not appear on the left hand side of Eq. (4.83) unlike in the solution they proposed. It is also worth noting that the dependence of β_p on the parameter $\delta/\sqrt{K_p}$ predicted by Ochoa-Tapia and Whitaker (Ochoa-Tapia et Whitaker, 1995a) naturally appears in our development. We also note the β_p dependence on the other length scale ratio σ .

For the sake of simplicity, we introduce the following notations:

$$\gamma = \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex}, \quad \lambda = \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} \quad (4.86)$$

Determination of the excess quantities:

The last unknowns of the problem are the values of the excess quantities γ and λ (see Eq. (4.86)). Because of its nature, an excess quantity can be either positive or negative. If the physical variables ϕ and ϕ/K were symmetric in the transition zone, the corresponding excess quantities would be null. Thus, the excess quantities are related to a loss of symmetry. They quantify the heterogeneity of the porous medium structure in the transition zone. In order to understand the phenomena to which they are associated, we go back to Eqs. (4.56) and (4.83). Eq. (4.56) gives the momentum balance inside the transition zone, whereas Eq. (4.83) characterizes the consequences of this momentum balance for the outer solution. λ can be related to the porosity in front of the pressure gradient, which is constant, and γ can be associated to the ratio ϕ/K in front of the velocity term. We recall that the velocity $\check{U}^{+(0)}$ is constant, since the velocity is constant at zeroth order in the inner region. We deduce that an asymmetric porosity in the transition zone leads to an asymmetric effective viscosity $\mu_{\text{eff}} = \mu/\phi$ which influences the velocity gradient in the transition zone, the consequence being a velocity gradient jump for the outer solution. Thus, λ allows to quantify the asymmetric effective viscosity of the transition region and we note that it is indeed the ratio λ/μ which appears in Eq. (4.83). Likewise, the asymmetry of the ratio ϕ/K results in an asymmetry in the drag, which also influences the velocity gradient in the transition zone, the consequence being a velocity gradient jump for the outer solution. Thus, γ allows to quantify the asymmetric drag of the transition region. The difference between the two phenomena allows to understand why the σ dependence of β only appears in front of λ . γ being associated to an asymmetry of the drag at constant velocity, it cannot keep the memory of the height of the channel ($\sigma = h/\sqrt{K_p}$), whereas λ can, since it is related to the pressure term. Yet, these two phenomena are intimately linked, and we cannot think of an experiment that would allow us to determine these two quantities independently.

To obtain an idea of the order of magnitude of the excess quantities γ and λ , we compute their values for different variations of ϕ and K in the transition zone. First, we assume that the variations of the porosity and of the inverse of the permeability are linear. We obtain:

$$\lambda = 0, \quad \gamma = \frac{1 - \phi_p}{6} \quad (4.87)$$

If we assume a variation of these quantities following a hyperbolic tangent, we obtain:

$$\lambda = 0, \quad \gamma = \frac{1 - \phi_p}{2} \quad (4.88)$$

To obtain a non zero value for λ , one has to consider a loss of symmetry for the porosity. This is not the case for γ , since its value can be non zero for symmetric variations of ϕ and $1/K$.

If we assume that the porosity is bounded in the heterogeneous region by its two asymptotic values in the homogeneous region (no material storage in the transition zone), it follows that the corresponding excess quantity is bounded by:

$$-\frac{1 - \phi_p}{2} \leq \lambda \leq \frac{1 - \phi_p}{2} \quad (4.89)$$

If we make the same assumption for the inverse of the permeability, it follows that:

$$-\frac{\phi_p}{2} \leq \gamma \leq 1 - \frac{\phi_p}{2} \quad (4.90)$$

We cannot provide better predictions for the values of the excess quantities, since we do not know the functional dependence of the porosity and permeability within the transition zone. However, the above relations show that they should be of the order of one, either negative or positive, if we assume no material storage in the transition zone.

4.2.4 Comparisons with experimental data

Beavers and Joseph (1967) carried out comparisons between theory and experiment in terms of the fractional increase in mass flow rate Φ due to the presence of the porous wall:

$$\Phi = \frac{Q_p - Q_i}{Q_i} \quad (4.91)$$

where Q_p is the mass flow rate within the free fluid region for a given porous medium, while Q_i is the mass flow rate for an impermeable wall. The comparison with the experimental results is performed using the characteristics of the porous materials used by Beavers and Joseph (1967) in their experiments as reported by Goyeau *et al.* (2003) and recalled in Table 4.1. According to theoretical studies (Larson et Higdon, 1986, 1987; Sahraoui et Kaviany, 1992), δ is of the order of the average pore diameter of the porous medium d_p . We use this assumption to compute the parameter $\delta/\sqrt{K_p}$. The obtained values are presented on Table 4.1. Using only the zeroth order solution for the velocity, the following result is obtained:

$$\Phi^{(0)} = \frac{3(\sigma + 2\sqrt{\phi_p})}{\sigma(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \quad (4.92)$$

This expression is identical to the one derived by Beavers and Joseph (1967) after identifying their parameter α with $\sqrt{\phi_p}$. However, this zeroth order result is not sufficient. Indeed, whereas the four foamental materials have the same porosity (see Table 4.1), Beavers and Joseph use four different values of α to fit their experimental results. Using the first order solution for the velocity, one obtains:

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(0)} + \frac{\delta}{\sqrt{K_p}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\phi_p} + 1} \left(\frac{6}{\sigma} \lambda - \sigma \Phi^{(0)} \gamma \right) \quad (4.93)$$

In Figs. 4.3-4.6, we compare the analytical solutions given by equations (4.92)-(4.93) with the experimental data of Beavers and Joseph (1967).

Porous specimen	Permeability K_p	Pore size	Porosity ϕ_p	$\delta/\sqrt{K_p}$
Foamental	7.1×10^{-9}	-	0.78	-
Foamental A	9.7×10^{-9}	4.06×10^{-4}	0.78	4.12
Foamental B	3.94×10^{-8}	8.64×10^{-4}	0.78	4.35
Foamental C	8.2×10^{-8}	1.14×10^{-3}	0.79	3.98
Aloxite 1	6.45×10^{-10}	3.30×10^{-4}	0.58	12.99
Aloxite 2	1.6×10^{-9}	6.86×10^{-4}	0.52	17.15

Table 4.1: Geometrical characteristics of the porous specimens used in the Beavers and Joseph experiments.

For the first foamental material (Fig. 4.3), good agreement between theory and experiment is obtained at zeroth order $\Phi^{(0)}$. For the three other foamental materials (Fig. 4.4), the zeroth order solution is not sufficiently accurate, even though the order of magnitude is correct. Better agreement is obtained when considering the first order solution $\Phi^{(1)}$, for values of γ ranging from -0.05 to 0.16 , and considering $\lambda = 0$. This result is consistent with the fact that γ should be in the range $[-0.39, 0.61]$ (Eq. (4.90)) and that its sign may be either positive or negative due to the nature of an excess quantity, as discussed in the previous section. We indicate that we always first tried to fit the experimental data with $\lambda = 0$, since a non zero value of λ means a loss of symmetry, which is not the case for γ as pointed out in the previous section.

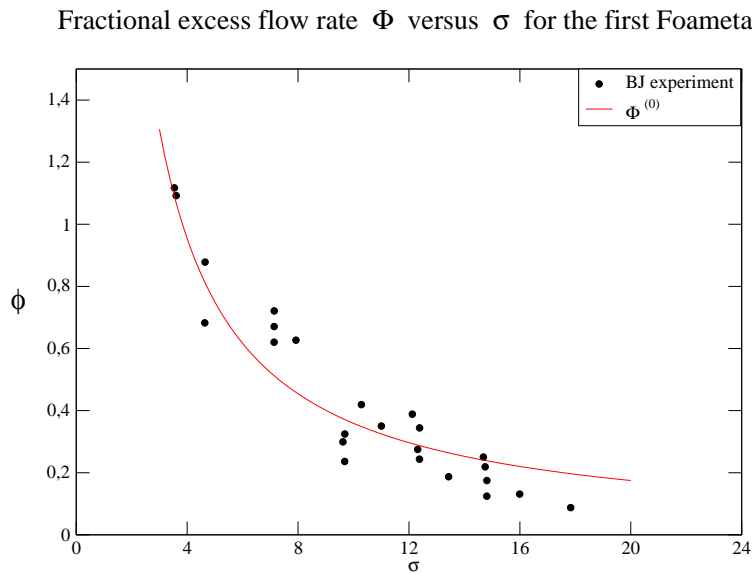


Figure 4.3: Comparison between theories and experiments for the first foametal.

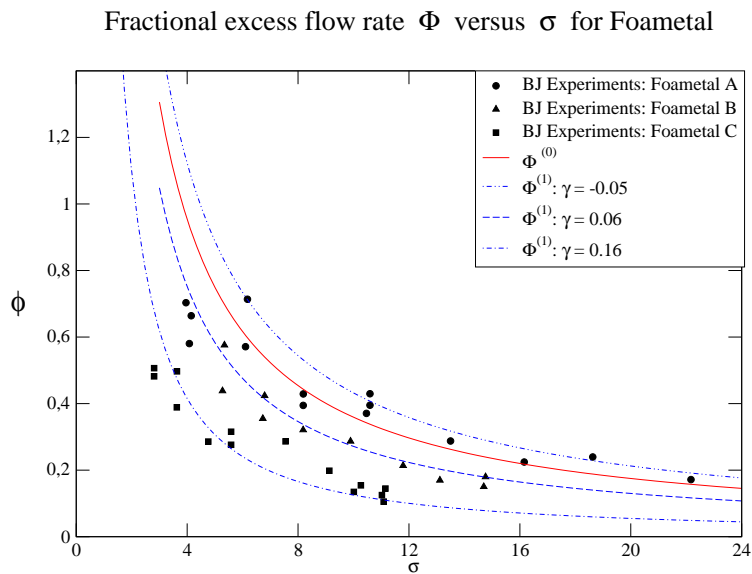


Figure 4.4: Comparison between theories and experiments for foametal A, B and C.

For the Aloxite experiments the zeroth order solution does not fit at all the experiments (Figs. 4.5-4.6). However, good agreement is obtained when considering the first order solution $\Phi^{(1)}$, for values of γ ranging from -0.18 to -0.3 , and considering $\lambda = 0$. These values of γ are of the same order as the one used to fit the foametal experiments. The significant difference comes from the value of the ratio $\delta/\sqrt{K_p}$ which is greater for the aloxite blocks. These first order results, obtained with $\lambda = 0$, are very similar to the ones proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b), as can be seen in Figs 4.5-4.6.

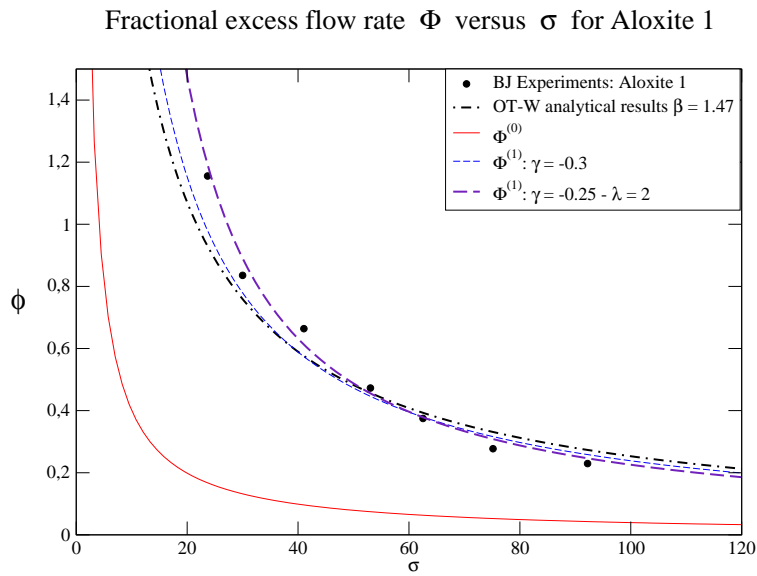


Figure 4.5: Comparison between theories and experiments for Aloxite 1.

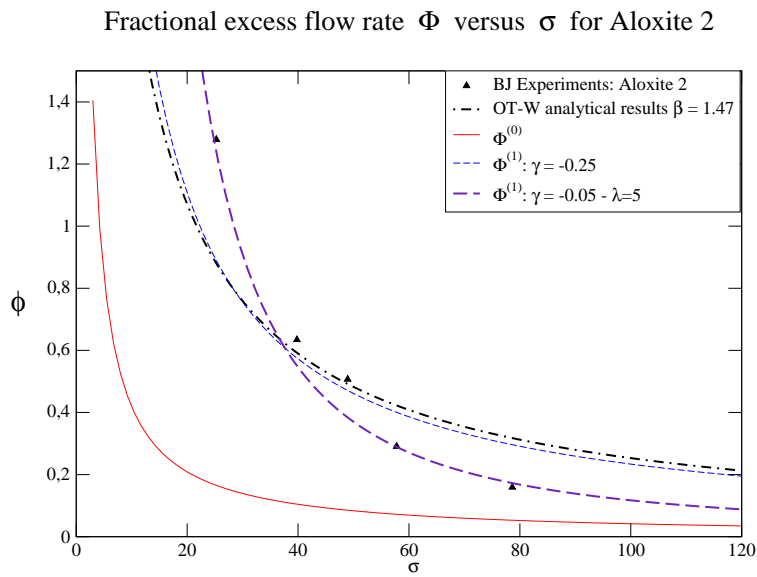


Figure 4.6: Comparison between theories and experiments for Aloxite 2.

One can note that for the aloxite experiment, the slope of the fractional increase in mass flow rate Φ versus σ is still not accurately predicted by these two models. A better result is obtained by taking non zero values for λ , which means that we consider that the porosity is no longer symmetric in the transition zone. However, the values of λ that best fit the experimental values (2 and 5) are out of the expected range predicted by Eq. (4.89). This could be explained if we suppose that the thickness of the heterogeneous transition zone has been underestimated by a factor 8 for the aloxite 1 and by a factor 20 for the

Porous specimen	γ	λ	β_p	β (Ochoa-Tapia and Whitaker)
Foametal	0	0	0	0.6
Foametal A	- 0.05	0	0.206	0.7
Foametal B	0.06	0	- 0.261	0
Foametal C	0.16	0	- 0.637	- 1
Aloxite 1 (first result)	- 0.3	0	3.89	1.47
Aloxite 1 (second result)	- 0.25	2	[5.21 - 3.64]	1.47
Aloxite 2 (first result)	- 0.25	0	4.28	1.47
Aloxite 2 (second result)	- 0.05	5	[7.02 - 2.10]	1.47

Table 4.2: Comparison of the stress jump parameters β_p and β .

aloxite 2. This would imply significant heterogeneous regions at the interface of the porous material. It could be the consequence of the structure of the aloxite material which has probably a very irregular pore distribution close to the interface (Beavers et Joseph, 1967). The other possible explanation is related to the validity of the assumption that no material storage occurs in the transition zone (Eq. (4.89)). It might be possible that, during the machining, the material suffered at its surface, leading to a decrease of the material porosity beneath the interface. This would imply large values of λ . The two combined effects (significant size of the heterogeneous region and material storage) could explain the very large value of λ obtained for the aloxite 2. To conclude on this point, more informations about the surface micro structure of the materials used for the experiments are necessary.

In order to make a quantitative comparison with the values of β estimated by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b), the values for β_p (Eq. 4.85), obtained once λ and γ have been adjusted to fit the Beavers and Joseph experiment, are shown in table 4.2. When λ is non zero (Aloxite experiments), β_p is no longer a constant and depends on σ . Thus, the extremum values of β_p obtained for $\sigma = 20$ and $\sigma = 100$ are presented. As can be seen on this table, the values obtained for β_p are different from the one proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b) to fit the Beavers and Joseph experiment. It is not surprising, since, as mentioned before, the stress jump conditions are not built on the same stress.

These results show that the increase in mass flow rate Φ is very sensitive to the value of the excess quantities, which is unfortunately unknown and related to the surface of the porous medium. We recall that Beavers et al. (1974) found that the value of the slip coefficient α for a certain material doubled after its surface was remachined. Sahraoui and Kaviany (1992) also established that the surface structure (structural non-uniformities at the surface) influences significantly the slip coefficient α . They concluded that α was mainly a surface property. This strong dependence is highlighted by our developments. Furthermore, our analysis directly relates these excess quantities to the variations of the porosity and of the permeability in the transition zone. Therefore, if, by any mean (experimentally or theoretically), we could have access to this information, we could determine their values.

Finally, we emphasize that thanks to this analysis, unlike the studies of Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b) and Goyeau et al. (2003), it is no longer required to solve Eq. (4.22) in the whole channel to obtain the increase in mass flow rate for given variations of porosity and permeability in the heterogeneous transition zone, and to start again the simulation for different values of h . One just needs to compute the excess quantities corresponding to the chosen variations of porosity and permeability.

4.2.5 Discussion

The first subject of discussion involves the ratio $\mu/\phi = \mu_{\text{eff}}$. In most studies, this ratio is kept outside of the divergence operator of the Darcy-Brinkman equation (see Eq. (4.20)), whereas the continuity of the 'effective' stress is considered. Our analysis shows that this is inconsistent, even though it is not easy to conclude where one should put this ratio. Indeed, as already pointed out, the closure of the averaging problem is always obtained for homogeneous regions for which both formulations are equivalent since the porosity is constant. Furthermore, these two formulations lead to very similar results in terms of the increase in mass flow rate. And in both cases, one needs to adjust an *a priori* unknown parameter to fit the experimental data. Thus, it is not possible with these experiments to conclude. The study of highly heterogeneous porous medium might give an answer to this question.

Another discussion concerns the *second Brinkman correction*. Since this term involves the gradient of the porosity, it is still not easy to conclude if one needs to introduce this term, or if this term is already taken into account by considering variable porosity and permeability in the heterogeneous transition zone. However, we can say that this term is not essential to recover the jump conditions. And it might even be better not to introduce it, since Goyeau *et al.* (2003) were able to recover the jump conditions without the *second Brinkman correction*, whereas Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b) could not.

4.2.6 Conclusion

In this paper, we have studied the single phase Poiseuille flow over a permeable block and we have derived the boundary conditions that must be applied at the interface between the porous medium and the free fluid. Based on the observation that a sharp interface is only an idealization of a region where the properties of the medium encounter strong but nevertheless continuous variations, a heterogeneous transition zone is introduced between the two homogeneous regions (*i.e.* porous medium and free fluid). It is shown that the same volume averaged transport equation can be used to describe the two homogeneous regions, and it is assumed that this equation still holds in the heterogeneous transition zone by considering variable porosity and permeability. Then, the problem is solved using the method of matched asymptotic expansions, without specifying *a priori* the functional dependence of the porosity and permeability in the transition zone. The resolution of this problem proves that, if the validity of the single volume averaged transport equation is assumed in the whole domain, then the velocity is continuous across the interface (4.79), whereas the stress is discontinuous (4.83). It also proves that, it is a stress jump condition built using the fluid viscosity that has to be considered at the interface, whereas previous studies (Neale et Nader, 1974; Ochoa-Tapia et Whitaker, 1995a) suggested to use a stress jump condition built using the effective viscosity of the porous medium. Furthermore, in previous studies, the stress jump condition was only related to the slip velocity through a stress jump parameter (Ochoa-Tapia et Whitaker, 1995a). The analytical development shows that the stress jump condition is also related to the pressure gradient, through a second jump parameter (see Eq. (4.83)). This study provides an explicit dependence of the stress jump coefficient on the variations of the porosity and permeability in the transition zone, expressed through two excess quantities which are actually surface properties. Thus, the stress jump coefficient is directly linked to the surface properties of the porous medium. An estimation of these excess quantities has been proposed. Good agreement is obtained between theory and the Beavers and Joseph (1967) experiment by adjusting the values of these two excess quantities. In particular, we were able to correctly predict the slope of the fractional increase in mass flow rate Φ versus the non-dimensional height of the free fluid region σ for the aloxite experiments, a result that other models cannot recover. Even though we had to adjust the values of the excess quantities to obtain good agreement with the available data, our analysis directly relates these excess quantities to the variations of the porosity and permeability in the transition zone (see Eq. (4.75)). Thus, further work should focus on the means (either experimental or theoretical) of evaluating *a priori* the values of these excess quantities for the surface of a given material. If such informations were available, we would be able to predict the

stress jump coefficient without resorting to experiments. Furthermore, this study suggests a methodology to derive boundary conditions between a free fluid and a porous medium and could be used to derive boundary conditions for other transport phenomena: heat, species,...

4.3 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'utiliser une nouvelle méthode de changement d'échelle, la méthode des développements asymptotiques raccordés, afin de dériver les conditions de saut à appliquer à l'interface pour l'étude de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux.

En supposant que le niveau mésoscopique de description de l'interface est correctement décrit par l'équation de Darcy-Brinkman avec porosité et perméabilité variables (Eq. (4.22)), nous avons tout d'abord montré que la condition de saut sur la contrainte doit être construite en utilisant la viscosité du fluide, et non la viscosité effective (μ/ϕ) comme le suggérait des études précédentes (Neale et Nader, 1974; Ochoa-Tapia et Whitaker, 1995a).

De plus, dans les études précédentes, le saut de contrainte était seulement relié à la vitesse de glissement à travers un unique paramètre de saut β . Notre étude montre que le saut de contrainte est relié à la vitesse de glissement à l'interface mais également au gradient de pression à travers deux paramètres de saut que nous avons notés respectivement γ et λ (cf. Eqs.(4.83) et (4.86)).

Le résultat le plus fondamental de ce chapitre reste le fait que cette méthode nous permet de relier explicitement les deux paramètres de saut γ et λ , aux variations de porosité et de perméabilité dans la zone de transition, à travers des quantités en excès. Pour comparer la condition de saut que nous avons obtenue (Eq.(4.83)) aux résultats expérimentaux de Beavers et Joseph (1967), nous avons ajusté la valeur de ces deux paramètres de saut. En effet, les profils de porosité et de perméabilité des matériaux utilisés par Beavers et Joseph (1967) pour réaliser leurs expériences ne sont pas connus. Les résultats obtenus avec notre modèle sont en très bon accord avec les mesures réalisées par Beavers et Joseph (1967). En particulier, grâce au deuxième paramètre de saut λ , nous sommes désormais capable d'obtenir la bonne variation du débit dans la partie libre du canal en fonction de la hauteur de la partie libre du canal pour les expériences réalisées avec les aloxites.

Cependant, puisque notre analyse relie directement les quantités en excès aux variations de porosité et de perméabilité dans la zone de transition, nous devrions être capables d'évaluer la valeur de ces grandeurs en excès pour la surface d'un matériau donné, connaissant les profils de porosité et de perméabilité dans la région de transition. L'évaluation des paramètres de saut étant fondamentale en vue des applications pratiques que nous souhaitons réaliser, nous approfondissons ce résultat dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Étude de la position de l'interface et estimation a priori des coefficients de saut

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons dérivé les conditions de saut à appliquer à l'interface libre poreux pour l'étude de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux. Lors de cette étude, nous avons en particulier relié la valeur des paramètres de saut aux variations de porosité et de perméabilité dans la zone de transition par l'intermédiaire de quantités en excès. Ainsi, nous devrions être capables d'évaluer la valeur de ces paramètres de saut pour la surface d'un matériau donné, connaissant les profils de porosité et de perméabilité dans la région de transition, ainsi que la position de l'interface de discontinuité.

L'objectif de ce chapitre est de confirmer ce point en approfondissant l'étude que nous avons menée dans le chapitre précédent. En effet, dans l'expérience menée par [Beavers et Joseph \(1967\)](#), et à laquelle nous avons confronté notre modèle dans le chapitre précédent, seule une grandeur intégrale, le débit dans la partie libre du canal, est étudiée. Or, plusieurs profils de vitesses permettent d'accéder à un même débit. L'objectif est ici d'aller plus loin en étudiant les profils de vitesse. Nous souhaitons en particulier vérifier que, pour des profils de porosité et de perméabilité donnés, le profil de vitesse macroscopique donné par l'analyse théorique réalisée dans le chapitre précédent, est une bonne approximation du profil de vitesse solution du problème à l'échelle mésoscopique.

Cette vérification entre solutions mésoscopique et macroscopique aurait du être relativement immédiate. En effet, d'un côté la solution à l'échelle mésoscopique est obtenue facilement en résolvant numériquement les équations gouvernant le problème à cette échelle, pour des profils de porosité et de perméabilité donnés. Et d'un autre côté, la solution à l'échelle macroscopique est connue analytiquement en fonction des deux paramètres de saut (cf. Eqs (4.77) et (4.78)), ces derniers étant déterminés à partir des profils de porosité et de perméabilité en utilisant la définition des grandeurs en excès (Eq. (4.75)). Ainsi, nous pouvons comparer aisément la solution à l'échelle mésoscopique obtenue numériquement, à la solution macroscopique obtenue analytiquement au chapitre précédent.

Cependant, nous avons été confrontés à une difficulté inattendue liée à l'approximation inhérente à tout développement asymptotique. L'effet de l'approximation est ici trop important pour être négligé. Pour surmonter cette difficulté, nous reprenons l'analyse du chapitre précédent en ajoutant une contrainte de conservation des forces. Nous étudions ensuite l'influence de la position de l'interface sur la valeur des paramètres de saut. Nous examinons également l'influence de la position de l'interface sur le profil de vitesse macroscopique, à la fois dans la région libre et dans la région poreuse homogène.

Les résultats obtenus sont présentés dans la section suivante sous la forme d'un article qui a été soumis au journal *International Journal of Heat and Mass Transfer*.

5.2 Article 3 : Boundary conditions at a fluid-porous interface : An a priori estimation of the stress jump coefficients

M. Chandesris, D. Jamet

Article soumis à *International Journal of Heat and Mass Transfer*

Laboratoire de Modélisation et Développement Logiciels,
DEN/DER/SSTH, CEA Grenoble,
17 rue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex 9, France.

Abstract: The momentum transfer at the interface between a porous medium and an adjacent free fluid is investigated by introducing three different levels of description of the problem. This study focuses mainly on the up-scaling from the mesoscopic to the macroscopic level of description. An explicit relation between the jump parameters, the location of the discontinuous interface (macroscopic description) and the structure of the transition region (mesoscopic description) is obtained. This relation allows to explain the large sensitivity of the jump parameters to the location of the discontinuous interface observed in previous studies. It is shown that it is crucial to conserve *exactly* the forces in the up-scaling analysis.

Keywords: Interface, Excess quantity, Boundary conditions, Porous Media

5.2.1 Introduction

The problem of momentum transfer at the interface between a porous medium and an adjacent free fluid has been the object of considerable attention. Indeed, transport phenomena at a fluid-porous interface are encountered in a wide range of technological applications (packed-bed heat exchangers, nuclear waste repositories, drying processes, *etc*), or in environmental sciences (flows in rivers, ground-water pollution, flows over plant canopies, *etc*). The understanding of the momentum transfer at a fluid-porous interface is crucial for the development of accurate models in which other transfers are involved such as heat, pollutants, oxide and carbon dioxide, passive solute, *etc*.

To study the fluid-porous interfacial region, three different levels of description can be considered. At the *microscopic* scale, the flow in the entire fluid domain (free fluid region and pores of the porous medium) is governed by the well-known Navier-Stokes equations. However, for most practical applications, it is not possible to compute the flow in the entire fluid domain. The cost and the present-day computer capacity are the first restrictions. Furthermore, except for porous media with a simple structure, it is generally impossible to exactly describe the porous medium at this scale due to its high local heterogeneity. Thus, the study of this problem requires to introduce other levels of description. At the *mesoscopic* scale, the fluid and solid phases are replaced by a single equivalent medium. This is the basis of the continuum approach for flows in porous media. At this continuous level, the zone located in between the two homogeneous regions (*i.e.* porous medium and free fluid), is a continuous heterogeneous transition zone, where the properties of the medium (*e.g.* porosity) encounter strong but nevertheless continuous variations. Finally, at the *macroscopic* scale, the system is characterized by two homogeneous regions, separated by an interface of discontinuity. This macroscopic scale description requires to specify boundary conditions at the interface between the two homogeneous media. These three different levels of description are illustrated in figure 5.1.

The last level of description (*i.e.* macroscopic scale) is the most commonly used for the study of

Nomenclature

d_p	size of a small cube (DNS simulation)	<i>Greek symbols</i>	
h	height of the fluid channel	α	slip coefficient of Beavers and Joseph (1967)
h_b	height of the porous medium	β	stress jump coefficient of Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a)
K	permeability	δ	thickness of the boundary region
K_p	permeability of the homogeneous porous medium	Δy	difference between the center of gravity of the friction surface-excess force and $y_{\phi/K}$
p	pressure	ε	δ/h , small parameter
u	velocity	ϕ	porosity
u_A	solution of the matched asymptotic analysis	ϕ_p	porosity of the homogeneous porous medium
u_B	slip velocity	μ	viscosity of the fluid
u_c	solution at the mesoscopic scale	μ_{eff}	effective viscosity of the fluid in the porous medium
u_d	solution at the macroscopic scale		
U_D	Darcy velocity	<i>Superscripts</i>	
U_∞	asymptotic value of the velocity in the porous medium as $y \rightarrow -\infty$	ψ^+	non-dimensional variable
y_i	arbitrary position in the transition zone	$\check{\psi}$	<i>inner</i> variable
y_M	location of the discontinuous interface	ψ^{ex}	first definition of the excess quantity
y_ψ	location of center of gravity of the variable ψ	ψ^{exM}	second definition of the excess quantity
y_{imp}	location of the equivalent impermeable wall	$\psi^{ex\Delta}$	third definition of the excess quantity
		<i>Subscripts</i>	
<i>Special symbols</i>		ψ_+, ψ_-	constant asymptotic values of ψ outside the transition zone
$\langle \psi \rangle$	volumetric average (or phase average)		
$\langle \psi \rangle_f$	intrinsic phase average		

practical applications. The main difficulty, when working at this level of description, is the specification of appropriate boundary conditions that must be applied at the interface. Beavers and Joseph (1967) have shown that the wall permeability implies a non-zero velocity at the interface, *i.e.* an apparent slip velocity. They have proposed a semi-empirical slip boundary condition

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{\alpha}{\sqrt{K_p}} (u_B - U_D) \quad (5.1)$$

that allows to have a non-zero velocity at the interface. Here, $y = 0$ is the location of the interface, $u_B = \langle u \rangle|_{y=0}$ is the free fluid velocity at the interface, U_D is the Darcy velocity inside the porous medium, K_p is the permeability of the porous medium and α is a dimensionless coefficient. The values of α are adjusted to obtain good agreement with the experimental data they provided (Beavers et Joseph, 1967). Other studies have focused on the determination of this coefficient. It has been found that this coefficient strongly depends on the geometry of the transition region (Beavers *et al.*, 1974; Taylor, 1971; Richardson, 1971). Furthermore, following different approaches, Larson and Higdon (1986; 1987), Sahraoui and Kaviany (1992) and Saffman (1971) have shown that the value of α depends strongly on the exact location of the interface of discontinuity. However, no agreement on a best choice for the determi-

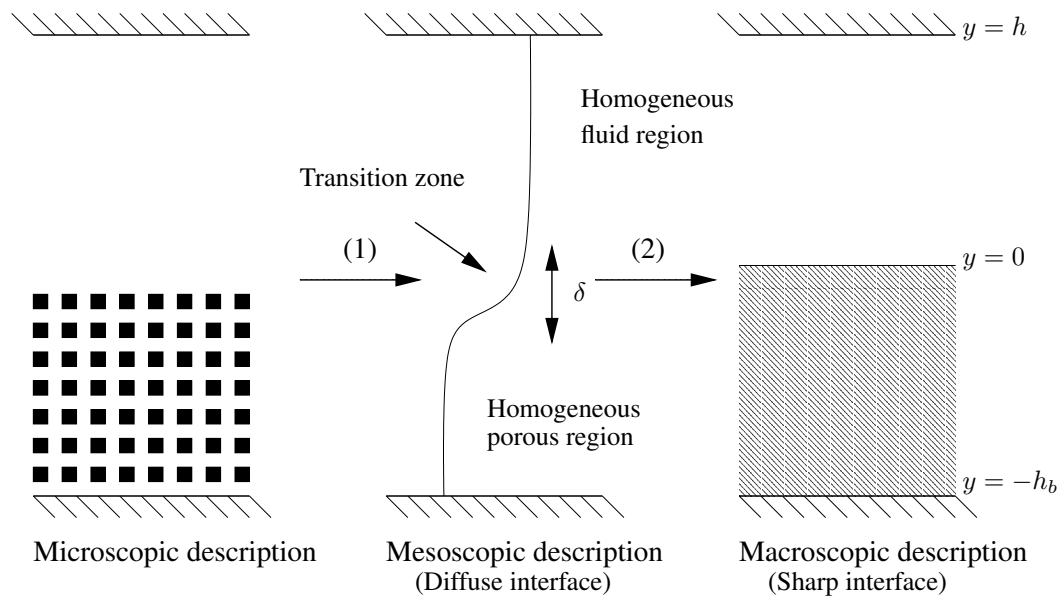


Figure 5.1: The three different scales of description of a porous/fluid transition.

nation of the exact location of this interface of discontinuity inside the transition region has been reached.

Beavers and Joseph (1967) used the Darcy's law to describe the flow in the porous medium. Since Darcy's law does not allow to describe any boundary layer region within the porous region close to the interface, Neale and Nader (1974) proposed to use instead the Darcy-Brinkman equation in the porous medium

$$\mu_{\text{eff}} \frac{d^2 \langle u \rangle}{dy^2} - \frac{\mu}{K_p} \langle u \rangle = \frac{d \langle p \rangle_f}{dx} \quad (5.2)$$

where μ_{eff} is the effective viscosity of the fluid in the porous medium. Assuming continuity of both the velocity and stress (built on the effective viscosity) at the interface, they obtained a solution identical to the one of Beavers and Joseph (1967) in the free fluid region provided that $\alpha = \sqrt{\mu_{\text{eff}}/\mu}$. The advantage of this approach appears clearly in situations where it is important to describe the boundary layer within the porous region. However, this approach has many limitations. First, it is still not possible to predict the effective viscosity μ_{eff} of a given porous medium. Second, as stressed out by Niell (1991), if the hypothesis of continuity of both the velocity and stress is clearly valid at the microscopic level (in the pores), nothing indicates that it is still valid at the macroscopic level of description. Finally, the result is still extremely sensitive to the exact location of the discontinuous interface.

More recently, a very interesting approach to develop appropriate jump conditions for the momentum transport at the interface has been proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a; 1995b). In their work, they propose two modeling steps. The first one allows to go from the microscopic description of the problem to the mesoscopic scale, using the volume-averaging method. At this mesoscopic level, a single volume-averaged transport equation is valid everywhere: in the two homogeneous regions as well as in the heterogeneous transition zone. Then, in a second step, they propose a method to derive jump conditions at the macroscopic scale of description, starting from the continuous approach of the mesoscopic scale of description. The structure of their theory is comparable to that used to develop jump conditions at phase interfaces. An introduction to this theory can be found in Edwards *et al.* (1991).

They obtain the following stress jump condition:

$$\frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} - \frac{1}{\phi_p} \frac{d\langle u \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} = -\frac{\beta}{\sqrt{K_p}} \langle u \rangle \Big|_{y=0} \quad (5.3)$$

where ϕ_p is the porosity of the homogeneous porous medium and β is a dimensionless parameter of the order of one. As for the α coefficient, good agreement with the experimental data of Beavers and Joseph (1967) is obtained only by adjusting the values of this parameter. Indeed, in their analysis, β remains a complex function of a closure problem that they could not solve, even numerically. They could not provide an explicit relation between β and the structure of the transition region. Furthermore, as for the α coefficient, it has been shown by Breugem *et al.* (2004) that the value of β is very sensitive to the choice of the interface location.

This two-step modeling approach is, from our point of view, very relevant for the study of interfacial phenomena. In the second step of their analysis, Ochoa-Tapia and Whitaker (1995a) only use general results to study the difference between mesoscopic and macroscopic quantities in the heterogeneous transition region. They do not explicitly solve the problem inside the heterogeneous transition zone. Recently, Chandesris and Jamet (2006) have shown that, given a single volume-averaged transport equation in the entire domain (mesoscopic scale), it is possible to solve the problem inside the heterogeneous transition zone using the method of matched asymptotic expansions and thus to analytically derive the boundary conditions that must be applied at the discontinuous interface. This analytical study shows that the stress jump condition is related to the slip velocity but also to the pressure gradient, through two jump parameters. This analysis also provides explicit relations between these two jump parameters and the variations of the porosity and permeability in the transition zone. This dependence is expressed through two excess quantities. In Chandesris and Jamet (2006), the values of these excess quantities are adjusted to obtain good agreement with the experimental data of Beavers and Joseph (1967), since the exact permeability and porosity profiles of the materials used in these experiments are not available. However, since this analysis directly relates the excess quantities to the variations of the porosity and permeability in the transition zone, it should be possible to evaluate *a priori* the values of these excess quantities for the surface of a given material, provided that the porosity and permeability profiles are known in the transition zone. The objective of the present study is to confirm this last point. It would thus be possible to provide an explicit relation between the jump parameters and the structure of the transition region.

This article is organized as follows. The second section briefly recalls the theoretical aspects and the results of the analytical study performed in Chandesris and Jamet (2006). The third section focuses on the definition and properties of the excess quantities. The linear dependence of the value of the excess quantities on the location of the discontinuous interface is highlighted. Then, the determination of the porosity and permeability profiles at the mesoscopic level, that are needed to make a full comparison, is addressed. In the fourth section, the *a priori* evaluation of the excess quantities is studied. It is shown that a constraint of conservation should be introduced in the matched asymptotic expansion analysis. Provided that this constraint is satisfied, it is demonstrated that it is possible to evaluate *a priori* the excess quantities. These developments are illustrated in the fifth section by performing comparisons with 1D numerical results. For given porosity and permeability profiles in the transition region, the exact mesoscopic solution obtained by numerically solving the one-dimensional problem in the entire domain is compared to the equivalent macroscopic solution given by our theoretical analysis.

5.2.2 Results obtained with the matched asymptotic expansions

In this section, we briefly recall the system studied in Chandesris and Jamet (2006), the main ideas of the method of matched asymptotic expansions as well as the results that were obtained. Let us consider

the classical system sketched in figure 5.1 made of a two-dimensional channel bounded by a permeable lower wall and an impermeable upper wall. We consider that the flow parallel to the channel is incompressible and laminar. At the mesoscopic level of description, the flow in the entire domain is modeled using a variable permeability and porosity model:

$$\frac{d^2 \langle u \rangle}{dy^2} = \frac{\phi(y)}{K(y)} \langle u \rangle + \frac{\phi(y)}{\mu} \frac{d \langle p \rangle_f}{dx} \quad (5.4)$$

where $\langle \cdot \rangle$ is the *phase average* operator (or volumetric average) defined by Whitaker (1986):

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} \psi dV \quad (5.5)$$

for any physical variable ψ , where V_f represents the volume of the fluid phase contained within the averaging volume V , while $\langle \cdot \rangle_f$ is the *intrinsic phase average* operator defined by:

$$\langle \psi \rangle_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \psi dV \quad (5.6)$$

These two averages are related through the porosity ϕ by:

$$\langle \psi \rangle = \phi \langle \psi \rangle_f, \quad \phi = \frac{V_f}{V} \quad (5.7)$$

To solve this problem, the matched asymptotic expansions method is used (e.g. Zeytounian (1986); Zwillinger (1989)). This method is applicable to the resolution of differential equations in which a small parameter ε is present. It consists in dividing the resolution domain in a set of sub-regions: two *outer regions*, where the variables of the system are slowly varying, and an *inner region*, where these variables are rapidly varying. A change of variable is introduced in the inner region. The problem is solved separately in each region using an asymptotic expansion in ε . At first order, in the outer regions, the solution is sought for in the form:

$$\langle u \rangle (y, \varepsilon) = \langle u \rangle^{(0)} (y) + \varepsilon \langle u \rangle^{(1)} (y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.8)$$

Then, matching relations are used to match the solutions of the inner and outer regions. Chandesris and Jamet (2006) apply this method to the resolution of Eq. (4) where the small parameter ε is the ratio δ/h ; δ is the thickness of the heterogeneous transition region and h is the height of the free channel (See figure 5.1). This small parameter is present in the porosity and permeability profiles. The result obtained at first order for the velocity is noted $u_A = \langle u \rangle^{(0)} + \varepsilon \langle u \rangle^{(1)}$ and is the solution of the following problem:

$$\frac{d^2 u_A}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{d \langle p \rangle_f}{dx}, \quad 0 \leq y \leq h \quad (5.9)$$

$$\frac{d^2 u_A}{dy^2} - \frac{\phi_p}{K_p} u_A = \frac{\phi_p}{\mu} \frac{d \langle p \rangle_f}{dx}, \quad y \leq 0 \quad (5.10)$$

At zeroth order, the velocity $\langle u \rangle^{(0)}$ and its gradient are continuous at the interface (Chandesris and Jamet (2006)). At first order, the following jump conditions are obtained for u_A :

$$u_A|_{y=0^+} - u_A|_{y=0^-} = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{du_A}{dy} \Big|_{y=0^+} - \frac{du_A}{dy} \Big|_{y=0^-} = \frac{\delta}{K_p} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y=0} + \frac{\delta}{\mu} \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} \frac{d \langle p \rangle_f}{dx} \quad (5.12)$$

where the superscript $+$ denotes a non-dimensional variable:

$$K^+ \triangleq \frac{K}{K_p}, \quad \phi^+ \triangleq \phi, \quad y^+ \triangleq \frac{y}{h} \quad (5.13)$$

and the overbar a variable inside the inner region:

$$\check{f}(\check{y}^+) \triangleq f\left(\frac{y^+}{\varepsilon}\right) \quad (5.14)$$

It should be noticed that the stress jump condition at first order (5.12) depends on the knowledge of the velocity at zeroth order $\langle u \rangle^{(0)}$. Therefore, to obtain the solution u_A , the system has to be solved in two steps: first the zeroth order term $\langle u \rangle^{(0)}$ which is the solution of Eqs. (5.9) and (5.10) with continuous velocity and velocity gradient at the interface, then the first order term u_A which is a better approximation since it is the solution of the same problem however with a different and physically more relevant jump condition. In Eq. (5.12), the excess quantity ψ^{ex} of any physical variable ψ is defined by:

$$\psi^{ex} \triangleq y_i (\psi_- - \psi_+) + \int_{-\infty}^{y_i} (\psi - \psi_-) + \int_{y_i}^{+\infty} (\psi - \psi_+) \quad (5.15)$$

where y_i is an *arbitrary* position inside the heterogeneous transition zone and ψ_{\pm} are the constant asymptotic values of ψ outside the heterogeneous transition zone. It is worth noticing that the excess quantity ψ^{ex} is independent of the choice of y_i . The changes of variables (5.13) and (5.14) and the definition of the excess quantities imply the following relations:

$$\frac{\delta}{K_p} \left(\frac{\check{\phi}^+}{\check{K}^+} \right)^{ex} = \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex}, \quad \delta \left(\check{\phi}^+ \right)^{ex} = (\phi)^{ex} \quad (5.16)$$

Thus the stress jump condition (5.12) for u_A is simply given by:

$$\left. \frac{du_A}{dy} \right|_{y=0^+} - \left. \frac{du_A}{dy} \right|_{y=0^-} = \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y=0} + \frac{1}{\mu} (\phi)^{ex} \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \quad (5.17)$$

This shows that the specification of the value of δ is unnecessary. This information is indirectly contained in the excess quantities $(\phi/K)^{ex}$ and $(\phi)^{ex}$ whose numerical values depend only on the porosity and permeability profiles in the transition zone.

5.2.2.1 Definition of the macroscopic problems

The matched asymptotic expansion (MAE) analysis shows that the solution at first order of the *mesoscopic* problem given by Eq. (5.4) is the solution of a *macroscopic* problem defined by Eqs. (5.9), (5.10), (5.11) and (5.17). This system is characterized by two regions with constant properties, separated by an interface of discontinuity and should be equivalent to the *mesoscopic* problem. However, since the stress jump condition (5.17) depends on the knowledge of the velocity at zeroth order, this macroscopic problem has to be solved in two steps. Thus, this macroscopic problem might not be the most appropriate for the study of practical applications. This difficulty might be overcome by introducing the following stress jump condition, where the zeroth order velocity $\langle u \rangle^{(0)}$ is replaced by the “total” velocity $\langle u \rangle$:

$$\left. \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right|_{y=0^+} - \left. \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right|_{y=0^-} = \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex} \langle u \rangle \Big|_{y=0} + \frac{1}{\mu} (\phi)^{ex} \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \quad (5.18)$$

The *macroscopic* problem defined by Eqs. (5.9), (5.10), (5.11) and (5.18) can be solved in one step. However, the consequences of the approximation of $\langle u \rangle^{(0)}$ by $\langle u \rangle$ in the stress jump condition might be important and have to be carefully studied. To distinguish between these two macroscopic problems, the problem defined using the jump condition (5.17) will be called the MAE macroscopic problem, whereas the problem defined using the jump condition (5.18) will be called the one step (OS) macroscopic problem.

5.2.3 Definition and properties of the excess quantities

5.2.3.1 Dependence on the location of the discontinuous interface

It has to be noticed that the definition of the excess quantity given by Eq. (5.15) assumes that the discontinuous interface is located at $y = 0$. Indeed, the analytical study has been carried out in Chandesris and Jamet (2006) using the matched asymptotic expansions around the position $y = 0$. However, other choices could have been made to locate the interface of discontinuity inside the transition region since this region is continuous. Many authors discuss the choice of the location of the interface of discontinuity (Beavers et Joseph, 1967; Saffman, 1971; Larson et Higdon, 1986; Sahraoui et Kaviany, 1992; Saleh et al., 1993) and, as recalled in the introduction, so far no agreement on a best choice has been reached. Thus, to keep as much generality as possible, we now assume that the interface of discontinuity is located at $y = y_M$, without specifying *a priori* this location. The MAE analysis carried out in Chandesris and Jamet (2006) can thus be generalized and it is found that the matching conditions are then given by:

$$\lim_{y \rightarrow y_M \pm} f(y, \varepsilon) = \lim_{\check{\zeta} \rightarrow \pm\infty} \check{f}(\check{\zeta}, \varepsilon) \quad (5.19)$$

with $\check{\zeta} = (y - y_M)/\varepsilon$. The stress jump condition (5.17) is now valid at $y = y_M$ and the excess quantity that appears in the analytical study is given by:

$$\psi^{exM} = (y_i - y_M) (\psi_- - \psi_+) + \int_{-\infty}^{y_i} (\psi - \psi_-) + \int_{y_i}^{+\infty} (\psi - \psi_+) \quad (5.20)$$

This result is obtained by a simple change of variables. With this new definition, the excess quantity is still independent of the arbitrary choice of y_i . Moreover, this change of variable allows to highlight the fact that the value of the excess quantities *does* depend on the location of the surface of discontinuity y_M . The definition (5.20) of the excess quantity is illustrated for $y_i = y_M$ in figure 5.2(a) where the excess quantity is represented by the area of the crosshatched surface.

To simplify expression (5.20), a new quantity is introduced. For any physical quantity ψ , y_ψ is defined as the particular value of y_i such that the sum of the last two integral terms of (5.20) is zero:

$$\int_{-\infty}^{y_\psi} (\psi - \psi_-) + \int_{y_\psi}^{+\infty} (\psi - \psi_+) = 0 \quad (5.21)$$

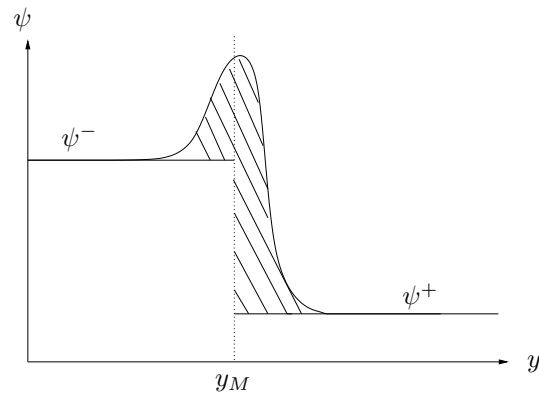
and is therefore named the center of gravity of the profile of ψ . It comes:

$$\psi^{exM} = (y_\psi - y_M) (\psi_- - \psi_+) \quad (5.22)$$

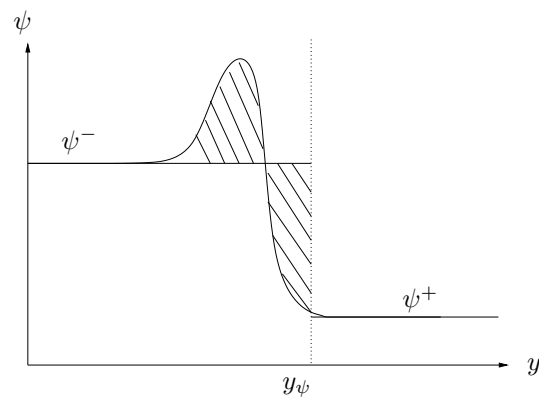
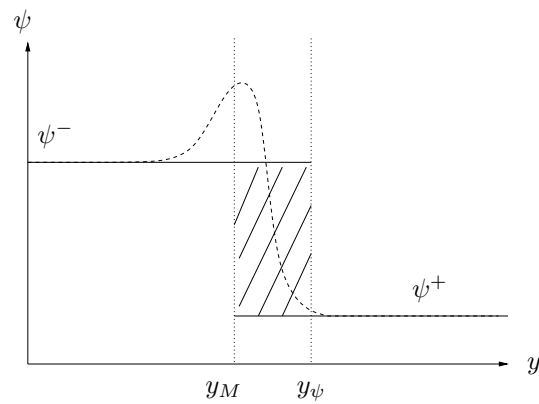
This definition is illustrated in figure 5.2. y_ψ is such that the two crosshatched areas of figure 5.2(b) are equal. The new expression (5.22) giving the excess quantity corresponds to the crosshatched area of figure 5.2(c). On these figures, the location of the discontinuous interface y_M is arbitrary, while the location of y_ψ is not. As shown by Eq. (5.21), y_ψ is defined only by the profile of $\psi(y)$. Furthermore, Eq. (5.22) shows that the dependence of the excess quantity ψ^{exM} is *linear* on y_M . This result explains the large sensitivity of the stress jump coefficient with the position of the surface of discontinuity reported in previous studies (Saffman, 1971; Larson et Higdon, 1986; Sahraoui et Kaviany, 1992; Breugem et al., 2004).

5.2.3.2 Porosity and permeability profiles

In order to validate our analysis and to determine the numerical values of the excess quantities, we have to specify the porosity and permeability profiles in the heterogeneous transition region. In Chandesris and Jamet (2006), the authors did not consider it because they conducted a general study. They



(a) Excess quantity.

(b) Definition of y_ψ using Eq. (5.21).

(c) Excess quantity given by Eq. (5.22).

Figure 5.2: Different representations of an excess quantity.

show that using the matched asymptotic expansions, the form of the boundary conditions could be derived without specifying *a priori* the exact porosity and permeability profiles in the transition region. However, these profiles are needed to perform a more thorough comparison. They are needed to compute the flow at the mesoscopic scale and to determine the excess quantities without resorting to adjusted values at the macroscopic scale. Since the objective of this study is not to focus on the determination of these profiles, we refer the interested reader to the work of Breugem (2004; 2005). In Breugem (2005, chap. 4), he explains how to obtain the porosity and permeability profiles of the variable-permeability model at the mesoscopic scale from a direct numerical simulation at the microscopic scale, using the

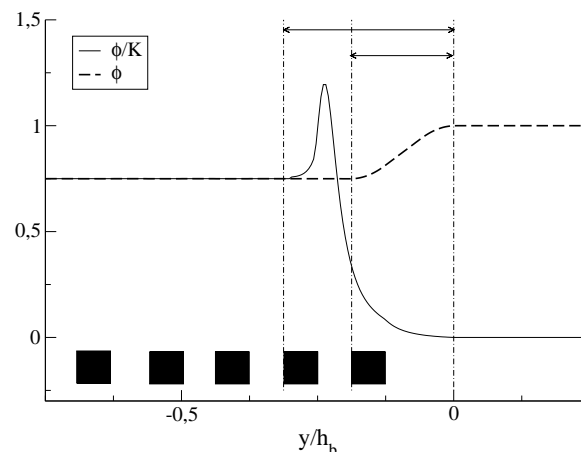


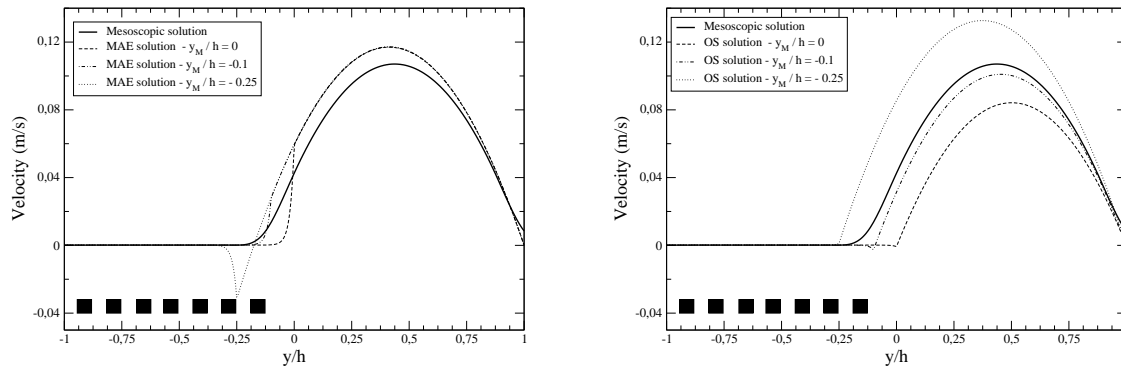
Figure 5.3: Example of porosity and permeability profiles obtained by filtering microscopic results obtained from microscopic 2D simulations.

volume averaging method and an appropriate filter. Following this approach, we performed a 2D microscopic simulation on the same flow geometry to obtain the porosity and the permeability profiles. This geometry is recalled in figure 5.1 (microscopic description). In the y -direction, the porous medium is made of seven cubes of size d_p . The distance between two cubes is also d_p and the size of the domain in the y -direction is fixed by taking $h = h_b = 16 d_p$, where h_b is the height of the porous medium. In the horizontal direction, periodic boundary conditions are used. The results obtained for the porosity and the permeability profiles are given in figure 5.3. It is interesting to note that the permeability and the porosity do not vary over the same distance. The size of the heterogeneous transition region is about $3 d_p$ for the porosity and about $5 d_p$ for the permeability (See figure 5.3). It is therefore not possible to express the permeability as a function of the porosity in the transition region, as was proposed by Ochoa-Tapia and Whitaker (1995b).

It is worth noting that the porosity and permeability profiles can also be deduced from experimental data. Indeed, the porosity variations are easily deduced from photographs of the transition region (Saleh *et al.*, 1993; Goharzadeh *et al.*, 2005). To obtain the permeability profile, one needs first to compute the variations of the second derivative of the longitudinal velocity (See Eq. (5.4)). Saleh *et al.* (1993) show that it is possible to obtain this information (See their figures 15 and 16). Given the typical profile of the second derivative that they obtain (See their figure 14), non-monotonic permeability profiles would be deduced as in our numerical simulation.

5.2.3.3 First results

Once the porosity and permeability profiles are known, the velocity at the mesoscopic scale can be obtained by solving Eq. (5.4) numerically. The solution of the MAE macroscopic problem is obtained by solving Eqs. (5.9) and (5.10) analytically, using the jump conditions (5.11) and (5.17) and the definition of the excess quantities proposed previously (5.22). The analytical solution of this problem is given in Appendix A. The solution of the OS macroscopic problem is obtained by solving the same problem but using the second jump condition (5.18). The analytical solution of this second problem is given in Appendix B.



(a) Comparison of the mesoscopic and MAE macroscopic solutions. (b) Comparison of the mesoscopic and OS macroscopic solutions.

Figure 5.4: Mesoscopic, MAE and OS macroscopic velocity results obtained using the original definition (5.22) of the excess quantities.

The mesoscopic solution and the MAE macroscopic solutions obtained using the porosity and permeability profiles of the previous section (See figure 5.3), when $h = h_b$, are plotted in figure 5.4 (a) for three different values of y_M . This figure shows that the MAE macroscopic velocity is not correctly predicted in the free fluid channel, and this, whatever the choice of y_M . Moreover, we observe that the choice of y_M has hardly any influence on the MAE velocity profile in the free fluid region. It seems that the linear dependence of the excess quantities on y_M allows to have a free fluid velocity in the channel almost independent of the choice of y_M . In Appendix C, it is proven that this is indeed the case by rewriting the analytical solution of the free macroscopic velocity in a new system of coordinates independent of the location of the discontinuous interface y_M . The two excess quantities *do* depend linearly on y_M . But this dependence does not influence the outer profiles, since due to this dependence, the MAE macroscopic free fluid velocity remains almost independent of y_M .

On figure 5.4 (b) the mesoscopic solution is compared to the solutions obtained by solving the OS macroscopic problem for three different values of y_M . This figure shows that the OS macroscopic solution is not at all correctly predicted in the free fluid channel. Furthermore, the OS macroscopic solutions are very different from the MAE macroscopic solutions. In particular, for the OS macroscopic problem, the choice of y_M has a very large influence on the velocity profile in the free fluid region.

These first results suggest that something is missing in the matched asymptotic expansion analysis, since the MAE macroscopic velocity is not correctly predicted in the free fluid channel. This problem will be tackled in the next section. These results also show that substituting $\langle u \rangle^{(0)}$ by $\langle u \rangle$ in the jump condition to simplify the resolution of the macroscopic problem is not without consequences and therefore has to be studied carefully.

5.2.4 Matched asymptotic expansions under conservation constraint

5.2.4.1 Excess quantities and surface-excess forces

At the mesoscopic scale, the flow in the entire domain is described by Eq. (5.4). This equation expresses the balance between three forces: the friction force ($\mu (\phi/K) u$), the pressure force $\phi (dp/dx)$ and the viscous force $\mu (d^2u/dy^2)$. In this model, the porosity and permeability are varying only in the interfacial transition zone; they are constant in the two homogeneous regions. Then, a macroscopic

scale of description is introduced. At this scale, the flow is governed by Eqs. (5.9) and (5.10) where the porosity and permeability are constant in each homogeneous region. By construction, at this scale, the friction force and the pressure force are not properly described in the interfacial transition zone since the porosity and the permeability are constant. In the study of interfacial phenomena, the difference of any physical quantity between its mesoscopic and its macroscopic values in the interfacial transition zone can be expressed through excess quantities (Edwards *et al.*, 1991). For instance, the excess quantity associated to the friction force is given by:

$$\left(\mu \frac{\phi}{K} u \right)^{EX} = \mu \int_{-\infty}^{y_M} \left(\frac{\phi}{K} u_c - \frac{\phi_p}{K_p} u_d \right) + \mu \int_{y_M}^h \left(\frac{\phi}{K} u_c \right) \quad (5.23)$$

where u_c is the velocity solution of the mesoscopic problem and u_d is the velocity solution of a given macroscopic problem (either the MAE or the OS macroscopic problem). The excess quantity $(\mu(\phi/K)u)^{EX}$ represents *exactly* the amount of the force that is not seen by the macroscopic model in the interfacial transition zone compared to the mesoscopic model. However, this amount of force has to be taken into account to give an accurate description of the problem at the macroscopic scale. This is done by assigning this excess quantity to the macroscale surface *via* a stress jump condition. But this stress jump condition can also be viewed as a surface-excess force. The main difficulty is to express this excess quantity using only macroscopic parameters in order to close the macroscopic problem. In this framework, the results obtained in Chandesris and Jamet (2006) using the matched asymptotic expansion analysis can be viewed in a new way. The matched asymptotic expansion allows to obtain a linearized form of the friction surface-excess force that depends only on macroscopic quantities:

$$\left(\mu \frac{\phi}{K} u \right)^{EX} \simeq \mu \left(\frac{\phi}{K} \right)^{exM} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} \quad (5.24)$$

However, this expression is only an approximation at first order. Let us now consider the two other forces, *i.e.* the pressure and viscous forces. For the pressure force, the result obtained in Chandesris and Jamet (2006) is not an approximation but is exact since the pressure gradient is constant:

$$\left(\phi \frac{dp}{dx} \right)^{EX} = (\phi)^{exM} \frac{dp}{dx} \quad (5.25)$$

The pressure surface-excess force is therefore exactly conserved in this expression. For the viscous surface-excess force, the excess quantity depends only on macroscopic quantities or on mesoscopic quantities located in the homogeneous free fluid region:

$$\left(\mu \frac{d^2 u}{dy^2} \right)^{EX} = \mu \left(\frac{du_c}{dy} \Big|_h - \frac{du_d}{dy} \Big|_h \right) - \mu \left(\frac{du_d}{dy} \Big|_{y_M^+} - \frac{du_d}{dy} \Big|_{y_M^-} \right) \quad (5.26)$$

Since the macroscopic model is supposed to be such that the mesoscopic and macroscopic solutions are equal in the two homogeneous regions, the first term in the right hand side of Eq. (5.26) is zero. The second term in the right hand side of Eq. (5.26) is exactly the stress jump that is assigned to the macroscopic surface. The stress jump condition (5.17) is simply recovered in this framework, by adding Eqs. (5.24), (5.25) and (5.26).

These developments show that the only approximation of the surface-excess forces is due to the friction force, as shown by Eq. (5.24). The effects of this approximation are too important to be neglected since, using this expression, the MAE macroscopic velocity is not correctly predicted (See section 5.2.3.3). Thus, the question is the following: is it possible to obtain a new linearized expression for the excess quantity associated to the friction surface-excess force such that this surface-excess force is exactly conserved? To answer this question, the analytical study made using the matched asymptotic expansions will be revisited under the constraint of conservation of the friction surface-excess force.

5.2.4.2 Introduction of the conservation constraint

In the matched asymptotic expansion study carried out in Chandesris and Jamet (2006), as $\varepsilon \rightarrow 0$, the porosity and permeability profiles are modified. Indeed, the porosity and permeability profiles depend on the inverse of δ (See Eqs. (5.38)-(5.39) for example). Since $\varepsilon = \delta/h$, as $\varepsilon \rightarrow 0$, h being kept constant, the profiles become stiffer to give, at the limit, profiles that are discontinuous at y_M since the matched asymptotic expansion is carried out around the position $y = y_M$. As $\varepsilon \rightarrow 0$, if the profile of a physical quantity ψ becomes stiffer around its center of gravity y_ψ , the integral of the physical profile of ψ minus its limit discontinuous profile, is zero: the ψ quantity is exactly conserved in the up-scaling. Now, if the discontinuous interface is located at a position y_M different from y_ψ , the excess quantity ψ^{exM} (Eq. 5.22) accounts exactly for the gap between y_ψ and y_M (See figure 5.2(c)).

The pressure force is linked to the porosity profile. However, when the porosity profile tends to a Heaviside function as $\varepsilon \rightarrow 0$, since the pressure gradient does not depend on the porosity, the conservation of the porosity through $(\phi)^{exM}$ ensures the conservation of the pressure force. For the friction force, it is different. This force is linked to the profile of ϕ/K but also to the velocity. But now, the velocity depends directly on the profile of ϕ/K . Hence, as the profile of ϕ/K becomes stiffer, the velocity is modified and the friction force might not be conserved as $\varepsilon \rightarrow 0$, if the constraint is not enforced. If the center of gravity of the profile of ϕ/K was the same as the center of gravity of the friction force, the friction force would be conserved in the up-scaling performed previously. Unfortunately, there is no reason that this is indeed the case.

To be more precise, the evaluation of the friction surface-excess force in the matched asymptotic expansion analysis depends only on the profile of ϕ/K and on the zeroth order velocity in the *inner region* (See Chandesris and Jamet (2006)). From the matched asymptotic expansion analysis, we know that the zeroth order velocity is constant in the *inner region*. This result allows to obtain the linearized form of the friction surface-excess force (5.24). The positive point about this result is that the obtained linear dependence on y_M of the closure expression for the friction surface-excess force allows to have a macroscopic free fluid velocity in the channel almost independent of the choice of y_M (See section 5.2.3.3). The negative point is that the friction surface-excess force is not conserved because the center of gravity of the profile of ϕ/K is not in general the same as the center of gravity of the friction force. Therefore, we suggest to introduce the following new excess quantity associated to the friction surface-excess force

$$\left(\mu \frac{\phi}{K} u\right)^{EX} = \mu \left(\frac{\phi}{K}\right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} \quad (5.27)$$

with

$$\left(\frac{\phi}{K}\right)^{ex\Delta} = (y_{\phi/K} + \Delta y - y_M) \left(\frac{\phi_p}{K_p}\right) \quad (5.28)$$

where $(y_{\phi/K} + \Delta y)$ is the center of gravity of the friction force. Thus, the friction surface-excess force is conserved in the up-scaling analysis and the linear dependence on y_M of the closure expression for the friction surface-excess force is not modified. Since the size of the transition zone is δ , we expect Δy to be of the order of δ . At this point Δy is unknown and its determination is examined in the next section.

5.2.4.3 Determination of Δy

By construction Δy is such that the friction surface-excess force is exactly conserved in the matched asymptotic expansion analysis. Since the viscosity is constant, it comes from Eqs. (5.23) and (5.27):

$$\int_{-\infty}^{y_M} \left(\frac{\phi}{K} u_c - \frac{\phi_p}{K_p} u_A\right) + \int_{y_M}^h \left(\frac{\phi}{K} u_c\right) = \left(\frac{\phi}{K}\right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} \quad (5.29)$$

The determination of Δy requires to solve Eq. (5.29). The resolution of this equation requires the specification of u_c , that is unfortunately unknown. This difficulty is overcome by following an indirect approach.

The mesoscopic solution verifies Eq. (5.4). This equation is integrated between $y = -\infty$ and h :

$$\left. \frac{du_c}{dy} \right|_h = \int_{-\infty}^h \left(\frac{\phi}{K} u_c + \frac{\phi}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) \quad (5.30)$$

The MAE macroscopic solution verifies Eqs. (5.9) and (5.10), with the jump conditions (5.11) and (5.17) at the interface. Eq. (5.10) is integrated between $y = -\infty$ and $y = y_M$ and Eq. (5.9) between $y = y_M$ and $y = h$:

$$\left. \frac{du_A}{dy} \right|_h = \int_{-\infty}^{y_M} \left(\frac{\phi_p}{K_p} u_A + \frac{\phi_p}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) + \int_{y_M}^h \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} + (\phi)^{exM} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.31)$$

Subtracting Eqs. (5.30) and (5.31) shows that, when the pressure and friction surface-excess forces are *exactly* conserved, one has:

$$\left. \frac{du_c}{dy} \right|_h = \left. \frac{du_A}{dy} \right|_h \quad (5.32)$$

And inversely, when relation (5.32) is verified, since the pressure surface-excess force is conserved (Eq. 5.25), we can deduce that the friction surface-excess force is also conserved. Since the mesoscopic and macroscopic velocity profiles are parabolic in the homogeneous free fluid region and both vanish at $y = h$, when Eq. (5.32) is verified the mesoscopic and macroscopic velocity parabolic profiles are equal. This shows that the *exact* conservation of the friction surface-excess force is the key feature that has to be imposed to recover the correct velocity profile in the free fluid region when the system is described at the macroscopic scale.

Velocity in the free fluid region at the mesoscopic scale:

In the homogeneous free fluid region ($\phi = 1, 1/K = 0$), the solution of the mesoscopic problem u_c verifies

$$\mu \frac{d^2 u_c}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad (5.33)$$

with a no slip boundary condition at the upper wall, and is therefore a parabola. This parabolic profile is then extended in the heterogeneous transition region. The location where this extended velocity profile vanishes is called the **equivalent impermeable wall** and is noted y_{imp} . Indeed, if the porous medium is replaced by an impermeable wall, this impermeable wall would be located at y_{imp} to conserve the parabolic profile of the velocity in the free fluid channel. Therefore, y_{imp} characterizes the velocity in the free fluid channel at the mesoscopic scale.

Velocity in the free fluid region at the macroscopic scale for the MAE problem:

We now want to characterize the velocity in the free fluid channel at the macroscopic scale. The analytical expression of the solution of the MAE problem in the free fluid channel is given by Eq. (5.44) in Appendix A, where $(\phi/K)^{exM}$ has to be replaced by $(\phi/K)^{ex\Delta}$ in Eq. (5.47). The extended parabolic profile of the solution in the free fluid region vanishes at:

$$y = y_M + \sigma \sqrt{K_p} \left(\frac{2(C_2^{(0)} + \varepsilon C_2^{(1)})}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (5.34)$$

(See Appendix A for the definitions of σ , $C_2^{(0)}$ and $C_2^{(1)}$). To simplify this expression the discontinuous interface is located at $y_M = (y_{\phi/K} + \Delta y)$. Thus, the excess quantity associated to the friction force is

zero. It comes:

$$y = (y_{\phi/K} + \Delta y) - \frac{2\sqrt{\phi_p}\sqrt{K_p} + 2(\phi)^{exM} + \sigma\sqrt{K_p}}{1 + \sqrt{\phi_p}\sigma} \quad (5.35)$$

Here, the value of $(\phi)^{exM}$ is given by Eq. (5.22), with $y_M = (y_{\phi/K} + \Delta y)$. Since $\sqrt{K_p}/(h - y_M) = 1/\sigma$ is small compared to one and assuming that $(\phi)^{exM}$ is always small compared to h , one gets:

$$y \sim (y_{\phi/K} + \Delta y) - \sqrt{\frac{K_p}{\phi_p}} \quad (5.36)$$

Therefore, Eq. (5.36) characterizes indirectly the velocity in the free fluid channel at the macroscopic scale.

If the following relation is verified:

$$y_{imp} = y_{\phi/K} + \Delta y - \sqrt{\frac{K_p}{\phi_p}} \quad (5.37)$$

the mesoscopic and the MAE macroscopic extended parabolic profiles of the velocity are equal and therefore Eq. (5.32) is verified. Since we have shown previously the equivalence between Eq. (5.32) and the conservation of the friction surface-excess force, this conservation is indirectly obtained by imposing the condition (5.37). Therefore, the conservation of the friction surface excess force is indirectly obtained. This reasoning, based on the introduction of a new excess quantity associated to the friction surface-excess force is valid only if the value of $(\phi/K)^{ex\Delta}$ does not depend on the height of the free channel h . If this were not the case, the generality of the approach would be lost as well as the interfacial intrinsic character of Δy . As we will see in section 5.2.5, Δy barely depends on h , which confirms the above interpretation.

5.2.5 Comparisons to numerical results

5.2.5.1 Description of the 1D problem

To quantify the effect of a given porous medium, Beavers and Joseph (1967) compared the mass flow rate in the free fluid channel obtained with a permeable lower wall to the one that would be obtained with an impermeable wall for different heights of the free fluid channel. Here, we numerically reproduce these experiments for four different materials. At the mesoscopic scale, a material is characterized by its porosity and permeability profiles in the heterogeneous transition zone. Then, for each material, Eq. (5.4) is solved in the entire domain for different heights of the free channel: $h = h_b, 1.25 h_b, 1.5 h_b, 1.75 h_b$ and $2 h_b$. A no slip boundary condition is imposed at $y = h$ and $y = -h_b$. Hence, the velocity profiles at the mesoscopic scale are obtained. These mesoscopic solutions will be compared to the analytical solutions of the MAE macroscopic problem obtained using the new definition of the excess quantity associated to the friction force (Eq. 5.28).

The properties of the homogeneous porous medium are fixed: $h_b = 16 d_p$ and $\phi_p = 0.75$ as in the DNS of section 5.2.3.2, and $K_p = d_p^2/18$, which is a good estimate of the homogeneous permeability obtained with the 2D DNS. Then the value of h_b is fixed to 1, which gives $d_p = 0.0625$ and $K_p = 2.17 \cdot 10^{-4} m^2$. For the size of the heterogeneous transition region, the ratio δ/d_p is fixed to 3. In all the study, the pressure gradient is kept constant. The ratio $\nabla p/\mu$ is fixed to -1 .

For the first three materials, the same porosity profile is used:

$$\phi(y) = \frac{1 - \phi_p}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \frac{1 + \phi_p}{2} \quad (5.38)$$

For the permeability, different profiles are tested. For the first material, a hyperbolic tangent profile:

$$\left(\frac{1}{K}\right)(y) = \frac{1}{K_p} \left(\frac{-1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \right) \quad (5.39)$$

Then, more complex profiles are used that are more representative of the profiles obtained from experiments (Saleh *et al.*, 1993) or filtered DNS (Breugem, 2005; Breugem *et al.*, 2004) (See figure 5.3). For the second material, the chosen permeability profile is:

$$\left(\frac{1}{K}\right)(y) = \frac{1}{K_p} \left[\frac{-1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} + 1 - \left(\tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) \right)^2 \right] \quad (5.40)$$

and for the third material, the permeability profile is similar but shifted:

$$\left(\frac{1}{K}\right)(y) = \frac{1}{K_p} \left[\frac{-1}{2} \tanh\left(\frac{2(y + 1.5\delta)}{\delta}\right) + \frac{1}{2} + 1 - \left(\tanh\left(\frac{2(y + 1.5\delta)}{\delta}\right) \right)^2 \right] \quad (5.41)$$

Then for the fourth material, a more complex porosity profile is studied, that is supposed to characterize mass storage in the transition region:

$$\phi(y) = \frac{1 - \phi_p}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \frac{1 + \phi_p}{2} - 0.4 \left[1 - \left(\tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) \right)^2 \right] \quad (5.42)$$

and the profile of ϕ/K is supposed to be given by a simple hyperbolic tangent function:

$$\left(\frac{\phi}{K}\right)(y) = \frac{\phi_p}{K_p} \left(\frac{-1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \right) \quad (5.43)$$

These different profiles are represented in figure 5.5. The values of y_ϕ and $y_{\phi/K}$ obtained for the four materials are provided in table 5.2.

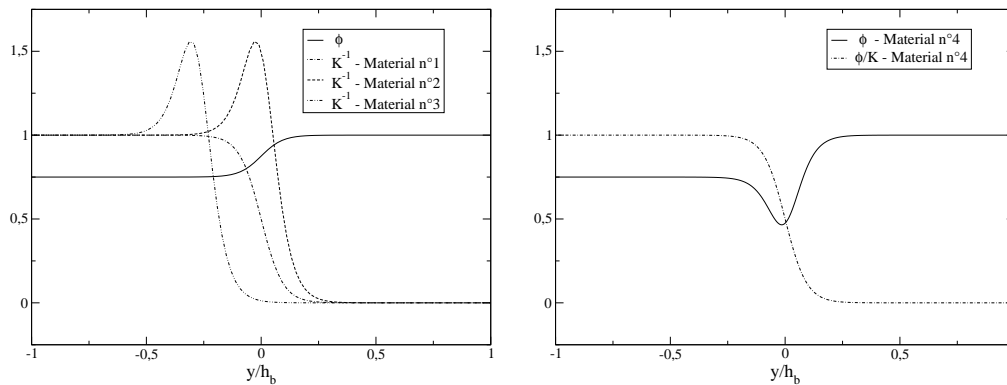


Figure 5.5: Non-dimensional porosity and permeability profiles for the four materials considered in the study.

In section 5.2.4.3, we underlined that our analysis is valid only if the value of Δy does not depend on h . Thus, this hypothesis is checked first. For each material and each free channel height, the value of y_{imp} is obtained by extending the parabolic profile of the mesoscopic solution inside the porous region. Then, Δy is computed using Eq. (5.37). The results for Δy are presented in table 5.1. Δy is almost independent of h , which substantiates our analysis. The mean value of Δy obtained for each material is also presented. This also shows that only one simulation at the mesoscopic scale with an arbitrary h is sufficient to compute y_{imp} and then to determine Δy using Eq. (5.37).

h/h_b	1	1.25	1.5	1.75	2	mean Δy
Material n° 1	0.1534	0.1554	0.1554	0.1574	0.1574	0.1558
Material n° 2	0.0107	0.0135	0.0153	0.0127	0.0157	0.0136
Material n° 3	0.0565	0.0575	0.0575	0.0581	0.0565	0.0572
Material n° 4	0.1570	0.1590	0.1600	0.1610	0.1620	0.1600

Table 5.1: Result obtained for Δy as a function of h for the different materials.

Material	y_ϕ	$y_{\phi/K}$	y_{imp}	Δy	y_M	$(\phi)^{exM}$	$(\phi/K)^{exM}$	$(\phi/K)^{ex\Delta}$
n° 1	0	0.0156	0.1544	0.1558	0.2	0.05	-637	-99
n° 2	0	0.2343	0.2310	0.0136	0.25	0.0625	-54	-7
n° 3	0	-0.0925	-0.0523	0.0572	0	0	-320	-122
n° 4	0.3	0	0.1428	0.16	0.2	-0.025	-691	-139

Table 5.2: Results from the numerical study at the mesoscopic scale.

5.2.5.2 MAE macroscopic problem

Comparisons of the velocity profiles

On figure 5.6, the mesoscopic velocity profiles u_c obtained by solving Eq. (5.4) numerically are compared to the MAE macroscopic profiles computed analytically using the new definition of the friction excess quantity $(\phi/K)^{ex\Delta}$. The macroscopic profiles are computed with the discontinuous interface located at y_M such that the quantity $(y_M - y_{\text{imp}})$ is positive. When this constraint is not satisfied, the result is not physical since negative slip velocities are obtained at the interface. However, provided that this constraint is satisfied, the choice of y_M in the transition region is arbitrary since it was proved in section 5.2.3.3 that it has no consequence on the macroscopic velocity profile in the free fluid region. Thus, we choose to locate the discontinuous interface at $y_M = 0.2$ for the first material, $y_M = 0.25$ for the second, $y_M = 0$ for the third and $y_M = 0.2$ for the fourth material. The excess quantities computed with these values of y_M are presented in table 5.2. Figure 5.6 shows that for the four materials, the MAE macroscopic velocity in the free fluid region is very well predicted. This supports the discussion on the excess quantity and the introduction of the conservation constraint in the matched asymptotic expansions analysis.

On figure 5.7, a zoom of the solution obtained for the third material in the transition region is presented. The velocity is not correctly predicted by the macroscopic model in the transition region. This is not surprising since by construction the macroscopic model is appropriate to describe the problem only in the two homogeneous regions, where the porosity and permeability are constant.

5.2.5.3 OS macroscopic problem

The results obtained by solving the MAE macroscopic problem using the new definition of the excess quantity associated to the friction force (5.28) are very good. The MAE macroscopic problem is now really equivalent to the mesoscopic problem given by Eq. (5.4). Is it possible to obtain the same results by solving the OS macroscopic problem using also the new definition of the excess quantity associated to the friction force? The first results obtained in section 5.2.3.3 show that substituting $\langle u \rangle^{(0)}$ by $\langle u \rangle$ in the jump condition to simplify the macroscopic problem has huge consequence on the free fluid velocity

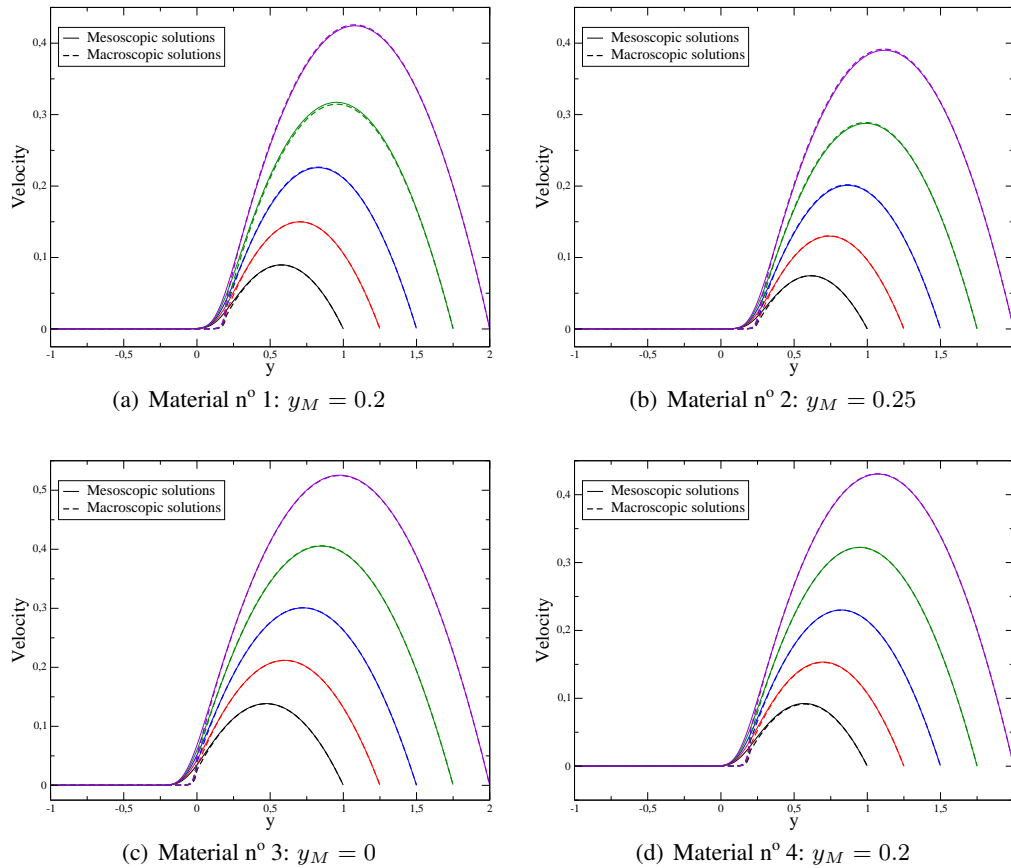


Figure 5.6: Comparison of the mesoscopic and macroscopic solutions obtained using the new definition (5.28) of the excess quantity associated to the friction force.

profiles. The only case where this substitution has no consequence is when the discontinuous interface is located at $(y_{\phi/K} + \Delta y)$. Indeed, in this case, the excess quantity associated to the friction force is zero and substituting $\langle u \rangle^{(0)}$ by $\langle u \rangle$ in the stress jump condition does not change the macroscopic result. Therefore, it is possible to obtain the same results by solving the OS macroscopic problem, but only for one precise location of the discontinuous interface. For other location of the discontinuous interface, there is no simple *a priori* known closure expression which ensures that the OS macroscopic problem is equivalent to the mesoscopic problem. We emphasize that the OS macroscopic problem is only an approximation of the MAE macroscopic problem and is introduced only to simplify the resolution of the problem at the macroscopic scale. The use of this problem has to be done with caution, since the approximation is valid only for a precise location of the discontinuous interface: when $y_M = (y_{\phi/K} + \Delta y)$. We recall that, contrary to the OS macroscopic problem, the MAE macroscopic problem is closed for any position of the discontinuous interface in the transition region. However, the MAE macroscopic problem is more costly since it has to be solved in two steps.

5.2.5.4 A priori estimation of Δy

With the reasoning of section 5.2.4.3, one still has to determine the location of the equivalent impermeable wall y_{imp} to deduce the value of Δy . In this study, it is determined numerically from the resolution of the mesoscopic problem for a particular but arbitrary value of h . The difficulty to determine Δy *a priori* is that in Eq. (5.29) Δy still depends on u_c , that is of course unknown. However, since u_c

	estimation	Δy
Material n° 1	0.1074	0.1558
Material n° 2	-0.0323	0.0136
Material n° 3	0.0077	0.0572
Material n° 4	0.102	0.16

Table 5.3: Comparison of the actual values and estimated values of Δy .

and u_A differ only in a small region, if u_c is replaced by u_A in Eq. (5.29) we can expect to obtain a first estimate of Δy . To simplify the calculation, the discontinuous interface is located at $(y_{\phi/K} + \Delta y)$. The macroscopic solution u_A is known analytically and is given in Appendix A, where $(\phi/K)^{exM}$ has to be replaced by $(\phi/K)^{ex\Delta}$ in Eq. (5.47). The results obtained using this approach are presented in table 5.3. The trend is good even though we seem to always underestimate the value of Δy by a constant value of approximately 0,05. But, this estimate is not accurate enough, since the error can be of the same order as the value, which implies that the results obtained with this approximation are neither worse nor better than those obtained with $\Delta y = 0$ (matched asymptotic expansion without constraint). So far, we are not able to predict the value of Δy prior to any simulation.

5.2.5.5 Summary

Before discussing the results that have been obtained, we summarize what has to be done to obtain the solution of the MAE macroscopic problem starting from given porosity and permeability profiles in the heterogeneous transition region at the mesoscopic scale. The values of y_ϕ and $y_{\phi/K}$ are deduced from the porosity and permeability profiles using Eq. (5.21). One simulation at the mesoscopic scale has to be run to determine the location of the equivalent impermeable wall y_{imp} . This is done by extending the parabolic profile of the mesoscopic velocity inside the porous region. Then, the value of Δy can be deduced from these results using Eq. (5.37). At this point, to compute the values of the two excess quantities $(\phi)^{exM}$ and $(\phi/K)^{ex\Delta}$, using Eq. (5.22) for the pressure force and Eq. (5.28) for the friction force, only the location of the discontinuous interface y_M is missing. As seen in section 5.2.3.3, this choice has no consequence on the macroscopic velocity profile as long as y_M belongs to the transition region and is such that $(y_M - y_{imp})$ remains positive. For a given position y_M , one can obtain the values of the two excess quantities and solve the MAE macroscopic problem using the stress jump condition (5.17) at y_M .

5.2.6 Discussion

5.2.6.1 Intrinsic interfacial properties

The dependence of the excess quantities on the location of the surface of discontinuity y_M is not compatible with the idea of *intrinsic* interfacial properties. Therefore, we cannot state that these excess quantities are intrinsic interfacial properties. However, the structure of the transition region is shown to be characterized by three structural parameters that are true intrinsic interfacial properties: $y_{\phi/K}$, y_ϕ and Δy . The center of gravity of the profiles of ϕ and ϕ/K (y_ϕ and $y_{\phi/K}$) are given by the permeability and porosity profiles (Eq. 5.21). The determination of Δy is much more complex and relies on the constraint of conservation of the friction surface-excess force. We have shown how to obtain its value for given porosity and permeability profiles and it is verified that its value is indeed independent of h , the height of the free fluid channel, which confirms its intrinsic character.

5.2.6.2 Porous boundary layer

The use of the Darcy-Brinkman equation has also to be addressed. In general, the Darcy-Brinkman model is introduced to be able to describe the boundary layer region within the porous region. This choice, combined with a variable permeability and porosity model, can be justified at the mesoscopic scale of description: filtered DNS data are very well represented by this model (Breugem, 2005). However, at the macroscopic scale (constant porosity and permeability), even though the Darcy-Brinkman model is used in the porous region, one has to be careful with the interpretation of the results. Neale and Nader (1974) define the porous boundary layer thickness as being the distance, measured from the permeable interface into the porous medium, at which the velocity first approaches to within 1% of U_∞ . However, this definition is not compatible with the fact that there is no best location for the permeable interface for the MAE macroscopic problem, as made explicit in section 5.2.3.3. This definition by Neale and Nader (1974) could be used only if the geometry of the material at the microscopic scale is such that there is indeed an obvious favored position to locate the macroscopic permeable interface. Furthermore, by construction, the macroscopic model (Darcy-Brinkman with constant porosity and permeability) is appropriate to describe the problem only in the two homogeneous regions (constant properties), but not in the heterogeneous transition region, where variable porosity and permeability should be considered. In particular, because of the exponential decay of the macroscopic velocity in the porous region, the macroscopic model always underestimates the mesoscopic velocity in the transition region and therefore underestimates the size of the porous boundary layer. This is clearly visible in figure 5.7. Thus, if one is interested in properly describing the boundary layer region within the porous region, since this region belongs to the transition region, one should use the mesoscopic scale of description of the problem. Our result shows that the size of the boundary layer thickness cannot be determined from a model with two homogeneous regions separated by a discontinuous interface.

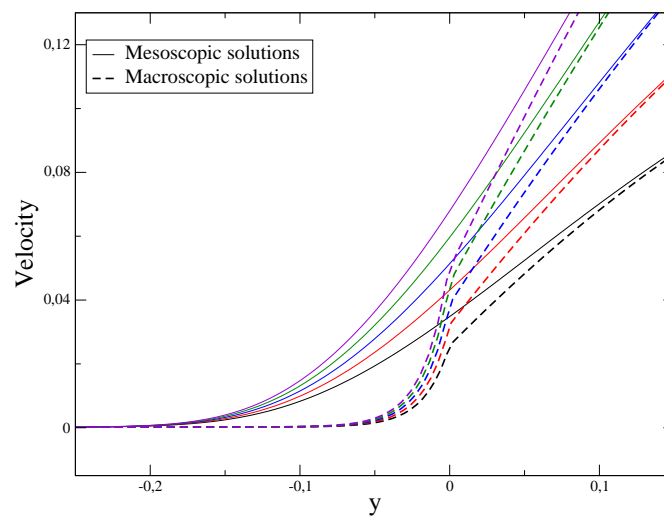


Figure 5.7: Zoom on the transition region - Third material.

5.2.7 Conclusion

The objective of this study was to show that it is possible to provide an explicit relation between the values of the jump parameters of the stress jump condition that one should impose at a free-fluid/porous interface and the structure of the transition region. In Chandesris and Jamet (2006), an explicit relation is proposed between the two jump parameters and the porosity and permeability variations in the transition zone through excess quantities. For given porosity and permeability profiles, the computation of

the excess quantities should have been direct. However, using the relation obtained in Chandesris and Jamet (2006), the macroscopic velocity in the free fluid region is not correctly predicted. This is the consequence of the non *exact* conservation of the friction surface-excess force in the matched asymptotic expansions analysis. Therefore, this analysis has been revisited to impose the constraint of conservation of the friction excess surface force and the excess quantity associated to the friction force has been re-defined. The important result is that, using this new definition of the excess quantity associated to the friction force, the values of the two jump parameters are directly related to the structure of the transition region through three structural quantities: $y_{\phi/K}$, y_{ϕ} and Δy (Eqs. (5.22), (5.28)) without any adjustable parameter. Furthermore, this analysis makes explicit the linear dependence between the jump parameters and the location of the discontinuous interface, a dependence that has been observed in previous study (Saffman, 1971; Larson et Higdon, 1986; Sahraoui et Kaviany, 1992; Breugem *et al.*, 2004). It is proved that as a consequence of this dependence, the velocity in the free channel remains independent of the arbitrary choice of the location of the discontinuous interface. Therefore, this analysis proves that there is no best choice for the location of the discontinuous interface inside the transition region, as long as $(y_M - y_{imp})$ remains positive. These results are illustrated by numerically studying 1D problems similar to the Beavers and Joseph experiments. Very good agreement is obtained between the mesoscopic and the MAE macroscopic solutions.

An important advantage of this study is also the introduction of the three scales of description: microscopic, mesoscopic and macroscopic. This introduction clarifies the hypotheses attached to each scale of description. For example, the interface is a macroscopic notion, whereas it is shown that the size of the porous boundary layer is a mesoscopic notion. Furthermore, the two up-scalings from one scale of description to another (microscopic \rightarrow mesoscopic and mesoscopic \rightarrow macroscopic) have been made explicit, suggesting a methodology to derive boundary conditions for other transport phenomena.

Acknowledgments

The authors would like to thank Pierre Ruyer for very helpful discussions.

Appendix A. Analytical solution of the MAE macroscopic problem

The solution of the MAE macroscopic problem is obtained by solving Eqs. (5.9) and (5.10) analytically, using the jump conditions (5.11) and (5.17). This analytical solution is given in Chandesris and Jamet (2006) and is recalled here for completeness concern and also to give the more general form of the result when the discontinuous interface is located at y_M and not at $y = 0$:

$$u_A(y) = U_{\infty} \left[\frac{-\sigma^2}{2} \left(\frac{(y - y_M)^2}{(h - y_M)^2} - 1 \right) + \left(C_2^{(0)} + \epsilon C_2^{(1)} \right) \left(\frac{y - y_M}{h - y_M} - 1 \right) \right], \quad y_M \leq y \leq h \quad (5.44)$$

$$u_A(y) = U_{\infty} \left(1 + C_1^{(0)} + \epsilon C_1^{(1)} \right) \exp \left(\sqrt{\frac{\phi_p}{K_p}} (y - y_M) \right), \quad y \leq y_M \quad (5.45)$$

with

$$\sigma = \frac{h - y_M}{\sqrt{K_p}}, \quad C_1^{(0)} = \frac{\sigma^2 - 2}{2(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})}, \quad C_2^{(0)} = \sigma\sqrt{\phi_p}C_1^{(0)} \quad (5.46)$$

and

$$\epsilon C_2^{(1)} = \frac{\sigma}{\sqrt{K_p}(1 + \sigma\sqrt{\phi_p})} \left((1 + C_1^{(0)})K_p \left(\frac{\phi}{K} \right)^{exM} - (\phi)^{exM} \right) = -C_1^{(1)} \quad (5.47)$$

This result is obtained from Chandesris and Jamet (2006) by a simple change of variable.

Appendix B. Analytical solution of the OS macroscopic problem

The solution of the OS macroscopic problem is obtained by solving Eqs. (5.9) and (5.10) analytically, using the jump conditions (5.11) and (5.18). Using only the velocity continuity at the interface, the solution in the free fluid and porous region is given by:

$$u_{OS}(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y-h)(y-y_M) + u_B \frac{h-y}{h-y_M}, \quad y_M \leq y \leq h \quad (5.48)$$

$$u_{OS}(y) = (u_B - U_\infty) \exp\left(\sqrt{\frac{\phi_p}{K_p}}(y-y_M)\right) + U_\infty, \quad y \leq y_M \quad (5.49)$$

where $u_B = u_{OS}(y_M)$ is the slip velocity and the Darcy velocity U_∞ is equal to:

$$U_\infty = -\frac{K_p}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.50)$$

The solution is still parameterized by u_B . The slip velocity is determined using the stress jump condition (5.18) at y_M :

$$u_B = \frac{U_\infty (h-y_M)}{2\sqrt{K_p}} \left(\frac{1 + 2\frac{(\phi)^{exM} + \sqrt{\phi_p K_p}}{h-y_M}}{\sqrt{\phi_p} + \sqrt{K_p} \left(\frac{\phi}{K}\right)^{exM} + \frac{\sqrt{K_p}}{h-y_M}} \right) \quad (5.51)$$

Appendix C. Location of the discontinuous interface

Here, we prove that the MAE macroscopic velocity in the free fluid region is independent of the location of the discontinuous interface y_M by rewriting the analytic solution of the free macroscopic velocity in a new system of coordinates independent of the location of the discontinuous interface y_M . The analytical macroscopic solution for the velocity is expressed in the system of coordinates y and the solution depends on the sign of $(y - y_M)$ (See Eqs. (5.44)-(5.45)). Since the choice of y_M is arbitrary in the transition region, the analytical solution seems to depend on the location of the discontinuous interface. A new system of coordinates Y is now introduced such that $Y = 0$ when $y = y_{\phi/K}$. The choice of this system is no longer arbitrary since the quantity $y_{\phi/K}$ is an intrinsic property of the surface of a given material. This change of variable implies:

$$Y = y - y_{\phi/K} \quad (5.52)$$

$$H = h - y_{\phi/K} \quad (5.53)$$

The objective is to show that the macroscopic velocity u_A in the free fluid region is independent of y_M . Since u_A in the free fluid region is a parabola and vanishes at the upper wall whatever the choice of y_M , it is sufficient to show that du_A/dY is independent of y_M . From Eqs. (5.44), in the y system of coordinate it comes:

$$\frac{du_A}{dy} = U_\infty \left(\underbrace{-\frac{y-y_M}{K_p}}_{B1} + \underbrace{\frac{C_2^{(0)} + \epsilon C_2^{(1)}}{\sigma\sqrt{K_p}}}_{B2} \right) \quad (5.54)$$

For more clarity, we introduce:

$$\Sigma = \frac{H}{\sqrt{K_p}}, \quad x = \frac{y_{\phi/K} - y_M}{H}, \quad \theta = \frac{y_\phi - y_{\phi/K}}{H} \quad (5.55)$$

It comes:

$$B_1 = \frac{-Y}{K_p} - \frac{\Sigma}{\sqrt{K_p}}x \quad (5.56)$$

Using relations (5.22), (5.28), (5.52), (5.55), the first order Taylor expansion in x of B_2 is:

$$B_2 = \frac{\sqrt{\phi_p}(\Sigma^2 - 2) + 2\theta\Sigma(1 - \phi_p)}{\sqrt{K_p} 2 (1 + \Sigma\sqrt{\phi_p})} + \left(\frac{\Sigma}{\sqrt{K_p}} + \theta \frac{(\phi_p - 1)\sqrt{\phi_p}\Sigma^2}{\sqrt{K_p}(1 + \Sigma\sqrt{\phi_p})^2} \right) x + \mathcal{O}(x^2) \quad (5.57)$$

However, θ is on the order of x , therefore the second part of the first order term in x is a $\mathcal{O}(x^2)$. Adding Eqs. (5.56) and (5.57) it comes:

$$\frac{du_A}{dY} = U_\infty \left[-\frac{Y}{K_p} + \frac{\sqrt{\phi_p}(\Sigma^2 - 2) + 2\theta\Sigma(1 - \phi_p)}{\sqrt{K_p} 2 (1 + \Sigma\sqrt{\phi_p})} + \mathcal{O}(x^2) \right] \quad (5.58)$$

The first order term in x vanishes. This explain why the choice of y_M hardly influences the macroscopic velocity profiles of our analysis in the free fluid channel.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la relation entre la valeur des deux paramètres de saut $(\phi)^{ex}$ et $(\phi/K)^{ex}$ de la condition de saut sur la contrainte (cf. Eq. (5.17)), la localisation de l'interface de discontinuité et les profils de porosité et de perméabilité dans la zone de transition.

Tout d'abord, nous avons montré que la définition $()^{ex}$ de la grandeur en excès (Eq. (5.15)) utilisée dans la relation de saut (5.17) n'est valide que si l'interface de discontinuité est située en $y = 0$ lors de l'étude analytique. Nous avons donc introduit une nouvelle définition, plus générale, de la grandeur en excès, notée $()^{exM}$, pour laquelle l'interface est située en $y = y_M$

$$(\psi)^{exM} = (y_\psi - y_M)(\psi_- - \psi_+) \quad (5.59)$$

où y_ψ est le centre de gravité du profil de ψ . La valeur de y_M n'est pas précisée a priori. Cette réécriture permet de mettre en évidence la dépendance linéaire de la grandeur en excès à la position de l'interface y_M (cf. Eq. (5.22)).

L'objectif de ce chapitre était de montrer que l'on est capable de déterminer la valeur des deux paramètres de saut $(\phi)^{exM}$ et $(\phi/K)^{exM}$ de la condition de saut sur la contrainte, connaissant les profils de porosité et de perméabilité dans la région de transition ainsi que la position de l'interface de discontinuité. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce chapitre, nous avons été confronté à une difficulté liée à l'approximation inhérente à tout développement asymptotique. Pour surmonter cette difficulté, nous avons repris l'analyse réalisée au chapitre 4 en nous appuyant sur l'analyse générique des processus interfaciaux et en ajoutant une contrainte de conservation des forces. L'ajout de cette contrainte de conservation nous a amené à redéfinir la grandeur en excès associée à la force de frottement surfacique en excès, qui est désormais notée $(\phi/K)^{ex\Delta}$:

$$\left(\mu \frac{\phi}{K} u \right)^{EX} = \mu \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} \quad (5.60)$$

avec

$$\left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex\Delta} = (y_{\phi/K} + \Delta y - y_M) \left(\frac{\phi_p}{K_p} \right) \quad (5.61)$$

Ainsi, la méthode des développements asymptotiques raccordés permet d'obtenir une expression linéarisée de la force de frottement surfacique en excès et ainsi de "sortir" $\langle u \rangle$ de la grandeur en excès. L'ajout de la contrainte de conservation implique que cette linéarisation est effectuée autour du centre de gravité $y_{\phi/K} + \Delta y$ de cette force de frottement surfacique en excès, et non autour du centre de gravité du profil de ϕ/K .

Nous récapitulons dans l'encadré de la table 5.4 l'expression des conditions de saut à appliquer à l'interface, ainsi que les définitions des différentes grandeurs en excès. Dans ces expressions, l'interface est située en $y = y_M$, le milieu poreux se trouve du côté $y < y_M$ et $u_A = \langle u \rangle^{(0)} + \varepsilon \langle u \rangle^{(1)}$.

$$u_A|_{y_M^+} - u_A|_{y_M^-} = 0 \quad (5.62)$$

$$\mu \frac{du_A}{dy} \Big|_{y_M^+} - \mu \frac{du_A}{dy} \Big|_{y_M^-} = \mu \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} + (\phi)^{exM} \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \quad (5.63)$$

$$(\phi)^{exM} = (y_\phi - y_M) (\phi_p - 1) \quad (5.64)$$

$$\left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex\Delta} = (y_{\phi/K} + \Delta y - y_M) \left(\frac{\phi_p}{K_p} \right) \quad (5.65)$$

y_ϕ , $y_{\phi/K}$ et Δy sont définis par :

$$\int_{-\infty}^{y_\phi} (\phi - \phi_p) + \int_{y_\phi}^{+\infty} (\phi - 1) = 0 \quad (5.66)$$

$$\int_{-\infty}^{y_{\phi/K}} \left(\frac{\phi}{K} - \frac{\phi_p}{K_p} \right) + \int_{y_{\phi/K}}^{+\infty} \left(\frac{\phi}{K} \right) = 0 \quad (5.67)$$

$$\Delta y = y_{imp} - y_{\phi/K} + \sqrt{\frac{K_p}{\phi_p}} \quad (5.68)$$

TAB. 5.4 – Conditions de saut à appliquer à l'interface et définitions des différentes grandeurs en excès.

Ainsi, nous avons relié la valeur des deux paramètres de saut, $(\phi)^{exM}$ et $(\phi/K)^{ex\Delta}$, à la structure de la région de transition à travers trois paramètres ($y_{\phi/K}$, y_ϕ et Δy). Ce sont ces trois paramètres qui caractérisent la région de transition de façon intrinsèque. Les grandeurs en excès, elles, sont définies en fonction de ces paramètres et des propriétés du milieu poreux homogène, ϕ_p et K_p . La valeur des grandeurs en excès n'est pas intrinsèque puisqu'elle dépend de la position de l'interface de discontinuité y_M . (cf. Eqs. (5.64) et (5.65)).

Différents auteurs avaient observé la dépendance des paramètres de saut à la position de l'interface de discontinuité. Nous avons montré dans ce chapitre que cette dépendance est linéaire. En s'appuyant sur cette dépendance linéaire, nous avons également démontré que la vitesse, solution du problème dans la partie libre du canal, est alors indépendante de la position de l'interface de discontinuité. Ainsi, il n'existe pas un choix unique pour localiser l'interface dans la région de transition.

Finalement, nous avons atteint l'objectif commun aux chapitres 4 et 5, qui était de répondre aux questions de la localisation de l'interface et de la valeur des paramètres de saut en vue d'une utilisation pratique des conditions de saut. Pour un milieu poreux donné, nous sommes désormais capables de déterminer la valeur des paramètres de saut en fonction de la position de l'interface et des profils de

porosité et de perméabilité dans la zone de transition. Un résumé des étapes à suivre est proposé dans la section [5.2.5.5](#)

Comme nous l'avons souligné dans la section [5.2.2](#), la condition de saut que nous avons obtenue sur le gradient de vitesse (cf. Eq. (5.63)) nécessite a priori de résoudre le problème en deux étapes : à l'ordre 0, puis à l'ordre 1. En effet, la condition de saut sur le gradient de vitesse à l'ordre 1 dépend de la vitesse solution à l'ordre zéro : $\langle u \rangle^{(0)}$. Nous avons également vu que substituer la vitesse totale à $\langle u \rangle^{(0)}$ dans la condition de saut modifiait trop fortement le résultat pour être acceptable. En revanche, nous avons mis en évidence une position particulière de l'interface pour laquelle le problème peut-être résolu en une seule étape (voir section [5.2.5.3](#)). Cette position particulière de l'interface est telle que la quantité en excès associée à la force de frottement est nulle. Ce point est important, car d'un point de vue numérique, le fait de résoudre le problème en deux étapes peut être très pénalisant. Comme nous avons le choix sur la position de l'interface, nous avons intérêt à la localiser à cette position particulière, afin de résoudre le problème en une unique étape.

De plus, pour cette position particulière de l'interface, il se peut que la deuxième grandeur en excès, celle liée à la force de pression soit également nulle ou négligeable. Dans ce cas particulier, le gradient de vitesse est alors continu au niveau de l'interface de discontinuité car les deux paramètres de saut s'annulent. Ce point est souligné car il signifie que pour l'étude de certains problèmes, on n'est pas nécessairement obligé d'implémenter la condition de saut sur le gradient de vitesse. On peut se contenter de placer l'interface de discontinuité de façon à ce que le gradient de vitesse soit continu à l'interface, ce qui peut grandement simplifier l'étape de mise en œuvre.

L'ensemble de ces résultats a été obtenu pour le cas d'un écoulement mono-dimensionnel, parallèle à l'interface de discontinuité. Pour les applications qui nous intéressent, l'écoulement est tridimensionnel et n'est pas nécessairement parallèle à l'interface de discontinuité entre la région libre et la région poreuse. La généralisation de ces résultats, au cas d'un écoulement tridimensionnel, non nécessairement parallèle à l'interface, est effectuée dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Généralisation de l'étude à un écoulement tridimensionnel

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié les conditions de saut à appliquer à l'interface libre/poreux pour le cas de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux. En particulier, nous avons établi une relation entre les paramètres de saut, la position de l'interface de discontinuité et les profils de porosité et de perméabilité dans la région de transition interfaciale. L'objectif de ce chapitre est de généraliser les résultats obtenus dans les chapitres précédents au cas où l'écoulement est tridimensionnel et l'interface est non plane.

6.1 Introduction

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, l'étude des transferts à une interface libre/poreux est la plupart du temps effectuée sur le problème académique de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux. Dans ce problème, l'écoulement est mono-dimensionnel à l'échelle de description macroscopique de l'interface et il est parallèle à l'interface (voir figure 6.1(a)). Ainsi, la plupart des auteurs (Beavers et Joseph, 1967; Saffman, 1971; Neale et Nader, 1974; Larson et Higdon, 1986; Ochoa-Tapia et Whitaker, 1995a; James et Davis, 2001; Goyeau *et al.*, 2003) ne se sont intéressés qu'à la composante tangentielle de la condition de saut sur le tenseur des contraintes. On rappelle ici les relations de saut obtenues par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) :

$$\langle u \rangle |_{y=0-} = \langle u \rangle |_{y=0+} \quad (6.1a)$$

$$\frac{1}{\phi_p} \frac{d\langle u \rangle}{dy} |_{y=0-} - \frac{d\langle u \rangle}{dy} |_{y=0+} = \frac{\beta}{\sqrt{K_p}} \langle u \rangle |_{y=0} \quad (6.1b)$$

l'interface étant localisée en $y = 0$, le milieu poreux étant situé du côté $y < 0$ et le milieu libre du côté $y > 0$.

A notre connaissance, Breugem *et al.* (2005) sont les premiers à avoir proposé une généralisation de ces relations de saut pour le cas d'un écoulement tridimensionnel, lors de l'étude du développement d'une couche limite laminaire au-dessus d'un milieu poreux. Dans un premier temps, Breugem *et al.* (2005) repartent de l'expression des conditions de saut (6.1) proposée par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) pour un écoulement mono-dimensionnel parallèle à l'interface, mais écrite sous une forme différente (néanmoins équivalente) :

$$\langle u \rangle |_{y=0-} = u |_{y=0+} = U_i \quad (6.2a)$$

$$\mu \frac{d\langle u \rangle_f}{dy} |_{y=0-} - \mu \frac{du}{dy} |_{y=0+} = \mu \frac{\beta}{\sqrt{K_p}} U_i \quad (6.2b)$$

Les expressions (6.1b) et (6.2b) sont identiques, puisque (i) dans le milieu poreux homogène $\langle u \rangle = \phi_p \langle u \rangle_f$ où la porosité ϕ_p est constante et (ii) dans le milieu libre, la porosité étant constante égale à 1, $\langle u \rangle = \langle u \rangle_f$. De plus, si on fait l'hypothèse que la taille du filtre est suffisamment petite devant l'échelle de longueur caractéristique des variations de la vitesse dans la zone libre, alors $\langle u \rangle_f \approx u$. Ainsi, construire la condition de saut en utilisant la moyenne volumique de la vitesse associée à la viscosité effective μ/ϕ du fluide (Eq. (6.1b)) est équivalent à construire la condition de saut à partir de la moyenne intrinsèque de la vitesse associée à la viscosité μ du fluide (Eq. (6.2b)).

Dans un deuxième temps, Breugem *et al.* (2005) proposent de généraliser la condition de saut (6.2) de la façon suivante :

$$\langle \mathbf{u} \rangle |_{y=0-} = \langle \mathbf{u} \rangle |_{y=0+} = \mathbf{U}_i \quad (6.3a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\langle \boldsymbol{\tau} \rangle_f |_{y=0-} - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_f |_{y=0+} \right) = \mu \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{U}_i}{\sqrt{K_p}} \quad (6.3b)$$

où \mathbf{n} est la normale à l'interface entre le milieu libre et le milieu poreux, dirigée du milieu poreux, vers le milieu fluide,

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle_f = -\langle p \rangle_f \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle_f + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle_f^T \right) \quad (6.4)$$

est le tenseur des contraintes construit sur les moyennes volumiques intrinsèques et $\boldsymbol{\beta}$ est un tenseur des paramètres de saut qui est sans dimension. Breugem *et al.* (2005) considèrent implicitement que ce tenseur est diagonal. L'introduction de ce tenseur leur permet de définir des paramètres de saut différents dans les directions normale et tangentielle, β_n et β_t . Cependant, les valeurs de ces deux paramètres ne sont pas connues, ni reliées aux propriétés macroscopiques du milieu poreux. Cela implique que l'expression (6.3b) n'est pas directement utilisable pour réaliser des études pratiques.

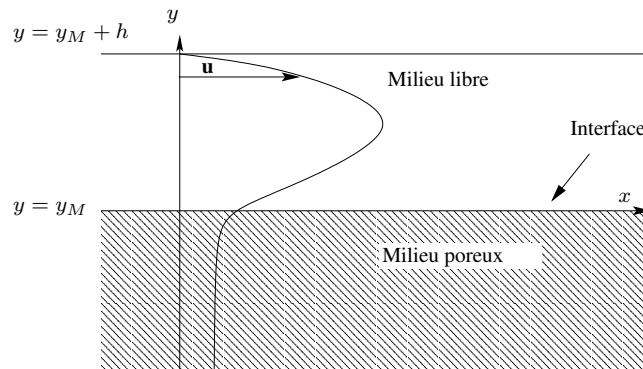
Dans les chapitres 4 et 5, nous avons utilisé une nouvelle méthode, la méthode des développements asymptotiques raccordés, pour étudier les conditions de saut à appliquer à l'interface entre le milieu libre et le milieu poreux pour l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux. Les conditions de saut que nous avons obtenues s'écrivent (voir l'encadré de la section 5.3, page 96) :

$$u_A |_{y_M^+} - u_A |_{y_M^-} = 0 \quad (6.5a)$$

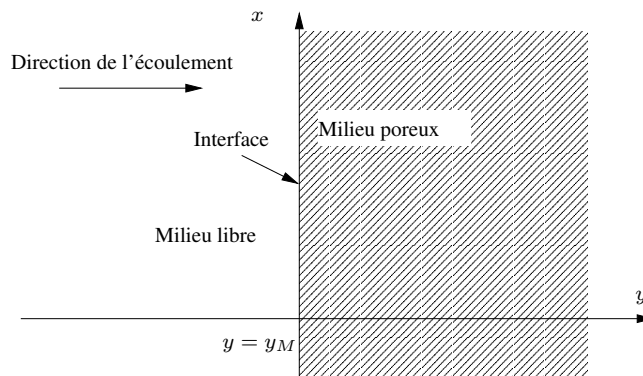
$$\mu \frac{du_A}{dy} \Big|_{y_M^+} - \mu \frac{du_A}{dy} \Big|_{y_M^-} = \mu \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} |_{y_M} + (\phi)^{exM} \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \quad (6.5b)$$

où y_M désigne la position de l'interface de discontinuité et $u_A = \langle u \rangle^{(0)} + \varepsilon \langle u \rangle^{(1)}$ est la vitesse, solution du problème à l'ordre 1 en $\varepsilon = \delta/h$. Nous rappelons que δ est l'épaisseur de la zone de transition entre le milieu libre et le milieu poreux à l'échelle de description mésoscopique de l'interface et que h est une échelle de longueur caractéristique de la taille du problème étudié (typiquement la hauteur du canal libre). La condition de saut sur la composante tangentielle du tenseur des contraintes, Eq. (6.5b), est différente de celle proposée par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) (cf. Eq. ((6.2b))). Alors que la condition de saut (6.2b) proposée par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) (et réécrite sous cette forme par Breugem *et al.* (2005)) s'applique au gradient de vitesse construit sur la *moyenne intrinsèque* de la vitesse $\langle u \rangle_f$, la condition de saut (6.5b) s'applique au gradient de vitesse construit sur la *moyenne volumique* de la vitesse $\langle u \rangle$. L'expression (6.5b) montre également que le saut du gradient de vitesse, en plus d'être proportionnel à la vitesse à l'interface par l'intermédiaire d'un premier paramètre de saut $(\phi/K)^{ex\Delta}$, est également proportionnel au gradient de pression par l'intermédiaire d'un deuxième paramètre de saut $(\phi)^{exM}$. Outre ce résultat, cette méthode nous a surtout permis de relier la valeur des paramètres de saut à la localisation de l'interface de discontinuité et aux profils de porosité et de perméabilité dans la région de transition. Nous sommes ainsi capable d'évaluer la valeur des paramètres de saut pour un milieu poreux donné. Ainsi, la méthode des développements asymptotiques raccordés permet, d'une part, d'étudier la forme des conditions de saut à appliquer à l'interface de discontinuité et, d'autre part, d'explicitier

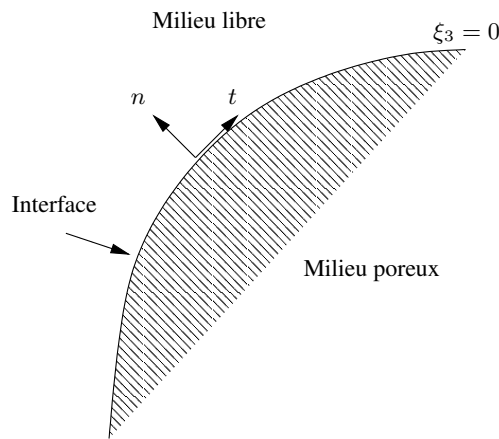
la valeur des paramètres de saut en fonction de la position de l'interface et de paramètres interfaciaux qui caractérisent la région de transition.



(a) Écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux.



(b) Écoulement mono-dimensionnel, rentrant dans un milieu poreux infini.



(c) Cas général.

FIG. 6.1 – Écoulements à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux. Représentations à l'échelle de description macroscopique de l'interface.

Afin de disposer de relations de saut utilisables dans un cadre plus général que celui de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'une interface plane, l'objectif de ce chapitre est d'utiliser la méthode des développements asymptotiques raccordés pour **dériver** les conditions de saut à appliquer à l'interface de discontinuité dans le **cas général** où l'écoulement est **tridimensionnel** et l'interface est **non plane**. On

se restreint néanmoins au cas d'un écoulement laminaire. Avant d'étudier le cas général tridimensionnel, nous considérons dans la section 6.2 le cas de l'écoulement mono-dimensionnel, perpendiculaire à l'interface de discontinuité (voir figure 6.1(b)). Pour étudier le cas général où l'écoulement est tridimensionnel et l'interface est non plane (voir figure 6.1(c)), nous suivons deux approches différentes. Dans la section 6.3 nous abordons ce problème en utilisant la méthode d'analyse générique des processus interfaciaux qui a été présentée à la section 2.3.3. Cette méthode permet d'avoir une première idée de la forme des conditions de saut dans le cas tridimensionnel relativement aisément. Cependant, les conditions de saut obtenues ne sont pas fermées, puisqu'elles s'expriment en fonction de grandeurs mésoscopiques inconnues et une étape de modélisation supplémentaire est nécessaire pour fermer le problème. Dans la section 6.4, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés en se plaçant en coordonnées généralisées dans le repère lié à l'interface afin de dériver des conditions de saut fermées. Le résultat obtenu est discuté dans la section 6.5 avant d'être utilisé dans la section 6.6 pour l'étude d'un écoulement laminaire dans un modèle simplifié de cœur de réacteur.

Les équations gouvernant le problème à l'échelle de description mésoscopique pour un écoulement laminaire ont été établies dans la section 4.2.2.2 en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique (voir Eqs (4.14) et (4.20)). Ces équations sont rappelées ici :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (6.6a)$$

$$\mu \nabla \cdot (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle) = \phi \nabla \langle p \rangle_f + \mu \phi \mathbf{K}^{-1} \langle \mathbf{u} \rangle \quad (6.6b)$$

où \mathbf{u} est la vitesse du fluide, p la pression, ϕ la porosité et \mathbf{K} le tenseur de perméabilité. La porosité et la perméabilité sont des fonctions continues de l'espace à l'échelle mésoscopique. Ces deux grandeurs varient fortement dans la direction normale à l'interface et faiblement dans les autres directions.

6.2 Écoulement mono-dimensionnel perpendiculaire à l'interface

Dans cette section, nous étudions le cas d'un écoulement mono-dimensionnel, perpendiculaire à l'interface entre le milieu libre et le milieu poreux (voir figure 6.1(b)), en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés. Le problème étant invariant par translation dans la direction x , nous faisons l'hypothèse que les variables du problème ne dépendent que de la coordonnée y et que la vitesse est non-nulle uniquement dans la direction y : $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle v \rangle (y) \mathbf{e}_y$. Le problème est alors extrêmement simplifié. En effet, d'après l'équation de conservation de la masse (6.6a), il vient tout de suite que la moyenne volumique de la vitesse $\langle v \rangle$ est constante dans l'ensemble du domaine. La vitesse et le gradient de vitesse sont donc continus, à tous les ordres, à la traversée de l'interface. La résolution du problème porte donc uniquement sur la pression. En projetant l'équation de bilan de quantité de mouvement sur la direction y et en utilisant le fait que $\langle v \rangle$ est constante, il vient :

$$\frac{d \langle p \rangle_f}{dy} = -\frac{\mu}{K} \langle v \rangle \quad (6.7)$$

Pour résoudre cette équation, il suffit de se donner le profil de perméabilité dans la région de transition $K(y)$. Cependant, l'objectif de cette étude n'est pas de résoudre cette équation de façon exacte. L'objectif est d'obtenir une solution approchée, mais suffisamment précise, de la solution de l'équation (6.7) sans avoir à spécifier *a priori* les variations de perméabilité dans la zone de transition, puis d'en déduire les conditions de saut à imposer sur la pression à l'interface entre les deux régions homogènes.

Pour obtenir cette solution approchée, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés. La procédure à suivre est identique à celle que nous avons présentée lors de l'étude de l'écoulement mono-dimensionnel parallèle à l'interface dans le chapitre 4. De plus, l'équation (6.7) est très simple, la vitesse $\langle v \rangle$ étant constante. C'est pourquoi les calculs effectués pour réaliser cette étude ne

sont pas détaillés et seuls les résultats sont présentés et discutés dans la suite.

A l'ordre 0, la pression est continue à la traversée de l'interface. A l'ordre 1, la solution du problème mésoscopique (6.7) obtenue à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés, est la pression $p_A = \langle p \rangle_f^{(0)} + \varepsilon \langle p \rangle_f^{(1)}$, solution du problème macroscopique discontinu suivant :

$$\frac{dp_A}{dy} = 0, \quad y < y_M \quad (6.8a)$$

$$\frac{dp_A}{dy} = -\frac{\mu}{K_p} \langle v \rangle, \quad y > y_M \quad (6.8b)$$

avec la condition de saut suivante à l'interface :

$$p_A|_{y_M^+} - p_A|_{y_M^-} = -\mu \left(\frac{1}{K} \right)^{exM} \langle v \rangle |_{y_M} \quad (6.9)$$

où

$$\left(\frac{1}{K} \right)^{exM} = (y_{1/K} - y_M) \frac{1}{K_p} \quad (6.10)$$

et $y_{1/K}$ est le centre de gravité du profil de $1/K$ (voir la définition (5.22) de l'opérateur $()^{exM}$).

Ainsi, lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'interface libre/poreux, la vitesse et le gradient de vitesse sont continus à tous les ordres à la traversée de l'interface. Quant à la pression, elle est continue à l'ordre 0, mais discontinue à l'ordre 1 à la traversée de l'interface. Le saut de pression est alors proportionnel à la vitesse à l'interface par l'intermédiaire du paramètre de saut $(1/K)^{exM}$. Ce paramètre de saut est relié explicitement au profil de perméabilité dans la zone de transition, ainsi qu'à la position de l'interface de discontinuité par l'intermédiaire d'une grandeur en excès (cf. Eq (6.10)).

6.3 Analyse générique des processus interfaciaux

L'analyse générique des processus interfaciaux, présentée à la section 2.3.3 du chapitre 2, permet de dériver relativement aisément la forme des conditions de saut à l'échelle macroscopique pour un problème général tridimensionnel, en partant des équations gouvernant le problème à l'échelle mésoscopique. Elle se base sur l'idée que les champs mésoscopique ψ et macroscopique Ψ d'une même grandeur physique ne diffèrent qu'à proximité de l'interface. Le lien entre les deux représentations d'une même grandeur physique est alors effectué en introduisant la notion de valeur en excès. La valeur en excès d'une grandeur est l'intégrale de la différence entre représentation mésoscopique et macroscopique de cette grandeur dans la zone interfaciale et dans la direction normale à l'interface (voir la figure 2.7) :

$$\psi^{EX} \hat{=} \int_{\mathcal{L}} (\psi - \Psi) d\mathcal{L} \quad (6.11)$$

Dans la limite où δ/h tend vers zéro, Edwards *et al.* (1991) montrent que les relations suivantes sont également vérifiées :

$$\int_A \psi^{EX} dS = \int_V (\psi - \Psi) dV \quad (6.12a)$$

$$\int_{\partial A} \psi^{EX} d\mathbf{L} = \int_{\partial V} (\psi - \Psi) d\mathbf{S} \quad (6.12b)$$

où V est un volume de contrôle défini dans la zone interfaciale, A est l'aire de la portion d'interface incluse dans le volume de contrôle V , ∂V est la frontière du volume V et ∂A le contour de la surface A .

A l'échelle mésoscopique, le problème est gouverné par les équations (6.6). A l'échelle macroscopique, le problème est gouverné dans la région libre homogène par le système d'équations :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.13a)$$

$$\mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = \nabla P \quad (6.13b)$$

et dans la région poreuse homogène par :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.14a)$$

$$\mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = \phi_p \nabla P + \mu \phi_p \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{U} \quad (6.14b)$$

où \mathbf{U} et P représentent respectivement la moyenne volumique de la vitesse et la moyenne volumique intrinsèque de la pression à l'échelle de description macroscopique. \mathbf{K}_p est le tenseur de perméabilité de la région poreuse homogène. Les équations que vérifient les grandeurs en excès sont alors dérivées en intégrant sur la zone de transition interfaciale la différence entre les équations gouvernant le problème à l'échelle macroscopique et les équations gouvernant le problème à l'échelle mésoscopique. L'approche étant présentée par [Edwards et al. \(1991\)](#) sur des équations de bilan génériques, sa transposition à notre problème est relativement immédiate. Nous exposons néanmoins cette méthode pour l'étude de l'équation de conservation de la masse afin d'en illustrer les différentes étapes.

Soit V un volume de contrôle entourant l'interface, représenté sur la figure 6.2. Ce volume de contrôle est décomposé de la façon suivante :

$$V = \bar{V}_I \oplus \bar{V}_{II} \oplus A \quad (6.15)$$

Les volumes \bar{V}_I et \bar{V}_{II} représentent les volumes associés à chaque phase, de part et d'autre de l'interface. A représente la surface de l'interface incluse dans le volume de contrôle V . La frontière du volume V est notée ∂V et les frontières des volumes \bar{V}_I et \bar{V}_{II} sont notées respectivement $\partial \bar{V}_I$ et $\partial \bar{V}_{II}$.

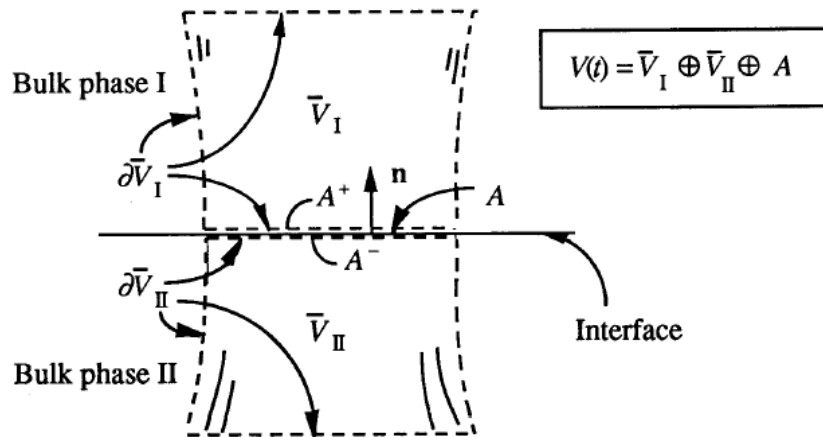


FIG. 6.2 – Décomposition du volume de contrôle entourant l'interface de discontinuité d'après [Edwards et al. \(1991\)](#).

Dans un premier temps, l'équation de conservation de la masse à l'échelle mésoscopique (Eq. (6.6a)) est intégrée sur le volume V . En utilisant le théorème de la divergence, il vient :

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.16)$$

De même, les équations de conservation de la masse à l'échelle macroscopique (Eqs. (6.13a) et (6.14a)) sont intégrées sur leur volume de contrôle respectif \bar{V}_I et \bar{V}_{II} . En utilisant le théorème de la divergence,

il vient :

$$\int_{\partial\bar{V}_I} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\partial\bar{V}_{II}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.17)$$

En additionnant ces deux équations et en utilisant le fait que la somme des flux à travers les frontières $\partial\bar{V}_I$ et $\partial\bar{V}_{II}$ correspond au flux à travers la frontière ∂V auquel il faut ajouter le flux à travers la surface A^+ et retrancher le flux à travers la surface A^- (cf. figure 6.2), on obtient :

$$\int_{\partial V} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = \int_A [\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dA \quad (6.18)$$

où $[\mathbf{U}]$ représente le saut de la quantité \mathbf{U} au niveau de l'interface. En faisant la différence entre les équations (6.16) et (6.18) il vient :

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial V} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = - \int_A [\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dA \quad (6.19)$$

Le membre de gauche de l'expression précédente correspond à un flux de masse en excès le long de la courbe ∂A (voir Eq. (6.12b)).

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial V} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial A} \langle \mathbf{u} \rangle^{EX} \cdot d\mathbf{L} \quad (6.20)$$

En utilisant de plus le théorème de la divergence surfacique, il vient :

$$- \int_A [\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial A} \langle \mathbf{u} \rangle^{EX} \cdot d\mathbf{L} = \int_A \nabla_s \cdot (\mathbf{I}_s \cdot \langle \mathbf{u} \rangle^{EX}) dA \quad (6.21)$$

où $\nabla_s \cdot$ est l'opérateur de divergence surfacique et \mathbf{I}_s l'opérateur identité sur la surface. La définition de ces deux opérateurs est rappelée dans la section B.4 de l'annexe B. Le résultat (6.21) étant valable pour n'importe quelle surface A de l'interface, on obtient finalement :

$$\nabla_s \cdot (\mathbf{I}_s \cdot \langle \mathbf{u} \rangle^{EX}) = - [\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} \quad (6.22)$$

Cette relation, qui provient de l'étude du bilan de masse autour de l'interface, traduit le phénomène suivant. Puisque la masse se conserve, si le saut de \mathbf{U} est non nul, $[\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} \neq 0$, alors il existe un flux de masse en excès non constant dans la direction tangentielle à l'interface. Cette idée est illustrée sur la figure 6.3.

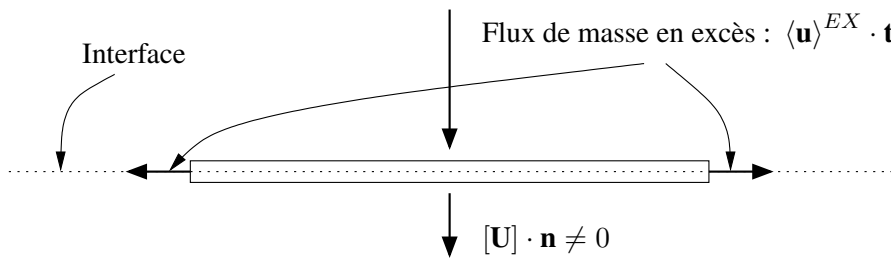


FIG. 6.3 – Bilan de masse autour de l'interface.

La même démarche est utilisée pour étudier l'équation de bilan de quantité de mouvement. Ainsi, en utilisant cette analyse générique des processus interfaciaux, nous obtenons une première expression des conditions de saut à appliquer à l'interface dans le cas général où l'écoulement est tridimensionnel et l'interface est non plane :

$$[\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} = - \nabla_s \cdot (\mathbf{I}_s \cdot \langle \mathbf{u} \rangle^{EX}) \quad (6.23a)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mu \nabla \mathbf{U}] = - \mu \nabla_s \cdot (\mathbf{I}_s \cdot (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle)^{EX}) + (\phi \nabla \langle p \rangle_f)^{EX} + \mu (\phi \mathbf{K}^{-1} \langle \mathbf{u} \rangle)^{EX} \quad (6.23b)$$

Dans l'équation (6.23b), le membre de gauche et le premier membre de droite proviennent du traitement du terme en laplacien de vitesse de l'équation (6.6b). Les deux derniers termes de droite de l'équation (6.23b) proviennent respectivement des termes en pression et de Darcy de l'équation (6.6b).

Cette analyse permet d'avoir une première idée de la forme des conditions aux limites pour le cas général tridimensionnel, tout en visualisant la provenance des différents termes de la condition de saut. On voit d'ailleurs apparaître naturellement le terme en gradient de pression dans la condition de saut (6.23b). L'inconvénient de cette analyse est qu'elle ne donne pas accès à une expression fermée des conditions de saut. En effet, à ce stade, on ne sait pas évaluer les membres de droite des équations (6.23) uniquement en fonction de grandeurs macroscopiques. Pour fermer ce problème, il faut savoir si on peut "sortir" $\langle \mathbf{u} \rangle$ et $\nabla \langle p \rangle_f$ des fonctions en excès par exemple ; ou encore si on peut négliger les termes en divergence surfacique. Pour les études mono-dimensionnelles, l'analyse à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés a permis de répondre à ces questions. C'est pourquoi nous souhaitons l'utiliser dans ce cas général tridimensionnel afin d'obtenir des relations de saut générales fermées.

6.4 Étude analytique

Afin de connaître l'ordre des différents termes des équations (6.23) et obtenir ainsi des relations de saut fermées, nous réalisons dans cette section une étude analytique du système (6.6) à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Comme pour l'étude mono-dimensionnelle, les échelles de grandeur caractéristiques du problème sont :

- h , échelle de longueur macroscopique caractéristique de la taille du problème considéré et associée au milieu libre
- δ , épaisseur de la zone de transition
- $\sqrt{K_p}$, échelle de longueur associée au milieu poreux
- U_∞ , vitesse caractéristique dans le milieu poreux

Les variables adimensionnelles suivantes sont introduites :

$$\nabla = \frac{1}{h} \nabla^+, \quad p^+ = \frac{\langle p \rangle_f h}{U_\infty \mu}, \quad \phi^+ = \phi, \quad Da = \frac{K_p}{h^2}, \quad \mathbf{K}^+ = \frac{1}{K_p} \mathbf{K}, \quad \mathbf{u}^+ = \frac{\langle \mathbf{u} \rangle}{U_\infty} \quad (6.24)$$

La forme adimensionnelle du problème (6.6) est alors donnée par :

$$\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ = 0 \quad (6.25a)$$

$$\nabla^+ \cdot (\nabla^+ \mathbf{u}^+) = \phi^+ \nabla^+ p^+ + \frac{1}{Da} \phi^+ (\mathbf{K}^+)^{-1} \mathbf{u}^+ \quad (6.25b)$$

Dans la suite, nous omettons l'exposant $^+$ par souci de clarté.

Dans le système (6.25), un petit paramètre est présent, même s'il n'est pas visible à première vue. En effet, la porosité et la perméabilité varient très fortement dans la zone de transition entre les deux régions homogènes. Ce sont donc des fonctions de l'espace. Or, ces variations peuvent s'exprimer en fonction du rapport δ/h . Ainsi, $\varepsilon = \delta/h$ est le petit paramètre qui est présent dans notre problème, *via* les profils de porosité et de perméabilité. Pour résoudre le système (6.25) dans lequel un petit paramètre est présent, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés. Même si dans le cas présent les calculs sont beaucoup plus techniques que ceux développés au chapitre 4, car effectués dans un système de coordonnées généralisées induit par l'interface, les étapes de résolution entre l'étude mono-dimensionnelle et l'étude tridimensionnelle sont extrêmement similaires. Nous les rappelons brièvement ici.

La première étape de la méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à diviser le domaine de résolution en trois régions : deux *régions extérieures*, les régions libres et poreuses homogènes et une *région intérieure*, la zone de transition hétérogène, dans laquelle les variables du système varient fortement. La porosité et la perméabilité variant fortement dans la direction normale à l'interface, mais pas dans les autres directions, le petit paramètre de l'étude asymptotique doit être introduit uniquement dans la direction normale à l'interface. Pour cela, il faut se placer dans le repère induit par l'interface et réécrire le problème (6.25) dans ce repère. Soit (ξ_1, ξ_2, ξ_3) le système de coordonnées induit par l'interface tel que (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Les vecteurs unitaires tangents à l'interface, parallèles aux directions principales de courbure, sont notés \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 et le vecteur unitaire normal à l'interface est noté \mathbf{n} (voir la figure 6.4). La définition de ce système de coordonnées est rappelée dans l'annexe B, ainsi que l'écriture des opérateurs gradient, divergence et laplacien dans les différentes bases associées à ce système de coordonnées. On souligne que les composantes de la vitesse dans la base naturelle normée $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ de ce système de coordonnées sont notées $u(i)$.

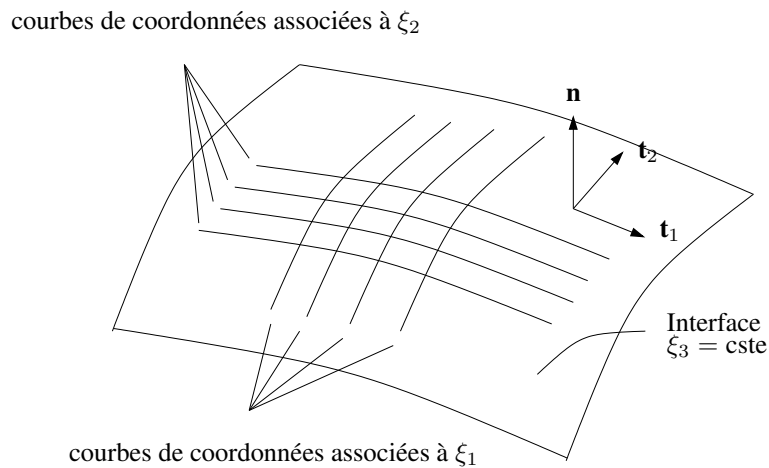


FIG. 6.4 – Système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) induit par l'interface.

Afin de simplifier les calculs, nous supposons que l'interface de discontinuité est située en $\xi_3 = 0$. Un simple changement de variable, présenté à la fin de l'étude, permet de considérer le cas plus général où l'interface est située en $\xi_3 = \text{cste} = \xi_M$. Pour tenir compte des fortes variations des grandeurs physiques dans la région intérieure, le changement de variable $\xi = \xi_3/\varepsilon$ est effectué dans la région intérieure. La solution des équations différentielles gouvernant le problème est alors cherchée séparément dans chacune des trois régions, sous la forme d'un développement en ε . Pour l'étude de chacune des régions extérieures, l'interface est considérée comme une surface de discontinuité située en $\xi_3 = 0$, ou plus exactement en $\xi_3 = 0^+$, pour la région libre, et en $\xi_3 = 0^-$ pour la région poreuse. Pour l'étude de la région intérieure, les régions homogènes libre et poreuse sont atteintes asymptotiquement lorsque ξ tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Pour finir, des conditions de raccord sont appliquées de part et d'autre de l'interface pour raccorder les solutions obtenues dans les différentes régions. Un problème macroscopique équivalent au problème mésoscopique de départ est ainsi obtenu, ainsi que les conditions de saut à l'interface que vérifient les variables macroscopiques du problème.

Pour effectuer cette analyse, il faut commencer par réexprimer le problème (6.25) dans le système de coordonnées généralisées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) induit par l'interface. Puis il faut en déduire les problèmes extérieurs et intérieur aux différents ordres en ε . Cette étape extrêmement technique est présentée dans la section C.1 de l'annexe C. Par la suite, les calculs effectués pour résoudre le problème aux différents ordres sont

relativement similaires à ceux réalisés pour l'étude mono-dimensionnelle du chapitre 4. Ainsi, nous avons choisi de reporter l'ensemble des calculs effectués dans le cadre de cette étude tridimensionnelle dans l'annexe C. Néanmoins, les grandes étapes et les principaux résultats sont présentés dans la suite de cette section avant d'être discutés dans la section 6.5.

6.4.1 Hypothèse simplificatrice

Nous faisons l'hypothèse que dans le système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , le tenseur de perméabilité est diagonal et s'écrit :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Puisque la force de frottement à l'intérieur du milieu poreux, $\mu \phi \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}$, dépend directement du tenseur de perméabilité, l'hypothèse (6.26) implique que dans la direction ξ_i , la force de frottement ne dépend que de la composante de la vitesse dans cette même direction. Cette hypothèse permet ainsi de simplifier les calculs des développements asymptotiques car le tenseur \mathbf{K}^{-1} est alors diagonal. Cependant, cette hypothèse est restrictive, car elle suppose que la base dans lequel le tenseur de perméabilité est diagonal, est la même que la base naturelle du système de coordonnées induit par l'interface. Or, la structure interne du milieu poreux, qui détermine les propriétés du tenseur de perméabilité, peut être dissociée de la géométrie de l'interface (voir la figure 6.5). Ainsi ces deux bases sont a priori complètement décorréées. Cependant, comme nous le verrons dans la section 6.6, pour le problème qui nous intéresse (interfaces coeur/plénum), ces deux bases sont confondues. De plus, bien que restrictive, cette hypothèse est moins forte que de considérer que le tenseur de perméabilité est isotrope, *i.e.* $\mathbf{K} = KI$. L'hypothèse (6.26) permet de conserver une information sur l'influence de l'anisotropie du milieu étudié. Nous souhaitons connaître cette influence de l'anisotropie car pour nos études, le milieu chargé de la région combustible est fortement anisotrope.

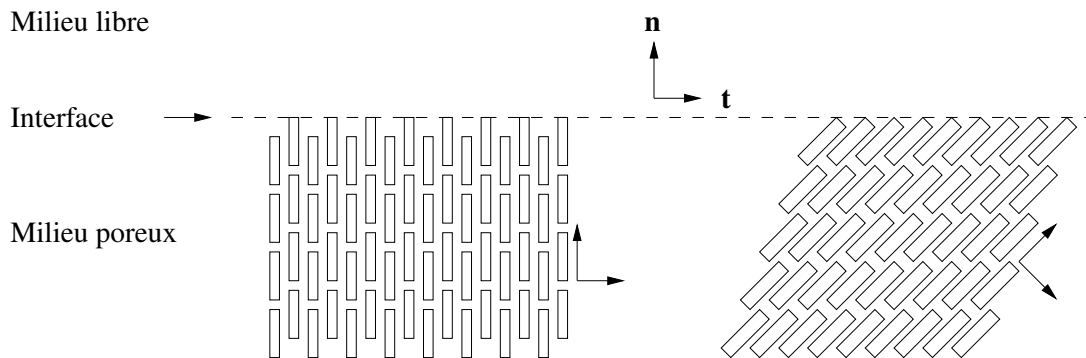


FIG. 6.5 – La base du système de coordonnées associé à l'interface peut-être alignée avec la base du tenseur de perméabilité du milieu poreux (à gauche). Mais ces deux bases peuvent aussi être décorréées (à droite).

6.4.2 Étude du problème à l'ordre 0 en ε

Pour obtenir le modèle discontinu équivalent au modèle continu (6.25) à l'ordre 0 en ε , il faut résoudre le problème intérieur jusqu'à l'ordre 1. Les valeurs limites des variables du problème intérieur lorsque ξ tend vers $+\infty$ et $-\infty$ sont alors raccordées aux valeurs limites des variables du problème extérieur lorsque ξ_3 tend vers 0^+ et 0^- à l'aide de conditions de raccord.

Condition de saut sur la vitesse

L'intégration de l'équation de continuité dans la région intérieure à l'ordre 0 (Eq. (C.12a)) indique que la composante normale de la vitesse est uniforme à l'ordre 0 dans la zone interfaciale. En utilisant la condition de raccord (C.20a), ce résultat implique que les valeurs de la composante normale de la vitesse dans les régions homogènes de part et d'autre de l'interface sont égales à l'ordre 0.

L'intégration de l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 0 projetée sur les vecteurs tangents à l'interface (Eqs. (C.15a) et (C.17a)), associée à la conditions de raccord (C.20c), nous apprend que les composantes tangentielles de la vitesse sont également uniforme à l'ordre 0 dans la zone interfaciale. Par passage à la limite en $+\infty$ et $-\infty$ dans la condition de raccord (C.20a), nous en déduisons que les deux composantes tangentielles de la vitesse sont continues à l'ordre 0. Ainsi, *la vitesse est continue à l'ordre 0 à la traversée de l'interface* :

$$\mathbf{u}^0|_+ = \mathbf{u}^0|_- \quad (6.27)$$

Condition de saut sur le gradient de vitesse normale

Pour étudier la condition de saut sur le gradient de vitesse normale, il faut intégrer l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 1 projetée sur les vecteurs tangents à l'interface (Eqs. (C.15b)-(C.17b)). Puis, par passage à la limite dans la condition de raccord (C.20d), on en déduit que la dérivée selon la direction normale à l'interface des deux composantes tangentielles de la vitesse sont continues à l'ordre 0.

La condition de saut sur la dérivée selon la direction normale de la composante normale de la vitesse est obtenue en intégrant l'équation de continuité de la région intérieure à l'ordre 1 (Eq. (C.12b)) et en utilisant la condition de raccord (C.20d). On montre que la dérivée selon la direction normale de la composante normale de la vitesse est également continue à l'ordre 0.

Finalement, d'après la définition de $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ en coordonnées généralisées (voir Eq. (B.16)), nous en déduisons que *le gradient de vitesse projeté sur la normale est continu à l'ordre 0 à la traversée de l'interface* :

$$\nabla \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}|_+ = \nabla \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}|_- \quad (6.28)$$

Condition de saut sur la pression

La condition de saut sur la pression est obtenue en intégrant l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 1 projetée sur la direction normale à l'interface (Eq. (C.19b)) et en utilisant la condition de raccord (C.20a). On en déduit que *la pression est continue à l'ordre 0 à la traversée de l'interface* :

$$p^0|_+ = p^0|_- \quad (6.29)$$

Comme pour les études mono-dimensionnelles, la vitesse, le gradient de vitesse projeté sur la normale ainsi que la pression sont continues à l'ordre 0 à la traversée de l'interface. Nous avons vu lors de l'étude mono-dimensionnelle réalisée dans le chapitre 4, que l'analyse à l'ordre 0 n'est pas suffisante puisqu'elle ne permet pas de faire apparaître la relation de saut sur le tenseur des contraintes et donc d'expliquer les résultats des expériences de [Beavers et Joseph \(1967\)](#). Ainsi, comme pour les études mono-dimensionnelles, l'analyse est poursuivie à l'ordre 1 en ε .

6.4.3 Étude du problème à l'ordre 1 en ε

Pour obtenir le modèle discontinu équivalent au modèle continu (6.25) à l'ordre 1 en ε , il faut étudier le problème intérieur jusqu'à l'ordre 2. On notera que l'intégration du problème intérieur à l'ordre 2 n'a pas besoin d'être explicite. Il faut en revanche pouvoir exprimer les valeurs limites des variables du problème intérieur lorsque ξ tend vers $+\infty$ et $-\infty$ afin de les raccorder aux valeurs limites des variables du problème extérieur lorsque ξ_3 tend vers 0^+ et 0^- .

Condition de saut sur la vitesse

L'étude du problème à l'ordre 0 montre que les trois composantes de la vitesse à l'ordre 1 sont linéaires en $\check{\xi}$ dans la zone interfaciale (cf. section C.2.2). En utilisant les conditions de raccord (C.20b) et (C.20d), on en déduit que les trois composantes de la vitesse sont continues à l'ordre 1. Ainsi, *la vitesse est continue à l'ordre 1 à la traversée de l'interface* :

$$\mathbf{u}^1|_+ = \mathbf{u}^1|_- \quad (6.30)$$

Condition de saut sur le gradient de vitesse normal

Pour déterminer la condition de saut sur le gradient de vitesse normal à l'ordre 1, nous étudions l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 2 projetée sur les vecteurs tangents à l'interface (Eqs. (C.15c) et (C.17c)). L'intégration de ces équations dans la région interfaciale, puis le passage à la limite en $+\infty$ et $-\infty$ permet d'obtenir les relations de saut suivantes à l'interface :

$$\frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3}|_+ - \frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3}|_- = \left(\check{\phi}\right)^{ex} \frac{\partial p^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_1}\right)^{ex} u^0(1) \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial u^1(2)}{\partial \xi_3}|_+ - \frac{\partial u^1(2)}{\partial \xi_3}|_- = \left(\check{\phi}\right)^{ex} \frac{\partial p^0}{\partial \xi_2} + \frac{1}{Da} \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_2}\right)^{ex} u^0(2) \quad (6.32)$$

où la quantité en excès est définie de la façon suivante :

$$\check{\psi}^{ex}(\xi_1, \xi_2) = \check{\xi}_{int}(\psi_- - \psi_+) + \int_{-\infty}^{\check{\xi}_{int}} (\check{\psi} - \psi_-) d\check{\xi} + \int_{\check{\xi}_{int}}^{+\infty} (\check{\psi} - \psi_+) d\check{\xi} \quad (6.33)$$

$\check{\xi}_{int}$ est une position arbitraire dans la région de transition et ψ_{\pm} sont les valeurs asymptotiques de ψ hors de la région de transition. Ainsi, les composantes tangentielles du gradient de vitesse projeté sur la normale ne sont pas continues à l'ordre 1 à la traversée de l'interface. Et, comme dans le cas mono-dimensionnel, le saut est proportionnel à la vitesse à l'interface ainsi qu'au gradient de pression par l'intermédiaire de deux paramètres de saut.

La condition de saut sur la dérivée selon la direction normale de la composante normale de la vitesse est obtenue en intégrant l'équation de continuité de la région intérieure à l'ordre 2 (Eq. (C.12c)) et en utilisant les conditions de raccord (C.20e) et (C.20f). On montre que la dérivée selon la direction normale de la composante normale de la vitesse est continue à la traversée de l'interface à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial u^1(3)}{\partial \xi_3}|_+ = \frac{\partial u^1(3)}{\partial \xi_3}|_- \quad (6.34)$$

Finalement, d'après la définition de $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ en coordonnées généralisées (voir Eq. (B.16) et de ∇p (voir Eq. (B.13)), il vient à l'ordre 1 :

$$[\nabla \mathbf{u}^1] \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \left(\check{\phi}\right)^{ex} \nabla p^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_1 + 1/Da \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_1}\right)^{ex} \mathbf{u}^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \left(\check{\phi}\right)^{ex} \nabla p^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_2 + 1/Da \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_2}\right)^{ex} \mathbf{u}^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_2 \\ 0 \end{cases} \quad (6.35)$$

Les composantes tangentielles du gradient de vitesse projeté sur la normale ne sont pas continues à l'ordre 1 à la traversée de l'interface. En revanche, la composante normale du gradient de vitesse projeté sur la normale est continue à l'ordre 1 à la traversée de l'interface.

Condition de saut sur la pression

La condition de saut sur la pression est obtenue en intégrant l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 2 projetée sur la direction normale à l'interface (Eq. (C.19c)), puis par passage à la limite lorsque $\check{\xi}$ tend vers $+\infty$ et $-\infty$. On montre que (cf. section C.3.3) :

$$p^1|_+ - p^1|_- = \left(\frac{1}{\check{\phi}}\right)^{ex} \nabla^2 \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}|_{\xi_3=0} - \frac{1}{Da} \left(\frac{1}{\check{K}_3}\right)^{ex} \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}|_{\xi_3=0} \quad (6.36)$$

La pression n'est pas continue à l'ordre 1 à la traversée de l'interface.

6.5 Résultats et discussion

6.5.1 Résultat exprimé sous forme dimensionnelle

Pour écrire le résultat sous forme dimensionnelle, nous utilisons la définition de l'adimensionnalisation des différentes grandeurs (6.24). De plus, la définition de la coordonnée selon la direction normale dans la région intérieure $\check{\xi} = \xi_3/\varepsilon$ et la définition des grandeurs en excès impliquent la relation suivante :

$$(\psi)^{ex} = \delta \psi_{\text{ref}} \left(\check{\psi}^+\right)^{ex} \quad (6.37)$$

où ψ est une grandeur physique quelconque, et ψ_{ref} est la valeur de référence utilisée pour l'adimensionnalisation de la grandeur ψ : $\psi^+ = \psi/\psi_{\text{ref}}$. Nous effectuons également un changement de variable par translation pour la coordonnée ξ_3 qui mesure la distance dans la direction normale à l'interface, afin de ne pas se restreindre au cas où l'interface est localisée en $\xi_3 = 0$ et de considérer le cas général où l'interface est localisée en $\xi_3 = \xi_M$.

La solution à l'ordre 1 du problème mésoscopique (6.6) obtenue à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés est le couple vitesse/pression (\mathbf{u}_A, p_A) avec $\mathbf{u}_A = \langle \mathbf{u} \rangle^0 + \varepsilon \langle \mathbf{u} \rangle^1$ et $p_A = \langle p \rangle_f^0 + \varepsilon \langle p \rangle_f^1$. (\mathbf{u}_A, p_A) est solution du problème macroscopique discontinu suivant. Dans le milieu libre ($\xi_3 > \xi_M$) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_A = 0 \quad (6.38a)$$

$$\mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}_A) = \nabla p_A \quad (6.38b)$$

dans le milieu poreux homogène ($\xi_3 < \xi_M$) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_A = 0 \quad (6.39a)$$

$$\mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}_A) = \phi_p \nabla p_A + \mu \phi_p \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{u}_A \quad (6.39b)$$

avec les conditions de saut suivantes en $\xi_3 = \xi_M$:

$$[\mathbf{u}_A] = 0 \quad (6.40a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u}_A]) = \begin{cases} (\phi)^{exM} \nabla \langle p \rangle_f^0|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_1 + \mu (\phi/K_1)^{exM} \langle \mathbf{u} \rangle^0|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_1 \\ (\phi)^{exM} \nabla \langle p \rangle_f^0|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_2 + \mu (\phi/K_2)^{exM} \langle \mathbf{u} \rangle^0|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_2 \\ 0 \end{cases} \quad (6.40b)$$

$$[p_A] = \mu \left(\frac{1}{\phi}\right)^{exM} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle^0|_{\xi_M} \cdot \mathbf{n} - \mu \left(\frac{1}{K_3}\right)^{exM} \langle \mathbf{u} \rangle^0|_{\xi_M} \cdot \mathbf{n} \quad (6.40c)$$

où l'opérateur $()^{exM}$ est défini comme dans le chapitre 5 par :

$$(\psi)^{exM}(\xi_1, \xi_2) = (\xi_M - \xi_\psi) (\psi_- - \psi_+) \quad (6.41)$$

et la fonction ξ_ψ , qui dépend des coordonnées ξ_1 et ξ_2 , vérifie :

$$\int_{-\infty}^{\xi_\psi} (\psi - \psi_-) d\xi_3 + \int_{\xi_\psi}^{+\infty} (\psi - \psi_+) d\xi_3 = 0 \quad (6.42)$$

La condition de saut (6.40b) peut également se mettre sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{n} \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u}_A]) \cdot \mathbf{t}_i = (\phi)^{exM} \nabla \langle p \rangle_f^0 |_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_i + \mu \left(\frac{\phi}{K_i} \right)^{exM} \langle \mathbf{u} \rangle^0 |_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_i \quad i = 1, 2 \quad (6.43a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u}_A]) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.43b)$$

Nous attirons l'attention sur le fait que, comme lors de l'étude de l'écoulement mono-dimensionnel de Poiseuille dans les chapitres précédents, ces relations de saut, valables à l'ordre 1 en ε , dépendent de la solution du problème à l'ordre 0. En effet, les relations de saut (6.40) dépendent de la vitesse et de la pression solutions du problème à l'ordre 0 : $\langle \mathbf{u} \rangle^0$ et $\langle p \rangle_f^0$. Ainsi, ces conditions de saut nécessitent a priori de résoudre le problème en deux étapes : à l'ordre 0, puis à l'ordre 1. Ce point peut-être délicat en vue de l'implémentation et de l'utilisation de ces conditions de saut. Il est abordé de nouveau dans l'annexe D qui présente la mise en œuvre numérique de ces conditions de saut.

Dans le chapitre 5, nous avons montré que la méthode des développements asymptotiques raccordés permet d'obtenir une expression linéarisée des forces surfaciques en excès, mais que l'expression obtenue n'est pas suffisante. Nous avons montré qu'il faut ajouter à la méthode des développements asymptotiques raccordés une **contrainte de conservation exacte des forces**. L'ajout de cette contrainte de conservation implique que la linéarisation des forces surfaciques en excès doit être effectuée autour du centre de gravité de ces forces surfaciques en excès. Elle amène ainsi à redéfinir les grandeurs en excès associées à des forces surfaciques en excès dont les expressions ont été approchées lors du processus de linéarisation. Ainsi, dans le chapitre 5, nous n'avons pas eu besoin de redéfinir la grandeur en excès associée à la force de pression surfacique en excès car la relation (5.25) est une relation exacte. En revanche, nous avons redéfini la grandeur en excès associée à la force de frottement surfacique en excès. Nous rappelons que cette nouvelle grandeur en excès est notée à l'aide de l'opérateur $()^{ex\Delta}$.

Pour le moment, nous n'avons pas pris en compte cette contrainte de conservation des forces dans l'étude analytique tridimensionnelle. Ainsi, les grandeurs en excès des relations (6.40c) et (6.43a) sont construites avec l'opérateur $()^{exM}$, alors que la condition de saut (6.5b) obtenue dans le chapitre 5 fait intervenir l'opérateur $()^{ex\Delta}$. Afin de prendre en compte la contrainte de conservation des forces, nous souhaitons redéfinir les grandeurs en excès des relations (6.40c) et (6.43a). Puisque les quatre grandeurs en excès de ces relations sont associées à des expressions approchées de forces surfaciques en excès, nous devons les redéfinir toutes les quatre à l'aide de l'opérateur $()^{ex\Delta}$. L'opérateur $()^{exM}$ est ainsi remplacé par l'opérateur $()^{ex\Delta}$ dans les relations (6.40c) et (6.43a). Nous illustrons cela sur l'exemple de la force de pression surfacique en excès projetée sur la direction tangente \mathbf{t}_i . L'étude analytique tridimensionnelle nous a permis d'obtenir la forme linéarisée suivante :

$$\left(\phi \nabla \langle p \rangle_f \right)^{EX} \cdot \mathbf{t}_i \approx (\phi)^{exM} \nabla \langle p \rangle_f^0 |_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_i \quad (6.44)$$

L'ajout de la contrainte de conservation exacte de la force de frottement nous conduit à redéfinir la grandeur en excès $(\phi)^{exM}$ et nous avons alors

$$\left(\phi \nabla \langle p \rangle_f \right)^{EX} \cdot \mathbf{t}_i = (\phi)^{ex\Delta} \nabla \langle p \rangle_f^0 |_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_i \quad (6.45)$$

Afin de faciliter la comparaison des résultats obtenus dans cette section avec les résultats obtenus pour les écoulements mono-dimensionnels, ou encore avec la généralisation proposée par Breugem *et al.* (2005) et lors de l'analyse générique, nous récapitulons les différentes conditions de saut vues dans ce

Écoulement mono-dimensionnel parallèle à l'interface

Conditions de saut proposées par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) et réécrite sous cette forme par Breugem *et al.* (2005) :

$$\langle u \rangle \Big|_{y=0-} = u \Big|_{y=0+} = U_i \quad (6.46a)$$

$$\mu \frac{d\langle u \rangle_f}{dy} \Big|_{y=0-} - \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0+} = \mu \frac{\beta}{\sqrt{K_p}} U_i \quad (6.46b)$$

Étude analytique des chapitres 4 et 5 : $(u_A = \langle u \rangle^{(0)} + \varepsilon \langle u \rangle^{(1)})$

$$u_A \Big|_{y_M^+} - u_A \Big|_{y_M^-} = 0 \quad (6.47a)$$

$$\mu \frac{du_A}{dy} \Big|_{y_M^+} - \mu \frac{du_A}{dy} \Big|_{y_M^-} = \mu \left(\frac{\phi}{K} \right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} + (\phi)^{exM} \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \quad (6.47b)$$

Écoulement mono-dimensionnel perpendiculaire à l'interface

Étude analytique de la section 6.2 : $(p_A = \langle p \rangle_f^{(0)} + \varepsilon \langle p \rangle_f^{(1)})$

$$p_A \Big|_{y_M^+} - p_A \Big|_{y_M^-} = -\mu \left(\frac{1}{K} \right)^{exM} \langle v \rangle \Big|_{y_M} \quad (6.48)$$

Écoulement tridimensionnel

Généralisation proposée par Breugem : $(\langle \boldsymbol{\tau} \rangle_f = -\langle p \rangle_f \mathbf{I} + \mu (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle_f + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle_f^T))$

$$\langle \mathbf{u} \rangle \Big|_{y=0-} = \langle \mathbf{u} \rangle \Big|_{y=0+} = \mathbf{U}_i \quad (6.49a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\langle \boldsymbol{\tau} \rangle_f \Big|_{y=0-} - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_f \Big|_{y=0+}) = \mu \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{U}_i}{\sqrt{K_p}} \quad (6.49b)$$

Analyse générique des processus interfaciaux :

$$[\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} = -\nabla_s \cdot (\mathbf{I}_s \cdot \langle \mathbf{u} \rangle^{EX}) \quad (6.50a)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mu \nabla \mathbf{U}] = -\mu \nabla_s \cdot (\mathbf{I}_s \cdot (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle)^{EX}) + (\phi \nabla \langle p \rangle_f)^{EX} + \mu (\phi \mathbf{K}^{-1} \langle \mathbf{u} \rangle)^{EX} \quad (6.50b)$$

Étude analytique de la section 6.4 : $(\mathbf{u}_A = \langle \mathbf{u} \rangle^0 + \varepsilon \langle \mathbf{u} \rangle^1$ et $p_A = \langle p \rangle_f^0 + \varepsilon \langle p \rangle_f^1)$

$$[\mathbf{u}_A] = 0 \quad (6.51a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u}_A]) \cdot \mathbf{t}_i = (\phi)^{ex\Delta} \nabla \langle p \rangle_f^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_i + \mu \left(\frac{\phi}{K_i} \right)^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_i \quad i = 1, 2 \quad (6.51b)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u}_A]) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.51c)$$

$$[p_A] = \mu \left(\frac{1}{\phi} \right)^{ex\Delta} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{n} - \mu \left(\frac{1}{K_3} \right)^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{n} \quad (6.51d)$$

TAB. 6.1 – Conditions de saut à une interface libre/poreux.

chapitre dans le tableau 6.1.

Les relations de saut (6.51) sont cohérentes avec les résultats obtenus pour des écoulements mono-dimensionnels parallèles (Eq. (6.47b)) et perpendiculaires (Eq. (6.48)) à l'interface. Cependant, l'analyse tridimensionnelle fait apparaître un nouveau terme dans le saut de pression en laplacien de vitesse (cf. Eq. (6.51d)). Ce terme ne peut pas apparaître dans les analyses mono-dimensionnelles. En effet, pour l'étude d'un écoulement normal à l'interface, la vitesse étant constante, son laplacien est nul. Et dans le cas d'un écoulement parallèle à l'interface, la pression est continue dans la direction normale à l'interface. Mis à part le terme en laplacien de vitesse, les relations de saut obtenues pour les écoulements mono-dimensionnels avec la méthode des développements asymptotiques raccordés sont également valables localement dans le cas général tridimensionnel. Ces résultats indiquent également que le saut du tenseur des contraintes ne dépend pas de la courbure de l'interface, tout du moins pas jusqu'à l'ordre 1. L'interface peut donc être approximée localement par son plan tangent.

Un autre résultat important concerne la prise en compte de l'anisotropie du milieu poreux. Les conditions de saut (6.51) mettent en jeu en particulier trois paramètres de saut différents $(\phi/K_1)^{ex\Delta}$, $(\phi/K_2)^{ex\Delta}$ et $(1/K_3)^{ex\Delta}$, associés aux trois composantes diagonales du tenseur de perméabilité. Ces paramètres de saut sont directement liés aux variations de ϕ et des K_i dans la zone de transition, par l'intermédiaire de grandeurs en excès. Nous soulignons que les variations des composantes du tenseur de perméabilité K_i dans la zone de transition peuvent être très différentes les unes des autres, et ce, même si le matériau poreux est isotrope dans la région poreuse homogène. En effet, cette isotropie est perdue dans la région de transition car les propriétés du milieu poreux ne varient plus de la même façon dans les directions normales et tangentielles à l'interface. Ces différences de variations sont prises en compte par l'intermédiaire d'un coefficient de saut associé à chaque direction. Ainsi, chaque coefficient de saut rend compte des variations de la perméabilité dans la direction qui lui est associée, indépendamment des autres directions.

Ce résultat est lié à l'hypothèse de départ qui suppose que le tenseur de perméabilité est diagonal dans le système de coordonnées induit par l'interface. Si on ne fait pas cette hypothèse, et en notant K_{ij}^{inv} les composantes de l'inverse du tenseur de perméabilité, on peut montrer, en reprenant les calculs réalisés dans l'annexe C, que les conditions de saut (6.51b) et (6.51d) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u}_A]) \cdot \mathbf{t}_i &= (\phi)^{ex\Delta} \nabla \langle p \rangle_f^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_i + \mu (\phi K_{i1}^{inv})^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_1 \\ &+ \mu (\phi K_{i2}^{inv})^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_2 + \mu (\phi K_{i3}^{inv})^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{n} \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.52a)$$

$$\begin{aligned} [p_A] &= \mu \left(\frac{1}{\phi} \right)^{ex\Delta} \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{n} - \mu (K_{31}^{inv})^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_1 - \mu (K_{32}^{inv})^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{t}_2 \\ &- \mu (K_{33}^{inv})^{ex\Delta} \langle \mathbf{u} \rangle^0 \Big|_{\xi_M} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6.52b)$$

On obtient alors un coefficient de saut associé à chaque composante de l'inverse du tenseur de perméabilité. Ce résultat est très général. Dans la pratique, la détermination des variations de toutes les composantes de l'inverse du tenseur de perméabilité dans la région de transition peut s'avérer difficile.

6.5.2 Comparaison avec les résultats de l'analyse générique

Les résultats obtenus avec la méthode des développements asymptotiques raccordés (6.51) sont comparés aux conditions de saut (6.50) obtenues dans la section 6.3 à l'aide de l'analyse générique des processus interfaciaux.

En ce qui concerne l'équation de continuité, le résultat (6.51a), comparé à la condition de saut (6.50a),

implique que le terme en divergence surfacique du membre de droite de l'équation (6.50a) est négligeable, tout du moins jusqu'au premier ordre en ε . Le résultat (6.51a), obtenu avec la méthode des développements asymptotiques raccordés, donne également une information supplémentaire : la composante tangentielle de la vitesse est continue, au moins jusqu'à l'ordre 1 en ε .

En ce qui concerne l'équation de bilan de quantité de mouvement, on s'intéresse tout d'abord aux directions tangentielles. La comparaison du résultat (6.51b) à la condition de saut (6.50b) projetée sur les directions tangentielles, implique que le terme en divergence surfacique du membre de droite de l'équation de l'équation (6.50b), projeté sur les directions tangentielles, est négligeable au premier ordre en ε . De plus, au premier ordre, on peut effectivement "sortir" $\langle \mathbf{u} \rangle$ et $\nabla \langle p \rangle_f$ des grandeurs en excès. Ainsi, les grandeurs en excès ne dépendent plus que de grandeurs mésoscopiques connues telles que ϕ et K . Les relations de saut obtenues dans les directions tangentielles (6.51b) sont fermées.

Dans la direction normale, d'après le résultat (6.51c), le saut de la composante normale du gradient de vitesse projeté sur la normale est nul. En injectant ce résultat dans la condition de saut (6.50b) projetée sur la normale, cela implique que la somme des trois membres de droite de l'équation (6.50b) projetée sur la normale est nulle. On se rend alors compte que la condition de saut sur la pression (6.51d) que nous avons obtenue avec la méthode des développements asymptotiques raccordés, provient de l'utilisation de cette relation sur la somme des trois membres de droite de l'équation (6.50b) projetée sur la normale.

Ainsi la méthode des développements asymptotiques raccordés nous a permis d'approfondir les résultats obtenus avec l'analyse générique des processus interfaciaux. En particulier, nous avons vu que les conditions de saut sur la composante normale du tenseur des contraintes ne se simplifient pas de la même manière dans les directions normales et tangentielles. Elle nous a également permis de proposer des relations de saut générales fermées dans le cas où l'écoulement est tridimensionnel et l'interface est non plane.

6.5.3 Comparaison avec la généralisation proposée par Breugem

Nous souhaitons maintenant comparer le résultat que nous avons obtenu (Eqs. (6.51)), aux relations de saut proposée par Breugem *et al.* (2005) (Eqs. (6.49)).

En ce qui concerne l'équation de continuité, les résultats sont identiques : la vitesse est continue.

En ce qui concerne l'équation de bilan de quantité de mouvement, la comparaison de nos résultats avec les relations de saut proposées par Breugem *et al.* (2005) nécessite de définir un tenseur des contraintes associé à notre problème. Or, la définition d'un tenseur des contraintes à partir de l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'échelle mésoscopique (6.6b) n'est pas aisée. En effet, puisque la porosité est à l'extérieur du terme en gradient de pression, l'introduction d'un terme en divergence d'un tenseur n'est pas immédiate. A priori, deux choix sont possibles pour définir le tenseur des contraintes. Un tenseur des contraintes défini à partir de la moyenne intrinsèque ou un tenseur des contraintes défini à partir de la moyenne volumique :

$$\boldsymbol{\tau}_1 = - \langle p \rangle_f \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle_f + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle_f^T \right) \quad (6.53)$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = - \langle p \rangle \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T \right) \quad (6.54)$$

A priori, nous aurions plutôt tendance à privilégier la deuxième expression (6.54) car c'est la moyenne volumique de la vitesse $\langle \mathbf{u} \rangle$ qui est à divergence nulle (cf. équation de continuité). Malheureusement, aucun de ces deux tenseurs des contraintes ne correspond aux conditions de saut que nous avons obtenues (Eqs. (6.51)). En effet, celles-ci combinent une condition de saut sur la *moyenne volumique* de la vitesse et la *moyenne intrinsèque* de la pression. Or, la construction d'un tenseur des contraintes combinant ces deux types de moyenne :

$$\boldsymbol{\tau}_3 = - \langle p \rangle_f \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T \right) \quad (6.55)$$

est choquant du point de vue de la méthode de prise de moyenne volumique. En effet, le tenseur des contraintes τ_3 combine des grandeurs qui n'ont pas été moyennées sur les mêmes volumes. Ce tenseur n'apparaît donc pas naturellement lors du processus de prise de moyenne. Ainsi, le résultat que nous avons obtenu (Eqs. (6.51)) ne s'exprime pas simplement sous la forme d'un saut d'un tenseur des contraintes.

La relation de saut proposée par Breugem *et al.* (2005) (voir Eq. (6.49b)) est construite à l'aide du tenseur τ_1 , défini à partir de la moyenne intrinsèque. Ainsi, la relation de saut qu'ils proposent s'exprime simplement en fonction d'un tenseur des contraintes. Nous rappelons que cette relation a été proposée en généralisant le résultat obtenu par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) sur les composantes tangentielles du tenseur des contraintes (6.46b), sans réaliser de nouvelle étude. En particulier, la condition de saut dans la direction normale n'a pas été étudiée. Or, c'est cette condition de saut dans la direction normale qui, dans notre étude, fait intervenir la moyenne volumique intrinsèque de la pression et introduit la dissymétrie entre la vitesse et la pression pour le choix de la moyenne.

Cependant, nous rappelons que la condition de saut sur la composante tangentielle du tenseur des contraintes obtenue par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a), s'exprime à partir de la moyenne intrinsèque de la vitesse (voir Eq. (6.46b)), contrairement à celle que nous avons obtenue (voir Eq. (6.47b)) qui s'exprime en fonction de la moyenne volumique de la vitesse. Il existe donc une certaine logique à généraliser le résultat de Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) en utilisant le tenseur des contraintes τ_1 défini à partir de la moyenne intrinsèque. Néanmoins, nous avons montré au chapitre 4 que, en supposant que l'équation de Darcy-Brinkman avec porosité et perméabilité variable (Eq. (4.22)) permet de décrire correctement la physique de l'écoulement à l'échelle de description mésoscopique de l'écoulement, alors la condition de saut sur la contrainte doit être construite en utilisant la viscosité du fluide, et non la viscosité effective (μ/ϕ), ce qui équivaut à dire (voir section 6.1) que la condition de saut sur le gradient de vitesse doit être construite en utilisant la moyenne volumique de la vitesse et non la moyenne intrinsèque de la vitesse.

Ainsi, même si le résultat que nous obtenons s'exprime de façon moins simple que la généralisation proposée par Breugem *et al.* (2005), il a le mérite de provenir d'une étude réalisée dans le cas général tridimensionnel et découle du système d'équations choisi pour modéliser le problème à l'échelle mésoscopique.

Comme pour les études mono-dimensionnelles, un des résultats fondamentaux de l'étude analytique de la section 6.4 est que la valeur des paramètres de saut est explicitement reliée aux variations de porosité et de perméabilité dans la région de transition et à la position de l'interface de discontinuité par l'intermédiaire de quantités en excès. Nous rappelons que les valeurs du tenseur de paramètre de saut β de la relation de saut proposée par Breugem *et al.* (2005) (6.49b) ne sont pas connues ni reliées aux propriétés macroscopiques du milieu poreux. Pour l'étude d'un problème donné, grâce aux résultats obtenus dans ce chapitre, nous sommes désormais capables de déterminer la valeur des paramètres de saut de ce problème. Ce point est illustré dans la section 6.6 où nous étudions l'écoulement laminaire dans un modèle simplifié de cœur de réacteur.

6.5.4 Comparaison avec les conditions de saut classiques en diphasique

Dans un milieu diphasique constitué de deux phases non miscibles (pas de transfert de masse à l'interface), les conditions de saut à l'interface entre les deux phases s'écrivent, lorsque la tension de surface est constante :

$$[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.56a)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mu \nabla \mathbf{u}] \cdot \mathbf{t}_i = 0 \quad (6.56b)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mu \nabla \mathbf{u} - p \mathbf{Id}] \cdot \mathbf{n} = \kappa \sigma \quad (6.56c)$$

où κ est la courbure locale de l'interface et σ est la tension interfaciale. En général, on ajoute à ces conditions de saut une hypothèse d'adhésion des deux fluides, *i.e.* on considère que les vitesses tangentielles des deux fluides sont égales. Ainsi, en diphasique, comme à l'interface libre/poreux, toutes les composantes de la vitesse sont continues à la traversée de l'interface.

La différence entre les relations que nous avons obtenues (cf. Eqs. (6.51)) et les relations (6.56) porte sur le saut des grandeurs associées aux contraintes, $\mu \nabla \mathbf{u}$ et p , projetées sur la normale. Ce saut, projeté sur une direction tangente, est nul en diphasique alors qu'il est proportionnel à des grandeurs en excès à l'interface libre/poreux. Nous rappelons que ces grandeurs en excès peuvent être positives, négatives ou encore nulles selon la position de l'interface de discontinuité vis-à-vis des profils de porosité et de perméabilité dans la zone de transition. Dans la direction normale, nous avons obtenu deux relations de saut distinctes : une sur le gradient de vitesse (6.51c) et une sur le saut de pression (6.51d), alors qu'en diphasique, ces relations sont combinées en une seule relation (6.56c). En diphasique, le saut dans la direction normale est proportionnel à la courbure ainsi qu'à la tension interfaciale et la définition de la localisation exacte de l'interface ne semble pas être déterminante dans l'utilisation de cette relation de saut. A l'interface entre le milieu libre et le milieu poreux, le saut de pression est de nouveau proportionnel à des grandeurs en excès. Encore une fois, ces grandeurs en excès peuvent être positives, négatives ou encore nulles selon la position de l'interface de discontinuité.

Il existe une analogie forte entre l'interface libre/poreux et les interfaces diphasiques. Dans les deux cas, les modèles macroscopiques utilisés dans les phases homogènes ne sont pas suffisamment précis pour décrire finement les fortes variations des différentes variables dans la région de transition interfaciale. Les relations de saut à l'interface permettent alors de rattraper ce manque de précision des modèles macroscopiques des phases homogènes. C'est cette analogie qui nous a incité à transposer les méthodes de changement d'échelle usuelles pour l'étude des écoulements diphasiques (*e.g.* (Emmerich, 2003)), à l'étude de notre problème.

Néanmoins, nous voyons également une différence fondamentale entre l'interface libre/poreux et les interfaces diphasiques. En diphasique, l'épaisseur de l'interface est de l'ordre d'une dizaine d'Angströms, alors que la taille du système étudié est plutôt de l'ordre du millimètre ou du centimètre. Ainsi, la variable $\varepsilon = \delta/h$ est vraiment très petite devant 1, de l'ordre de 10^{-7} ou 10^{-6} . La taille de la zone de transition étant très petite devant la taille du système étudié, la question de la localisation exacte de l'interface ne se pose pas. De plus, on notera que les solutions obtenues à l'ordre 0 en ε lors des études asymptotiques sont en général suffisantes pour obtenir les relations de saut (6.56). La discontinuité de la composante normale du gradient de vitesse normale, due à la tension interfaciale et à la courbure de l'interface, apparaît dès l'ordre 0 (Anderson *et al.*, 1999). A l'interface libre/poreux, que cela soit pour les expériences réalisées par Beavers et Joseph (1967), ou pour la simulation réalisée par Breugem *et al.* (2004), l'ordre de grandeur de la variable ε est beaucoup plus grande. Pour les expériences réalisées par Beavers et Joseph (1967), si on considère que la taille de la zone de transition δ est de l'ordre de la taille du pore d_p , alors ε varie entre 0.1 et presque 1 ! De même, pour la simulation réalisée par Breugem *et al.* (2004), l'ordre de grandeur de ε est de 0.2. D'une part, puisque les valeurs de ε sont relativement grandes, les solutions obtenues à l'ordre 0 en ε lors des études asymptotiques ne sont pas suffisantes et nous avons dû poursuivre l'étude analytique jusqu'à l'ordre 1 en ε . D'autre part, nous notons qu'aucun saut n'apparaît lors de l'étude à l'ordre 0 en ε . Le phénomène de saut est d'ordre 1 en ε . On l'observe à l'échelle macroscopique car ε est grand. De plus, puisque la taille de la zone de transition est loin d'être négligeable devant la taille du système étudié, les relations de saut à l'interface libre/poreux sont extrêmement sensibles à la position de l'interface de discontinuité.

6.6 Écoulement laminaire dans un modèle simplifié de cœur

Dans la section précédente, nous avons dérivé les conditions de saut à appliquer à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux pour un écoulement tridimensionnel laminaire. L'objectif de cette section est à la fois de valider et d'utiliser les résultats obtenus en étudiant un écoulement laminaire à l'intérieur d'un modèle simplifié de cœur de réacteur.

6.6.1 Présentation de la configuration étudiée

La configuration étudiée est présentée sur la figure 6.6. Le cœur du réacteur est ici schématisé par une boîte rectangulaire bidimensionnelle avec une entrée qui donne sur une première région libre qui correspond au plénum inférieur. La partie centrale est constituée d'un réseau de canaux qui correspond à la région combustible. Nous avons considéré ici un réseau de 7 canaux. Ce réseau de canaux débouche sur une deuxième région libre qui correspond au plénum supérieur et qui est doté d'une sortie. La géométrie du cœur du réacteur est extrêmement simplifiée. En effet, l'objectif n'est pas ici de réaliser des études mais de valider notre modèle. Nous réalisons deux études sur cette configuration. Le débit de masse imposé en entrée est choisi de façon à ce que le nombre de Reynolds moyen dans les canaux soit de 10 pour le premier cas test, puis de 50 pour le deuxième. Pour pouvoir valider notre modèle, nous réalisons pour chaque cas test un calcul à l'échelle microscopique afin de disposer d'une solution de référence.

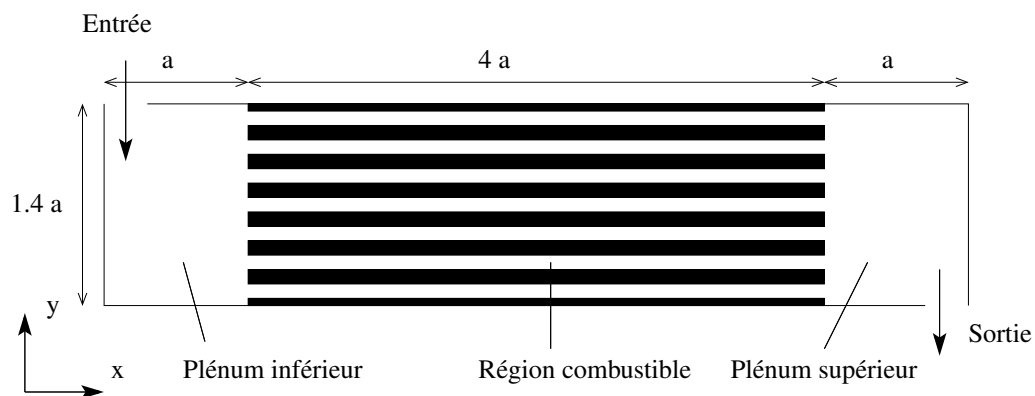


FIG. 6.6 – Modèle simplifié de cœur de réacteur.

6.6.2 Détermination des paramètres du modèle à l'échelle macroscopique

Pour résoudre ce problème à l'échelle macroscopique, nous considérons deux régions libres et une région poreuse homogène séparées par deux interfaces de discontinuité. L'utilisation du modèle à l'échelle macroscopique nécessite de spécifier les valeurs de la porosité et du tenseur de perméabilité dans la région poreuse homogène, ainsi que les valeurs des 4 paramètres de saut qui interviennent dans les conditions de saut (6.51), à chaque interface. Ces 4 paramètres de saut sont $(1/K_x)^{ex\Delta}$, $(1/\phi)^{ex\Delta}$, $(\phi)^{ex\Delta}$ et $(\phi/K_y)^{ex\Delta}$.

6.6.2.1 Région poreuse homogène

La porosité de la région poreuse homogène ϕ_p est de 0.5 et le diamètre hydraulique D_h est de $0.2a$. Les valeurs K_x et K_y du tenseur de perméabilité, qui est diagonal, peuvent être déterminées de façon analytique. En effet, dans la direction x , l'écoulement est un écoulement laminaire entre plaques

parallèles. La perte de charge par unité de longueur est alors donnée par la relation classique suivante :

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}\rho U_d^2 \frac{\lambda_c}{D_h}, \quad \text{avec} \quad \lambda_c = \frac{96}{Re_H} \quad (6.57)$$

où U_d est la vitesse débitante, D_h est le diamètre hydraulique, λ_c est le coefficient de perte de charge et Re_H est le nombre de Reynolds construit à partir de la vitesse débitante et du diamètre hydraulique. En injectant cette relation dans la loi de Darcy (Eq. 2.2), on en déduit que la perméabilité dans la région poreuse homogène, dans la direction x , est donnée par :

$$K_x = \phi_p \frac{D_h^2}{48} \quad (6.58)$$

Dans le réseau de canaux, le fluide ne peut pas circuler dans la direction y . La perméabilité est donc nulle dans cette direction. Puisque nous ne pouvons pas utiliser une perméabilité nulle dans la loi de Darcy (division par zéro), la perméabilité selon y , K_y , est choisie très petite devant K_x , de l'ordre de 100 à 1000 fois plus petite. Prendre une valeur de K_y encore plus petite devant K_x permet de diminuer encore plus la valeur de la vitesse dans la direction y dans la région poreuse homogène et ainsi d'améliorer le résultat. Cependant, lorsque l'on augmente le rapport K_x/K_y , on observe que le temps de calcul de résolution du problème augmente. Ainsi, nous avons choisi un ordre de grandeur pour le rapport K_x/K_y qui permet d'obtenir une précision suffisante dans la région poreuse homogène, sans que le temps de calcul ne devienne trop important.

6.6.2.2 Détermination de la valeur des paramètres de saut

Pour pouvoir utiliser les relations de saut (6.51) à chaque interface, nous devons déterminer la valeur des paramètres de saut. Cette valeur étant reliée aux profils de porosité et de perméabilité dans la direction normale à l'interface à travers des grandeurs en excès, il faut commencer par déterminer les variations de K_x et K_y dans la direction normale aux interfaces, au niveau des régions de transition.

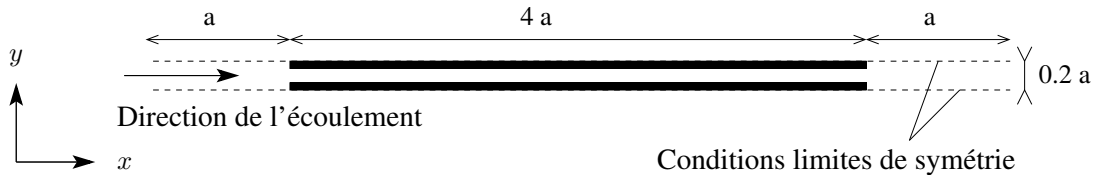


FIG. 6.7 – Géométrie du calcul de référence sur un unique canal pour la détermination de K_x .

Pour déterminer les variations de K_x dans la direction normale à l'interface, nous réalisons un calcul microscopique de référence sur un canal, en incluant les régions libres d'entrée et de sortie et en imposant une vitesse d'entrée normale à l'interface (voir figure 6.7). Le débit imposé en entrée est choisi de façon à ce que le nombre de Reynolds dans le canal soit de 10. Le résultat obtenu est alors filtré pour déterminer les profils de $\langle p \rangle_f$ et $\langle u \rangle$ à l'échelle mésoscopique. Le filtre utilisé est un filtre chapeau similaire à celui utilisé dans la section 5.2.3.2 du chapitre 5. Nous avons testé deux largeurs différentes pour ce filtre : $l = D_h$ et $l = 2D_h$. Les profils obtenus sont ensuite injectés dans l'équation suivante

$$-\frac{d\langle p \rangle_f}{dx} = \mu \frac{\langle u \rangle}{K_x} \quad (6.59)$$

afin de déterminer le profil de K_x . Nous rappelons que le laplacien de vitesse est nul car $\langle u \rangle$ est constante pour ce cas test. Les résultats obtenus pour les deux largeurs de filtre sont présentés sur la figure 6.8. Les

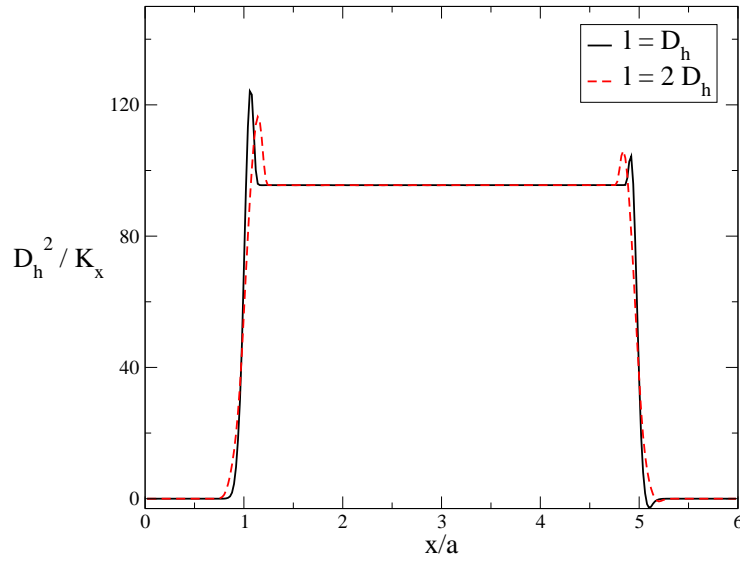


FIG. 6.8 – Profils de K_x pour deux largeurs de filtre différentes.

$l = D_h$		$l = 2D_h$	
entrée	sortie	entrée	sortie
1.029	4.992	1.029	4.992

TAB. 6.2 – Valeurs de x_{1/K_x} , adimensionnée par a , pour les deux choix de filtre.

profils de K_x sont légèrement différents selon le filtre utilisé.

La grandeur en excès $(1/K_x)^{ex\Delta}$ est associée à la force de frottement surfacique en excès $(\mu \langle u \rangle / K_x)^{EX}$ (cf. Eq. (6.59)). Puisque $\langle u \rangle$ est constante pour ce cas test, l'ajout de la contrainte de conservation des forces ne modifie pas la définition de la grandeur en excès associée à la force de frottement surfacique en excès et on a

$$(1/K_x)^{ex\Delta} = (1/K_x)^{exM} = (x_{1/K_x} - x_M) \frac{1}{K_p} \quad (6.60)$$

où x_{1/K_x} désigne la position du centre de gravité du profil de $1/K_x$. Les valeurs obtenues pour x_{1/K_x} pour les deux choix de filtre sont présentées sous forme adimensionnelle dans le tableau 6.2. L'influence de la taille du filtre est négligeable. Les valeurs obtenues sont identiques. Étant donnée la longueur de la région poreuse qui est de $4a$, ces valeurs peuvent être arrondies à 1 et 5 respectivement. Ainsi, d'après l'équation (6.60) le paramètre de saut $(1/K_x)^{ex\Delta}$ est négligeable quand les interfaces sont placées en $x_M/a = 1$ et $x_M/a = 5$.

En ce qui concerne la valeur du second paramètre de saut $(1/\phi)^{ex\Delta}$ associé à la condition de saut sur la pression (Eq. (6.51d)), nous savons que le centre de gravité du profil de $1/\phi$ est situé en $x_{1/\phi}/a = 1$ et $x_{1/\phi}/a = 5$. Cependant, comme le laplacien de vitesse est nul pour ce cas test, nous ne pouvons pas évaluer la force visqueuse surfacique en excès $(\mu \Delta \langle u \rangle / \phi)^{EX}$. Nous ne pouvons donc pas vérifier si le centre de gravité du profil de $1/\phi$ coïncide avec le centre de gravité de la force visqueuse surfacique en excès. Nous faisons néanmoins l'hypothèse que ces centres de gravité coïncident. Par conséquent, le second paramètre de saut $(1/\phi)^{ex\Delta}$ est nul lorsque les interfaces sont localisées en $x_M/a = 1$ et $x_M/a = 5$.

Ainsi, pour ce choix de localisation des deux interfaces de discontinuité, le saut de pression peut être négligé dans la direction normale à l'interface lorsque l'écoulement est laminaire. Ce résultat est classique. Nous retrouvons le fait que le saut de pression associé à une entrée ou à une sortie de tuyau est négligeable devant le frottement à l'intérieur du tuyau lorsque l'écoulement est laminaire.

Pour déterminer les variations de K_y dans la direction normale à l'interface, nous effectuons également un calcul microscopique de référence sur un canal en imposant cette fois que l'écoulement soit tangent à l'interface et en incluant une seule région libre (voir figure 6.9), le problème étant identique au niveau des deux interfaces. Le débit imposé est choisi de façon à ce que l'écoulement reste laminaire dans la partie libre du canal. Le résultat obtenu est alors filtré pour déterminer le profil de vitesse $\langle v \rangle$ à l'échelle mésoscopique.

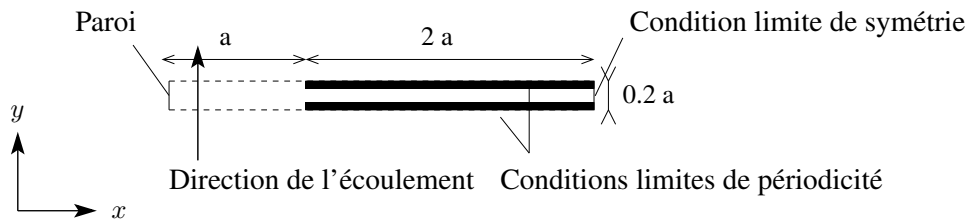


FIG. 6.9 – Géométrie du calcul de référence sur un unique canal pour la détermination de K_y .

Puisque la perméabilité K_y est nulle dans la région poreuse homogène et infinie dans la région libre homogène, il n'est pas aisée de définir un profil de K_y ou de K_y^{-1} dans l'ensemble du domaine. Cependant, nous avons vu dans le chapitre 5 que la grandeur en excès associée à la force de frottement en excès $(\phi/K_y)^{ex\Delta}$ est définie par

$$\left(\frac{\phi}{K_y}\right)^{ex\Delta} = (x_{\phi/K_y} + \Delta x - x_M) \left(\frac{\phi_p}{K_p}\right) \quad (6.61)$$

où $(x_{\phi/K_y} + \Delta x)$ est la position du centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès. La position de ce centre de gravité peut être déterminée à partir de la connaissance de la position de la paroi imperméable équivalente x_{imp}

$$x_{\phi/K_y} + \Delta x = x_{imp} + \sqrt{\frac{K_p}{\phi_p}} \quad (6.62)$$

La position de la paroi imperméable équivalente est obtenue de la façon suivante. Le profil de vitesse dans la partie homogène libre du canal est approché à l'aide d'une régression par un profil parabolique. Ce profil est alors prolongé pour déterminer la valeur pour laquelle il s'annule. Pour $l = D_h$, on obtient $x_{imp}/a = 0.994$ et pour $l = 2D_h$, on obtient $x_{imp}/a = 0.996$. La valeur de x_{imp}/a est donc de l'ordre de 0.995, valeur qui est arrondie à 1 étant donné que la longueur de la zone poreuse est de $4a$. Puisque la zone poreuse commence en $x/a = 1$, la paroi imperméable équivalente se situe exactement au début de la zone poreuse. Puisque $K_y = 0$ dans la région poreuse homogène du canal, nous en déduisons d'après les équations (6.61) et (6.62) que la grandeur en excès associée à la force de frottement dans la direction y , $(\phi/K_y)^{ex\Delta}$ est nulle si l'interface de discontinuité est placée en $x/a = 1$ pour la première interface, et en $x/a = 5$ pour la deuxième.

En ce qui concerne la valeur du second paramètre de saut $(\phi)^{ex\Delta}$ associé à la condition de saut sur le gradient de vitesse (Eq. (6.51b)), nous savons que le centre de gravité du profil de ϕ est situé en $x_{\phi}/a = 1$ et $x_{\phi}/a = 5$. Le gradient de pression étant constant pour ce cas test, l'ajout de la contrainte de conservation des forces ne modifie pas la définition de la grandeur en excès associée à la force de pression surfacique en excès.

Ainsi, nous avons montré que les quatre paramètres de saut sont nuls pour la configuration considérée, lorsque l'écoulement est laminaire et que les interfaces de discontinuité sont placées en $x_M/a = 1$ et $x_M/a = 5$. Ce résultat est important car il facilite la mise en œuvre du calcul à l'échelle macroscopique. En effet, nous n'avons pas besoin d'implémenter les conditions de saut. Il faut juste s'assurer que les grandeurs $\langle u \rangle$ et $\langle p \rangle_f$ ainsi que le gradient de la moyenne volumique de la vitesse, sont continues aux interfaces (voir l'annexe D qui présente la mise en œuvre numérique). Les paramètres de saut étant nuls, cela implique également que l'on n'a pas besoin de résoudre le problème à l'ordre 0 puis à l'ordre 1. Une unique étape est suffisante pour résoudre le problème.

6.6.3 Résultats

Pour chaque cas test, nous avons réalisé un calcul de référence à l'échelle microscopique et une simulation à l'échelle macroscopique, les paramètres du modèle macroscopique ayant été déterminés dans la section précédente. Le maillage utilisé pour le calcul de référence est un maillage structuré qui comporte 300×280 noeuds. Pour la simulation à l'échelle macroscopique, nous voulons avoir la même précision que la simulation de référence dans la partie libre du canal. En revanche, la résolution du problème dans la région homogène ne nécessite pas d'utiliser un maillage aussi raffiné. En effet, le nombre de degrés de liberté nécessaire à la simulation de l'écoulement a été considérablement réduit par l'introduction d'une modélisation de type milieu poreux. Afin de mettre en évidence ce résultat, il faut utiliser un maillage de taille variable entre les régions libre et poreuse. Or, l'utilisation d'un maillage structuré, qui est plus simple qu'un maillage non-structuré du point de vue de la mise en œuvre, ne permet pas de modifier la taille des mailles dans les deux directions. Il faudrait utiliser un maillage non-structuré. Néanmoins, nous ne souhaitons pas aborder ces questions liées aux techniques de résolution numérique du modèle macroscopique, dans ce chapitre. Nous nous concentrons ici sur la modélisation du problème à l'échelle macroscopique. Ainsi, les résultats présentés ici pour la simulation à l'échelle macroscopique ont été obtenus sur un maillage structuré, de pas identique au maillage utilisé pour la simulation de référence. Les résultats obtenus avec le modèle macroscopique sur un maillage non-structuré sont présentés dans l'annexe D.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 6.10 à 6.13. Sur ces figures, c'est la moyenne volumique intrinsèque de la vitesse $\langle \mathbf{u} \rangle_f$ et de la pression $\langle p \rangle_f$ qui sont représentées. Comme nous pouvons le voir qualitativement sur les figures 6.10 et 6.12 le modèle à l'échelle macroscopique permet d'obtenir une très bonne description générale de l'écoulement.

Afin d'effectuer une comparaison plus quantitative, nous avons également réalisé des coupes de vitesse en $x/a = 0.8, 1.5$ et 5.2 et en $y/a = 0.7$ (voir les figures 6.11 et 6.13). Afin d'appuyer cette comparaison quantitative, nous présentons également sur ces figures le résultat obtenu en filtrant les résultats de la simulation réalisée à l'échelle microscopique. Le filtre utilisé est un filtre chapeau similaire à celui utilisé dans la section 5.2.3.2 du chapitre 5, de largeur $2 D_h$. Les résultats microscopiques filtrés ne sont pas présentés dans les régions situées à moins de un D_h des parois du domaine. En effet, dans ces régions, le filtre, qui est de largeur $2 D_h$, chevauche la paroi du domaine. Le résultat obtenu dans ces régions dépend donc de la façon dont on prolonge le résultat hors du domaine et nous ne souhaitons pas entrer dans cette discussion.

Nous pouvons voir sur les figures 6.11(a), 6.11(b), 6.13(a) et 6.13(b) que juste avant l'entrée du milieu poreux, en $x/a = 0.8$, les profils de vitesse microscopique et macroscopique sont quasiment identiques et ce, pour les deux cas test étudiés. En revanche, le résultat microscopique filtré est légèrement différent du résultat macroscopique dans les régions de forte variation de la vitesse. Cela s'explique par le fait que dans ces régions de fortes variations, l'approximation $\langle \mathbf{u} \rangle \sim \mathbf{u}$ que nous avons utilisée pour identifier le modèle macroscopique et le modèle microscopique dans la région libre (cf. Eq 4.21 de la section 4.2.2.2), n'est pas vérifiée de façon exacte.

Sur les figures 6.11(c) et 6.13(c) nous comparons les profils de vitesse longitudinale dans la région poreuse homogène, en $x/a = 3$. Les profils de vitesse microscopique et macroscopique sont bien évidemment différents. La simulation à l'échelle microscopique donne accès aux profils de vitesse à l'intérieur des canaux, alors que la simulation à l'échelle macroscopique ne donne accès qu'aux profils de la moyenne volumique intrinsèque de la vitesse, $\langle u \rangle_f$. Néanmoins, si on compare le résultat macroscopique et le résultat microscopique filtré, on voit que le modèle à l'échelle macroscopique permet de retrouver les différences de débit entre les différents canaux. Cette différence est très faible pour le premier cas test ($Re = 10$) et devient plus importante lorsque le nombre de Reynolds augmente ($Re = 50$ pour le deuxième cas test). Ainsi, le modèle à l'échelle macroscopique est capable de prédire les répartitions de débit entre les différents canaux. Nous soulignons que la vitesse dans la direction y devrait être nulle dans la région poreuse (voir les figures 6.11(d), 6.13(d)). Pour les rapports de K_x/K_y que nous avons choisis (cf. section 6.6.2.1), elle reste négligeable devant l'autre composante de vitesse.

Sur les figures 6.11(e), 6.11(f), 6.13(e) et 6.13(f), nous comparons les profils de vitesse juste après la sortie du milieu poreux, en $x/a = 5.2$. Les profils de vitesse microscopique et macroscopique sont légèrement différents. Les jets de sortie des canaux, que l'on peut voir sur la simulation à l'échelle microscopique, ne sont pas capturés par le modèle à l'échelle macroscopique. La taille des jets étant inférieure à la taille du filtre utilisé pour modéliser la région poreuse, ces jets ne peuvent de toute façon pas être capturés par le modèle macroscopique. Néanmoins, lorsque l'on compare le résultat macroscopique et le résultat microscopique filtré, on voit que le modèle macroscopique permet de capturer le profil de débit moyen juste après la sortie de la région poreuse.

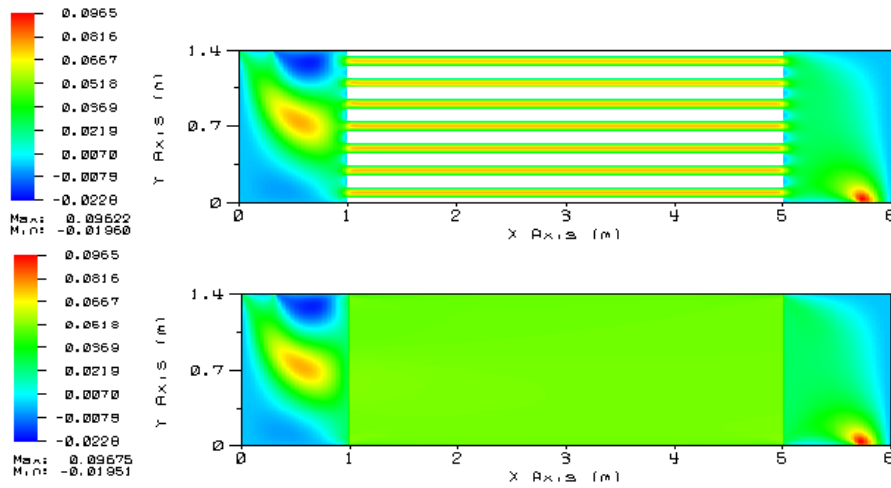
Nous avons également effectué une coupe dans l'autre direction, en $y/a = 0.7$ (voir les figures 6.11(g), 6.11(h), 6.13(g) et 6.13(h)). Nous rappelons que dans la région poreuse homogène, ($1 < x/a < 5$), les profils de vitesse microscopique et macroscopique sont bien évidemment différents. En effet, la simulation à l'échelle microscopique donne accès aux profils de vitesse au milieu du canal, alors que la simulation à l'échelle macroscopique donne accès aux profils de la moyenne volumique intrinsèque de la vitesse, $\langle u \rangle_f$. Nous retrouvons le fait que (i) les profils de vitesse microscopique et macroscopique sont quasiment identiques dans les régions libres d'entrée et de sortie, mis à part dans les régions très proches des deux interfaces ; (ii) dans la région libre, le résultat microscopique filtré est légèrement différent du résultat macroscopique dans les régions de forte variation de la vitesse.

Le modèle à l'échelle macroscopique permet donc d'obtenir une très bonne description de l'écoulement, à la fois dans les régions libres et dans la région poreuse homogène. Par construction, il ne donne accès qu'à la moyenne de la vitesse. Il ne permet donc pas de visualiser certains détails de l'écoulement comme les jets de sortie de canaux. En revanche, il permet de prédire de façon très précise les répartitions de débit dans l'ensemble du domaine.

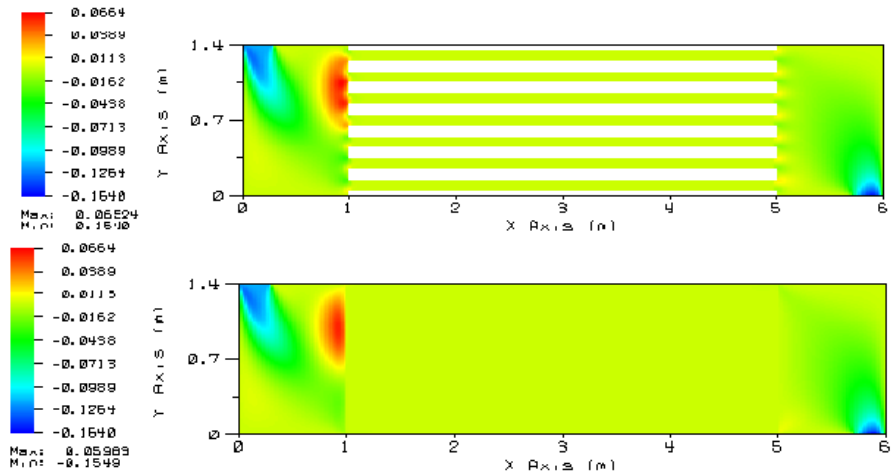
6.7 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de généraliser les résultats obtenus dans les deux chapitres précédents afin de dériver les conditions de saut à appliquer à l'interface libre/poreux dans le cas où l'écoulement est tridimensionnel et l'interface est non plane.

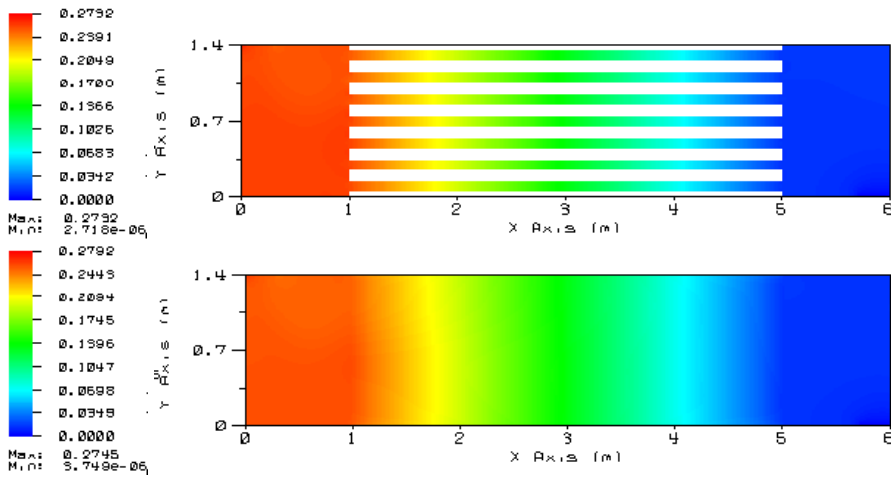
Pour réaliser cette étude, nous avons suivi deux approches différentes. L'analyse générique des processus interfaciaux nous a permis d'obtenir une première idée de la forme des conditions de saut dans le cas tridimensionnel (cf. Eqs (6.50)), relativement aisément. Néanmoins, les conditions de saut obtenues ne sont pas fermées puisqu'elles s'expriment en fonction de grandeurs mésoscopiques inconnues. La méthode des développements asymptotiques raccordés, mise en œuvre dans le système de coordonnées induit par l'interface, nous a permis d'approfondir ces résultats et de proposer des relations de saut générales fermées (cf. Eqs (6.51)). Le résultat obtenu est dissymétrique, dans le sens où il combine une condition de saut sur la *moyenne volumique* de la vitesse et la *moyenne intrinsèque* de la pression. Il ne



(a) Composante horizontale de la vitesse aux échelles microscopique et macroscopique

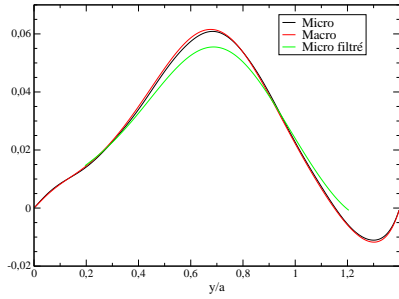


(b) Composante verticale de la vitesse aux échelles microscopique et macroscopique

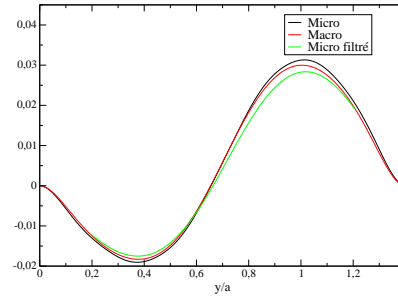


(c) Pression aux échelles microscopique et macroscopique

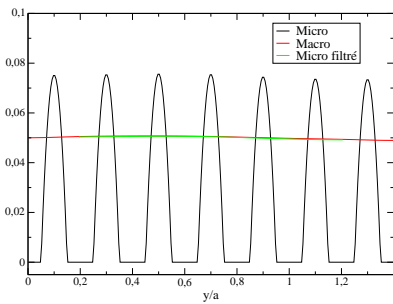
FIG. 6.10 – Comparaison des résultats obtenus pour le premier cas test : $Re = 10$.



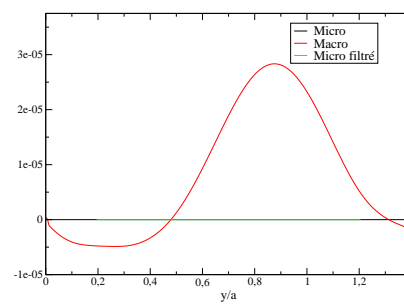
(a) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 0.8$



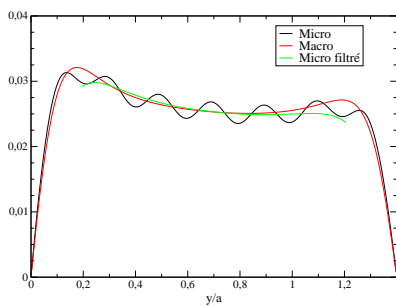
(b) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 0.8$



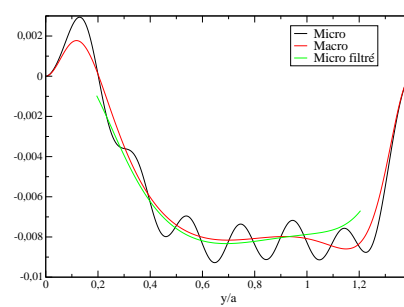
(c) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 3$



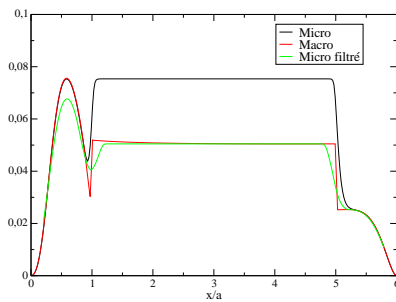
(d) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 3$



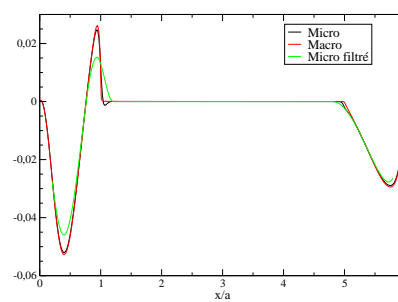
(e) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 5.2$



(f) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 5.2$

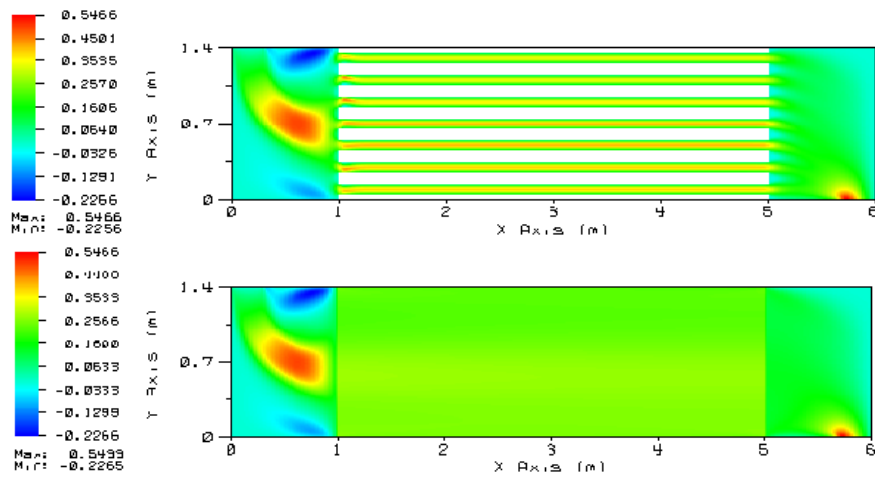


(g) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $y/a = 0.7$

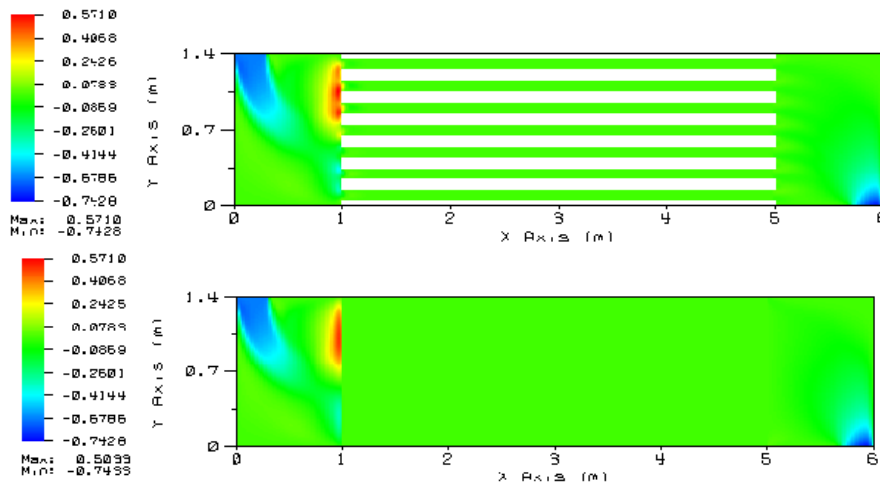


(h) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $y/a = 0.7$

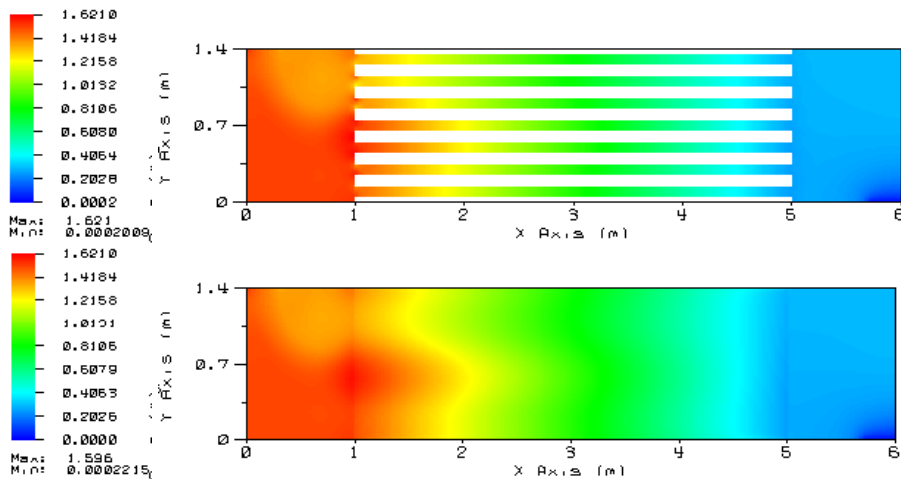
FIG. 6.11 – Profils de vitesse verticales et horizontales pour le premier cas test : $Re = 10$.



(a) Composante horizontale de la vitesse aux échelles microscopique et macroscopique

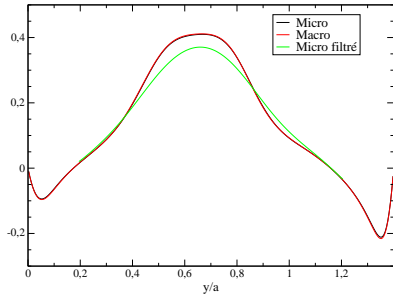


(b) Composante verticale de la vitesse aux échelles microscopique et macroscopique

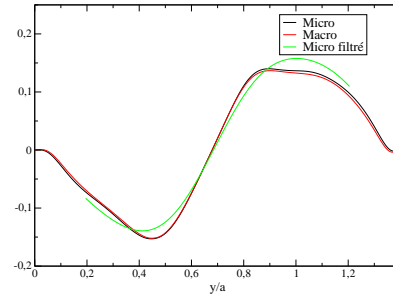


(c) Pression aux échelles microscopique et macroscopique

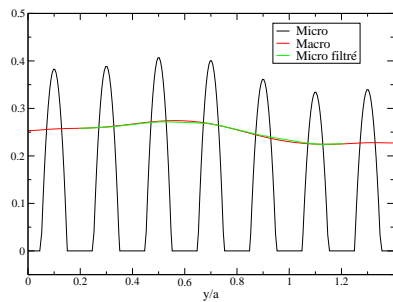
FIG. 6.12 – Comparaison des résultats obtenus pour le deuxième cas test : $Re = 50$.



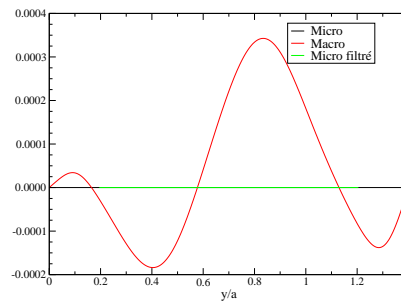
(a) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 0.8$



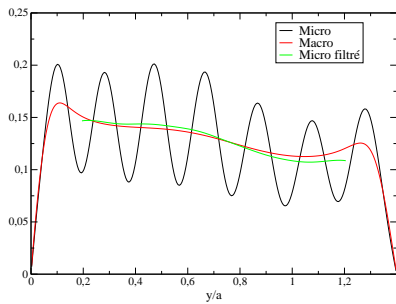
(b) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 0.8$



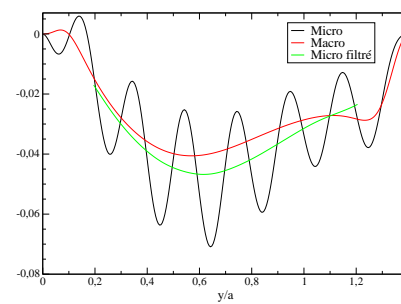
(c) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 3$



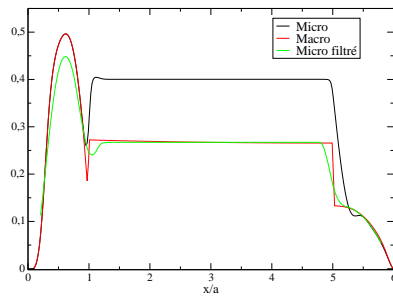
(d) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 3$



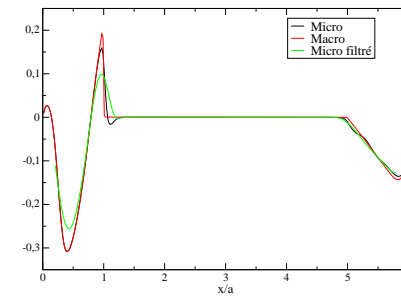
(e) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 5.2$



(f) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 5.2$



(g) Profil de $\langle u \rangle_f$ en $y/a = 0.7$



(h) Profil de $\langle v \rangle_f$ en $y/a = 0.7$

FIG. 6.13 – Profils de vitesse verticales et horizontales pour le premier cas test : $Re = 50$.

s'exprime donc pas simplement sous la forme d'un saut d'un tenseur des contraintes. Néanmoins, il a le mérite de provenir d'une étude réalisée dans le cas général tridimensionnel et découle ainsi du modèle choisi pour décrire le problème à l'échelle mésoscopique. Finalement, ces conditions de saut ont été utilisées pour étudier un écoulement laminaire dans un modèle simplifié de cœur de réacteur. Les résultats obtenus à l'aide du modèle macroscopique ont été comparés avec succès aux résultats des simulations de référence réalisées à l'échelle microscopique. Ainsi, le modèle à l'échelle macroscopique permet d'obtenir une très bonne description de l'écoulement. En particulier, il permet de prédire de façon très précise les répartitions de débit dans l'ensemble du domaine.

Il se trouve que pour le cas test étudié dans ce chapitre, il existe une position particulière pour chacune des deux interfaces telle que l'ensemble des paramètres de saut est nul. De plus, cette position correspond, pour chacune des deux interfaces, à une localisation assez intuitive qui est la localisation de l'interface nominale (voir la définition dans la section 2.3). Ainsi, l'utilité de cette étude n'apparaît pas immédiatement. Cependant, cette étude théorique nous a permis d'expliquer comment déterminer la valeur des paramètres de saut en fonction de la position de l'interface et quelle que soit la géométrie du milieu poreux étudié. Ainsi, si nous devons étudier une nouvelle géométrie de la région combustible, constituée de boulets par exemple, nous saurions comment évaluer la valeur des paramètres de saut en fonction de la nouvelle structure du milieu poreux.

6.8 Bilan de l'étude laminaire

Avant d'aborder la question de la modélisation de l'interface libre/poreux pour des écoulements turbulents, nous souhaitons faire un bilan des résultats que nous avons obtenus dans les chapitres 4, 5 et 6 pour les écoulements laminaires. L'objectif est de tirer des conclusions générales et intuitives sur les différentes méthodes de changement d'échelle que nous avons utilisées et sur ce qu'elles permettent d'apprendre concernant les conditions de saut à appliquer à l'interface. Ces conclusions seront alors utilisées dans les deux chapitres suivants lors de l'étude de l'interface libre/poreux pour des écoulements turbulents.

Nous rappelons que, dans le cas laminaire, nous supposons que l'écoulement est décrit à l'échelle de description microscopique par les équations de Stokes (cf. Eqs. (4.5) et (4.6)). Pour étudier les transferts hydrodynamiques à l'interface libre/poreux, nous considérons trois niveaux de description de l'interface : microscopique, mésoscopique et macroscopique (cf. figure 2.6). Nous associons alors à ces trois niveaux de description, deux étapes de changement d'échelle : une première, de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique et une deuxième, de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique.

Pour effectuer le changement d'échelle micro/méso, nous suivons une idée proposée par [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#) consistant à appliquer la méthode de prise de moyenne volumique aux équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique. On obtient ainsi un modèle à l'échelle mésoscopique valable dans l'ensemble du domaine (voir la section 4.2.2.2). Nous qualifions ce modèle de *modèle père*. Nous choisissons cette terminologie car on vérifie que ce modèle père dégénère dans les régions homogènes vers les *modèles fils* classiquement associés à ces régions homogènes, *i.e.* les équations de Stokes dans la région libre homogène et les équations de Darcy-Brinkman dans la région poreuse homogène. Dans la région de transition, le modèle père n'est a priori pas fermé. Pour fermer le modèle père dans la région de transition, nous choisissons d'utiliser le modèle de Darcy-Brinkman avec porosité et perméabilité variables (cf. Eq. (4.22) et discussion page 57). Les profils de porosité et de perméabilité associés à ce modèle peuvent être obtenus, pour un milieu poreux donné, en filtrant les résultats de simulations numériques effectuées à l'échelle microscopique (voir la section 5.2.3.2).

Prenons un cas plus général, où le problème est de raccorder deux modèles qui sont valables chacun dans une des deux régions homogènes (libre ou poreuse). Ces deux modèles correspondent aux modèles

files. Pour étudier les conditions de raccord à imposer à l'interface entre ces deux modèles fils, notre stratégie consiste à passer par un modèle père continu, valable dans l'ensemble du domaine. Pour obtenir ce modèle père, nous appliquons la méthode de prise de moyenne volumique, qui est dédiée a priori uniquement à l'étude de la région poreuse homogène, à l'ensemble du domaine. Il reste alors à vérifier que le modèle père dégénère bien dans les deux régions homogènes vers les modèles fils associés à ces régions et à proposer une relation de fermeture dans la région de transition.

Pour étudier le changement d'échelle méso/macro, nous avons considéré deux approches différentes : l'analyse générique des processus interfaciaux et la méthode des développements asymptotiques raccordés. Ces méthodes ont déjà été présentées dans le chapitre 2, mais nous tenons à réexpliquer les idées générales sur lesquelles elles reposent avec le recul que l'étude analytique nous a permis d'acquérir et sans entrer dans les détails techniques.

En ce qui concerne l'analyse générique des processus interfaciaux, elle se base sur l'idée que le modèle père et les deux modèles fils ne diffèrent qu'à proximité de l'interface. En effet, par construction, le modèle père dégénère dans les régions homogènes vers les modèles fils qui lui sont associés. En soustrayant la différence entre le modèle père et les deux modèles fils et en intégrant le résultat obtenu à travers la zone de transition interfaciale, on obtient les conditions de saut à appliquer à l'interface aux modèles fils. Ces conditions de saut s'expriment à l'aide de grandeurs en excès. Si nous prenons l'exemple de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux, l'application de cette méthode au modèle de Darcy-Brinkman avec porosité et perméabilité variables (cf. Eq. (4.22)) donne relativement immédiatement la relation suivante :

$$\mu \frac{dU}{dy} \Big|_{y_M^+} - \mu \frac{dU}{dy} \Big|_{y_M^-} = \left(\mu \frac{\phi}{K} \langle u \rangle \right)^{EX} + \left(\phi \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \right)^{EX} \quad (6.63)$$

où U est la moyenne volumique de la vitesse à l'échelle de description macroscopique, la définition de l'opérateur $()^{EX}$ étant donnée page 24. L'idée importante sur les conditions de saut obtenues avec cette méthode est que ces conditions de saut expriment une relation de conservation exacte des forces. Pour une force donnée, sa représentation aux échelles mésoscopique et macroscopique vont être différentes dans la zone de transition interfaciale. Or, pour que le résultat du modèle macroscopique soit équivalent au résultat du modèle mésoscopique dans les régions homogènes, il faut assurer la conservation exacte des forces entre les échelles de description mésoscopique et macroscopique. Pour cela, ce qui n'est pas pris en compte par la représentation macroscopique d'une force comparée à sa représentation mésoscopique, et qui correspond donc à la valeur en excès de cette force, est assignée à l'interface par le biais des conditions de saut.

Néanmoins, les conditions de saut obtenues avec l'analyse générique des processus interfaciaux ne sont pas fermées car les grandeurs en excès font intervenir des grandeurs mésoscopiques inconnues. Une façon de fermer le problème est alors de **postuler** une relation de fermeture pour la somme de ces grandeurs en excès. Ainsi, si nous faisons abstraction de la discussion sur le choix de la viscosité (effective ou non), [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#) proposent de fermer le membre de droite de l'équation (6.63) de la façon suivante

$$\left(\mu \frac{\phi}{K} \langle u \rangle \right)^{EX} + \left(\phi \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \right)^{EX} = - \mu \frac{\beta}{\sqrt{K}} U \Big|_{y_M} \quad (6.64)$$

où β est un paramètre de saut dont la valeur doit être ajustée en fonction du milieu poreux étudié. Nous soulignons que cette relation de fermeture aurait pu être obtenue en utilisant une simple analyse dimensionnelle.

[Breugem et al. \(2004\)](#) ont calculé la valeur de β pour un milieu poreux constitué de petits cubes. Ils observent que cette valeur dépend du choix de la localisation de l'interface de discontinuité. Le paramètre de saut β n'est donc pas une grandeur intrinsèque au milieu poreux ce qui va à l'encontre de la façon dont

Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) interprètent cette grandeur. β n'étant pas une grandeur intrinsèque et la question de la localisation de l'interface étant une question ouverte, l'utilisation de la relation de saut proposée par Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a) n'est pas envisageable à ce stade de compréhension pour réaliser des études pratiques. Nous avons donc utilisé une autre méthode de changement d'échelle afin d'approfondir l'étude du passage méso/macro, la méthode des développements asymptotiques raccordés.

La méthode des développements asymptotiques raccordés peut être vue de la façon suivante. En partant du modèle père, valable dans l'ensemble du domaine, la méthode consiste à chercher un modèle approché du modèle père en utilisant un développement asymptotique en ε et en faisant tendre ε vers zéro. Nous rappelons que ε est un petit paramètre présent dans le modèle père et qu'il est relié à l'épaisseur de la zone de transition interfaciale δ ($\varepsilon = \delta/h$). Le modèle approché obtenu en appliquant cette méthode est un modèle discontinu. En effet, lorsque l'on fait tendre ε vers zéro, la région de transition interfaciale devient une interface de discontinuité. Ce modèle discontinu est constitué des deux modèles fils (un pour chaque région homogène) ainsi que de conditions de saut à imposer à l'interface entre ces deux modèles fils.

Nous avons montré dans le chapitre 5, que la méthode des développements asymptotiques raccordés appliquée seule ne suffit pas. Il faut lui associer la contrainte de conservation exacte des forces que nous avons mis en évidence lors de l'analyse générique des processus interfaciaux. Si nous prenons de nouveau l'exemple de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux, l'application de la méthode des développements asymptotiques raccordés combinée à la contrainte de conservation des forces, au modèle de Darcy-Brinkman avec porosité et perméabilité variables permet d'obtenir la relation de fermeture suivante pour le membre de droite de l'équation (6.63)

$$\left(\mu \frac{\phi}{K} \langle u \rangle\right)^{EX} + \left(\phi \frac{d\langle p \rangle_f}{dx}\right)^{EX} = \mu \left(\frac{\phi}{K}\right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} + (\phi)^{exM} \frac{d\langle p \rangle_f}{dx} \quad (6.65)$$

Cette méthode permet ainsi d'obtenir une relation de fermeture **justifiée** et non simplement **postulée**. La relation de fermeture obtenue fait intervenir un paramètre de saut pour chaque force du problème. De plus, le statut des paramètres de saut $(\phi/K)^{ex\Delta}$ et $(\phi)^{exM}$ est compris. Comme Breugem *et al.* (2004) l'avaient observé, pour le problème de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux, les paramètres de saut ne sont pas des grandeurs intrinsèques. Nous avons montré qu'ils dépendent linéairement de la position de l'interface de discontinuité y_M et qu'ils s'annulent au niveau du centre de gravité de la force surfacique en excès à laquelle ils sont associés. Nous reviendrons sur cette notion de centre de gravité dans le paragraphe suivant. Nous notons néanmoins que la dépendance linéaire des paramètres de saut à la position de l'interface est complexe car elle est associée uniquement à l'ordre 0 de la vitesse et non à la vitesse totale. Ainsi, ce résultat ne peut pas être transposé directement au paramètre de saut β .

La notion de centre de gravité d'une grandeur est fondamentale pour la généralisation des résultats obtenus dans le cas laminaire. Nous souhaitons donc discuter un peu plus de cette notion que nous avons introduite. Soit ψ une grandeur physique, le centre de gravité y_ψ associé à cette grandeur est tel que

$$\int_{-\infty}^{y_\psi} (\psi - \psi_-) + \int_{y_\psi}^{+\infty} (\psi - \psi_+) = 0 \quad (6.66)$$

où ψ_\pm sont les valeurs de la grandeur ψ dans les régions homogènes correspondantes.

Nous soulignons tout d'abord que lorsque $\psi_- = \psi_+$ le centre de gravité de la grandeur ψ n'existe pas nécessairement. Mais dans ce cas particulier, la grandeur en excès de la quantité ψ qui est définie, avant d'introduire la notion de centre de gravité, par

$$(\psi)^{exM} = (y_M - y_i)(\psi_- - \psi_+) + \int_{-\infty}^{y_i} (\psi - \psi_-) + \int_{y_i}^{+\infty} (\psi - \psi_+) \quad (6.67)$$

où y_i est une position arbitraire, s'écrit alors

$$(\psi)^{exM} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi - \psi_-) \quad (6.68)$$

et ne dépend plus de la position de l'interface de discontinuité. Dans ce cas particulier, la grandeur en excès est bien une grandeur intrinsèque et nous n'avons pas besoin d'utiliser la notion de centre de gravité pour définir sa valeur en fonction de la position de l'interface. Même si nous n'avons jamais rencontré ce cas particulier dans notre étude, nous souhaitons montrer qu'il peut être pris en compte dans notre analyse.

Dans le cas où le centre de gravité existe, on a a priori intérêt à placer l'interface de discontinuité au niveau du centre de gravité de la grandeur étudiée. En effet, dans ce cas particulier le paramètre de saut associé à la grandeur en excès étudiée est nul, ce qui simplifie le problème à résoudre. Néanmoins, deux types de situations peuvent se produire. Le centre de gravité peut se situer dans, ou proche, de la zone de transition (voir la figure 6.14 (a)). Dans ce cas, on a alors effectivement intérêt à placer l'interface de discontinuité au niveau du centre de gravité de la grandeur étudiée. Mais le centre de gravité peut également se situer loin hors de la zone de transition (voir la figure 6.14(b)). Dans ce cas, si on place l'interface de discontinuité au niveau du centre de gravité de la grandeur étudiée, on agrandit artificiellement la zone de transition, qui se prolonge alors jusqu'à l'interface. Or, les problèmes macroscopiques et mésoscopiques sont très différents dans la zone de transition car dans cette région les représentations des forces sont différentes aux échelles mésoscopique et macroscopique. On agrandit donc de façon non négligeable la région sur laquelle les solutions aux échelles mésoscopique et macroscopique vont différer. Ce choix n'est pas nécessairement très judicieux et il vaut mieux placer l'interface dans la région de transition, même si les paramètres de saut associés sont alors non nuls.

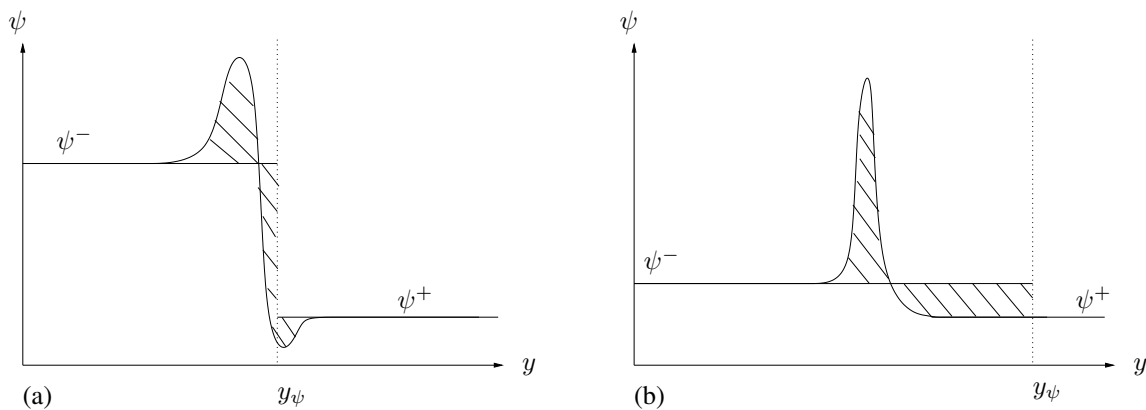


FIG. 6.14 – Exemples de positions possibles pour le centre de gravité d'une grandeur ψ . Le centre de gravité peut se situer dans la zone de transition (a) ou loin de la zone de transition (b).

Finalement, l'étude analytique poussée que nous avons pu mener grâce à l'utilisation de la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous a permis de beaucoup mieux comprendre le système étudié. En particulier, elle nous a permis de comprendre pourquoi le paramètre de saut β introduit par [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#) n'est pas une grandeur intrinsèque et pourquoi sa valeur dépend effectivement de la position de l'interface de discontinuité comme l'avaient observé [Breugem et al. \(2004\)](#). Ainsi, pour aborder l'étude d'un nouveau problème (ce que nous allons faire dans les chapitres 7 et 8), nous avons désormais un certain nombre de résultats que nous pouvons utiliser directement, sans refaire toute l'analyse que nous avons effectuée dans le cas laminaire.

Nous savons que l'analyse générique des processus interfaciaux permet de déterminer la forme des conditions de saut à appliquer à l'interface. Elle permet également de relier ces conditions de saut à des

forces surfaciques en excès pour lesquelles il faut proposer des relations de fermeture.

Si l'on est capable de déterminer la position des centres de gravité de ces forces surfaciques en excès, que ces centres de gravité coïncident et qu'ils se situent dans la zone de transition, on n'a pas besoin de proposer de relations de fermeture pour résoudre le problème à l'échelle macroscopique. Il suffit de placer l'interface de discontinuité au niveau de ces centres de gravité. C'est la démarche que nous suivrons dans le chapitre 7.

Si les profils des forces étudiées sont tels que les centres de gravité se situent loin hors de la zone de transition (profils du type de celui de la figure 6.14(b) par exemple), ou que les centres de gravité des différentes forces ne coïncident pas, on ne peut pas utiliser cette approche. Il faut alors proposer une relation de fermeture pour modéliser l'effet des forces surfaciques en excès. Deux approches sont possibles.

On peut obtenir ces relations de fermeture en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés. Cette méthode permet également de relier explicitement les paramètres de saut à la position de l'interface et à des paramètres intrinsèques à l'interface : les centres de gravité des différentes forces surfaciques en excès. Il reste néanmoins à déterminer la position de ces centres de gravité, ce qui n'est pas toujours simple. En effet, la position du centre de gravité est telle que la force surfacique en excès correspondante s'annule pour cette position de l'interface de discontinuité. Or, le calcul des forces surfaciques en excès dépend de la valeur de ces forces à l'échelle macroscopique. Puisque ces forces ne sont pas nécessairement constantes dans les régions homogènes et peuvent dépendre de la position de l'interface, ce calcul demande parfois l'utilisation d'un processus itératif. Dans le cas laminaire, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser ce processus itératif car, connaissant la solution à l'échelle macroscopique de façon analytique, nous avons été capable de relier la position du centre de gravité à la position de la paroi imperméable équivalente (cf. section 5.2.4.3). Néanmoins, une fois que la position des centres de gravité des différentes forces est déterminée, les relations de saut sont utilisables quelle que soit la position de l'interface.

Cependant, l'utilisation de la méthode des développements asymptotiques demande un certain investissement technique. En première approche, on peut se contenter pour fermer le problème à l'échelle macroscopique, de postuler une relation de fermeture en utilisant par exemple une analyse dimensionnelle. Il faut alors déterminer la valeur du paramètre de saut associé à cette relation de fermeture en calculant la valeur des forces surfaciques en excès pour une position particulière de l'interface et en injectant le résultat obtenu dans la relation de fermeture. Nous insistons sur le fait que la valeur de ce paramètre de saut dépend de la position de l'interface et doit être réévaluée si la position de l'interface est modifiée. Comme précédemment, le calcul des forces surfaciques en excès n'est pas toujours aisé car il dépend de la valeur de ces forces à l'échelle macroscopique, qui dépendent cette fois des conditions de saut à l'interface. Ainsi, ce calcul peut demander l'utilisation d'un processus itératif. Néanmoins, il existe parfois des positions privilégiées de l'interface où ce calcul se simplifie. Nous suivrons cette approche dans le chapitre 8.

Finalement, cette dernière approche correspond à ce qui doit être fait si l'on part de la relation de fermeture proposée par [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#) (cf. Eq. (6.64)). Ainsi, pour mener de nouvelles études, on n'a pas forcément besoin d'utiliser la méthode des développements asymptotiques raccordés. L'approche consistant à utiliser l'analyse générique des processus interfaciaux pour étudier la forme des conditions de saut, postuler une relation de fermeture en utilisant une analyse dimensionnelle, puis évaluer les valeurs des paramètres de saut associés, peut être suffisante. Néanmoins, les résultats obtenus seront moins généraux que ceux obtenus avec la méthode des développements asymptotiques raccordés. En effet, cette dernière permet d'obtenir des informations supplémentaires sur la justification de la forme des relations de fermeture utilisées, la dépendance des paramètres de saut vis-à-vis de la position de l'interface, l'ordre auquel interviennent les conditions de saut et le caractère intrinsèque des différents paramètres de saut.

Chapitre 7

Étude de l'interface libre/poreux pour l'écoulement de Poiseuille turbulent

Dans les chapitres 4, 5 et 6, nous avons étudié les conditions de saut à appliquer à l'interface entre un milieu libre et un milieu poreux lorsque l'écoulement est laminaire. Or, comme nous l'avons souligné dans l'introduction, dans un cœur de réacteur nucléaire, l'écoulement est turbulent. Dans le chapitre 3, nous avons proposé un modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique adapté à la géométrie de la région combustible du cœur, qui est décrite dans le modèle comme un milieu poreux homogène.

Nous souhaitons maintenant étudier les conditions de raccord à imposer au niveau des interfaces libre/poreux entre ce modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique et le modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard utilisé dans les régions libres. Pour effectuer cette étude, nous nous appuyons sur les connaissances que nous avons acquises lors de l'étude des écoulements laminaires au sujet des différents niveaux de modélisation de l'interface, de l'influence de la position de l'interface, ainsi que du lien entre les conditions de saut et les grandeurs en excès (voir le bilan de l'étude laminaire page 128).

7.1 Introduction

L'étude des transferts à une interface libre/poreux pour des écoulements turbulents a essentiellement été effectuée sur le problème académique de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux (voir figure 1.4). Alors que dans le cas laminaire la modélisation des transferts à l'interface libre/poreux dépend principalement du niveau de description de l'interface, dans le cas turbulent la modélisation dépend également du niveau de description de la turbulence. La combinaison de ces différents niveaux de description, pour l'interface et pour la turbulence, implique qu'un nombre important de façons d'aborder l'étude de ces transferts existe. Nous avons choisi de les présenter en fonction du modèle de turbulence utilisé, puis à l'intérieur de ces grandes catégories, en fonction du niveau de description de l'interface.

Simulation numérique directe de la turbulence

Une façon d'aborder cette étude est de n'introduire aucun modèle, *i.e.* d'effectuer une simulation numérique directe de la turbulence, tout en décrivant la structure fine du milieu poreux. Comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre d'introduction, ce type d'approche, qui a l'avantage de n'introduire aucun modèle, est un outil complémentaire à l'expérience. Il permet de réaliser des calculs de référence et d'avoir accès aux grandeurs locales instantanées. Aujourd'hui, les nombres de Reynolds atteints en utilisant cette méthode sont de l'ordre de 5500 (Breugem et Boersma, 2005) pour un maillage de l'ordre de 10^8 nœuds et pour un milieu poreux extrêmement simplifié, constitué de petits cubes.

Une première étape vers la modélisation du transfert dans la région de transition est également proposée par Breugem et Boersma (2005). Ils appliquent un filtre spatial aux équations de Navier-Stokes. Les équations obtenues sont appelées VANS pour *Volume Averaged Navier-Stokes equations*

en anglais. Aucun modèle de turbulence n'est introduit pour modéliser le terme de dispersion sous-filtre $\langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle / \phi$ dans la région libre car la taille du filtre est supposée suffisamment petite. Breugem et Boersma (2005) soulignent que, pour que cette hypothèse soit valable, il ne faut pas utiliser la même taille de filtre pour modéliser la région libre et la région poreuse. Ils préconisent donc l'utilisation d'un filtre de taille variable et utilisent un pas de maillage (le maillage correspond au filtre dans la région libre) suffisamment petit, afin que toutes les échelles de la turbulence soient résolues dans la région libre et la région interfaciale. Dans le même temps, ils introduisent un modèle à porosité et perméabilité variables dans la région interfaciale et dans la région poreuse homogène afin de modéliser le frottement dû à la présence du solide. Ainsi, il existe une ambiguïté sur la définition de la taille du filtre dans la région interfaciale. Néanmoins, cette approche, qu'ils qualifient de *DNS avec approche continue*, donne de très bons résultats. Le nombre de degrés de liberté nécessaire pour décrire toutes les échelles de la turbulence, ainsi que la zone de transition, demeure très important même pour un nombre de Reynolds modéré. Breugem et Boersma (2005) ont utilisé 10^7 mailles pour un nombre de Reynolds de 5500. Ils ont ainsi gagné un facteur 10 par rapport à la DNS sans approche continue.

Afin de réduire les coûts de calculs, Hahn *et al.* (2002) proposent de ne pas représenter la région poreuse et d'utiliser à la place une condition au limite au niveau de l'interface libre/poreux qui simule l'influence du milieu poreux sur la partie libre du canal. Ils utilisent pour cela une extension de la condition aux limites de Beavers et Joseph (1967). Ils étudient ensuite l'effet de cette condition au limite sur la structure de la turbulence dans la partie libre du canal. Pour valider leur approche, ils effectuent également des simulations dans l'ensemble du domaine (région libre et région poreuse) en utilisant une extension de la condition aux limites de Neale et Nader (1974) à l'interface. Ces deux approches, qui donnent des résultats identiques dans la région libre lorsque l'écoulement est laminaire, restent cohérentes entre elles pour l'écoulement faiblement turbulent ($Re = 3000$) étudié par Hahn *et al.* (2002). Cependant, quelque soit l'approche utilisée, une réduction significative du coefficient de frottement à l'interface est obtenue, ce qui va à l'encontre des résultats expérimentaux obtenus pour des écoulements turbulents (Zagni et Smith, 1976; Zippe et Graf, 1983; Kong et Schetz, 1982) et remet donc en cause la validité de cette méthode. Cette approche nécessite en outre de préciser la valeur du paramètre α de la condition aux limites de Beavers et Joseph (cf. Eq. (1.1)). Or, comme dans le cas laminaire, la valeur de ce paramètre n'est pas connue, ni reliée à la structure du milieu poreux. Pour finir, nous soulignons que le coût de ces simulations reste toujours prohibitif pour une utilisation industrielle ($\sim 10^6$ mailles pour un nombre de Reynolds de 3000), aucun modèle de turbulence n'étant introduit.

Simulation des grandes échelles (LES)

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'une façon de réduire le coût de la simulation numérique directe est de modéliser la région poreuse. Une autre façon de réduire le nombre de degrés de liberté du problème est d'employer des modèles de turbulence. Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre d'introduction, l'utilisation de la LES pour étudier les transferts à une interface libre/poreux se rencontre principalement en météorologie pour l'étude des écoulements au-dessus de la canopée (Shaw et Schumann, 1992; Watanabe, 2004; Finnigan, 2000). En général dans ces modèles, un même filtre est utilisé pour modéliser la turbulence et la présence du milieu poreux. L'application de ce filtre dans la région proche de l'interface libre/poreux implique que l'interface est vue comme une région de transition continue. Des termes liés au frottement généré par la présence du milieu poreux sont introduits dans le modèle de turbulence. La difficulté principale de cette approche réside dans la fermeture du modèle dans la région de transition.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre introductif, cette approche basée sur l'utilisation d'un unique filtre spatial n'est pas adaptée à l'étude de la turbulence au sein d'un milieu poreux homogène (voir la discussion de la section 1.2.1). C'est pourquoi nous avons retenu une méthode qui combine un modèle de turbulence de type RANS et la prise de moyenne volumique.

Modèles de turbulence de type $k - \epsilon$

L'utilisation de modèles de turbulence de type $k - \epsilon$ se rencontre à la fois aux échelles de description microscopique et macroscopique de l'interface.

[Prinos et al. \(2003\)](#) par exemple, utilisent un modèle de turbulence $k - \epsilon$ bas Reynolds, tout en décrivant l'ensemble de la structure du milieu poreux, afin d'étudier les mécanismes de transfert à l'interface libre/poreux lorsque l'écoulement est turbulent. L'utilisation du modèle de turbulence leur permet de réaliser des simulations à des coûts relativement faibles ($\sim 10^4$ mailles pour des nombres de Reynolds compris entre $7 \cdot 10^3$ et $2 \cdot 10^4$). Le coût des calculs étant faible, la structure du milieu poreux peut-être modifiée afin d'étudier l'influence de différents paramètres. On peut également réaliser des études pour des nombres de Reynolds plus élevés. Le problème de la modélisation de la turbulence étant supposé résolu à l'échelle microscopique par l'utilisation de modèles de turbulence de type $k - \epsilon$, ces simulations peuvent alors servir de référence, pour développer des conditions aux limites à l'échelle de description macroscopique de l'interface, pour des modèles $k - \epsilon$ macroscopiques. Néanmoins, il faut garder à l'esprit les limites de validité du modèle $k - \epsilon$.

A l'échelle de description macroscopique de l'interface, [Lee et Howell \(1987\)](#) sont les premiers à avoir utilisé une approche combinant un modèle $k - \epsilon$ standard dans la région libre, un modèle $k - \epsilon$ macroscopique dans la région poreuse et des conditions aux limites au niveau de l'interface libre/poreux. Pour ce qui est du raccord des modèles de turbulence, ils supposent la continuité de k et ϵ , ainsi que de leurs dérivées premières, au niveau de l'interface. Ils testent alors deux conditions aux limites différentes pour raccorder les équations de bilan de quantité de mouvement : les conditions aux limites de [Beavers et Joseph \(1967\)](#) et celles proposées par [Neale et Nader \(1974\)](#). En suivant la même approche, [De Lemos et Pedras \(2000\)](#) et [Silva et De Lemos \(2003\)](#) ont également testé la condition de saut de [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#) pour raccorder les équations de bilan de quantité de mouvement. Par la suite, [De Lemos \(2005\)](#) et [De Lemos et Silva \(2006\)](#) ont ajouté une condition de saut sur le gradient de k , similaire à la condition de saut sur le gradient de vitesse de [Ochoa-Tapia et Whitaker \(1995a\)](#) (cf. Eq. 1.2)

$$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{d \langle k \rangle}{dy} \Big|_{y=0^+} - \left(\mu_{\text{eff}} + \frac{\mu_{t\phi}}{\sigma_k} \right) \frac{d \langle k \rangle}{dy} \Big|_{y=0^-} = - (\mu + \mu_t) \frac{\beta}{\sqrt{K}} \langle k \rangle \Big|_{y=0} \quad (7.1)$$

Ils étudient alors l'influence de la valeur et du signe du paramètre de saut β sur les profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente. Cependant, cette approche souffre encore de nombreuses limitations et ne peut être directement applicable pour des études pratiques. En effet, les conditions aux limites ne sont pas validées et la valeur du coefficient de saut β n'est pas reliée aux propriétés du milieu poreux, ni à la position de l'interface.

En ce qui concerne la modélisation de la turbulence dans le milieu poreux, nous rappelons que nous avons choisi d'utiliser dans ce mémoire une approche qui combine un modèle de type RANS et la prise de moyenne volumique, afin de dissocier les deux étapes de fermeture (turbulence/milieu poreux) par l'utilisation de deux filtres successifs. Une fois que le filtre associé à la turbulence a été appliqué, l'écoulement est décrit à l'échelle microscopique, à l'aide du modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard. Ainsi, le problème de la modélisation de la turbulence est résolu à l'échelle microscopique et les simulations réalisées à cette échelle en utilisant le modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard sont considérées comme des simulations de référence.

Notre objectif est d'utiliser à l'échelle macroscopique une approche similaire à celle de [Lee et Howell \(1987\)](#), *i.e.* qui combine un modèle $k - \epsilon$ standard dans la région libre, un modèle $k - \epsilon$ macroscopique dans la région poreuse et des conditions aux limites au niveau de l'interface libre/poreux, pour modéliser et simuler l'écoulement dans l'ensemble d'un cœur de réacteur nucléaire. La difficulté de cette approche réside dans la spécification des conditions de raccord à imposer entre le modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique de la région poreuse et le modèle de turbulence de la région libre. L'objectif de ce chapitre est d'étudier ces conditions de raccord. Dans ce mémoire, nous avons choisi de suivre une démarche qui

permet de **dériver** ces conditions de saut en partant de ce qui est connu à l'échelle microscopique et en utilisant un changement d'échelle en **deux étapes**.

Le premier changement d'échelle permet de passer de la description microscopique à la description mésoscopique de l'interface. Il est réalisé en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique (cf. section 2.3.2) et il permet d'obtenir un modèle père valable dans l'ensemble du domaine. Dans le chapitre 3, nous avons proposé un modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique, mais ce dernier est adapté à la région poreuse *homogène*. C'est le modèle fils associé à la région poreuse homogène. Ce modèle n'est pas valable dans la région de transition entre le milieu libre et le milieu poreux, où la porosité est variable. Nous devons donc commencer par dériver le modèle de turbulence à l'échelle de description mésoscopique de l'interface en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique.

Le deuxième changement d'échelle permet de passer de la description mésoscopique à la description macroscopique de l'interface. Dans les chapitres 4, 5 et 6, il est réalisé en utilisant deux techniques de changement d'échelle usuelles pour l'étude des écoulements diphasiques, l'analyse générique des processus interfaciaux et la méthode des développements asymptotiques raccordés. Comme dans le cas laminaire, nous commençons par étudier des configurations d'écoulement où la vitesse moyenne est mono-dimensionnelle afin de simplifier l'étude de ce problème complexe. Ainsi, nous étudions dans la section 7.3 le changement d'échelle méso/macro pour l'écoulement de Poiseuille turbulent au-dessus d'un milieu poreux. Cette configuration correspond à celle étudiée dans les chapitres 4 et 5, mais pour une vitesse débitante plus importante, telle que l'écoulement est turbulent dans la partie libre du canal. Dans cette configuration, l'écoulement moyen est parallèle à l'interface entre le milieu libre et le milieu poreux. Nous étudions le changement d'échelle méso/macro pour le cas de l'écoulement perpendiculaire à l'interface libre/poreux dans le chapitre suivant.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section 7.2, nous utilisons la méthode de prise de moyenne volumique pour dériver le modèle de turbulence à l'échelle de description mésoscopique de l'interface. Puis, nous vérifions que le modèle obtenu à l'échelle mésoscopique, le modèle père, dégénère bien dans les régions homogènes vers les modèles fils classiquement associés à ces régions homogènes. Nous discutons également des relations de fermeture à utiliser dans la région de transition. Dans la section 7.3, nous étudions l'écoulement de Poiseuille turbulent au-dessus d'un milieu poreux. Nous déterminons la forme des conditions de saut à appliquer à l'échelle de description macroscopique en utilisant l'analyse générique des processus interfaciaux (cf. bilan 128). Les conditions de saut obtenues ne sont pas fermées puisqu'elles s'expriment à travers des grandeurs en excès qui font intervenir des grandeurs mésoscopiques inconnues. Dans la section 7.4, nous étudions la fermeture de ces relations de saut pour la géométrie particulière étudiée par Breugem et Boersma (2005), *i.e.* lorsque le milieu poreux est constitué de petits cubes. En nous appuyant sur les résultats obtenus dans le cas laminaire, nous proposons des relations de fermeture pour une position particulière de l'interface. Le modèle obtenu est alors comparé aux résultats des DNS réalisées par Breugem et Boersma (2005) dans la section 7.5.

7.2 Changement d'échelle micro/méso

Le modèle de turbulence à l'échelle de description mésoscopique de l'interface est obtenu à partir des équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique, en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique. L'application de l'opérateur de moyenne volumique aux équations de transport de k et ϵ a déjà été effectuée par un certain nombre d'auteurs (Nakayama et Kuwahara, 1999; Pedras et De Lemos, 2001a; De Lemos et Pedras, 2001). Néanmoins, dans leur étude, Nakayama et Kuwahara (1999) font l'hypothèse que la porosité est constante, ce qui n'est pas le cas dans la région de transition interfaciale. Quant à Pedras et De Lemos (2001a) et De Lemos et Pedras (2001), ils appliquent l'opérateur de moyenne volumique aux équations de transport de k et ϵ non fermées par un modèle de turbulence. Les questions de la modélisation de la turbulence et de l'effet du milieu poreux ne sont pas dissociées et le nombre de termes à modéliser est alors très important. Pour ces raisons, et afin de mettre en évidence

les hypothèses utilisées dans cette étude, nous présentons dans cette section la dérivation du modèle à l'échelle mésoscopique en partant des équations de transport de k et ϵ fermées à l'aide du modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard et sans faire l'hypothèse que la porosité est constante.

7.2.1 Équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique

A l'échelle de description microscopique, l'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes. Dans le cadre de la modélisation de la turbulence par une approche de type RANS, la moyenne statistique est appliquée à ces équations. L'écoulement étant supposé incompressible, il vient :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (7.2a)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\nu \nabla \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}) \quad (7.2b)$$

$\bar{\mathbf{u}}$ représente la moyenne statistique de la vitesse et \mathbf{u}' la fluctuation par rapport à cette moyenne statistique. La viscosité du fluide ν est supposée constante. La présence des corrélations doubles $\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$ implique que l'équation (7.2b) n'est pas fermée. Pour fermer cette équation, nous choisissons d'utiliser l'hypothèse de viscosité turbulente :

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = -2 \nu_t \bar{\mathbf{S}} + \frac{2}{3} k \mathbf{I} \quad (7.3)$$

où $\bar{\mathbf{S}}$ est le tenseur des déformations moyennes, $\bar{\mathbf{S}} = 1/2 (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)$, ainsi que le modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (7.4a)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P - \epsilon \quad (7.4b)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + (c_1 P - c_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \quad (7.4c)$$

où P est le terme de production de turbulence par les gradients de vitesse moyenne :

$$P = -\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} : \nabla \bar{\mathbf{u}} \quad (7.5)$$

En utilisant l'hypothèse de viscosité turbulente (7.3), ce terme peut également s'écrire :

$$P = 2 \nu_t \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}} \quad (7.6)$$

L'équation de bilan de quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \left(\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2}{3} k \right) + \nabla \cdot ((\nu + \nu_t) (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)) \quad (7.7)$$

Ainsi, l'écoulement est décrit à l'échelle microscopique, à l'aide du modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard. Les valeurs des constantes de ce modèle recommandées par [Launder et Spalding \(1972\)](#) sont :

$$C_\mu = 0.09, \quad c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.00, \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (7.8)$$

7.2.2 Équations gouvernant le problème à l'échelle mésoscopique

Le modèle à l'échelle mésoscopique est obtenu en appliquant l'opérateur de moyenne volumique aux équations (7.2a), (7.7) et (7.4) qui gouvernent le problème à l'échelle de description microscopique.

7.2.2.1 Équations de bilan de masse et de bilan de quantité de mouvement

En appliquant l'opérateur de moyenne volumique aux équations (7.2a) et (7.7) et en utilisant les règles de permutation entre la moyenne volumique et les opérateurs de dérivation présentées dans la section 2.2.1, il vient :

$$\nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad (7.9a)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle}{\phi} \right) + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}^t) = -\nabla \frac{\langle \bar{p} \rangle}{\rho} + \nabla \cdot (\nu \nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle) + \nabla \cdot (2 \langle \nu_t \bar{\mathbf{S}} \rangle) + \phi \mathbf{f} \quad (7.9b)$$

où $\boldsymbol{\tau}^t$ est le tenseur des échelles sous-filtre associé à la vitesse. Il provient des fluctuations à l'échelle du volume de prise de moyenne, de la vitesse moyennée statistiquement $\bar{\mathbf{u}}$. \mathbf{f} est la force de frottement exercée par la phase solide sur la phase fluide. Les expressions de $\boldsymbol{\tau}^t$ et \mathbf{f} sont données par :

$$\boldsymbol{\tau}^t = \frac{1}{\phi} \left(\langle \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \rangle - \frac{\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle}{\phi} \right) \quad (7.10)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\phi} \frac{1}{V} \int_{A_i} \left(-\frac{\bar{p}}{\rho} Id + \nu \nabla \bar{\mathbf{u}} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.11)$$

Pour obtenir l'équation (7.9b), nous avons également utilisé le fait que les fluctuations de vitesses sont nulles à la paroi, ce qui implique entre autre que la viscosité turbulente, ν_t , est nulle à la paroi.

Pour modéliser le tenseur de Reynolds filtré $\langle \nu_t \bar{\mathbf{S}} \rangle$, nous utilisons, comme dans le chapitre 3, une idée proposée par Pedras et De Lemos (2001a). Ils définissent une viscosité turbulente macroscopique $\nu_{t\phi}$ qui vérifie :

$$\langle \nu_t \bar{\mathbf{S}} \rangle \doteq \nu_{t\phi} \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle \quad (7.12)$$

Il reste alors à proposer une méthode pour calculer la viscosité turbulente macroscopique $\nu_{t\phi}$. Nakayama et Kuwahara (1999) et Pedras et De Lemos (2001a) proposent de s'inspirer du modèle à deux équations standard (voir Eq. 7.4a) et font l'hypothèse que :

$$\nu_{t\phi} = C_\mu \frac{\langle k \rangle_f^2}{\langle \epsilon \rangle_f} \quad (7.13)$$

Nous rappelons que dans le chapitre 3, nous n'avons pas pu tester l'hypothèse de modélisation basée sur cette viscosité turbulente macroscopique (voir la discussion de la section 3.3). Pour l'écoulement de Poiseuille turbulent étudié dans ce chapitre, la moyenne volumique de la vitesse n'est pas constante. Ainsi l'hypothèse de viscosité turbulente macroscopique est nécessaire pour fermer l'équation de bilan de quantité de mouvement. Nous discutons de cette hypothèse de viscosité turbulente macroscopique lors de la présentation des résultats dans la section 7.5.4.

L'équation (7.9b) est qualifiée de *non-locale* car dans les expressions du tenseur des échelles sous-filtre (7.10) et de la force de frottement (7.11), des quantités moyennées volumiquement apparaissent à l'intérieur d'intégrales de volume ou de surface. Cela signifie que la modélisation de ces termes dépend de la structure de l'écoulement moyen (au sens de la moyenne volumique) sur une distance égale à la taille du filtre. Cependant, ces expressions peuvent être simplifiées lorsque les variations de l'écoulement moyen sont négligeables sur une distance de la taille du filtre. On a alors $\langle \langle \psi \rangle_f \rangle_f \approx \langle \psi \rangle_f$ et $\langle \tilde{\psi} \rangle_f \approx 0$ et les quantités moyennées peuvent être sorties des intégrales. L'opérateur de moyenne volumique intrinsèque est alors qualifié d'idempotent.

En utilisant l'expression (2.15) sur le gradient de porosité, ainsi que la propriété d'idempotence de la

moyenne intrinsèque, il vient :

$$\boldsymbol{\tau}^t \approx \langle \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} \rangle_f \quad (7.14)$$

$$\mathbf{f} \approx -\frac{1}{\phi} \nabla \phi \cdot \left(-\frac{\langle \bar{p} \rangle_f}{\rho} \mathbf{I} + \nu \nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \frac{1}{\phi} \frac{1}{V} \int_{A_i} \left(-\frac{\tilde{p}}{\rho} \mathbf{I} + \nu \nabla \tilde{\mathbf{u}} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.15)$$

L'expression *locale* de la force de frottement (7.15) fait apparaître un premier terme que l'on sait évaluer en fonction des grandeurs mésoscopiques et qui est non nul uniquement lorsque la porosité varie. Pour le deuxième terme il faut proposer une relation de fermeture. On note \mathbf{f}_l ce deuxième terme :

$$\mathbf{f}_l \hat{=} \frac{1}{\phi} \frac{1}{V} \int_{A_i} \left(-\frac{\tilde{p}}{\rho} \mathbf{I} + \nu \nabla \tilde{\mathbf{u}} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.16)$$

Finalement, la *forme locale* de l'équation (7.9b) s'écrit :

$$\frac{\partial \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle}{\phi} \right) + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}^t) = -\frac{\phi}{\rho} \nabla \langle \bar{p} \rangle_f + \nabla \cdot (2(\nu + \nu_{t\phi}) \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle) - \nu \nabla \phi \cdot \nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f + \phi \mathbf{f}_l \quad (7.17)$$

Pour fermer l'équation (7.17), il reste à modéliser deux termes : le tenseur des échelles sous-filtre $\boldsymbol{\tau}^t$ et la force de frottement \mathbf{f}_l . Nous rappelons que, en utilisant les règles de permutation entre la moyenne volumique et les opérateurs de dérivation et puisque la vitesse s'annule à la paroi solide, on peut montrer que :

$$\langle \bar{\mathbf{S}} \rangle = \frac{1}{2} \left(\nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle + \nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle^T \right) \quad (7.18)$$

7.2.2.2 Équations de transport de l'énergie cinétique turbulente et de son taux de dissipation

Les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente k et de son taux de dissipation ϵ à l'échelle mésoscopique sont obtenues en appliquant l'opérateur de moyenne volumique aux équations (7.4b) et (7.4c) gouvernant le transport de k et ϵ à l'échelle microscopique. En utilisant les règles de permutation entre la moyenne volumique et les opérateurs de dérivation présentées dans la section 2.2.1, on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\phi \langle k \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}^k) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi \langle k \rangle_f \right) \right) + \langle P \rangle - \phi \langle \epsilon \rangle_f \quad (7.19a)$$

$$\frac{\partial \phi \langle \epsilon \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\phi \langle \epsilon \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}^\epsilon) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \nabla \left(\phi \langle \epsilon \rangle_f \right) \right) + \left\langle (c_1 P - c_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \right\rangle + f^\epsilon \quad (7.19b)$$

où $\boldsymbol{\tau}^k$ et $\boldsymbol{\tau}^\epsilon$ sont les vecteurs sous-filtre associés respectivement au transport de k et au transport de ϵ . Les expressions de $\boldsymbol{\tau}^k$ et $\boldsymbol{\tau}^\epsilon$ sont données par :

$$\boldsymbol{\tau}^k = \frac{1}{\phi} \left(\langle k \bar{\mathbf{u}} \rangle - \phi \langle k \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right) \quad (7.20a)$$

$$\boldsymbol{\tau}^\epsilon = \frac{1}{\phi} \left(\langle \epsilon \bar{\mathbf{u}} \rangle - \phi \langle \epsilon \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right) \quad (7.20b)$$

$\tilde{\sigma}_k$ et $\tilde{\sigma}_\epsilon$ sont des nombres de Prandtl turbulents macroscopiques. Ils sont introduits car la viscosité turbulente, ν_t , n'est a priori pas constante dans le volume de prise de moyenne. Ils sont définis par les

relations :

$$\left\langle \frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \right\rangle = \frac{\nu_{t\phi}}{\bar{\sigma}_k} \langle \nabla k \rangle \quad (7.21a)$$

$$\left\langle \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right\rangle = \frac{\nu_{t\phi}}{\bar{\sigma}_\epsilon} \langle \nabla \epsilon \rangle \quad (7.21b)$$

et sont supposés constants. Dans la pratique, comme nous ne savons pas déterminer la valeur de ces nombres de Prandtl macroscopiques, nous utilisons les valeurs des nombres de Prandtl σ_k et σ_ϵ . Pour obtenir l'équation (7.19a), nous avons également utilisé le fait que k et son gradient sont nuls à la paroi. Ces relations ne sont pas vérifiées pour ϵ . Les termes qui apparaissent lorsque l'on commute les opérateurs de moyenne et de dérivation sont donc non nuls et sont regroupés dans f^ϵ :

$$f^\epsilon \hat{=} \frac{1}{V} \int_{A_i} \nu \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} dS + \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\bar{\sigma}_\epsilon} \right) \frac{1}{V} \int_{A_i} \epsilon \mathbf{n} dS \right) \quad (7.22)$$

Puis, en suivant une idée proposée par Nakayama et Kuwahara (1999), les termes de production (respectivement $\langle P \rangle$ pour $\langle k \rangle_f$ et $\langle (c_1 P - c_2 \epsilon) \epsilon / k \rangle$ pour $\langle \epsilon \rangle_f$) sont divisés en termes de production mésoscopiques, *i.e.* due aux gradients de vitesse mésoscopiques de l'écoulement, et termes de production sous-filtre :

$$\langle P \rangle = 2 \langle \nu_t \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}} \rangle = 2 \nu_{t\phi} \phi \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f + \phi P_k \quad (7.23a)$$

$$\begin{aligned} \left\langle (c_1 P - c_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \right\rangle &= \left\langle (2 c_1 \nu_t \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}} - c_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \right\rangle \\ &= \phi \left(2 c_1 \nu_{t\phi} \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f - c_2 \langle \epsilon \rangle_f \right) \frac{\langle \epsilon \rangle_f}{\langle k \rangle_f} + \phi S_\epsilon \end{aligned} \quad (7.23b)$$

où la notation $\langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f$ désigne $\langle \bar{\mathbf{S}} \rangle / \phi$. Les relations précédentes définissent P_k et S_ϵ . Le système d'équations du transport de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\phi \langle k \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \nabla \cdot \left(\phi \boldsymbol{\tau}^k \right) &= \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\bar{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi \langle k \rangle_f \right) \right) + 2 \phi \nu_{t\phi} \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f \\ &\quad + \phi P_k - \phi \langle \epsilon \rangle_f \end{aligned} \quad (7.24a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi \langle \epsilon \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\phi \langle \epsilon \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \nabla \cdot \left(\phi \boldsymbol{\tau}^\epsilon \right) &= \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\bar{\sigma}_\epsilon} \right) \nabla \left(\phi \langle \epsilon \rangle_f \right) \right) \\ &\quad + \phi \left(2 c_1 \nu_{t\phi} \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f - c_2 \langle \epsilon \rangle_f \right) \frac{\langle \epsilon \rangle_f}{\langle k \rangle_f} + \phi P_\epsilon \end{aligned} \quad (7.24b)$$

où nous avons regroupé dans le terme P_ϵ le terme de production sous-filtre S_ϵ ainsi que le terme provenant de l'erreur de commutation f^ϵ

$$\phi P_\epsilon \hat{=} \phi S_\epsilon + f^\epsilon \quad (7.25)$$

Pour fermer le système (7.24), il reste à modéliser les termes de production et de destruction sous-filtre P_k et P_ϵ , ainsi que les vecteurs sous-filtre $\boldsymbol{\tau}^k$ et $\boldsymbol{\tau}^\epsilon$.

Le modèle de turbulence obtenu à l'échelle de description mésoscopique en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique est récapitulé dans l'encadré du tableau 7.1. Pour fermer ce modèle, il reste à modéliser six termes, $\boldsymbol{\tau}^t$, $\boldsymbol{\tau}^k$, $\boldsymbol{\tau}^\epsilon$, \mathbf{f}_l , P_k et P_ϵ . Nous discutons des relations de fermeture à utiliser dans les deux régions homogènes, ainsi que dans la région de transition, dans la section suivante.

$$\nabla \cdot (\phi \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f) = 0 \quad (7.26a)$$

$$\frac{\partial \phi \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f) + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}^t) = \nabla \cdot (2(\nu + \nu_{t_\phi}) \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle) - \frac{\phi}{\rho} \nabla \langle \bar{p} \rangle_f - \nu \nabla \phi \cdot \nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f + \phi \mathbf{f}_l \quad (7.26b)$$

$$\frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \langle k \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f) + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}^k) = \nabla \cdot \left((\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k}) \nabla (\phi \langle k \rangle_f) \right) + 2 \phi \nu_{t_\phi} \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f + \phi P_k - \phi \langle \epsilon \rangle_f \quad (7.26c)$$

$$\frac{\partial \phi \langle \epsilon \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \langle \epsilon \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f) + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}^\epsilon) = \nabla \cdot \left((\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon}) \nabla (\phi \langle \epsilon \rangle_f) \right) + \phi \left(2 c_1 \nu_{t_\phi} \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f - c_2 \langle \epsilon \rangle_f \right) \frac{\langle \epsilon \rangle_f}{\langle k \rangle_f} + \phi P_\epsilon \quad (7.26d)$$

avec

$$\nu_{t_\phi} = C_\mu \frac{\langle k \rangle_f^2}{\langle \epsilon \rangle_f} \quad (7.26e)$$

TAB. 7.1 – Modèle de turbulence $k - \epsilon$ à l'échelle de description mésoscopique.

Nous soulignons que le modèle de turbulence obtenu à l'échelle de description mésoscopique ne diffère pas énormément du modèle de turbulence à l'échelle macroscopique pour le milieu poreux homogène présenté dans le chapitre 3 (voir l'encadré de la section 3.3, page 49). A l'échelle mésoscopique, les termes de dispersion sous-filtre $\boldsymbol{\tau}^t$, $\boldsymbol{\tau}^k$ et $\boldsymbol{\tau}^\epsilon$ ne sont a priori pas négligeables. En particulier, on peut s'attendre à ce qu'ils varient fortement dans la région de transition. En revanche, ces termes sont négligés dans le modèle à l'échelle macroscopique. Quant aux termes de production et de destruction sous-filtre P_k et P_ϵ , ils sont constants dans la région poreuse homogène lorsque l'écoulement est établi, donc dans le modèle à l'échelle macroscopique, alors qu'ils sont supposés variables dans le modèle à l'échelle mésoscopique.

7.2.3 Fermeture du modèle à l'échelle mésoscopique

Le modèle de turbulence obtenu dans la section précédente et récapitulé dans le tableau 7.1 est valable dans l'ensemble du domaine, *i.e.* dans les régions homogènes libre et poreuse, ainsi que dans la région de transition interfaciale. En effet, pour le moment, nous nous sommes contentés d'appliquer l'opérateur de moyenne volumique aux équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique. Cependant, ce modèle n'est pas fermé. Nous discutons dans cette section des relations de fermeture à utiliser pour ce modèle dans les différentes régions et nous vérifions que ce modèle dégénère bien dans les régions homogènes vers les modèles fils qui sont classiquement associés à ces régions.

7.2.3.1 Région libre homogène

Dans la région libre, la porosité ϕ est égale à 1 et, puisqu'il n'y a pas de solide, le terme de frottement \mathbf{f}_l de l'équation de bilan de quantité de mouvement (Eq. (7.26b)) est nul. La porosité étant constante, le terme en $\nabla \phi$ est également nul. Le terme de dispersion sous-filtre de l'équation (7.26b), $\boldsymbol{\tau}^t$, est négligeable uniquement si la taille du filtre est suffisamment petite devant les échelles de variations de $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$ (cf. Eq. (7.10)). Si cette hypothèse est vérifiée, alors $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \approx \bar{\mathbf{u}}$ et l'équation (7.26b) est identique à l'équation

de quantité de mouvement du modèle $k - \epsilon$ standard dans un milieu libre. De même, si la taille du filtre est suffisamment petite, les termes de dispersion sous-filtre, τ^k et τ^ϵ , des équations de transport de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ sont négligeables (cf. Eq. (7.20)). Dans le cadre de cette hypothèse, $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \approx \bar{\mathbf{u}}$, $\langle k \rangle \approx k$ et $\langle \epsilon \rangle \approx \epsilon$. De plus, puisque l'on se situe dans la région homogène libre, les termes de production sous-filtre P_k et P_ϵ sont nuls. En effet, leurs expressions respectives (cf. Eqs. (7.22), (7.23a), (7.23b) et (7.25)) ne font intervenir que des termes liés à la présence du solide (intégrales de surfaces) ou des termes sous-filtre.

Ainsi, dans le milieu libre, le système (7.26) est identique au modèle $k - \epsilon$ standard, sous l'hypothèse que la taille du filtre soit suffisamment petite devant les échelles de variations des grandeurs moyennées.

7.2.3.2 Région poreuse homogène

Pour fermer le système (7.26) dans la région poreuse homogène, il faut spécifier les relations de fermeture pour le terme de frottement \mathbf{f}_l , pour les termes sources de production sous-filtre P_k et P_ϵ , et pour les termes de dispersion sous-filtre τ^t , τ^k et τ^ϵ .

Dans la région poreuse homogène, l'influence des termes de dispersion sous-filtre sont soit supposés pris en compte dans les termes sources de production sous-filtre P_k et P_ϵ (Nakayama et Kuwahara, 1999; De Lemos et Pedras, 2001), soit négligés devant les termes sources et/ou les termes de dispersion correspondants (Breugem et Boersma, 2005; Breugem et al., 2005). En fait, les termes sous-filtre τ^t , τ^k et τ^ϵ ne sont pas nécessairement négligeables dans la région poreuse homogène. Mais puisque ces termes apparaissent à l'intérieur de l'opérateur divergence et puisque dans la région poreuse homogène, les grandeurs moyennées varient faiblement, il semble raisonnable de négliger leur influence. Donc, nous négligeons l'influence des termes de dispersion sous-filtre dans la région poreuse homogène.

En ce qui concerne le terme de frottement \mathbf{f}_l et les termes sources de production sous-filtre P_k et P_ϵ , les relations de fermeture à utiliser dépendent directement de la géométrie du milieu poreux étudié. La région poreuse étant homogène, ces relations de fermeture peuvent être par exemple déterminées en effectuant des simulations sur des volumes élémentaires représentatifs des milieux étudiés et en utilisant la méthode d'homogénéisation numérique.

Dans la communauté des milieux poreux naturels, le terme de frottement est en général modélisé à l'aide de la loi de Darcy-Forchheimer :

$$\mathbf{f}_l = -\nu \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{F}) \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad (7.27)$$

où \mathbf{K} est le tenseur de perméabilité et \mathbf{F} est le tenseur de Forchheimer. De nombreuses corrélations existent dans la littérature pour modéliser ces tenseurs selon la géométrie du milieu poreux étudié (Ergun, 1952; Irmay, 1965; MacDonald et al., 1979; Kuwahara et al., 1998). Nous soulignons qu'en général, le tenseur de Forchheimer \mathbf{F} s'exprime en fonction de la moyenne volumique de la vitesse $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$. Pour illustrer cette dépendance, nous rappelons la modélisation proposée par MacDonald et al. (1979)

$$\mathbf{F} = F \mathbf{I}, \quad \frac{F}{K} = C_F \frac{1 - \phi}{\phi^3} \frac{1}{d_p} \left(\frac{|\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle|}{\nu} \right) \quad (7.28)$$

où C_F est une constante égale à 1.8 pour les lits de particules et d_p est une longueur caractéristique de la taille des grains du milieu poreux.

Dans la communauté nucléaire, le terme de frottement est plutôt modélisé par des lois de perte de charge :

$$\mathbf{f}_l = -\frac{1}{2} \rho |\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle| \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle \frac{\lambda_c}{D_h} \quad (7.29)$$

où D_h est le diamètre hydraulique et λ_c est le coefficient de perte de charge. L'ouvrage d'Idel'cik (1969) propose une synthèse des différentes corrélations de ce coefficient de perte de charge en fonction de la géométrie du milieu ainsi que du régime d'écoulement.

Ces deux approches sont équivalentes. En revanche, ces deux communautés s'intéressent à des géométries et des gammes de Reynolds relativement différentes. Ainsi, pour modéliser le terme de frottement \mathbf{f}_l , on choisit la corrélation adaptée à la géométrie du milieu poreux et à la gamme de Reynolds étudiés.

Pour modéliser les termes sources de production sous-filtre P_k et P_ϵ dans la zone poreuse homogène, nous avons déterminé dans le chapitre 3 des corrélations qui s'appliquent à des géométries longitudinales de type canaux plans, tuyaux et grappes (cf. encadré de la section 3.3, page 49). En effectuant des simulations numériques sur un volume élémentaire représentatif et en utilisant la méthode d'homogénéisation numérique, Nakayama et Kuwahara (1999) proposent d'autres corrélations pour P_k et P_ϵ qui s'appliquent à un milieu poreux constitué de petits cubes (cf. tableau 3.1 du chapitre 3, page 37). Ainsi, pour modéliser les termes sources de production sous-filtre P_k et P_ϵ , on choisit la corrélation adaptée à la géométrie du milieu poreux étudié ou, si elle n'existe pas, on la détermine en utilisant la méthode d'homogénéisation numérique.

Ainsi, dans le milieu poreux homogène, le système (7.26) est fermé, sous l'hypothèse que les corrélations pour les termes sources \mathbf{f}_l , P_k et P_ϵ soient connues pour le milieu poreux étudié.

7.2.3.3 Région de transition interfaciale

Comme dans la région poreuse homogène, la fermeture du système (7.26) dans la zone de transition nécessite de spécifier les relations de fermeture pour les six termes \mathbf{f}_l , P_k , P_ϵ , τ^t , τ^k et τ^ϵ .

Breugem (2005) suppose que, comme dans la région poreuse homogène, l'influence des termes de dispersion sous-filtre est négligeable dans la zone de transition. Néanmoins, puisque la région de transition est une région où les grandeurs moyennées varient fortement, il se peut que cette hypothèse ne soit pas toujours valable.

En ce qui concerne le terme en gradient de porosité $\nu \nabla \phi \cdot \nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f$, qui est non nul uniquement dans la région de transition, et le terme de frottement \mathbf{f}_l , nous avons fait l'hypothèse dans le chapitre 4 (cf. section 4.2.2.2) pour l'étude de l'écoulement de Poiseuille laminaire, que ces termes sont modélisés ensemble par l'intermédiaire d'un modèle à porosité et perméabilité variables. Nous faisons ici la même hypothèse en supposant que ces termes sont modélisés ensemble par l'intermédiaire d'un modèle à porosité, perméabilité et coefficient de Forchheimer variables

$$-\nu \nabla \phi \cdot \nabla \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f + \mathbf{f}_l = -\nu \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{F}) \langle \mathbf{u} \rangle \quad (7.30)$$

où ϕ , \mathbf{K} et \mathbf{F} sont des fonctions variables de l'espace. Néanmoins, les variations de \mathbf{K} et \mathbf{F} ne sont a priori pas connues dans la région de transition.

Les termes sources de production sous-filtre P_k et P_ϵ ne peuvent pas être négligés dans la région de transition. Malheureusement, contrairement aux zones libres et poreuses homogènes, nous ne connaissons a priori pas leurs expressions dans la zone de transition interfaciale.

Dans la région de transition interfaciale, le système (7.26) n'est pas fermé car les variations spatiales des six termes \mathbf{f}_l , P_k , P_ϵ , τ^t , τ^k et τ^ϵ ne sont pas connues. L'objectif final étant de proposer un modèle à l'échelle macroscopique, nous ne souhaitons pas nécessairement caractériser finement les variations de ces termes sources dans la zone de transition. En effet, à l'échelle de description macroscopique, la zone de transition est remplacée par une interface de discontinuité et les valeurs de ces différents termes ne sont pas utilisées de façon directe. En revanche, nous cherchons à modéliser les conséquences des variations de ces différents termes sur les régions homogènes adjacentes à travers des relations de saut à l'interface.

Pour le moment, nous nous contentons donc de supposer que ces six termes varient continûment de leur valeur dans la région libre homogène à leur valeur dans la région poreuse homogène, sans spécifier a priori ces variations.

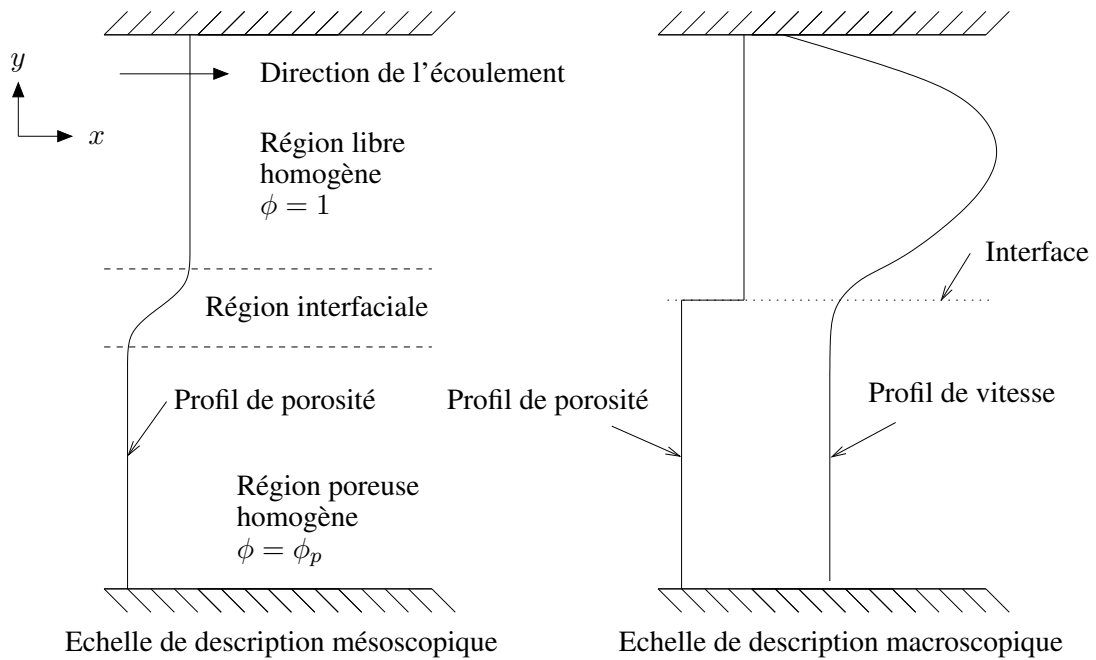


FIG. 7.1 – Ecoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux aux échelles de description mésoscopique et macroscopique de l'interface.

7.3 Conditions de saut pour l'écoulement de Poiseuille turbulent

Dans cette section, nous étudions le changement d'échelle entre les descriptions mésoscopique et macroscopique de l'interface, pour l'écoulement de Poiseuille turbulent dont la géométrie est rappelée sur la figure 7.1. A l'échelle de description mésoscopique, le problème est gouverné par le système d'équations (7.26) dans l'ensemble du domaine, *i.e.* dans les deux régions homogènes libre et poreuse, ainsi que dans la région de transition. A l'échelle de description macroscopique, le domaine est constitué de deux régions homogènes (libre et poreuse) séparées par une interface de discontinuité. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les conditions de saut à appliquer aux différentes grandeurs physiques (vitesse, tenseur des contraintes, énergie cinétique turbulente, ...). L'étude de ce problème soulève diverses questions : pour quelles grandeurs physiques a-t-on besoin de conditions de saut ? Quelle est la forme de ces conditions de saut ? De quels paramètres dépendent-elles ? Comment détermine-t-on ces paramètres en fonction, entre autre, de la position de l'interface de discontinuité ? Dans cette section, nous étudions la forme des conditions de saut à appliquer à l'interface en utilisant l'analyse générique des processus interfaciaux.

7.3.1 Problème mono-dimensionnel

Une fois que les filtres statistique et volumique ont été appliqués, l'écoulement de Poiseuille turbulent est mono-dimensionnel, à la fois aux échelles de description mésoscopique et macroscopique de l'interface (voir figure 7.1). Nous supposons de plus que l'écoulement est stationnaire et que les variables ne dépendent pas de la coordonnée x , mis à part la pression.

Équations gouvernant le problème à l'échelle de description mésoscopique

D'après l'équation de continuité (7.26a) et en utilisant le fait que la vitesse s'annule à la paroi supérieure, la composante selon la direction y de la moyenne volumique de la vitesse, $\langle \bar{v} \rangle$, est nulle à l'échelle

mésoscopique. Le système à résoudre à l'échelle mésoscopique (Eqs. (7.26)) se ramène à :

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_{t\phi}) \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} \right)}_{f_v} - \underbrace{\frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle_f}{\partial x}}_{f_p} - \underbrace{\phi \nu \frac{1+F}{K} \langle \bar{u} \rangle}_{f_f} \quad (7.31a)$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\bar{\sigma}_k}) \frac{\partial (\phi \langle k \rangle_f)}{\partial y} \right)}_{\text{diff}_k} + \underbrace{2 \nu_{t\phi} \phi \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f}_{\text{prodM}_k} + \underbrace{\phi P_k}_{\text{prod}_k} - \underbrace{\phi \langle \epsilon \rangle_f}_{\text{diss}_k} \quad (7.31b)$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\bar{\sigma}_\epsilon}) \frac{\partial (\phi \langle \epsilon \rangle_f)}{\partial y} \right)}_{\text{diff}_\epsilon} + \underbrace{2 c_1 \nu_{t\phi} \phi \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f : \langle \bar{\mathbf{S}} \rangle_f \frac{\langle \epsilon \rangle_f}{\langle k \rangle_f}}_{\text{prodM}_\epsilon} - \underbrace{\phi c_2 \frac{\langle \epsilon \rangle_f^2}{\langle k \rangle_f}}_{\text{diss}_\epsilon} + \underbrace{\phi P_\epsilon}_{\text{prod}_\epsilon} \quad (7.31c)$$

$$\nu_{t\phi} = C_\mu \frac{\langle k \rangle_f^2}{\langle \epsilon \rangle_f} \quad (7.31d)$$

où $\langle \bar{u} \rangle$ représente la composante selon la direction x de la moyenne volumique de la vitesse. Afin de simplifier l'écriture du problème, nous avons fait l'hypothèse que l'influence des termes de dispersion sous-filtre est directement prise en compte dans les variations des termes sources \mathbf{f}_l , P_k , P_ϵ . De plus, le terme de frottement \mathbf{f}_l et le terme en gradient de porosité de l'équation (7.26b) ont été modélisés ensemble par l'intermédiaire d'un modèle à porosité, perméabilité et coefficient de Forchheimer variables. Ainsi, la porosité ϕ , la perméabilité K et le coefficient de Forchheimer F sont fonctions de la variable y dans la zone de transition interfaciale. Comme ϕ , K et F , les termes sources P_k et P_ϵ sont des fonctions de la variable y dans la zone de transition interfaciale. Finalement, nous soulignons que le gradient de pression est nul dans la direction y (projection de l'équation de bilan de quantité de mouvement selon la coordonnée y), ce qui implique d'après l'équation (7.31a) que le gradient de pression $d \langle \bar{p} \rangle_f / dx$ est constant.

Pour fermer le système (7.31), il reste à spécifier les profils de cinq grandeurs (ϕ , K , F , P_k et P_ϵ). Ces profils dépendent de la géométrie du milieu poreux étudié.

Équations gouvernant le problème à l'échelle de description macroscopique

La forme du système à résoudre à l'échelle de description macroscopique est strictement identique au système (7.31). La seule différence vient du fait que les termes ϕ , K et F , P_k et P_ϵ , qui sont continus et variables en y à l'échelle de description mésoscopique, sont discontinus au niveau de l'interface et ne dépendent plus directement de la variable y dans chaque région homogène (voir l'exemple de la porosité sur la figure 7.1). Nous soulignons néanmoins que ces termes ne sont pas nécessairement constants dans les régions homogènes. En effet, le terme de Forchheimer F par exemple, s'exprime en général en fonction de la moyenne volumique de la vitesse $\langle \bar{u} \rangle$ (cf. Eq. 7.28). Cette dernière pouvant être variable dans les régions homogènes, le terme de Forchheimer n'est pas nécessairement constant dans les régions homogènes.

7.3.2 Condition de saut pour l'équation de bilan de quantité de mouvement

Comme dans le cas laminaire, l'équation de bilan de quantité de mouvement (7.31a) exprime l'équilibre entre trois forces : une force visqueuse (f_v), une force de pression (f_p) et une force de frottement (f_f). A l'échelle mésoscopique, la porosité ϕ , la perméabilité K et le coefficient de Forchheimer C_F varient dans la zone de transition et sont constants dans les deux régions homogènes. A l'échelle macroscopique, ces grandeurs sont constantes dans chaque région. Ainsi, par construction, la force de frottement et la force de pression ne sont pas correctement décrites par le modèle macroscopique dans la zone

de transition. Pour chacune de ces trois forces, on définit sa quantité en excès associée. Par exemple, la quantité en excès associée à la force de frottement est donnée par :

$$(f_f)^{EX} = \nu \int_{-\infty}^{y_M} \left(\phi \frac{1 + F(\langle \bar{u} \rangle)}{K} \langle \bar{u} \rangle - \phi_p \frac{1 + F_p(U)}{K_p} U \right) + \nu \int_{y_M}^H \left(\phi \frac{1 + F(\langle \bar{u} \rangle)}{K} \langle \bar{u} \rangle \right) \quad (7.32)$$

où U est la vitesse solution du problème à l'échelle macroscopique, K_p est la valeur de la perméabilité dans la région poreuse homogène, F_p est le terme de Forchheimer obtenu en injectant les valeurs de ϕ_p et K_p dans l'expression (7.28) et y_M est la position de l'interface de discontinuité. Comme dans le cas laminaire, cette quantité en excès représente *exactement* l'intégrale de la force qui n'est pas vue par le modèle à l'échelle macroscopique dans la région de transition, comparé au modèle à l'échelle mésoscopique. Cette force en excès est alors affectée à l'interface par le biais de conditions de saut sur le gradient de vitesse afin d'obtenir une description équivalente du problème à l'échelle macroscopique. On s'intéresse maintenant aux quantités en excès associées aux deux autres forces. Pour la force de pression, puisque le gradient de pression est constant, il vient :

$$(f_p)^{EX} = \left(\int_{-\infty}^{y_M} (\phi - \phi_p) + \int_{y_M}^H (\phi - 1) \right) \frac{1}{\rho} \frac{d \langle \bar{p} \rangle_f}{dx} = \frac{(\phi)^{exM}}{\rho} \frac{d \langle \bar{p} \rangle_f}{dx} \quad (7.33)$$

où nous avons utilisé la définition $(\)^{exM}$ de la grandeur en excès introduite dans le chapitre 5 (voir Eq. (5.20)). Pour la force visqueuse, il vient après intégration :

$$(f_v)^{EX} = \left((\nu + \nu_{t_\phi}) \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} \Big|_H - (\nu + \nu_{t_\phi}) \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_H \right) - \left((\nu + \nu_{t_\phi}) \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y_M^+} - (\nu + \nu_{t_\phi}) \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y_M^-} \right) \quad (7.34)$$

Comme dans le cas laminaire, le modèle à l'échelle macroscopique est construit de façon à ce que les solutions aux échelles macroscopique et mésoscopique soient égales dans les régions homogènes. Ainsi, le premier terme du membre de droite de l'équation (7.34) est nul lorsque le modèle à l'échelle macroscopique est "bien construit". En additionnant les relations (7.32), (7.33) et (7.34), on obtient la condition de saut *exacte* à appliquer à l'interface sur le gradient de vitesse à l'échelle macroscopique :

$$(\nu + \nu_{t_\phi}) \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y_M^+} - (\nu + \nu_{t_\phi}) \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y_M^-} = (f_p)^{EX} + (f_f)^{EX} \quad (7.35)$$

La difficulté principale est alors d'exprimer les deux quantités en excès du membre de droite de l'équation (7.35) en fonction uniquement de grandeurs macroscopiques afin de fermer le problème. L'expression (7.33) qui relie la force de pression surfacique en excès $(f_p)^{EX}$ à la porosité en excès $(\phi)^{exM}$, est déjà fermée car la grandeur en excès $(\phi)^{exM}$ s'exprime uniquement en fonction d'une grandeur mésoscopique connue, le profil de porosité. Il reste à proposer une relation de fermeture pour la force de frottement surfacique en excès $(f_f)^{EX}$.

7.3.3 Conditions de saut pour les équations de transport des quantités turbulentes

L'équation de bilan de quantité de mouvement (7.31a) est couplée aux équations de transport des quantités turbulentes (Eqs. (7.31b) et (7.31c)) par le biais de la viscosité turbulente macroscopique ν_{t_ϕ} (Eq. (7.31d)). Ainsi, si la viscosité turbulente macroscopique est mal évaluée dans l'ensemble du domaine, le modèle à l'échelle macroscopique donnera de mauvais résultats pour la vitesse, et ce même si le saut de contrainte est correctement évalué au niveau de l'interface. En effet, le profil de vitesse dépend du profil de viscosité turbulente macroscopique dans l'ensemble du domaine, et contrairement à la porosité ou à la perméabilité, la viscosité turbulente macroscopique n'est pas une donnée du problème. Elle dépend de l'énergie cinétique turbulente k et du taux de dissipation ϵ .

L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente (7.31b) exprime l'équilibre entre quatre termes : un terme de diffusion (diff_k), un terme de production à l'échelle macroscopique (prodM_k), un terme de production sous-filtre (prod_k) et enfin un terme de dissipation (diss_k). Comme lors de l'étude de l'équation de bilan de quantité de mouvement, on peut définir pour chacun de ces termes, sa quantité en excès associée. Pour le terme de diffusion, il vient après intégration :

$$(\text{diff}_k)^{EX} = \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle}{\partial y} \Big|_H - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \Big|_H \right) + \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \Big|_{y_M^+} - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \Big|_{y_M^-} \right) \quad (7.36)$$

où on a noté \mathcal{K} la moyenne volumique de l'énergie cinétique turbulente à l'échelle de description macroscopique afin de ne pas la confondre avec la perméabilité K . Le premier terme de l'expression (7.36) est nul lorsque les modèles à l'échelle mésoscopique et macroscopique sont équivalents. Ainsi, la condition de saut *exacte* à appliquer à l'interface sur le flux diffusif d'énergie cinétique turbulente s'écrit :

$$\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \Big|_{y_M^+} - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \Big|_{y_M^-} = -(\text{prodM}_k)^{EX} - (\text{prod}_k)^{EX} + (\text{diss}_k)^{EX} \quad (7.37)$$

La structure de l'équation de transport du taux de dissipation étant similaire à celle de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, on en déduit que la condition de saut *exacte* à appliquer à l'interface sur le flux diffusif de dissipation s'écrit :

$$\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y_M^+} - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y_M^-} = -(\text{prodM}_\epsilon)^{EX} - (\text{prod}_\epsilon)^{EX} + (\text{diss}_\epsilon)^{EX} \quad (7.38)$$

où E est la moyenne volumique du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente à l'échelle de description macroscopique.

Les grandeurs en excès qui apparaissent dans les membres de droite des équations (7.37) et (7.38) sont associées à des termes de production et de dissipation. La difficulté est d'exprimer ces quantités en excès en fonction uniquement de grandeurs macroscopiques.

L'analyse générique des processus interfaciaux nous a permis de déterminer les conditions de sauts à appliquer au gradient de vitesse (Eq. (7.35)), au gradient de l'énergie cinétique turbulente (Eq. (7.37)), ainsi qu'au gradient du taux de dissipation (Eq. (7.38)). Ainsi, il faut bien prendre en compte une condition de saut sur le gradient de l'énergie cinétique turbulente, comme l'ont suggéré De Lemos (2005) et De Lemos et Silva (2006). Cependant, cette analyse montre qu'il faut également prendre en compte une condition de saut sur le gradient du taux de dissipation. Les relations de saut (7.35), (7.37) et (7.38) ne sont pas fermées. En effet, elles s'expriment en fonction de grandeurs en excès qui font intervenir des grandeurs mésoscopiques inconnues. Dans la section suivante, nous étudions la valeur de ces grandeurs en excès pour un milieu poreux donné, constitué de petits cubes. Cette géométrie particulière correspond à celle de l'étude réalisée par Breugem et Boersma (2005) et pour laquelle nous disposons de résultats de référence.

7.4 Détermination des grandeurs en excès

Dans cette section, nous étudions les grandeurs en excès des relations de saut (7.35), (7.37) et (7.38) pour un milieu poreux constitué de petits cubes. En effet, Breugem et Boersma (2005) ont réalisé des simulations numériques directes (DNS) pour cette géométrie et nous disposons donc de résultats de référence. Nous tenons d'ailleurs ici à remercier Mr. Breugem et Mr. Boersma de nous avoir fait parvenir les résultats de ces simulations numériques directes.

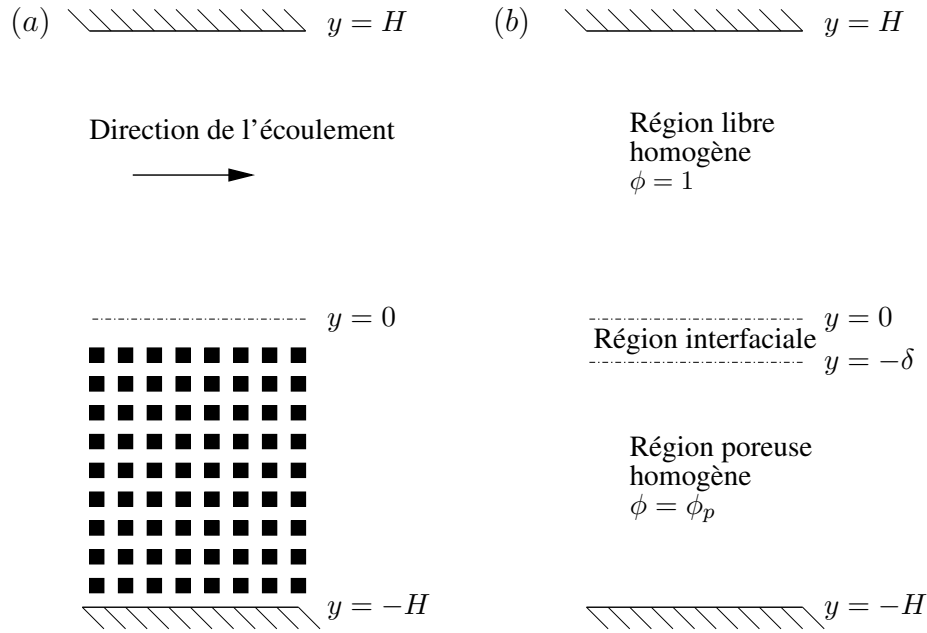


FIG. 7.2 – Géométrie de l'écoulement : (a) DNS avec cubes ; (b) DNS avec une approche continue.

7.4.1 Description de la configuration de référence

La géométrie de l'écoulement étudiée par [Breugem et Boersma \(2005\)](#) est rappelée sur la figure 7.2. Les simulations tridimensionnelles réalisées par [Breugem et Boersma \(2005\)](#) sont qualifiées de DNS, car aucun modèle de turbulence n'est utilisé. Par contre, deux niveaux différents de descriptions de la zone de transition ont été étudiés. Pour la *DNS avec cubes*, aucune modélisation n'est introduite : ils étudient l'écoulement au-dessus d'une région poreuse constituée de cubes (cf. figure 7.2 (a)). Pour la *DNS avec approche continue*, les cubes sont remplacés par un milieu poreux équivalent dont les propriétés varient continûment de la zone libre homogène à la zone poreuse homogène (cf. figure 7.2 (b)). Les caractéristiques de la géométrie sont les suivantes. La taille du cube est $d_p = H/20$, où H est la hauteur de la région libre. La distance entre deux cubes est égale à la taille du cube d_p . Par conséquent, la porosité dans la région poreuse homogène est égale à 0.875. Dans leurs simulations, [Breugem et Boersma \(2005\)](#) ont fixé le nombre de Reynolds débitant $Re_b = U_b H / \nu$ à 5500. Ici, U_b est la vitesse débitante dans la partie libre du canal ($0 < y < H$).

Dans leur *DNS avec approche continue*, [Breugem et Boersma \(2005\)](#) modélisent la perméabilité à l'aide de la corrélation d'Irmay ([Irmay, 1965](#))

$$\mathbf{K} = K\mathbf{I}, \quad K = C_K \frac{(1 - (1 - \phi)^{1/3})^3 (1 + (1 - \phi)^{1/3})}{C_K(1 - \phi)} d_p^2 \quad (7.39)$$

avec $C_K = 11.4$. Pour modéliser le coefficient de Forchheimer, ils utilisent la corrélation proposée par [MacDonald et al. \(1979\)](#) (cf. Eq. 7.28), avec une valeur de C_F égale à 0.4. Cette valeur de C_F est plus appropriée pour cette géométrie constituée de petits cubes. Pour définir le profil de porosité dans la région interfaciale, ils approchent le profil de porosité obtenu en filtrant la fonction caractéristique de la phase fluide avec un filtre chapeau, par un polynôme d'ordre 5 en y/δ .

7.4.2 Relation de fermeture pour la force de frottement surfacique en excès

Nous avons montré dans la section 7.3.2 que la condition de saut sur le gradient de vitesse dépend de deux grandeurs en excès : la force de pression surfacique en excès $(f_p)^{EX}$ et la force de frottement sur-

facique en excès $(f_f)^{EX}$. L'expression (7.33) qui relie la force de pression surfacique en excès $(f_p)^{EX}$ à la porosité en excès $(\phi)^{exM}$ est déjà fermée. Nous nous intéressons donc ici à la relation de fermeture pour la force de frottement surfacique en excès $(f_f)^{EX}$.

Dans le cas laminaire, nous avons montré dans le chapitre 5 qu'une bonne estimation de la force de frottement surfacique en excès est donnée par la relation suivante :

$$\left(\nu \frac{\phi}{K} u\right)^{EX} = \nu \left(\frac{\phi}{K}\right)^{ex\Delta} \langle u \rangle^{(0)} \Big|_{y_M} \quad (7.40)$$

avec

$$\left(\frac{\phi}{K}\right)^{ex\Delta} = (y_{\phi/K} + \Delta y - y_M) \left(\frac{\phi}{K}\right) \quad (7.41)$$

où $(y_{\phi/K} + \Delta y)$ est le centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès. Ainsi, lorsque l'interface de discontinuité est placée en $(y_{\phi/K} + \Delta y)$, la force de frottement surfacique en excès est tout simplement nulle.

Afin d'obtenir un résultat similaire dans le cas où l'écoulement est turbulent, deux étapes sont nécessaires. D'un côté, il faut regarder à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés si une linéarisation du type de celle de l'équation (7.40) est toujours valable dans le cas turbulent. On s'attend à ce que le résultat soit différent, le terme de frottement n'étant plus linéaire en vitesse lorsque l'écoulement est turbulent (cf. Eq. (7.28)). D'un autre côté, il faut déterminer la valeur du centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès pour la géométrie étudiée.

Néanmoins, si on place l'interface de discontinuité y_M au niveau du centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès, alors la force de frottement surfacique en excès, $(f_f)^{EX}$, est nulle. Ainsi, pour cette position particulière de l'interface, nous n'avons pas besoin de vérifier si la linéarisation (7.40) est valable pour résoudre le problème. Pour cette raison, nous nous contentons d'étudier la position du centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès $(f_f)^{EX}$.

Dans le cas laminaire, nous avons montré dans le chapitre 5 que la position du centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès est donnée par

$$y_{\phi/K} + \Delta y = y_{\text{imp}} + \sqrt{\frac{K_p}{\phi_p}} \quad (7.42)$$

où y_{imp} est la position de la paroi imperméable équivalente. Pour la géométrie constituée de petits cubes de la figure 7.2(a), la paroi imperméable équivalente est située en $y_{\text{imp}}/H = -2 d_p/H$. Étant donné les valeurs de K_p et de ϕ_p pour cette géométrie, nous en déduisons que la valeur de la position du centre de gravité est $(y_{\phi/K} + \Delta y)/H = -0,08$ dans le cas laminaire.

Nous faisons alors l'hypothèse que la position du centre de gravité est identique dans le cas laminaire et dans le cas turbulent. Pour vérifier cette hypothèse, nous pouvons faire une estimation *a priori*. En faisant l'hypothèse que les vitesses à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique sont très proches dans la zone de transition, il vient :

$$(f_f)^{EX} \approx \nu \int_{-\infty}^{y_M} \underbrace{\left(\phi \frac{1 + F(\langle \bar{u} \rangle)}{K} \langle \bar{u} \rangle\right)}_{f_f^{\text{meso}}} - \underbrace{\left(\phi_p \frac{1 + F_p(\langle \bar{u} \rangle)}{K_p} \langle \bar{u} \rangle\right)}_{f_f^{\text{macro}}} + \nu \int_{y_M}^H \underbrace{\left(\phi \frac{1 + F(\langle \bar{u} \rangle)}{K} \langle \bar{u} \rangle\right)}_{f_f^{\text{meso}}} \quad (7.43)$$

En utilisant les profils de porosité, de perméabilité et de Forchheimer proposés par Breugem et Boersma (2005) pour modéliser la zone de transition pour la DNS avec continuum (cf. Eqs.(7.39) et (7.28)) ainsi que les profils de vitesses qu'ils ont obtenus, nous pouvons déduire à l'aide de la relation (7.43) la position

de l'interface de discontinuité y_M telle que $(f_f)^{EX} = 0$. Pour la DNS avec cubes, l'expression (7.43) s'annule pour $y_M/H = -0.0756$ et pour la DNS avec continuum, elle s'annule pour $y_M/H = -0.0763$. Or, dans le cas laminaire la force de frottement surfacique en excès s'annule pour $y_M/H = -0.08$. Ainsi, sous réserve que les vitesses à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique soient très proches, il paraît légitime de supposer que la position du centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès est identique dans le cas laminaire et dans le cas turbulent.

Afin de visualiser ce résultat, nous présentons sur la figure 7.3 les profils de f_f^{meso} et de f_f^{macro} , adimensionnalisés par U_b/K_p , lorsque l'interface est située en $y_M/H = -0.08$. Nous pouvons voir sur cette figure que l'intégrale de la différence entre les représentations mésoscopique et macroscopique approchée de la force de frottement semble nulle pour cette position particulière de l'interface. Nous rappelons que f_f^{macro} est une approximation de la force de frottement macroscopique. En effet, dans son expression, la vitesse mésoscopique remplace la vitesse macroscopique, qui est encore inconnue à ce stade de l'étude.

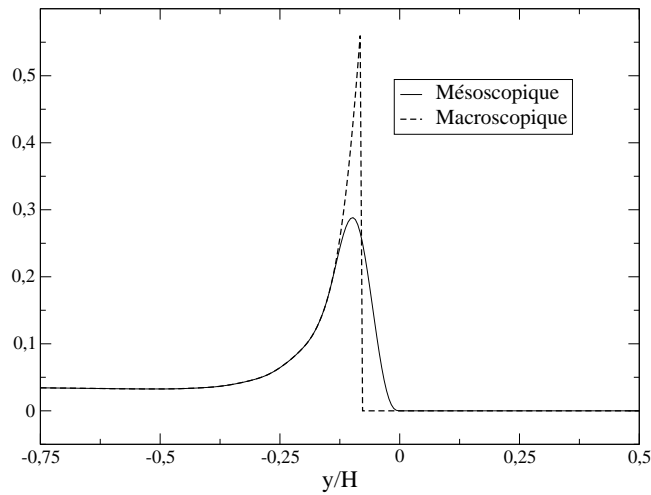


FIG. 7.3 – Force de frottement adimensionnalisée par U_b/K_p aux échelles de description mésoscopique et macroscopique.

Nous nous intéressons maintenant à la valeur de l'autre grandeur en excès qui intervient dans la condition de saut sur le gradient de vitesse, la force de pression surfacique en excès. La position du centre de gravité de la porosité est $y_\phi/H = -0,075$. Ainsi, pour $y_M/H = -0,08$, la force de pression surfacique en excès associée n'est pas nulle. Elle reste néanmoins négligeable devant le gradient de vitesse. Ainsi, si l'interface de discontinuité est placée en $y_M/H = -0,08$ qui correspond au centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès, alors le saut du gradient de vitesse (7.35) peut être considéré comme négligeable.

7.4.3 Relations de fermeture pour les conditions de saut sur les grandeurs turbulentes

En ce qui concerne les grandeurs en excès qui apparaissent dans les membres de droite des conditions de saut sur les grandeurs turbulentes (cf. Eqs. (7.37) et (7.38)), la méthode des développements asymptotiques raccordés pourrait nous permettre de proposer des relations de fermeture pour ces différents termes. Cependant, pour simplifier l'étude, nous faisons l'hypothèse que la somme des grandeurs turbulentes qui apparaissent dans les membres de droite des relations (7.37) et (7.38) est nulle ou négligeable lorsque l'interface est située au centre de gravité de la force de frottement surfacique en excès.

Ainsi, pour cette position particulière de l'interface, les flux diffusifs associés à \mathcal{K} et E sont continus.

Cette hypothèse est très forte, mais nous verrons dans la section 7.5 que les résultats obtenus avec cette hypothèse sont très satisfaisants. En faisant cette hypothèse, nous supposons implicitement que l'influence de la position de l'interface est moins importante pour les équations de transport des grandeurs turbulentes que pour l'équation de bilan de quantité de mouvement.

Ainsi, les relations de saut (7.35), (7.37) et (7.38) sont **fermés pour une position particulière de l'interface de discontinuité**. Pour fermer le modèle à l'échelle macroscopique, il reste à discuter de la continuité de \mathcal{K} , de E et de la composante tangentielle de la vitesse, U , au niveau de l'interface.

Dans le cas laminaire, la méthode des développements asymptotiques raccordés permet de montrer la continuité de la composante tangentielle de la vitesse à l'interface, alors que l'analyse générique des processus interfaciaux ne le permet pas, ou tout du moins, pas de façon directe. Puisque nous n'avons pas utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés pour effectuer cette étude, nous n'avons pas d'informations sur la continuité de \mathcal{K} , de E et de la composante tangentielle de la vitesse, U . Nous faisons néanmoins l'hypothèse que ces grandeurs sont continues à l'interface.

Ainsi, le modèle à l'échelle macroscopique est fermé pour une position particulière de l'interface de discontinuité et nous comparons dans la section suivante, les résultats obtenus avec ce modèle aux résultats des simulations de référence réalisées par Breugem et Boersma (2005).

7.5 Résultats

Le nombre de Reynolds de l'écoulement étant très faible ($Re = 5500$), le modèle $k - \epsilon$ standard n'est pas forcément le plus adapté pour étudier l'écoulement dans la partie libre du canal. Cependant, nous ne voulons pas complexifier le problème et nous regardons le résultat obtenu en connaissant les limites de ce modèle pour les faibles nombres de Reynolds. Nous utilisons une loi de paroi pour imposer la condition de non glissement à la paroi supérieure. Pour que la loi de paroi soit valide, le premier noeud du maillage doit être situé dans la zone logarithmique ($y^+ > 30$). Cependant, puisque le nombre de Reynolds est faible, cela implique que la première maille est très grande. Le maillage est donc raffiné loin de la paroi supérieure, afin d'avoir un maximum de précision. En tout, nous utilisons 80 mailles dans la direction y .

Pour les valeurs de la porosité ϕ_p , de la perméabilité K_p et du coefficient de Forchheimer F_p , nous prenons les valeurs utilisées par Breugem et Boersma (2005) dans la partie poreuse homogène pour leur DNS avec approche continue (cf. Eqs. (7.39) et (7.28)). Pour les valeurs de P_k et de P_ϵ dans la région poreuse homogène, nous utilisons les corrélations proposées par Nakayama et Kuwahara (1999). En effet, ces corrélations sont adaptées à l'étude d'un milieu poreux constitué de petits cubes. Elles sont rappelées dans le tableau 3.1, page 37. Le gradient de pression est choisi de telle sorte que $Re_b = 5500$ dans la partie libre du canal ($0 < y < H$).

Les caractéristiques des trois simulations (porosité, nombre de Darcy, nombres de Reynolds) sont présentées dans le tableau 7.2. Les différents nombre de Reynolds qui caractérisent l'étude sont :

- $Re_b = U_b H / \nu$, où U_b est la vitesse débitante dans la partie libre du canal.
- $Re_\tau^t = u_\tau^t H / \nu$, où u_τ^t est la vitesse de frottement à la paroi supérieure.
- $Re_\tau^p = u_\tau^p H / \nu$, où $u_\tau^p = ((\nu + \nu_t) \partial \langle u \rangle / \partial y)^{1/2}$ est la vitesse de frottement à la paroi perméable. La paroi perméable est située arbitrairement en $y = 0$ par Breugem et Boersma (2005).
- $Re_K = u_\tau^p \sqrt{K} / \nu$
- $Re_d = u_\tau^p d_p / \nu$

	ϕ	Da	Re_b	Re_τ^p	Re_τ^t	Re_K	Re_d	δ_w/H
DNS avec cubes	0.875	$3.4 \cdot 10^{-4}$	5500	669	394	12.4	33.4	0.742
DNS avec cont.	0.875	$3.4 \cdot 10^{-4}$	5500	726	409	13.5	36.3	0.759
Modèle $k - \epsilon$ macroscopique	0.875	$3.4 \cdot 10^{-4}$	5500	633	415.5	11.7	31.65	0.699
DNS avec parois solides			5640	360	360			

TAB. 7.2 – Nombres adimensionnels caractéristiques de l'étude pour les différentes simulations.

7.5.1 Profils de vitesse

Le profil de vitesse horizontale obtenu avec le modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux est comparé aux résultats des DNS de Breugem et Boersma (2005) sur la figure 7.4(a). La vitesse obtenue par Moser *et al.* (1999) pour un canal avec deux parois solides, pour un nombre de Reynolds $Re_\tau = 360$, est également représentée à titre de comparaison. Le résultat est très bon. En particulier, la dissymétrie du profil de vitesse est capturée. Cette dissymétrie est due à la plus grande vitesse de frottement à la paroi perméable qu'à la paroi supérieure. On retrouve cette dissymétrie de frottement lorsque l'on compare les nombres de Reynolds de frottement Re_τ^p et Re_τ^t (cf. tableau 7.2). Cependant, en comparant le modèle macroscopique à la DNS avec cubes, on voit que le frottement à la paroi supérieure est légèrement surestimé par le modèle macroscopique alors que le frottement à la paroi inférieure est légèrement sous-estimé. La frontière entre les deux couches limites correspond au maximum de la vitesse, ou encore à la position $y = \delta_w$ pour laquelle le tenseur des contraintes s'annule. Breugem et Boersma (2005) montrent que δ_w vérifie :

$$\frac{\delta_w}{H} = \frac{(u_\tau^p)^2}{(u_\tau^p)^2 + (u_\tau^t)^2} \quad (7.44)$$

La valeur de δ_w/H obtenue avec le modèle macroscopique est présentée dans la tableau 7.2. Le modèle macroscopique permet de retrouver le caractère excentrée de la position de cette frontière. Le profil de vitesse verticale obtenu avec le modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux est comparé aux résultats des simulations de référence de Breugem et Boersma (2005) sur la figure 7.4(b). Le modèle macroscopique étant mono-dimensionnel pour la configuration étudiée, la vitesse verticale est nulle.

7.5.2 Énergie cinétique turbulente et dissipation

Sur la figure 7.5 sont présentés les profils des quantités turbulentes $\langle k \rangle$ et $\langle \epsilon \rangle$. Le profil d'énergie cinétique turbulente $\langle k \rangle$ adimensionnalisé par $(u_\tau^t)^2$ obtenu avec le modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux est comparé aux résultats des DNS de Breugem et Boersma (2005) et de la DNS avec parois solides de Moser *et al.* (1999) sur la figure 7.5(a). Le niveau d'énergie cinétique turbulente, plus fort près de la paroi poreuse que de la paroi solide est retrouvée ainsi que la décroissance du profil de $\langle k \rangle$ dans la zone poreuse. La largeur du pic d'énergie cinétique turbulente, associée par Breugem et Boersma (2005) à la présence de larges structures tourbillonnaires est cependant moins bien capturée. Breugem et Boersma (2005) associent la présence de ces structures, observées dans les DNS, à une instabilité de type Kelvin-Helmholtz due au point d'inflexion du profil de vitesse. La position de ce pic n'est pas très bien retrouvée par le modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux. En effet, avec le modèle macroscopique, ce pic est localisé au niveau de l'interface de discontinuité en $y/H = -0.08$, alors que dans les DNS il est situé plus à l'intérieur du canal libre aux environs de $y/H = 0$.

Le profil de dissipation adimensionnalisé par $(u_\tau^t)^4/\nu$ est présenté sur la figure 7.5(b). Il présente un pic très important au niveau de l'interface de discontinuité. A titre de comparaison le profil de dissipation de la DNS avec parois solides de Moser *et al.* (1999) est également présenté. En revanche, les profils de dissipation des DNS réalisées par Breugem et Boersma (2005) ne sont pas connus.

7.5.3 Contraintes de cisaillement

Les figures 7.6(a) et 7.6(b) présentent les profils de contraintes de cisaillement visqueux et turbulent adimensionnalisés par $(u_\tau^t)^2$. Les profils de contraintes de cisaillement visqueux sont très similaires. Les contraintes de cisaillement turbulent étaient surestimées par la DNS avec approche continue de Breugem et Boersma (2005), alors qu'elles sont très légèrement sous-estimée par le modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux. Cependant ces différences sont faibles, comparées à la différence avec le profil de la DNS avec paroi solides. La forte augmentation des contraintes de cisaillement turbulent proche de la paroi perméable, comparée à une paroi solide est retrouvée par le modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique poreux.

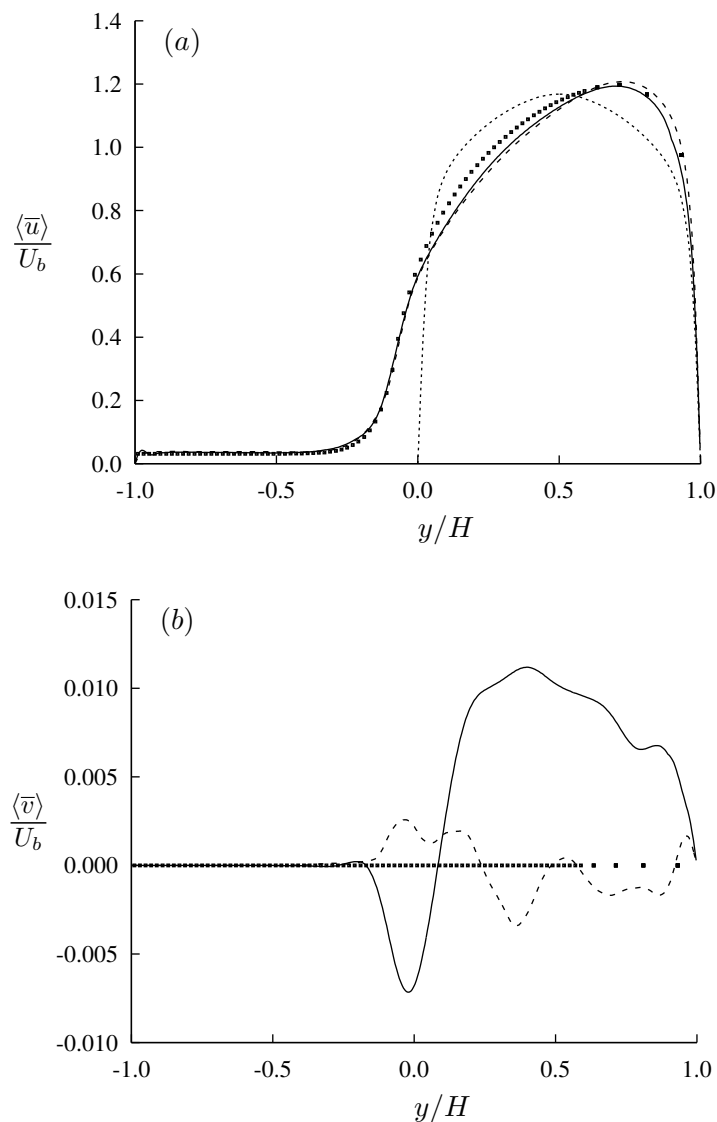


FIG. 7.4 – Profils de vitesse, adimensionnalisés par U_b . —, DNS avec cubes ; - - -, DNS avec continuum ; · · ·, DNS avec paroi solide ; symboles, modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux. (a) vitesse horizontale ; (b) vitesse verticale.

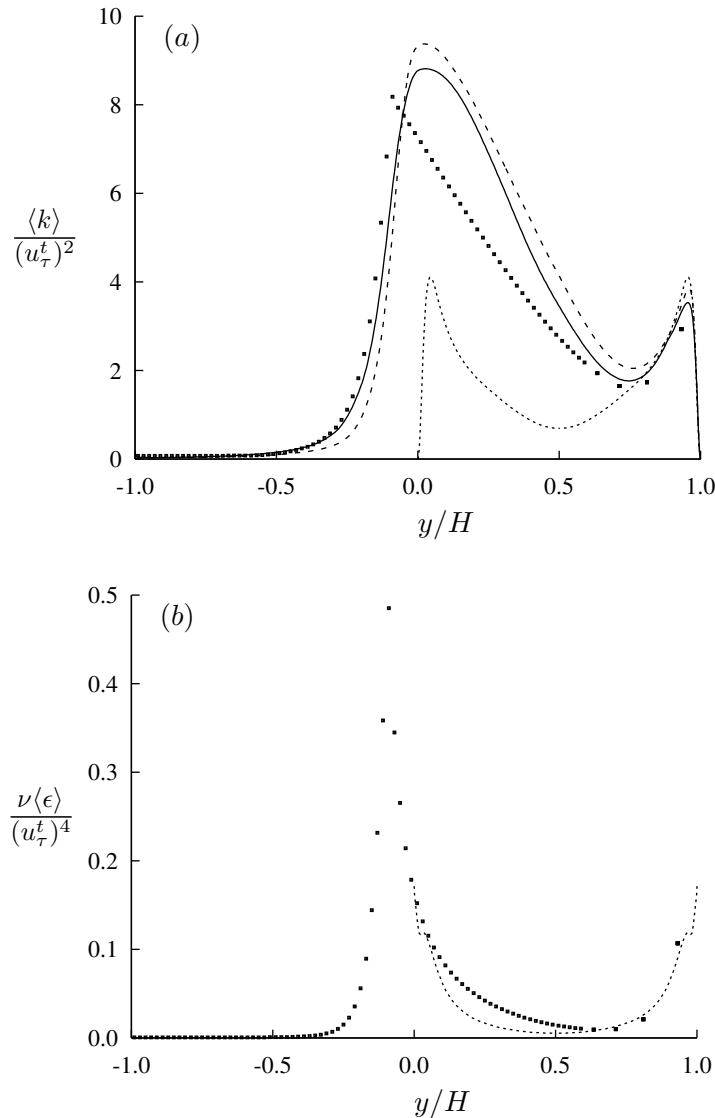


FIG. 7.5 – Profils des quantités turbulentes. —, DNS avec cubes; - - -, DNS avec continuum; · · ·, DNS avec paroi solide; symboles, modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux. (a) énergie cinétique turbulente adimensionnée par $(u_\tau^t)^2$, (b) taux de dissipation adimensionné par $(u_\tau^t)^4/\nu$.

7.5.4 Viscosité turbulente

Les DNS réalisées par Breugem et Boersma (2005) ne permettent d'avoir accès directement qu'aux profils de contraintes de cisaillement. En effet, les DNS n'utilisent pas l'hypothèse de viscosité turbulente, toutes les échelles de la turbulence étant résolues. Cependant, nous pouvons tester l'hypothèse de viscosité turbulente macroscopique (cf. Eq. 7.13) *a posteriori*. Pour cela, nous évaluons le ratio :

$$\frac{-\langle u'w' \rangle}{d\langle u \rangle / dy} \quad (7.45)$$

pour les DNS réalisées par Breugem et Boersma (2005) lorsque le numérateur et le dénominateur sont de même signe. Ce ratio correspond à la définition de la viscosité turbulente macroscopique ν_{t_ϕ} (cf. Eq. (7.12)). Ce ratio est comparé sur la figure 7.7, au profil de viscosité turbulente macroscopique obtenu

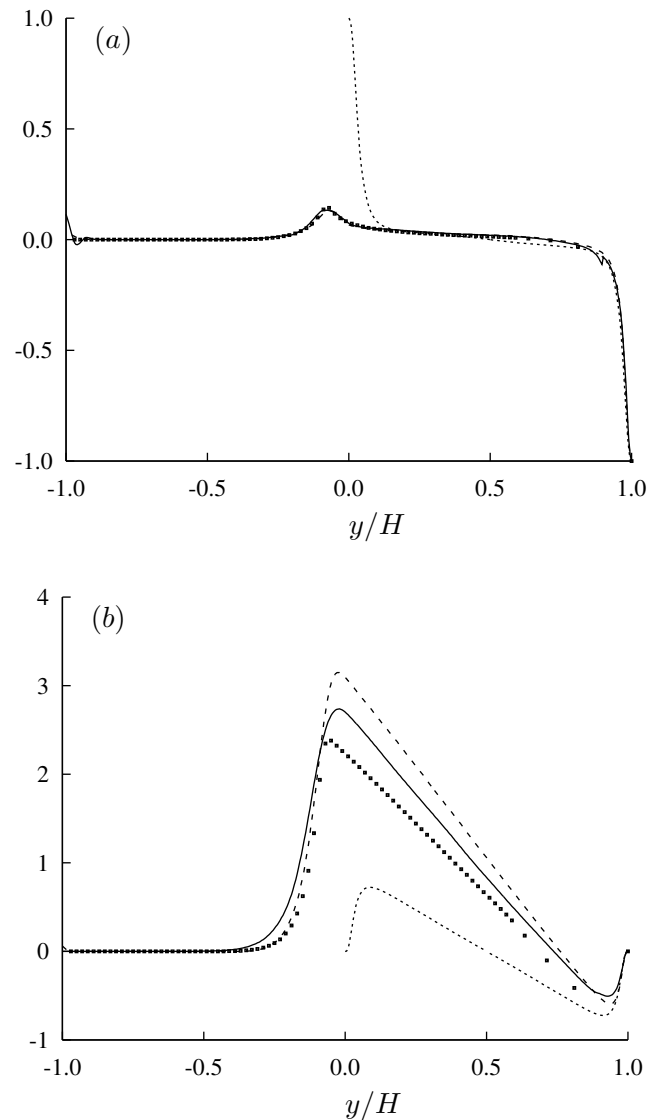


FIG. 7.6 – Profils de contraintes de cisaillement adimensionnalisés par $(u_\tau^t)^2$. —, DNS avec cubes ; - - -, DNS avec continuum ; · · ·, DNS avec paroi solide ; symboles, modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux. (a) contrainte de cisaillement visqueux ; (b) contrainte de cisaillement turbulent.

avec le modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux, *i.e.* lorsque l'hypothèse de viscosité turbulente macroscopique est utilisée. L'ordre de grandeur de la viscosité turbulente macroscopique est très bien retrouvé par le modèle macroscopique, à la fois dans la région libre, dans la région interfaciale et dans la région poreuse. Elle se situe d'ailleurs en moyenne entre les profils de viscosité turbulente macroscopique obtenus pour les deux DNS de [Breugem et Boersma \(2005\)](#). Nous soulignons que lorsque le numérateur et le dénominateur de la relation (7.45) ne s'annulent pas exactement pour la même coordonnée, le ratio calculé pour tester l'hypothèse de viscosité turbulente macroscopique tend vers l'infini. C'est ce que l'on observe pour les deux DNS aux environs de $y/H = 0.7$.

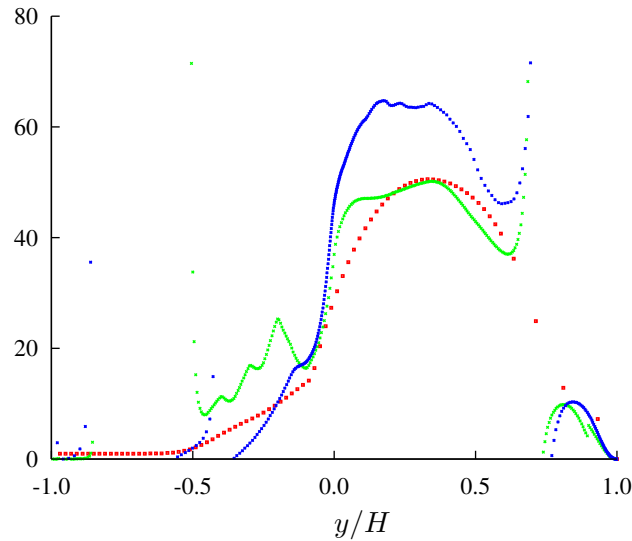


FIG. 7.7 – Hypothèse et profil de viscosité turbulente. symboles verts, DNS avec cubes ; symboles bleus, DNS avec continuum ; symboles rouges, modèle $k - \epsilon$ macroscopique poreux.

7.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les conditions de saut à imposer à l'interface libre/poreux pour l'écoulement de Poiseuille turbulent.

Dans un premier temps, nous avons dérivé un modèle de turbulence $k - \epsilon$ à l'échelle de description mésoscopique en utilisant la méthode de prise de moyenne volumique. Ce modèle est valable dans l'ensemble du domaine. Ce modèle dégénère bien vers le modèle $k - \epsilon$ standard dans la région libre homogène et vers le modèle $k - \epsilon$ macroscopique étudié dans le chapitre 3 dans la région homogène.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié les conditions de saut à imposer à l'interface libre/poreux pour l'écoulement de Poiseuille turbulent à l'échelle de description macroscopique de l'interface, en partant du modèle mésoscopique et en utilisant l'analyse des processus interfaciaux. Les conditions de saut obtenues ne sont pas fermées puisqu'elles s'expriment à travers des grandeurs en excès qui font intervenir des grandeurs mésoscopiques inconnues. Nous avons alors étudié la force de frottement surfacique en excès et nous avons montré que le centre de gravité de cette force de frottement surfacique en excès est identique pour des écoulements laminaires et turbulents, pour la configuration de référence étudiée dans ce chapitre. Nous soulignons d'ailleurs que cette position ne correspond pas à la position de l'interface nominale. Ainsi, nous pouvons montrer que le saut du tenseur des contraintes est négligeable pour une position particulière de l'interface. Nous avons alors fait l'hypothèse que pour cette position particulière de l'interface de discontinuité, la somme des grandeurs en excès qui apparaît dans les conditions de saut sur le gradient de k et le gradient de ϵ , est négligeable. Le modèle est alors fermé à l'échelle de description macroscopique de l'interface, pour une position particulière de l'interface.

Ce modèle $k - \epsilon$ macroscopique a alors été comparé aux simulations de référence réalisées par [Breugem et Boersma \(2005\)](#). Il donne de très bons résultats. En particulier, les différentes grandeurs (vitesse, énergie cinétique turbulente, contraintes de cisaillement et viscosité turbulente) sont bien capturées et ce pour un coup très faible (80 mailles), comparé au nombre de degrés de liberté nécessaire pour réaliser les DNS (10^8 et 10^7 mailles).

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont moins généraux que ceux obtenus dans les chapitres 4, 5 et 6. En particulier, nous n'avons pas utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés

pour fermer les grandeurs en excès qui interviennent dans les relations de saut. Les relations de fermeture que nous avons obtenues ne sont ainsi valables que pour une position particulière de l'interface. Ces relations sont néanmoins suffisantes, puisque le modèle ainsi obtenu se compare très bien aux simulations de référence de [Breugem et Boersma \(2005\)](#).

De plus, pour l'étude qui nous intéresse, *i.e.* l'écoulement au sein d'un cœur de réacteur, l'écoulement moyen est principalement perpendiculaire à l'interface entre le milieu libre et le milieu poreux (voir la section 6.6). Ainsi, pour pouvoir réaliser des simulations dans l'ensemble du cœur de réacteur en utilisant une approche de type milieu poreux, l'étude des conditions de saut lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'interface est important. Nous considérons donc que l'étude des conditions de saut dans le cas où l'écoulement est parallèle à l'interface est suffisante pour les applications qui nous intéressent. L'étude des conditions de saut dans le cas où l'écoulement est perpendiculaire à l'interface sera menée dans le chapitre suivant.

Néanmoins, nous voyons plusieurs voies pour approfondir le travail réalisé dans ce chapitre. Tout d'abord, une étude des conditions de saut avec la méthode des développements asymptotiques raccordés devrait permettre de vérifier l'hypothèse de continuité utilisée pour U , \mathcal{K} et E à l'interface. Elle devrait également permettre de proposer des expressions linéarisées et fermées des différentes grandeurs en excès. Ainsi, la dépendance des conditions de saut en fonction de la position de l'interface de discontinuité pourrait être explicitée. De plus, il faudrait étudier la position des centres de gravité des différentes grandeurs en excès qui interviennent dans les relations de saut sur le gradient de \mathcal{K} et de E (cf. Eqs. (7.37) et (7.38)) pour déterminer si l'hypothèse que nous avons utilisée est réellement valide. Cette étude pourrait également montrer si il est licite d'utiliser le même paramètre de saut pour les relations de saut sur le gradient de vitesse et le gradient de \mathcal{K} comme le suggèrent [De Lemos \(2005\)](#) et [De Lemos et Silva \(2006\)](#). Pour cette étude, nous avons finalement utilisé le même paramètre : $\beta = 0$, étant donnée la position particulière de l'interface que nous avons choisie.

Chapitre 8

Écoulement turbulent perpendiculaire à l'interface libre/poreux

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les conditions de saut à imposer à l'interface libre poreux pour raccorder le modèle $k - \epsilon$ standard de la région libre homogène au modèle $k - \epsilon$ macroscopique de la région poreuse homogène lorsque l'écoulement est parallèle à l'interface. L'écoulement moyen au sein d'un cœur de réacteur étant principalement perpendiculaire au niveau des interfaces plénum inférieur/région combustible et région combustible/plénum supérieur, le premier objectif de ce chapitre est d'étudier les conditions de saut lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'interface.

Dans un deuxième temps, nous étudions un écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur de réacteur. Pour cela nous combinons les résultats obtenus sur la modélisation de la turbulence dans la région poreuse homogène (cf. chapitre 3) et sur les conditions de saut pour des écoulements turbulents parallèles et perpendiculaires à l'interface (cf. chapitres 7 et sections 1 à 5 du chapitre 8).

8.1 Introduction

L'étude des transferts à une interface libre/poreux pour des écoulements turbulents a essentiellement été effectuée sur des configurations où l'écoulement est parallèle à l'interface. Mis à part [Lee et Howell \(1987\)](#) et [De Lemos et Pedras \(2000\)](#) qui testent leurs modèles macroscopiques sur des configurations où l'écoulement est à la fois perpendiculaire et transverse à l'interface libre/poreux (voir figure 8.1), nous n'avons pas trouvé d'études sur les transferts à l'interface libre/poreux pour des écoulements perpendiculaires à l'interface.

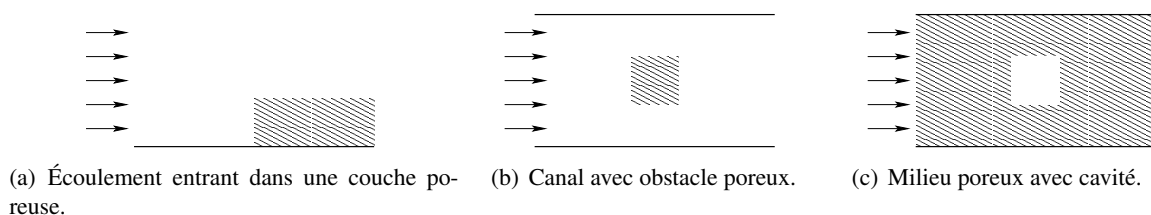


FIG. 8.1 – Configurations d'écoulement étudiées par (a) [Lee et Howell \(1987\)](#), (b) et (c) [De Lemos et Pedras \(2000\)](#).

Dans le chapitre 7, nous avons utilisé la méthode de prise de moyenne volumique pour dériver un modèle de turbulence $k - \epsilon$ à l'échelle de description mésoscopique de l'interface. Puis, nous avons étudié les conditions de saut à appliquer à l'échelle de description macroscopique, lorsque l'écoulement moyen est parallèle à l'interface libre/poreux. Dans ce chapitre, l'objectif est d'étudier les conditions de

saut à appliquer à l'échelle de description macroscopique dans l'autre direction, *i.e.* lorsque l'écoulement moyen est perpendiculaire à l'interface. Ainsi, nous transposons la méthodologie suivie dans le chapitre précédent, à l'étude des conditions de saut lorsque l'écoulement moyen est perpendiculaire à l'interface libre/poreux. Dans la section 8.2, nous utilisons l'analyse générique des processus interfaciaux pour déterminer la forme des conditions de saut à appliquer à l'interface libre/poreux. Les conditions de saut obtenues ne sont pas fermées car les grandeurs en excès s'expriment en fonction de grandeurs mésoscopiques inconnues. Dans la section 8.3, nous nous focalisons sur la détermination de ces grandeurs en excès pour une géométrie particulière de la région poreuse, qui correspond à la géométrie du modèle simplifié de cœur de réacteur nucléaire. Nous déterminons la valeur du paramètre de saut associé à l'équation de bilan de quantité de mouvement. Puis nous nous intéressons aux paramètres de saut des conditions de saut sur les grandeurs turbulentes. Tout d'abord, nous montrons que l'on ne peut pas supposer, comme dans le chapitre 7, que les valeurs de ces paramètres de saut sont négligeables. De plus, nous montrons les limites du modèle macroscopique dans la région libre en aval de la sortie de la région poreuse. En effet, dans cette région de sortie, des sillages sont créés et le modèle macroscopique de la région libre n'est pas capable de capturer l'influence de ces sillages sur les grandeurs turbulentes. Pour surmonter cette difficulté, nous développons dans la section 8.4 un modèle macroscopique simple adapté à la région libre en aval de la sortie de la région poreuse. Les résultats obtenus pour l'étude de l'écoulement perpendiculaire à l'interface sont présentés dans la section 8.5. Le modèle utilisé à l'échelle macroscopique combine le modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique de la zone poreuse, le modèle macroscopique de la région libre adapté à la région de sillage et les conditions de saut sur les grandeurs turbulentes. Dans la section 8.6, nous faisons un bilan des conditions de saut obtenues pour les écoulements turbulents dans les chapitres 7 et 8. Nous étudions alors dans la section 8.7 un écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur de réacteur nucléaire.

8.2 Changement d'échelle méso/macro

Dans cette section, nous étudions le changement d'échelle entre les descriptions mésoscopique et macroscopique de l'interface lorsque l'écoulement moyen est perpendiculaire à l'interface (cf. figure 8.2). A l'échelle de description mésoscopique, le problème est gouverné dans l'ensemble du domaine par le système d'équations (7.26), déterminé dans le chapitre 7. A l'échelle de description macroscopique, le domaine est constitué de deux régions homogènes (libre et poreuse) séparées par une interface de discontinuité. L'objectif est de déterminer les conditions de saut à appliquer à l'interface aux différentes grandeurs physiques. Pour réaliser cette étude, nous utilisons l'analyse générique des processus interfaciaux.

8.2.1 Problème mono-dimensionnel

Une fois que les filtres statistique et volumique ont été appliqués, l'écoulement étudié est mono-dimensionnel à la fois aux échelles de description mésoscopique et macroscopique de l'interface (cf. figure 8.2). Les variables ne dépendent que de la coordonnée x . Nous supposons de plus que l'écoulement est stationnaire.

Équations gouvernant le problème à l'échelle de description mésoscopique

A l'échelle de description mésoscopique, le problème est gouverné par les équations du système (7.26). Le problème étudié étant mono-dimensionnel, ce système se simplifie. La composante selon y de la moyenne volumique de la vitesse est nulle : $\langle \bar{v} \rangle = 0$. D'après l'équation de bilan de masse (7.26a), la composante selon x de la moyenne volumique de la vitesse est constante, $\langle \bar{u} \rangle = cte$. Ainsi, la valeur de $\langle \bar{u} \rangle$ devient une donnée du problème. Puisque la moyenne volumique de la vitesse est constante, le terme de diffusion de l'équation de bilan de quantité de mouvement est nul et la résolution de l'équation de bilan de quantité de mouvement porte uniquement sur la pression. Le gradient de vitesse étant nul à

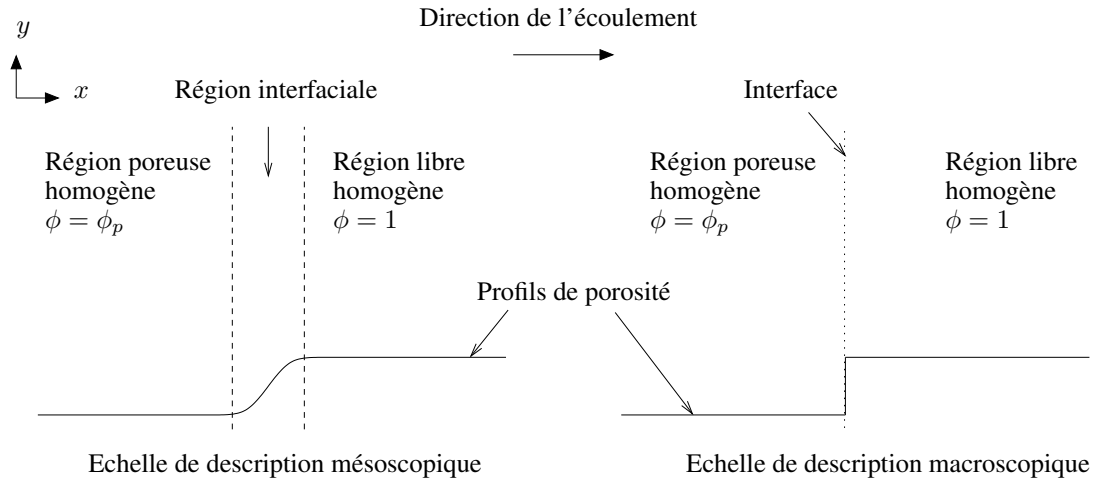


FIG. 8.2 – Écoulement sortant d'un milieu poreux aux échelles de description mésoscopique et macroscopique de l'interface.

l'échelle mésoscopique, le terme de production de turbulence mésoscopique, $2\nu_{t_\phi}\phi\langle\bar{\mathbf{S}}\rangle_f\langle\bar{\mathbf{S}}\rangle_f$, est nul. Le système à résoudre à l'échelle mésoscopique se ramène ainsi à :

$$0 = - \underbrace{\langle\bar{u}\rangle_f \frac{\partial \langle\bar{u}\rangle_f}{\partial x}}_{\text{conv}_u} - \underbrace{\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (\phi \tau_{xx}^t)}_{\text{tsm}_u} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle\bar{p}\rangle_f}{\partial x}}_{f_p} + \underbrace{\mathbf{f}_l \cdot \mathbf{e}_x}_{f_f} \quad (8.1a)$$

$$0 = - \underbrace{\phi \langle\bar{u}\rangle_f \frac{\partial \langle k \rangle_f}{\partial x}}_{\text{conv}_k} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\phi \tau_x^k)}_{\text{tsm}_k} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\bar{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial x} \right)}_{\text{diff}_k} + \underbrace{\phi P_k}_{\text{prod}_k} - \underbrace{\phi \langle \epsilon \rangle_f}_{\text{diss}_k} \quad (8.1b)$$

$$0 = - \underbrace{\phi \langle\bar{u}\rangle_f \frac{\partial \langle \epsilon \rangle_f}{\partial x}}_{\text{conv}_\epsilon} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\phi \tau_x^\epsilon)}_{\text{tsm}_\epsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\bar{\sigma}_\epsilon} \right) \frac{\partial \phi \langle \epsilon \rangle_f}{\partial x} \right)}_{\text{diff}_\epsilon} + \underbrace{\phi P_\epsilon}_{\text{prod}_\epsilon} - \underbrace{\phi c_2 \frac{\langle \epsilon \rangle_f^2}{\langle k \rangle_f}}_{\text{diss}_\epsilon} \quad (8.1c)$$

$$\nu_{t_\phi} = C_\mu \frac{\langle k \rangle_f^2}{\langle \epsilon \rangle_f} \quad (8.1d)$$

Nous soulignons que la viscosité turbulente macroscopique ν_{t_ϕ} n'intervient plus dans l'équation de bilan de quantité de mouvement pour ce problème mono-dimensionnel. Ainsi, la résolution de l'équation (8.1a) est découplée de la résolution des équations de transport des quantités turbulentes.

Pour fermer le système (8.1), il reste à spécifier les profils des sept grandeurs (ϕ , τ_{xx}^t , τ_x^k , τ_x^ϵ , \mathbf{f}_l , P_k et P_ϵ). Ces profils dépendent de la géométrie du milieu poreux étudié et à ce stade de l'étude, la géométrie du milieu poreux n'est pas spécifiée afin de mener une étude générale. Nous nous contentons de supposer que ces grandeurs varient continûment de leur valeur dans la région libre homogène à leur valeur dans la région poreuse homogène.

Équations gouvernant le problème à l'échelle de description macroscopique

La forme du système à résoudre à l'échelle macroscopique est strictement identique au système à résoudre à l'échelle mésoscopique (8.1). Comme dans le cas parallèle, la seule différence vient du fait que les termes ϕ , τ_{xx}^t , τ_x^k , τ_x^ϵ , \mathbf{f}_l , P_k et P_ϵ qui sont continus et variables en x à l'échelle de description mésoscopiques, sont discontinus au niveau de l'interface de discontinuité et ne dépendent plus directement de la variable x dans chaque région homogène (voir l'exemple de la porosité sur la figure 8.2).

Nous rappelons que dans la section 7.2.3 du chapitre 7 nous avons discuté des relations de fermeture à utiliser pour les termes τ_{xx}^t , τ_x^k , τ_x^ϵ , \mathbf{f}_l , P_k et P_ϵ dans les régions libre et poreuse homogènes. Nous avons entre autre montré que dans la région libre, le système (8.1) se ramène au modèle $k - \epsilon$ standard, sous l'hypothèse que la taille du filtre soit suffisamment petite devant les échelles de variations des grandeurs moyennées.

8.2.2 Condition de saut pour l'équation de bilan de quantité de mouvement

L'équation de bilan de quantité de mouvement (8.1a) exprime l'équilibre entre quatre termes. Pour chacun de ces termes, on définit sa quantité en excès associée. Par exemple, la quantité en excès associée à la force de frottement est donnée par :

$$(f_f)^{EX} = \int_{-\infty}^{x_M} (f_f - f_-) + \int_{x_M}^{+\infty} (f_f - f_+) \quad (8.2)$$

où x_M est la position de l'interface de discontinuité et f_- (respectivement f_+) correspond à la valeur de la force de frottement dans la région homogène située en $x < x_M$ (respectivement $x > x_M$).

En ce qui concerne la quantité en excès associée au terme convectif, il vient après intégration :

$$(\text{conv}_u)^{EX} = \frac{1}{2} U_f^2 |_{x_M^+} - \frac{1}{2} U_f^2 |_{x_M^-} \quad (8.3)$$

où U_f est la composante selon x de la moyenne intrinsèque de la vitesse à l'échelle de description macroscopique. Pour obtenir cette relation, nous avons également utilisé le fait que dans les régions homogènes les descriptions mésoscopique et macroscopique de la composante selon x de la moyenne intrinsèque de la vitesse sont égales. En effet, pour ce problème $\langle \bar{u} \rangle$ est constante et est une donnée du problème. La valeur de la moyenne intrinsèque de la vitesse ne dépend donc que de la valeur de la porosité, qui est la même aux échelles de description mésoscopique et macroscopique dans les régions homogènes.

Pour la quantité en excès associée au terme de pression, il vient :

$$(f_p)^{EX} = \frac{1}{\rho} P_f |_{x_M^+} - \frac{1}{\rho} P_f |_{x_M^-} \quad (8.4)$$

où P_f est la moyenne intrinsèque de la pression à l'échelle de description macroscopique.

Le terme en dérivée du tenseur de dispersion sous-filtre étant nul dans les régions homogènes, la quantité en excès associée au terme de dispersion s'écrit :

$$(\text{tsm}_u)^{EX} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (\phi \tau_{xx}^t) \right) \quad (8.5)$$

En additionnant les relations (8.2), (8.3), (8.4) et (8.5), on obtient la condition de saut *exacte* à appliquer à l'interface :

$$\left[\frac{1}{2} U_f^2 + \frac{P_f}{\rho} \right] = -(\text{tsm}_u)^{EX} + (f_f)^{EX} \quad (8.6)$$

On reconnaît dans le membre de gauche de l'équation (8.6), l'expression de la charge $H = P_f + \rho U_f^2 / 2$ (Viollet *et al.*, 1998). Ainsi, la relation (8.6) donne l'expression de la perte de charge singulière au niveau de l'interface libre/poreux en fonction des variations de la force de frottement et du tenseur de dispersion sous-filtre dans la région de transition. Pour fermer cette relation de saut, il reste à exprimer les deux quantités en excès du membre de droite de l'équation (8.6) en fonction uniquement de grandeurs macroscopiques. Ce problème sera abordé dans la section 8.3 pour une géométrie particulière du milieu poreux.

8.2.3 Conditions de saut pour les équations de transport des quantités turbulentes

Comme dans la section précédente, les conditions de saut associées aux équations de transport des quantités turbulentes sont obtenues en intégrant sur la zone de transition interfaciale la différence entre les équations gouvernant le problème à l'échelle mésoscopique (Eqs. (8.1b) et (8.1c)) et les équations gouvernant le problème à l'échelle macroscopique. Pour l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, la quantité en excès associée au terme de convection s'écrit :

$$(\text{conv}_k)^{EX} = \Phi U_f \mathcal{K}_f \Big|_{x_M^+} - \Phi U_f \mathcal{K}_f \Big|_{x_M^-} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\phi \langle \bar{u} \rangle_f \langle k \rangle_f - \Phi U_f \mathcal{K}_f \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\phi \langle \bar{u} \rangle_f \langle k \rangle_f - \Phi U_f \mathcal{K}_f \right) \quad (8.7)$$

où \mathcal{K}_f est la moyenne intrinsèque de l'énergie cinétique turbulente à l'échelle de description macroscopique et Φ est la porosité à l'échelle de description macroscopique. Or, le modèle à l'échelle macroscopique est construit de façon à ce que les solutions aux échelles macroscopique et mésoscopique soient égales dans les régions homogènes. Ainsi, les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (8.7) sont nuls quand le modèle à l'échelle macroscopique est bien construit.

De même, la quantité en excès associée au terme de diffusion s'écrit :

$$(\text{diff}_k)^{EX} = \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \Phi \mathcal{K}_f}{\partial x} \Big|_{x_M^+} - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \Phi \mathcal{K}_f}{\partial x} \Big|_{x_M^-} \quad (8.8)$$

Le terme en dérivée du tenseur de dispersion sous-filtre étant nul dans les régions homogènes, la quantité en excès associé au terme de dispersion s'écrit :

$$(\text{tsm}_k)^{EX} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi \tau_x^k}{\partial x} \quad (8.9)$$

Les quantités en excès associées aux termes de production et de dissipation s'écrivent :

$$(\text{prod}_k)^{EX} = \int_{-\infty}^{x_M} (\phi P_k - \Phi \mathcal{P}_{k-}) + \int_{x_M}^{+\infty} (\phi P_k - \Phi \mathcal{P}_{k+}) \quad (8.10)$$

$$(\text{diss}_k)^{EX} = \int_{-\infty}^{x_M} (\phi \langle \epsilon \rangle_f - \Phi E_f) + \int_{x_M}^{+\infty} (\phi \langle \epsilon \rangle_f - \Phi E_f) \quad (8.11)$$

où \mathcal{P}_{k-} (respectivement \mathcal{P}_{k+}) correspond à la valeur du terme de production sous-filtre dans la région homogène située en $x < x_M$ (respectivement $x > x_M$) et E_f est la moyenne intrinsèque du taux de dissipation à l'échelle de description macroscopique.

En additionnant les relations (8.7), (8.8) (8.9), (8.10) et (8.11), on obtient la condition de saut *exacte* à appliquer à l'interface pour l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente :

$$\left[\Phi U_f \mathcal{K}_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \Phi \mathcal{K}_f}{\partial x} \right] = - (\text{tsm}_k)^{EX} + (\text{prod}_k)^{EX} - (\text{diss}_k)^{EX} \quad (8.12)$$

La structure de l'équation de transport du taux de dissipation étant similaire à celle de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, on en déduit que la condition de saut *exacte* à appliquer à l'interface pour l'équation de transport du taux de dissipation s'écrit :

$$\left[\Phi U_f E_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \frac{\partial \Phi E_f}{\partial x} \right] = - (\text{tsm}_\epsilon)^{EX} + (\text{prod}_\epsilon)^{EX} - (\text{diss}_\epsilon)^{EX} \quad (8.13)$$

Il reste à proposer des relations de fermeture pour exprimer les différentes grandeurs en excès qui apparaissent dans les membres de droite des équations (8.12) et (8.13) en fonction uniquement de grandeurs

macroscopiques.

L'analyse générique des processus interfaciaux nous a permis de déterminer les conditions de saut à appliquer à l'interface pour l'équation de bilan de quantité de mouvement (Eq. (8.6)) et pour les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente (Eq. (8.12)) et du taux de dissipation (Eq. (8.13)). Cependant, ces relations de saut ne sont pas fermées. En effet, elles s'expriment en fonction de grandeurs en excès qui font intervenir des grandeurs mésoscopiques inconnues.

8.3 Détermination des grandeurs en excès

Dans cette section nous étudions les grandeurs en excès des relations (8.6), (8.12) et (8.13) pour le milieu poreux qui correspond au modèle simplifié de cœur de réacteur nucléaire étudié dans ce mémoire. A la différence du chapitre 7, nous ne disposons pas de simulations de référence pour la géométrie d'étude qui nous intéresse. Nous devons donc réaliser des simulations de référence à l'échelle microscopique. Les simulations réalisées à l'échelle microscopique en utilisant le modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard sont considérées comme des simulations de référence.

8.3.1 Description de la configuration étudiée

Dans le chapitre 6, nous avons proposé un modèle simplifié de cœur de réacteur nucléaire constitué de deux régions libres et d'un réseau de canaux parallèles (voir la figure 8.3). Le motif élémentaire représentatif qui correspond à ce modèle simplifié de cœur est rappelé sur la figure 8.3. Pour définir les caractéristiques de la géométrie et de l'écoulement du cas test sur lequel nous allons réaliser nos simulations de référence, nous nous appuyons sur certaines des caractéristiques importantes des réacteurs à gaz.

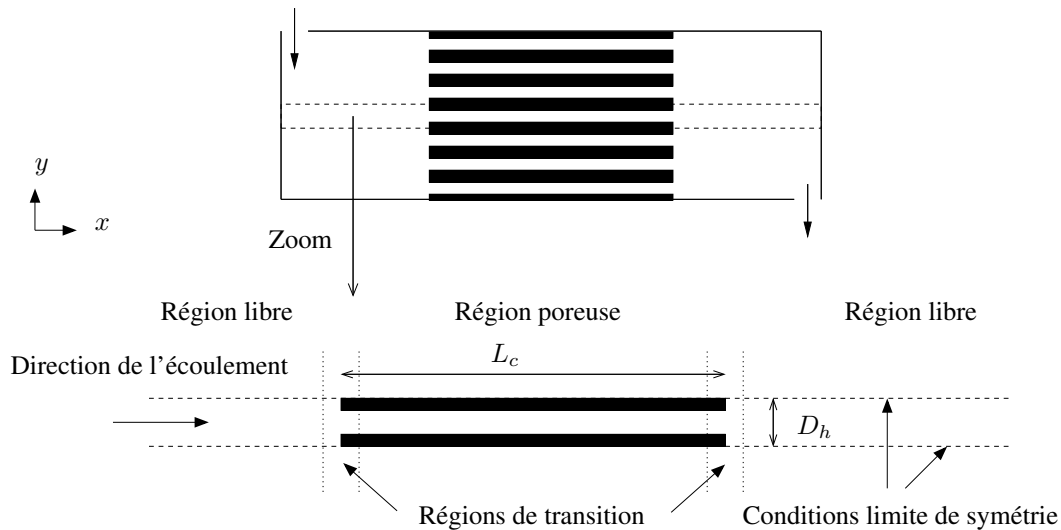


FIG. 8.3 – Motif élémentaire du modèle simplifié de cœur de réacteur.

Nous nous intéressons d'abord au rapport L_c/D_h où L_c est la longueur des canaux et D_h est le diamètre hydraulique (voir figure 8.3). Lorsque ce rapport est suffisamment grand, on peut considérer qu'un régime établi s'installe à l'intérieur du canal. La longueur d'établissement est la longueur entre l'entrée du canal et l'endroit du canal où l'écoulement est établi. La valeur de cette longueur d'établissement dépend de nombreux paramètres comme le nombre de Reynolds ou la forme de l'entrée. Néanmoins, pour donner un ordre de grandeur, on peut considérer que l'écoulement est établi environ $20 D_h$ après l'entrée

du canal (Comte-Bellot, 1965). Pour les HTGR (*High Temperature Gas Reactor* en anglais), le diamètre hydraulique, D_h , est de $0.016m$ et la longueur L_c de la partie cœur (milieu chargé) est de $8m$, ce qui correspond à un rapport L_c/D_h de 500 (Cioni, 2004). Pour les RNR-G (*Réacteur à Neutrons Rapides et à caloporteur Gaz*), pour le concept à plaques, $D_h = 0.011m$ et $L_c = 1.55m$, ce qui correspond à un rapport L_c/D_h d'environ 140 (Bosq et Conti, 2005). Ainsi, le rapport L_c/D_h est relativement grand pour ces concepts de cœur de réacteur et on peut considérer qu'un régime établi s'installe à l'intérieur des canaux.

Par définition, une fois que l'écoulement est établi, les profils des différentes grandeurs caractéristiques de l'écoulement telle que la vitesse moyenne \bar{u} , l'énergie cinétique turbulente k ou le taux de dissipation ϵ sont à l'équilibre. Or, les valeurs d'équilibre de la moyenne de l'énergie cinétique turbulente $\langle k \rangle_f$ et du taux de dissipation $\langle \epsilon \rangle_f$ ne dépendent que de la vitesse débitante et du nombre de Reynolds dans le canal (cf. chapitre 3). Puisque pour le problème mono-dimensionnel la vitesse débitante $\langle \bar{u} \rangle$ est une donnée du problème, les valeurs de $\langle k \rangle_f$ et de $\langle \epsilon \rangle_f$ sont connues lorsque l'on se situe suffisamment en aval de l'entrée et quelle que soit l'évolution des profils des grandeurs turbulentes dans la région d'établissement. Un état asymptotique est atteint.

Dans la région libre située à l'aval du cœur, la situation est *a priori* identique. Lorsque l'on se situe suffisamment en aval de la sortie un état asymptotique est également atteint. Pour le problème mono-dimensionnel, cet état asymptotique correspond à une énergie cinétique turbulente et un taux de dissipation nuls. Cependant, nous savons que l'écoulement ne sera pas mono-dimensionnel dans le plénum supérieur et que l'état asymptotique qui correspond à une turbulence nulle ne sera pas atteint. Nous pensons de plus que les valeurs de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation en sortie de la région poreuse vont influencer l'écoulement dans la région libre située en aval du cœur.

D'un point de vue théorique, nous devrions étudier à la fois la région d'entrée dans le milieu poreux et la région de sortie du milieu poreux. Cependant, par manque de temps, nous n'avons pas pu mené ces deux études. Puisque l'état asymptotique sera atteint dans la région poreuse homogène, alors qu'il ne le sera pas dans la région libre de sortie, nous avons fait le choix de privilégier l'étude de la région de sortie.

La géométrie du cas test que nous étudions est présenté sur la figure 8.4. La longueur de la partie chargée est de $10 D_h$ et la longueur de la partie libre est de $40 D_h$. Puisque la longueur d'établissement des profils dans le canal est d'environ $20 D_h$, la condition d'entrée peut influencer l'ensemble du résultat. Pour éviter cela, nous utilisons comme condition d'entrée des différentes grandeurs, leurs profils à l'équilibre. Ces profils d'équilibre sont obtenus en effectuant un calcul en amont du cas test en utilisant des conditions aux limites de périodicité dans la direction x . Ce calcul amont est en général qualifié de "boîte de recirculation".

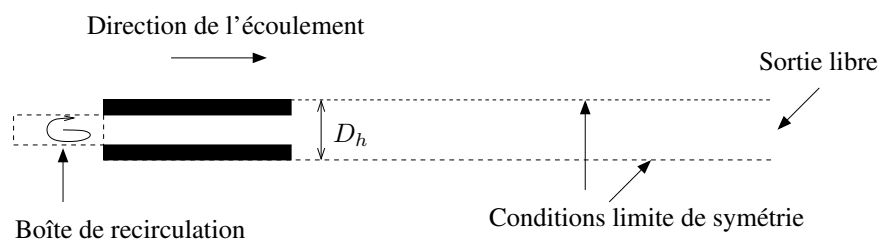


FIG. 8.4 – Géométrie des calculs de référence en sortie de la région combustible.

En ce qui concerne les caractéristiques de l'écoulement, le nombre de Reynolds à l'intérieur du cœur est modéré pour ce type de concept de réacteurs. Il est compris entre 10^4 et 10^5 . Afin d'étudier l'influence du nombre de Reynolds, nous réalisons des simulations de référence sur le cas test présenté précédemment pour quatre nombres de Reynolds différents : $Re_H = 5 \cdot 10^4$, 10^5 , $2.5 \cdot 10^5$ et $5 \cdot 10^5$. Cela correspond à un nombre de Reynolds Re_c , construit sur la vitesse au centre et la demie-hauteur de canal,

compris entre $1.875 \cdot 10^4$ et $1.875 \cdot 10^5$.

8.3.2 Relations de fermeture

Dans cette section, nous étudions la valeur des grandeurs en excès de la relation de saut associée à l'équation de bilan de quantité de mouvement (8.6) pour la géométrie présentée dans la section précédente. Nous devons proposer une relation de fermeture pour modéliser le membre de droite de cette équation.

Pour commencer, nous nous intéressons aux profils des deux termes tsm_u et f_f . Pour obtenir ces profils, nous utilisons les simulations de référence. Les différentes grandeurs obtenues à l'échelle microscopique sont filtrées afin d'en déduire les profils des différents termes de l'équation de bilan de quantité de mouvement à l'échelle mésoscopique (cf. Eq. (8.1a)). Le filtre utilisé est un filtre chapeau similaire à celui utilisé dans la section 5.2.3.2 du chapitre 5, de largeur D_h . Ainsi, la zone de variation de la porosité est comprise dans l'intervalle $9 < x/D_h < 11$. Le résultat obtenu pour $Re_H = 10^5$ est présenté sur la figure 8.5. Sur cette figure, nous pouvons voir que les différents termes du bilan de quantité de mouvement varient fortement sur une région comprise dans l'intervalle $9 < x/D_h < 16$, i.e. au-delà de la zone de transition basée sur la porosité. En particulier, le terme de dispersion sous-filtre tsm_u n'est pas négligeable dans cette région de variation. Nous présentons également le profil de la somme $-tsm_u + f_f$. Les valeurs asymptotiques de ce terme sont très proches. Lorsque l'on calcule la position du centre de gravité associé à cette somme, on trouve qu'il se situe en $x/D_h = 23$, loin hors de la zone de transition associée à la porosité. Comme nous l'avons souligné lors du bilan de l'étude laminaire, dans ce cas nous n'avons pas intérêt à localiser l'interface au niveau du centre de gravité. Il vaut mieux placer l'interface dans la région de transition, même si le paramètre de saut associé est alors non nul.

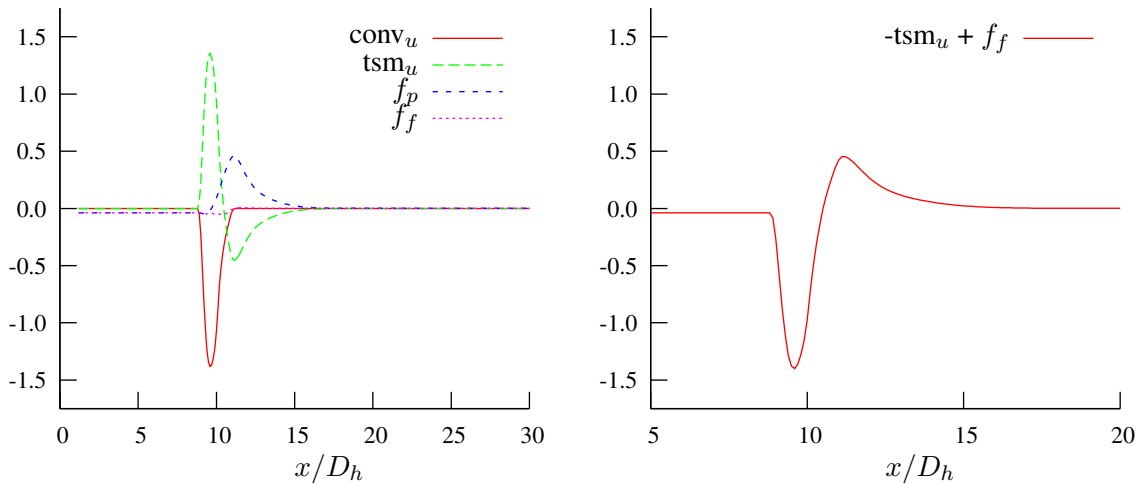


FIG. 8.5 – Bilan de quantité de mouvement adimensionnalisé par $\langle \bar{u} \rangle^2 / D_h$.

Dans la littérature, la relation de fermeture que nous cherchons s'exprime sous la forme de corrélations de pertes de charge singulières (Idel'cik, 1969; Viollet et al., 1998, chap3) qui s'écrivent en général de la façon suivante :

$$\left[\frac{1}{2} \rho U_f^2 + P_f \right] = -\frac{1}{2} \rho C_s U^2 \quad (8.14)$$

où $U = \Phi U_f$ et C_s est le coefficient de perte de charge singulière. Ce dernier dépend du type de singularité et de sa géométrie exacte. Il est relativement indépendant du nombre de Reynolds pour des

écoulements suffisamment turbulents. Pour un divergent brusque, une bonne estimation du coefficient C_s est donnée par (Viollet *et al.*, 1998) :

$$C_s^{\text{th}} = \frac{(S_s - S_e)^2}{S_e^2} \quad (8.15)$$

où S_s est la section du conduit à l'aval du divergent et S_e la section du conduit à l'amont. Pour la géométrie que l'on étudie, il vient donc $C_s^{\text{th}} = 1$.

Nous proposons donc d'utiliser la relation de fermeture suivante pour modéliser le membre de droite de l'équation (8.6)

$$-(\text{tsm}_u)^{EX} + (f_f)^{EX} = -\frac{1}{2} C_s U^2 \quad (8.16)$$

Cette relation de fermeture aurait également pu être obtenue à l'aide d'une simple analyse dimensionnelle. Nous vérifions alors que la valeur du coefficient de perte de charge singulière obtenu à partir des valeurs de $(\text{tsm}_u)^{EX}$ et $(f_f)^{EX}$ est cohérente avec la valeur $C_s^{\text{th}} = 1$. Nous utilisons les relations (8.2) et (8.5) pour déterminer la valeur des grandeurs en excès lorsque l'interface de discontinuité est localisée au niveau de l'interface nominale, *i.e.* lorsque l'interface est située juste à la sortie du canal en $x/D_h = 10$. En injectant ce résultat dans l'équation (8.16), nous en déduisons la valeur du coefficient de perte de charge singulière C_s . Les valeurs du coefficient de perte charge singulière obtenues à partir des résultats des simulations filtrées sont présentées dans le tableau 8.1. Les valeurs obtenues dépendent peu du nombre de Reynolds et sont très proche de la valeur théorique, estimée à 1. Par la suite, nous utiliserons donc la relation de fermeture (8.16) pour modéliser le membre de droite de la relation de saut associée à l'équation de bilan de quantité de mouvement (8.6), avec $C_s = 1$.

Re_H	$5 \cdot 10^4$	10^5	$2.5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
C_s	0.965	0.964	0.974	0.981

TAB. 8.1 – Coefficient de perte de charge singulière en sortie du canal.

8.3.3 Premier Essai

Lors de l'étude de l'écoulement parallèle à l'interface dans le chapitre précédent, nous avons fait l'hypothèse que la somme des grandeurs en excès qui apparaît dans les relations de saut sur le gradient de \mathcal{K} et de E est négligeable. Les résultats obtenus avec cette hypothèse dans le chapitre précédent sont très bons. Par conséquent, nous commençons par faire cette même hypothèse dans le cas présent où l'écoulement est perpendiculaire à l'interface. La somme des grandeurs en excès qui apparaît dans les membres de droite des relations de saut (8.12) et (8.13) est supposée nulle. Les résultats obtenus en faisant cette hypothèse sont présentés sur la figure 8.6 pour le cas où $Re_H = 10^5$. Nous rappelons que la résolution de l'équation de bilan de quantité de mouvement est découplée de la résolution des équations de transport des quantités turbulentes.

En ce qui concerne le profil de pression, le modèle à l'échelle macroscopique permet de retrouver les variations de pression dans la partie poreuse ($x/D_h < 10$) ainsi que le bon saut de pression. Néanmoins, le modèle macroscopique n'est pas capable de restituer les variations du profil de pression pour x/D_h compris entre 11 et 16, *i.e.* juste en aval de la zone de transition poreuse.

En ce qui concerne les profils de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$, ils sont mal estimés par le modèle macroscopique. Les sauts de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ juste en aval de la sortie ne sont pas du tout capturés. De plus, les valeurs de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ sont sous-estimées par le modèle macroscopique sur une distance d'au moins $20 D_h$ après la sortie

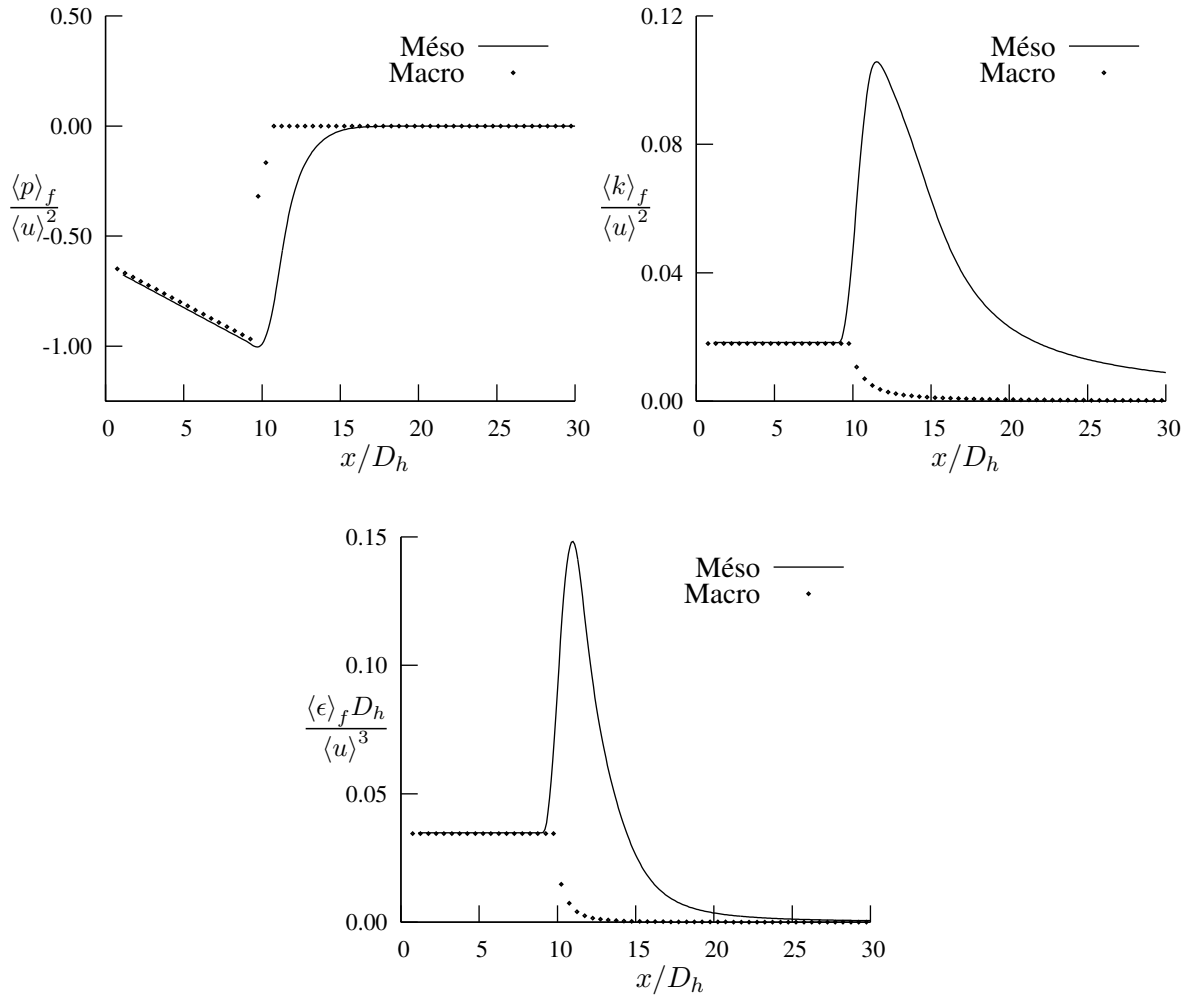


FIG. 8.6 – Comparaison des profils mésoscopique et macroscopique adimensionnalisés de $\langle p \rangle_f$, $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ pour $Re_H = 10^5$.

pour $\langle k \rangle_f$ et $10 D_h$ après la sortie pour $\langle \epsilon \rangle_f$.

Ainsi, si nous faisons l'hypothèse que la somme des grandeurs en excès qui apparaît dans les relations de saut (8.12) et (8.13) est nulle, seul le profil de pression est correctement prédit par le modèle à l'échelle macroscopique. Or, nous voulons capturer les profils de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ dans la région libre en aval de la sortie, car nous pensons que ces profils influencent l'écoulement dans toute la région libre en aval du cœur. Nous allons donc étudier la valeur des grandeurs en excès des relations de saut (8.12) et (8.13). Avant de réaliser cette étude, nous soulevons dans la section suivante une autre difficulté liée aux limites du modèle macroscopique dans la région libre.

8.3.4 Limites du modèle macroscopique dans la région libre

Nous avons vu dans le chapitre 7 (cf. section 7.2.3.1) que, dans la région libre homogène, le modèle de turbulence macroscopique est identique au modèle $k - \epsilon$ standard, sous l'hypothèse que la taille du filtre soit suffisamment petite devant les échelles de variations des grandeurs moyennées. Ainsi, pour le problème mono-dimensionnel étudié dans ce chapitre, le modèle à l'échelle macroscopique utilisé dans

la région libre s'écrit, lorsque l'on néglige les termes de diffusion :

$$0 = -\Phi U_f \frac{\partial \mathcal{K}_f}{\partial x} - \Phi E_f \quad (8.17a)$$

$$0 = -\Phi U_f \frac{\partial E_f}{\partial x} - \Phi c_2 \frac{E_f^2}{\mathcal{K}_f} \quad (8.17b)$$

Ce système peut être résolu de façon analytique (Bailly et Comte-Bellot, 2003). La solution du problème est en loi puissance, et s'écrit, pour des valeurs de \mathcal{K}_f et de E_f données en un point x_0 :

$$\mathcal{K}_f(x) = \left(\frac{A}{c_2 - 1} (x - x_0) + \mathcal{K}_f(x_0)^{1-c_2} \right)^{-1/c_2-1} \quad \text{avec} \quad A = \frac{E_f(x_0)}{U_f \mathcal{K}_f(x_0)^{c_2}} \quad (8.18a)$$

$$E_f(x) = E_f(x_0) \left(\frac{\mathcal{K}_f(x)}{\mathcal{K}_f(x_0)} \right)^{c_2} \quad (8.18b)$$

Sur la figure 8.7, nous présentons le profil de $\langle k \rangle_f$ obtenu à l'échelle mésoscopique pour $Re_H = 10^5$, ainsi que la solution analytique pour deux valeurs de x_0 : $x_0/D_h = 11$, qui correspond à la fin de la zone de variation de la porosité et $x_0/D_h = 16$, qui correspond à la fin de la zone de variation des différents termes du bilan de quantité de mouvement. Les valeurs de $\mathcal{K}_f(x_0)$ et $E_f(x_0)$ sont prises égales aux valeurs correspondantes de la solution à l'échelle mésoscopique : $\langle k \rangle_f(x_0)$ et $\langle \epsilon \rangle_f(x_0)$. La décroissance en loi puissance est extrêmement forte. Cette figure montre que, même si l'on était capable de capturer correctement les sauts de \mathcal{K}_f et E_f à l'interface, et ainsi d'avoir les bonnes conditions initiales pour $\mathcal{K}_f(x_0)$ et $E_f(x_0)$ à l'entrée de la région homogène libre, le modèle macroscopique de la région libre ne serait pas capable de prédire la bonne décroissance de \mathcal{K}_f avant la coordonnée $x_0/D_h = 16$ environ.

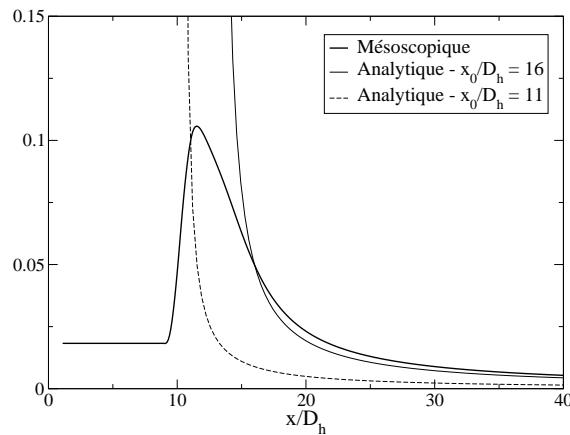


FIG. 8.7 – Profils d'énergie cinétique turbulente moyennée.

Cela est dû au fait qu'à la sortie de la région poreuse des sillages sont créés (cf. figure 8.8). Nous avons déjà remarqué ces sillages lors de l'étude du modèle simplifié de cœur pour des écoulements laminaires au chapitre 6 (voir section 6.6). Que l'écoulement soit laminaire ou turbulent, la présence de ces sillages implique qu'à la sortie de la région poreuse, l'hypothèse que la taille du filtre est suffisamment petite devant les échelles de variations des grandeurs moyennées n'est pas vérifiée. Dans cette région de sortie, ces deux échelles sont du même ordre de grandeur. En revanche, les conséquences du non-respect de cette hypothèse ne sont pas les mêmes dans le cas laminaire et dans le cas turbulent. Tout d'abord, dans le cas laminaire, la zone de présence de ces sillages est relativement faible (1 ou 2 D_h). De plus, même si l'hypothèse n'est pas vérifiée, l'erreur n'influence pas le reste de l'écoulement. Dans le cas turbulent, la zone de présence de ces sillages est plus grande. De plus, l'effet de ces sillages n'est pas

négligeable. En effet, ces sillages sont une source de production de turbulence non négligeable. Nous ne pouvons donc pas négliger les termes de production sous-filtre P_k et P_ϵ dans la région de sillage. Par conséquent, le modèle de turbulence macroscopique de la région libre (8.17) n'est pas valable dans la région libre juste en aval de la sortie de la zone poreuse.

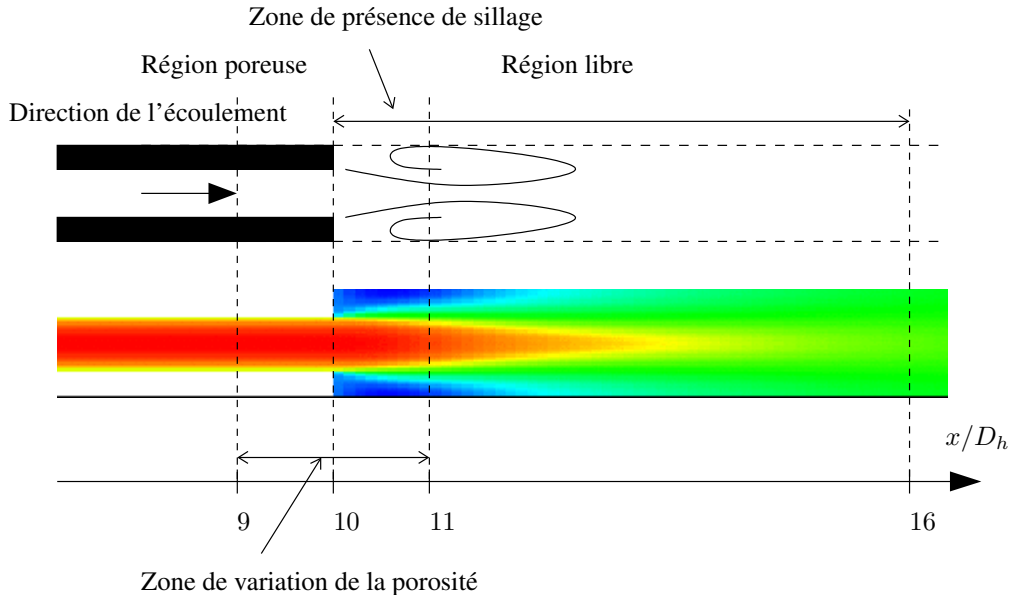


FIG. 8.8 – Sillages dans la région en aval de la sortie de la zone poreuse - Schémas et composante longitudinale de la vitesse obtenue pour $Re_H = 10^5$.

A ce stade de l'étude, nous sommes amenés à nous poser la question de la définition de la zone de transition entre les deux régions homogènes.

Dans le cas laminaire, la zone de transition est définie implicitement comme la région où les propriétés du milieu (porosité et perméabilité) varient. Même si les régions de variation de la porosité et de la perméabilité ne sont pas identiques, elles restent, dans le cas laminaire, du même ordre de grandeur (voir la figure 5.3 du chapitre 5 pour le cas parallèle et la figure 6.8 du chapitre 6 pour le cas perpendiculaire).

Dans le cas turbulent, la région de variation des termes tels que P_k , P_ϵ , τ_x^k ou τ_x^ϵ est nettement plus grande que la région de variation de la porosité (cf. figure 8.9). Si on prend en compte les variations de ces termes dans toute leurs régions de variation à travers des conditions de saut, cela implique que la région sur laquelle le résultat du modèle macroscopique est différent du résultat du modèle mésoscopique, sera importante. Or, la région de sortie nous intéresse fortement et nous ne voulons pas que le résultat du modèle macroscopique soit différent du modèle mésoscopique sur une trop grande région en sortie du milieu poreux. C'est pourquoi, nous décidons de considérer que la région de transition correspond *uniquement* à la région de variation de la porosité. Ainsi, les conditions de saut ne prennent en compte les variations des différents termes sources que pour la région de variation de la porosité. A l'extérieur de cette région, les variations des différents termes sources doivent être prises en compte par les modèles macroscopiques des régions homogènes. Cette approche nous permet de dissocier la question de la modélisation de l'interface, de la question de la modélisation de la région de sillage. Puisque le modèle de la région homogène libre n'est pas capable de capturer l'effet des sillages, nous allons chercher à améliorer ce modèle.

Le fait de considérer que la région de transition correspond *uniquement* à la région de variation de la porosité correspond à un *choix* de modélisation. D'autres approches auraient pu être envisagées. Néanmoins, ce choix est simple et permet de rester cohérent avec ce qui a été fait précédemment. De plus, étant

donné ce choix, nous savons proposer une méthode pour évaluer les conditions de saut correspondantes à imposer à l'interface libre/poreux.

8.4 Modèle de turbulence macroscopique pour la zone de sillage de la région libre

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le modèle de turbulence "standard" à l'échelle macroscopique n'est pas capable de prédire la bonne décroissance des quantités turbulentes dans la zone de sillage. Nous cherchons dans cette section à développer un modèle macroscopique simple qui soit capable de capturer correctement les évolutions de \mathcal{K}_f et E_f dans la région de sillage, *i.e.* pour x/D_h appartenant à l'intervalle [11 – 16]. Pour développer ce modèle macroscopique, nous devons proposer des relations de fermeture pour les termes P_k , P_ϵ , τ_x^k et τ_x^ϵ des équations (8.1b) et (8.1c). En effet, ces termes, qui sont négligeables une fois que l'écoulement est établi dans la région libre, ne peuvent pas être négligés dans la région de sillage. Nous rappelons que ce sont les seuls termes inconnus des équations (8.1b) et (8.1c).

Tout d'abord, nous nous intéressons à l'importance relative des différents termes des équations de transport des quantités turbulentes (Eqs. (8.1b) et (8.1c)) dans la région de sillage. En filtrant les simulations réalisées à l'échelle microscopique, nous pouvons déduire les profils des différents termes de ces équations. Le résultat obtenu pour $Re_H = 10^5$ est présenté sur la figure 8.9. Les résultats obtenus pour les autres nombres de Reynolds sont similaires. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, les termes de dispersion sous-filtre tsm_k et tsm_ϵ , sont petits devant les termes de production sous-filtre P_k et P_ϵ ($prod_k$ et $prod_\epsilon$ sur les figures). Nous allons donc concentrer notre attention sur la modélisation des termes de production sous-filtre P_k et P_ϵ dans la région de sillage et *nous choisissons de négliger les termes de dispersion sous-filtre tsm_k et tsm_ϵ*

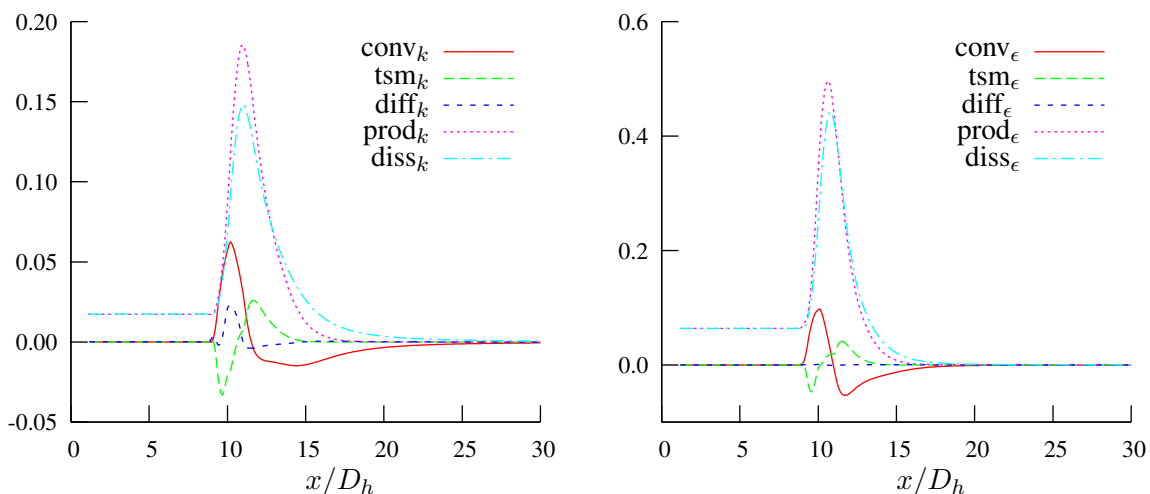


FIG. 8.9 – Importance relative des différents termes des équations de transport des quantités turbulentes (8.1b) et (8.1c) pour $Re_H = 10^5$. Bilan d'énergie cinétique turbulente adimensionnalisé par $\langle \bar{u} \rangle^3 / D_h$ (à gauche) et bilan du taux de dissipation adimensionnalisé par $\langle \bar{u} \rangle^4 / D_h^2$ (à droite).

8.4.1 Modélisation du terme sous-filtre P_k

La région en aval de la sortie du canal est le siège de recirculations de vitesses qui alimentent le terme de production d'énergie cinétique turbulente à l'échelle microscopique :

$$P = 2 \nu_t \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \bar{\mathbf{u}} \quad (8.19)$$

La moyenne volumique de la vitesse $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$ étant constante, le terme de production d'énergie cinétique turbulente due aux gradients de vitesse à l'échelle mésoscopique est nul. Ainsi, la moyenne volumique du terme de production d'énergie cinétique turbulente est égale au terme de production sous-filtre :

$$\langle P \rangle = P_k \quad (8.20)$$

En utilisant la décomposition $\bar{\mathbf{u}} = \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle + \delta \bar{\mathbf{u}}$ et l'équation (8.19), il vient :

$$P_k = 2 \langle \nu_t \nabla \delta \bar{\mathbf{u}} : \nabla \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad (8.21)$$

La relation (8.21) montre que le terme de production sous-filtre, P_k , est uniquement alimenté par les recirculations de vitesse. Lorsque le profil de vitesse redevient plat loin de la sortie de la région poreuse, *i.e.* $\bar{\mathbf{u}} = \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$, le terme de production sous-filtre est nul.

En première approximation, nous proposons de modéliser le terme de production dû aux recirculations, de la façon suivante :

$$P_k \sim 2\nu_{t_\phi} \frac{\langle \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle}{l^2} \quad (8.22)$$

où l est une échelle de longueur à déterminer et ν_{t_ϕ} est la viscosité turbulente macroscopique définie par l'équation (8.1d). Nous notons e_w l'énergie associée aux fluctuations de vitesse $\delta \bar{\mathbf{u}}$ définie par :

$$e_w = \langle \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \rangle \quad (8.23)$$

Nous associons alors à cette énergie e_w , une équation de transport

$$U_f \frac{de_w}{dx} = P_{e_w} - D_{e_w} \quad (8.24)$$

P_{e_w} est le terme de production de l'énergie associée aux fluctuations de vitesse et D_{e_w} est le terme de destruction correspondant. Nous faisons l'hypothèse que, en première approximation, le terme de production P_{e_w} est négligeable et que le terme de destruction D_{e_w} correspond exactement au terme source de production l'équation de $\langle k \rangle_f$, *i.e.* P_k . Ainsi, nous supposons que toute l'énergie associée aux fluctuations de vitesse est transférée à la moyenne de l'énergie cinétique turbulente. En faisant ces hypothèses, il vient :

$$U_f \frac{de_w}{dx} = -2\nu_{t_\phi} \frac{e_w}{l^2} \quad (8.25)$$

En supposant que la viscosité turbulente macroscopique ν_{t_ϕ} ne varie pas, nous sommes capables d'intégrer cette équation :

$$e_w = e_w(x_0) \exp \left[\left(-\frac{2\nu_{t_\phi}}{U_f l^2} \right) (x - x_0) \right] \quad (8.26)$$

Si ce modèle simple est valide, alors, d'après les équations (8.22) et (8.20), la quantité $\langle P \rangle / \nu_{t_\phi}$ obtenue à l'échelle mésoscopique doit varier comme une exponentielle décroissante dans la zone de sillage :

$$\frac{\langle P \rangle}{\nu_{t_\phi}} \sim \exp \left(-\theta \frac{x}{D_h} \right) \quad (8.27)$$

où θ est une constante à déterminer. Comme on peut le voir sur la figure 8.10, le rapport $\langle P \rangle / \nu_{t_\phi}$ varie effectivement comme une exponentielle décroissante dans la zone de sillage dès la sortie de la zone de transition en $x/D_h = 11$ et ce pour les différents nombres de Reynolds de l'étude. De plus, la valeur de θ est proche de 1 et ne dépend que très faiblement du nombre de Reynolds sur la plage de Reynolds qui nous intéresse (cf. tableau 8.2). Nous proposons donc de modéliser le terme de production sous-filtre P_k dans la région de sillage, par le modèle algébrique suivant :

$$P_k = P_w(x) = \frac{P_w(x_0)}{\nu_{t_\phi}(x_0)} \nu_{t_\phi} \exp\left(-\theta \frac{(x - x_0)}{D_h}\right), \quad \text{avec } \theta = 1 \quad (8.28)$$

où x_0 est la position à partir de laquelle le modèle de sillage est utilisé et ν_{t_ϕ} est la viscosité turbulente macroscopique définie par l'équation (8.1d).

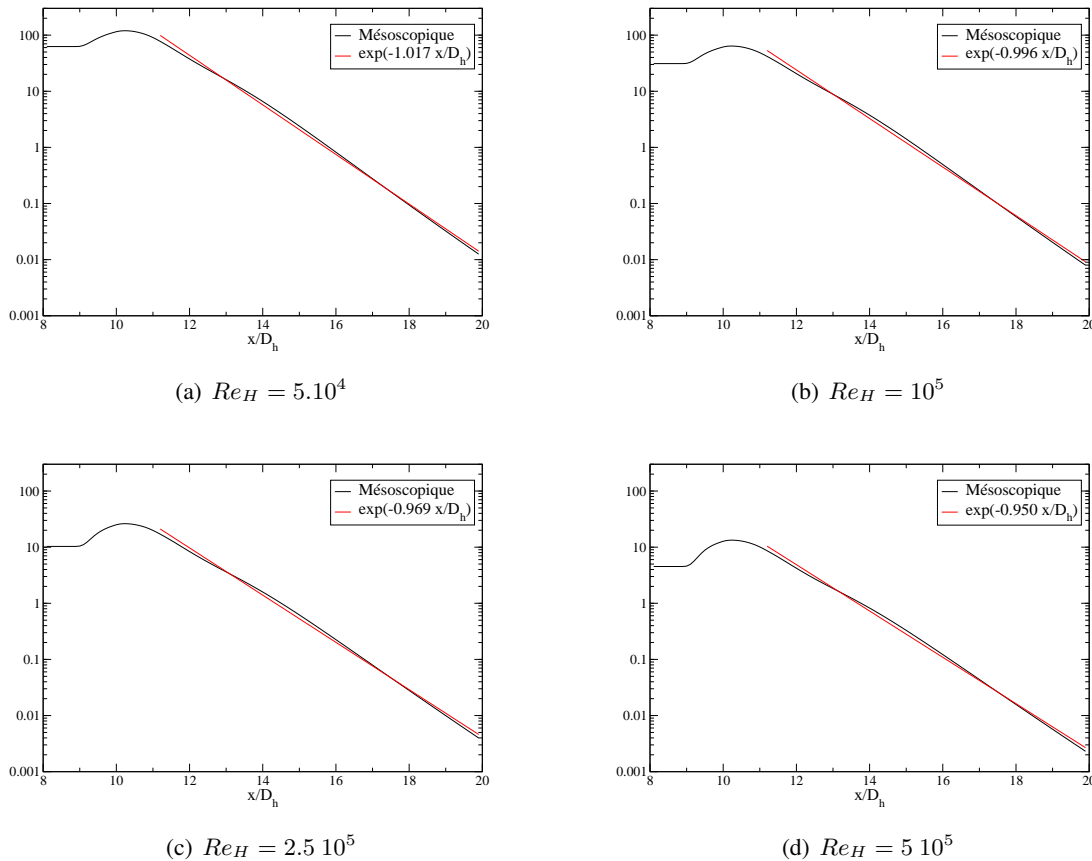


FIG. 8.10 – Rapport de $\langle P \rangle$ sur ν_{t_ϕ} , adimensionnalisé par $\langle u \rangle^3 / D_h$.

Re_H	$5 \cdot 10^4$	10^5	$2.5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
θ	1.017	0.996	0.969	0.950

TAB. 8.2 – Valeurs de θ en fonction du nombre de Reynolds.

8.4.2 Modélisation du terme sous-filtre P_ϵ

Pour modéliser le terme de production sous-filtre P_ϵ , nous utilisons une idée couramment employée pour la dérivation de modèles de type $k - \epsilon$. Elle consiste à considérer que P_ϵ est proportionnel à P_k , à

lui associer un temps caractéristique τ ainsi qu'une constante de modélisation c_3 :

$$P_\epsilon = c_3 \frac{P_k}{\tau} \quad (8.29)$$

Nous proposons d'utiliser le même temps caractéristique que celui associé au terme de dissipation, *i.e.* le temps de décroissance $\tau = \langle k \rangle_f / \langle \epsilon \rangle_f$. Sur la figure 8.11, le rapport P_k/P_ϵ est comparé au rapport $\langle k \rangle_f / (c_3 \langle \epsilon \rangle_f)$ pour une valeur de c_3 égale à 1.59. Cette valeur de c_3 a été ajustée, afin d'obtenir un résultat satisfaisant. Prendre $c_3 = c_2 = 1.92$ par exemple, dégrade le résultat obtenu. Nous pouvons voir sur la figure 8.11 que ces deux rapports se comparent très bien dans région ($11 < x/D_h < 16$) qui correspond à la zone de sillage et ce pour les 4 nombres de Reynolds de l'étude. Nous proposons donc de modéliser le terme de production sous-filtre P_ϵ par :

$$P_\epsilon = c_3 P_w \frac{E_f}{\mathcal{K}_f} \quad (8.30)$$

où P_w est donné par la relation algébrique (8.28).

Lorsque $x/D_h > 16$, la modélisation que nous proposons pour le terme de production sous-filtre P_ϵ n'est a priori plus valable (cf. figure 8.11). Cependant, au delà de $x/D_h = 16$, les termes de production sous-filtre P_k et P_ϵ que nous devons modéliser sont négligeables. Pour la modélisation de P_ϵ au-delà de $x/D_h = 16$, l'important est donc uniquement que le modèle que nous proposons (cf. Eq. (8.30)) tende suffisamment vite vers zéro, ce que nous vérifierons lorsque nous validerons ce modèle dans la section 8.4.3.

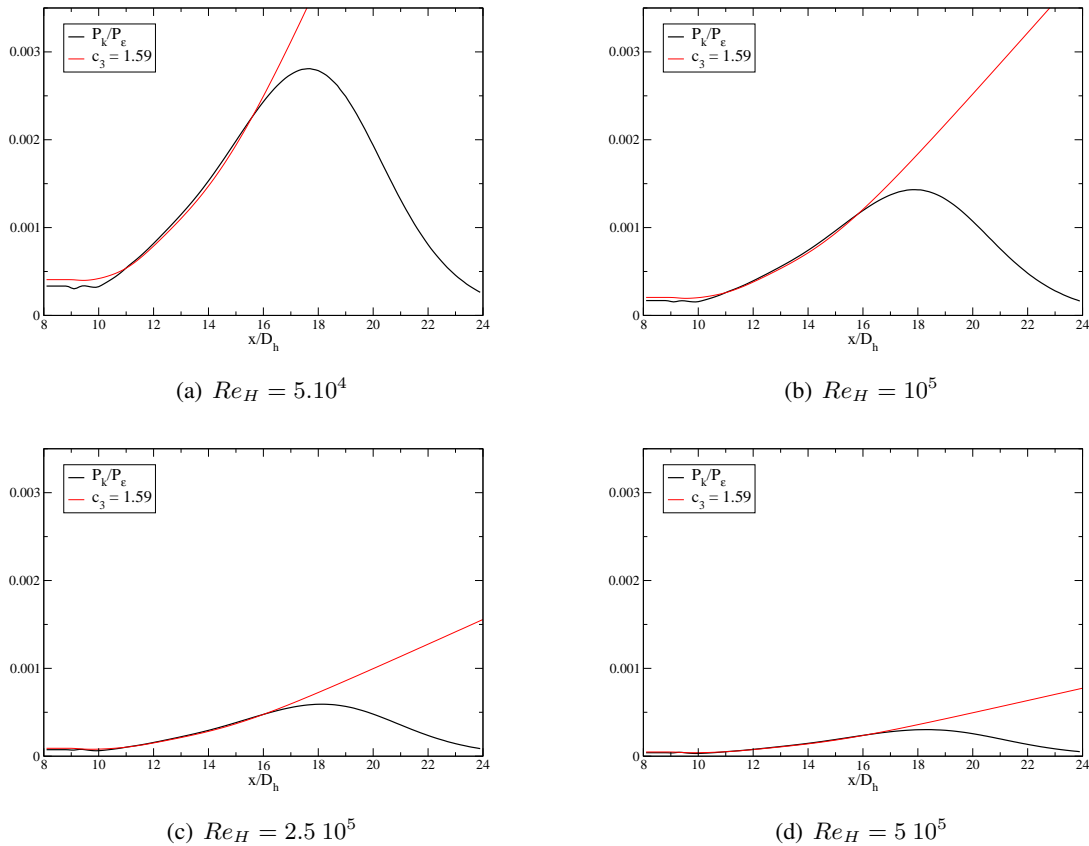


FIG. 8.11 – Temps caractéristique.

Ainsi, le modèle macroscopique que nous proposons pour la région de sillage s'écrit :

$$0 = -U_f \frac{\partial \mathcal{K}_f}{\partial x} + P_w - E_f \quad (8.31a)$$

$$0 = -U_f \frac{\partial E_f}{\partial x} + (c_3 P_w - c_2 E_f) \frac{E_f}{\mathcal{K}_f} \quad (8.31b)$$

avec $c_2 = 1.92$ et $c_3 = 1.59$, le terme de production de sillage P_w étant donné par la relation algébrique (8.28). Ce modèle nécessite la donnée de trois conditions aux limites en x_0 : $\mathcal{K}_f(x_0)$, $E_f(x_0)$ et $P_w(x_0)$. Ces conditions aux limites seront étudiées dans la section 8.5.1 lors de la détermination des paramètres de saut pour les grandeurs turbulentes.

8.4.3 Évaluation du modèle macroscopique de sillage

Afin d'évaluer ce modèle de turbulence macroscopique, nous regardons s'il permet de retrouver les profils d'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation dans la région de sillage, *i.e.* à partir de $x_0/D_h = 11$. Nous rappelons que les profils de ces quantités turbulentes ont été obtenus en filtrant les résultats des simulations réalisées à l'échelle microscopique. Pour les conditions aux limites en x_0 du modèle macroscopique de sillage $\mathcal{K}_f(x_0)$, $E_f(x_0)$ et $P_w(x_0)$, nous utilisons les valeurs correspondantes de la solution à l'échelle mésoscopique : $\langle k \rangle_f(x_0)$, $\langle \epsilon \rangle_f(x_0)$ et $P_k(x_0)$. Le système constitué des équations (8.31), (8.28) et (8.1d) est alors résolu numériquement pour les différents nombres de Reynolds étudiés. Les résultats obtenus pour $Re_H = 5 \cdot 10^4$ sont présentés sur la figure 8.12. Nous pouvons voir sur cette figure que le modèle macroscopique de sillage permet de capturer de façon très satisfaisante les évolutions des différentes grandeurs turbulentes dans la zone de sillage, comparé aux résultats que nous avons obtenu avec le modèle macroscopique "standard" sur les figures 8.6 et 8.7. En particulier, la figure 8.12(d) montre que le modèle algébrique (8.28) permet de très bien capturer le terme de production de sillage. La figure 8.12(e) montre que, étant donné ce modèle algébrique de production de sillage, le terme de production de dissipation sous-filtre associé est alors très bien capturé en considérant le temps caractéristique $\tau = \mathcal{K}_f/E_f$. Nous obtenons des résultats similaires pour les trois autres nombres de Reynolds de l'étude.

Ainsi, nous avons proposé une modélisation des termes de production sous-filtre, P_k et P_ϵ , dans la région en aval de la sortie qui permet de prendre en compte le phénomène de sillage dans cette région. Pour des valeurs données des quantités turbulentes à l'entrée de la zone libre homogène, *i.e.* à partir du moment où la porosité est égale à 1 en $x/D_h = 11$, le modèle que nous proposons est capable de prédire les évolutions des différentes quantités turbulentes.

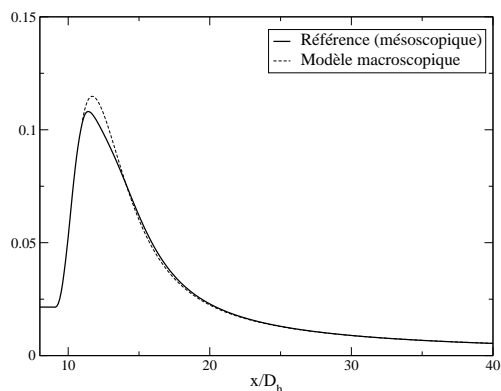
La question de la modélisation de la zone de sillage à l'échelle macroscopique étant résolue par l'intermédiaire de ce modèle, nous pouvons maintenant étudier le problème qui nous intéresse plus particulièrement : la question de la détermination des grandeurs en excès des conditions de saut sur les grandeurs turbulentes. Cette étude doit en particulier nous donner les trois conditions aux limites du modèle macroscopique en x_0 ($\mathcal{K}_f(x_0)$, $E_f(x_0)$ et $P_w(x_0)$).

8.5 Résultats pour l'écoulement perpendiculaire à l'interface

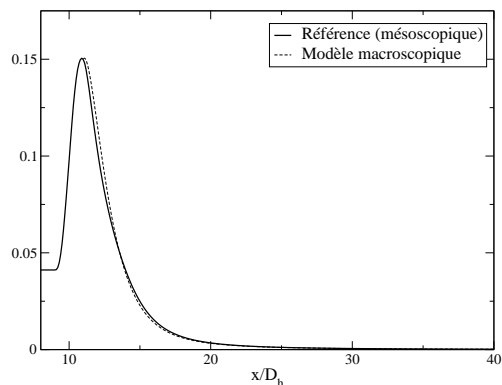
8.5.1 Détermination des paramètres de saut pour les grandeurs turbulentes

Nous avons montré dans la section 8.2.3 que les conditions de saut sur les grandeurs turbulentes s'expriment en fonction de grandeurs en excès (cf. Eqs. (8.12) et (8.13)). Pour fermer le problème à l'échelle macroscopique, il faut proposer des relations de fermeture pour les grandeurs en excès qui apparaissent dans le membre de droite de ces équations, en fonction uniquement de grandeurs macroscopiques.

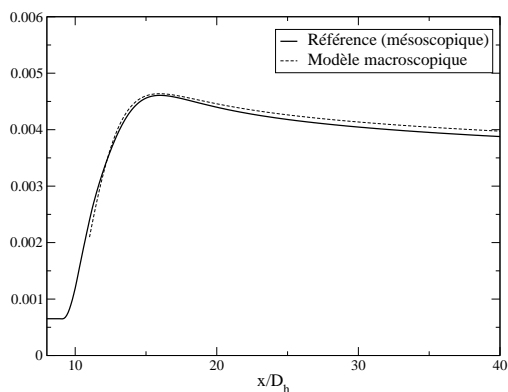
Nous rappelons que nous avons choisi de considérer que la région de transition correspond *uniquement* à la région de variation de la porosité, *i.e.* pour x/D_h compris entre 9 et 11. A l'extérieur de cette



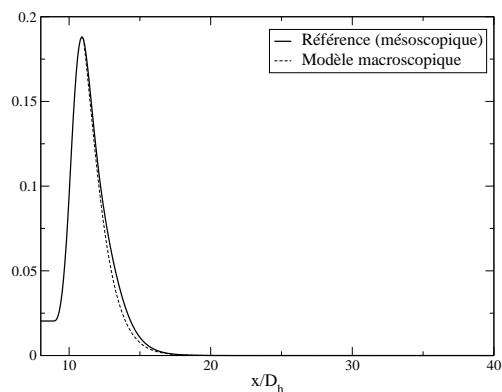
(a) Énergie cinétique turbulente $\langle k \rangle_f$ adimensionnée par $\langle \bar{u} \rangle^2$.



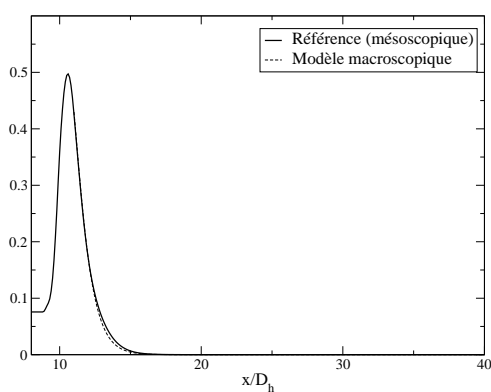
(b) Taux de dissipation $\langle \epsilon \rangle_f$ adimensionné par $\langle \bar{u} \rangle^3 / D_h$.



(c) Viscosité turbulente macroscopique $\nu_{t\phi}$.



(d) Production d'énergie cinétique turbulente sous-filtre P_k adimensionnée par $\langle \bar{u} \rangle^3 / D_h$.



(e) Production de dissipation sous-filtre P_ϵ adimensionnée par $\langle \bar{u} \rangle^4 / D_h^2$.

FIG. 8.12 – Résultats obtenus avec le modèle macroscopique de sillage pour $Re_H = 5 \cdot 10^4$.

Re_H	$5 \cdot 10^4$	10^5	$2.5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	valeur moyenne
C_{ks}	0.082	0.080	0.081	0.081	0.081
$C_{\epsilon s}$	0.109	0.113	0.119	0.123	0.116
C_w	1.247	1.25	1.246	1.243	1.247

 TAB. 8.3 – Valeurs des coefficients C_{ks} , $C_{\epsilon s}$ et C_w en fonction du nombre de Reynolds.

région de transition, les variations des différents termes sources sont supposées être prises en compte par les modèles macroscopiques des régions homogènes. Ainsi l'évaluation des grandeurs en excès en x_M/D_h est donnée par

$$(\psi)^{EX}(x_M/D_h) = \int_{-\infty}^{x_M/D_h} (\psi - \psi_-) + \int_{x_M/D_h}^{+\infty} (\psi - \psi_+) \quad (8.32)$$

$$\sim \int_{x/D_h=9}^{x_M/D_h} (\psi - \psi_-) + \int_{x_M/D_h}^{x/D_h=11} (\psi - \psi_+) \quad (8.33)$$

Le modèle de turbulence macroscopique de la région libre étant relativement complexe, les profils des différentes grandeurs macroscopiques associées à ce modèle ne sont pas connues analytiquement. En revanche, les grandeurs macroscopiques s'expriment de façon simple dans la région poreuse homogène. Pour simplifier l'évaluation des grandeurs en excès, nous choisissons donc de placer l'interface de discontinuité en $x_M/D_h = 11$. Ainsi, nous n'avons pas besoin d'évaluer les différentes grandeurs macroscopiques dans la région libre. De plus, pour évaluer les sauts des grandeurs turbulentes, nous n'avons pas besoin d'avoir accès aux valeurs des différentes grandeurs en excès, mais *uniquement à la somme des grandeurs en excès* qui sont dans le membre de droite des équations (8.12) et (8.13). Ainsi, nous évaluons la somme des grandeurs en excès des membres de droite des équations (8.12) et (8.13), en utilisant l'équation (8.33) et en plaçant l'interface de discontinuité en $x_M/D_h = 11$.

Par analogie avec la relation de fermeture proposée pour modéliser le membre de droite de l'équation (8.6) (cf. Eq. (8.16)) nous proposons d'utiliser les relations de fermeture suivante pour modéliser les membres de droite des équations (8.12) et (8.13)

$$-(\text{tsm}_k)^{EX} + (\text{prod}_k)^{EX} - (\text{diss}_k)^{EX} = C_{ks}U^3 \quad (8.34a)$$

$$-(\text{tsm}_\epsilon)^{EX} + (\text{prod}_\epsilon)^{EX} - (\text{diss}_\epsilon)^{EX} = C_{\epsilon s} \frac{U^4}{D_h} \quad (8.34b)$$

où U est la moyenne volumique de la vitesse à l'échelle macroscopique. Nous utilisons la relation (8.33) pour déterminer la valeur des différentes grandeurs en excès. Puis, nous injectons le résultat obtenu dans les équations (8.34a) et (8.34b) afin d'obtenir la valeur des coefficients C_{ks} et $C_{\epsilon s}$. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 8.3. Comme nous pouvons le voir sur ce tableau, la valeur de ces coefficients ne dépend que très faiblement du nombre de Reynolds. Nous prendrons donc comme valeur pour ces deux coefficients, la valeur moyenne, rappelée dans le tableau 8.3.

Le modèle de sillage nécessite la donnée de trois conditions aux limites en x_0 : $\mathcal{K}_f(x_0)$, $E_f(x_0)$ et $P_w(x_0)$. Les conditions aux limites pour \mathcal{K}_f et E_f sont données par le biais des conditions de saut (8.12) et (8.13). Pour fermer le modèle à l'échelle macroscopique, il reste à proposer une corrélation pour évaluer le terme $P_w(x_0)$. Lorsque l'écoulement est établi, le terme de production est égal au terme de dissipation : $P_k = \langle \epsilon \rangle$. Nous proposons donc d'utiliser la relation suivante pour déterminer $P_w(x_0)$:

$$P_w(x_0) = C_w E_f(x_0) \quad (8.35)$$

Cette relation mesure un écart à l'équilibre à l'entrée de la région libre homogène. En effet, à l'équilibre on devrait avoir $C_w = 1$. La valeur du coefficient C_w obtenue pour les différents nombres de Reynolds

est présentée dans le tableau 8.3. Comme nous pouvons le voir dans ce tableau, la valeur de ce coefficient, qui ne dépend que très faiblement du nombre de Reynolds sur la plage de Reynolds étudiée, est d'environ 1.25. Ainsi, il existe un léger déséquilibre entre le terme de production et le terme de dissipation à l'entrée de la région libre homogène.

Ainsi, pour l'étude d'un écoulement turbulent perpendiculaire à l'interface libre/poreux et sortant d'un milieu poreux constitué d'un réseau de canaux plans, le modèle de turbulence macroscopique est **fermé**. Il est fermé **pour une position particulière de l'interface de discontinuité** : $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$, où y_{nom} est la position de l'interface nominale. Cette position de l'interface correspond à la fin de la zone de variation de la porosité. Pour l'étude de ce problème, les conditions de saut à imposer sur les grandeurs turbulentes à l'interface sont :

$$\left[\Phi U_f \mathcal{K}_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \Phi \mathcal{K}_f}{\partial x} \right] = C_{ks} U^3 \quad (8.36a)$$

$$\left[\Phi U_f E_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \frac{\partial \Phi E_f}{\partial x} \right] = C_{\epsilon s} \frac{U^4}{D_h} \quad (8.36b)$$

Les valeurs de C_{ks} et $C_{\epsilon s}$ ont été déterminées pour la position particulière de l'interface $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$ (cf. tableau 8.3). Nous comparons dans la section suivante, les résultats obtenus avec le modèle macroscopique aux résultats de la simulation de référence pour $Re_H = 10^5$.

8.5.2 Résultats

Les résultats obtenus à l'échelle macroscopique en utilisant le modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique de la zone poreuse, le modèle macroscopique de la région libre adapté à la région de sillages et les conditions de saut (8.36) sur les grandeurs turbulentes sont présentés sur la figure 8.13 (Macro 2), ainsi que les résultats que nous avons obtenus lors du premier essai (Macro 1). Comme nous pouvons le voir sur cette figure, le modèle macroscopique permet de capturer les sauts de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ juste en aval de la sortie, ainsi que la décroissance des grandeurs turbulentes. Nous disposons donc désormais d'un modèle macroscopique pour décrire l'interface libre/poreux lorsque l'écoulement est turbulent et perpendiculaire à l'interface, et que le milieu poreux est constitué de canaux plans.

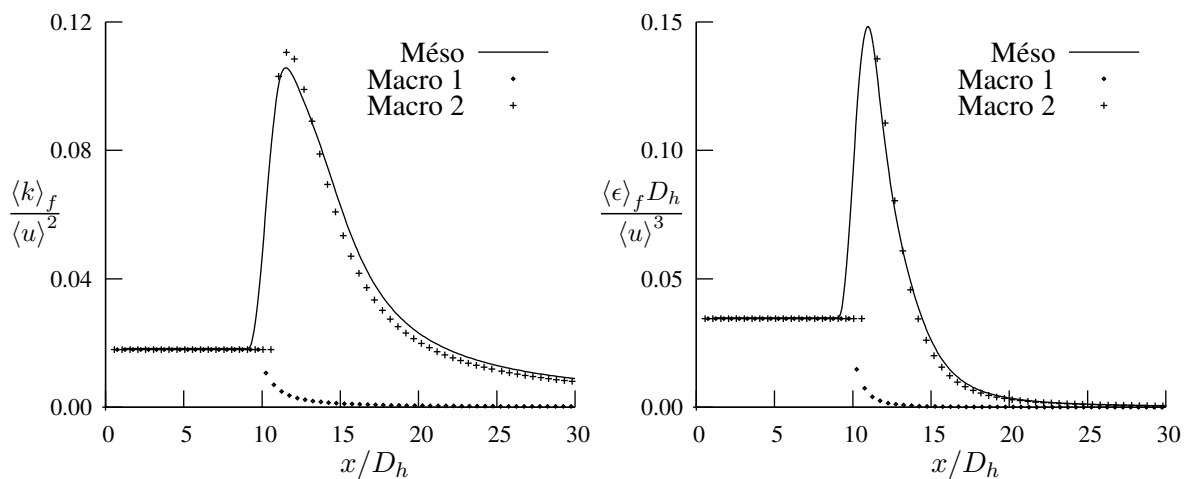


FIG. 8.13 – Comparaison des profils mésoscopique et macroscopique adimensionnalisés de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ pour $Re_H = 10^5$.

8.6 Bilan des conditions de saut pour les écoulements turbulents

Avant d'utiliser le modèle macroscopique pour étudier un écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur de réacteur, nous souhaitons faire un bilan des conditions de saut que nous avons obtenues pour les écoulements turbulents.

Nous avons étudié dans le chapitre 7 et les sections 1 à 5 du chapitre 8, des configurations d'écoulement où la vitesse moyenne est mono-dimensionnelle. Dans le chapitre 7, nous avons montré que les conditions de saut à appliquer à l'interface lorsque l'écoulement moyen est parallèle à l'interface sont données par les relations (7.35), (7.37) et (7.38). Dans le présent chapitre, nous avons montré que lorsque l'écoulement moyen est perpendiculaire à l'interface, les conditions de saut à appliquer à l'interface sont données par les relations (8.6), (8.12) et (8.13).

Afin de pouvoir réaliser une étude dans le cas général tridimensionnel, nous devons généraliser ces conditions de saut. Dans le cas laminaire, nous avons montré que les relations de saut obtenues pour les écoulements mono-dimensionnels sont également valables dans le cas général tridimensionnel. Nous faisons l'hypothèse que ce résultat est également valable pour les écoulements turbulents.

Ainsi, si nous généralisons les résultats que nous avons obtenus dans le chapitre 7 et les sections 1 à 5 du chapitre 8, les relations de saut à appliquer à l'interface s'écrivent pour l'équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\mathbf{n} \cdot [(\nu + \nu_{t_\phi}) \nabla(\Phi \mathbf{U}_f)] \cdot \mathbf{t}_i = (\mathbf{f}_p)^{EX} \cdot \mathbf{t}_i + (\mathbf{f}_f)^{EX} \cdot \mathbf{t}_i \quad i = 1, 2 \quad (8.37a)$$

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{U}_f^2 + \frac{P_f}{\rho} \right] = -(\text{tsm}_u)^{EX} + (f_f)^{EX} \quad (8.37b)$$

L'équation de bilan de quantité de mouvement est une équation vectorielle. Nous retrouvons, comme dans le cas laminaire, le fait que les conditions de saut ne s'expriment pas de la même façon suivant que l'équation de bilan de quantité de mouvement est projetée sur les directions normale (cf. Eq. (8.37b)) ou tangentielles à l'interface (cf. Eq. (8.37a)). Les études mono-dimensionnelles réalisées dans le chapitre 7 et les sections 1 à 5 du chapitre 8 ne nous donnent pas d'informations sur le saut de la composante normale du tenseur des contraintes visqueuses projeté sur la normale. Dans le cas laminaire, cette information avait été obtenue grâce à l'étude du problème tridimensionnel à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés, en coordonnées généralisées. Cette étude étant complexe, nous ne souhaitons pas la refaire pour le cas d'un écoulement turbulent. Nous faisons donc l'hypothèse que, comme dans le cas laminaire, la relation suivante est vérifiée à l'interface :

$$\mathbf{n} \cdot [(\nu + \nu_{t_\phi}) \nabla(\Phi \mathbf{U}_f)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8.38)$$

Les équations de transport de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ étant des équations scalaires, la forme des conditions de saut obtenues doivent être identiques, que l'écoulement soit perpendiculaire ou parallèle à l'interface. Les formes des relations de saut ((7.37) et (8.12)) et ((7.38) et (8.13)) sont effectivement identiques, étant donné que lorsque l'écoulement moyen est parallèle à l'interface, alors $\mathbf{U}_f \cdot \mathbf{n} = 0$. Nous écrivons donc les relations de saut des grandeurs turbulentes de la façon suivante :

$$\left[\Phi \mathbf{U}_f \mathcal{K}_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla(\Phi \mathcal{K}_f) \right] \cdot \mathbf{n} = -(\text{tsm}_k)^{EX} + (\text{prod}_k)^{EX} + (\text{prodM}_k)^{EX} - (\text{diss}_k)^{EX} \quad (8.39a)$$

$$\left[\Phi \mathbf{U}_f E_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla(\Phi E_f) \right] \cdot \mathbf{n} = -(\text{tsm}_\epsilon)^{EX} + (\text{prod}_\epsilon)^{EX} + (\text{prodM}_\epsilon)^{EX} - (\text{diss}_\epsilon)^{EX} \quad (8.39b)$$

En plus de déterminer la forme des relations de saut pour des écoulements mono-dimensionnels, nous avons également proposé, dans le chapitre 7 et les sections 1 à 5 du chapitre 8, des relations de fermeture pour les membres de droite de ces différentes relations de saut.

Lorsque l'écoulement est parallèle à l'interface libre/poreux et que le milieu poreux est constitué de petits cubes, tous les paramètres de saut des conditions de saut à appliquer à l'interface sont **nuls lorsque l'interface est localisée en** $y_M = y_{\text{nom}} + \sqrt{K_p/\phi_p}$

$$\mathbf{n} \cdot [(\nu + \nu_{t_\phi}) \nabla(\Phi \mathbf{U}_f)] \cdot \mathbf{t}_i = 0 \quad (8.40a)$$

$$\mathbf{n} \cdot [(\nu + \nu_{t_\phi}) \nabla(\Phi \mathbf{U}_f)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8.40b)$$

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{U}_f^2 + \frac{P_f}{\rho} \right] = 0 \quad (8.40c)$$

$$\left[\Phi \mathbf{U}_f \mathcal{K}_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla(\Phi \mathcal{K}_f) \right] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8.40d)$$

$$\left[\Phi \mathbf{U}_f E_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla(\Phi E_f) \right] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8.40e)$$

Lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'interface libre/poreux et sortant d'un milieu poreux constitué d'un réseau de canaux plans, les conditions de saut à appliquer à l'interface s'écrivent lorsque **l'interface est localisée en** $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$

$$\mathbf{n} \cdot [(\nu + \nu_{t_\phi}) \nabla(\Phi \mathbf{U}_f)] \cdot \mathbf{t}_i = 0 \quad (8.41a)$$

$$\mathbf{n} \cdot [(\nu + \nu_{t_\phi}) \nabla(\Phi \mathbf{U}_f)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8.41b)$$

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{U}_f^2 + \frac{P_f}{\rho} \right] = \frac{1}{2} C_s \mathbf{U}^2 \quad (8.41c)$$

$$\left[\Phi \mathbf{U}_f \mathcal{K}_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla(\Phi \mathcal{K}_f) \right] \cdot \mathbf{n} = C_{ks} U^3 \quad (8.41d)$$

$$\left[\Phi \mathbf{U}_f E_f - \left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla(\Phi E_f) \right] \cdot \mathbf{n} = C_{es} \frac{U^4}{D_h} \quad (8.41e)$$

Cette position de l'interface correspond à la fin de la zone de variation de la porosité. Les valeurs de C_{ks} et C_{es} ont été déterminées pour la position particulière de l'interface $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$ (cf. tableau 8.3). En revanche, la valeur de C_s a été déterminée dans la section 8.3.2 lorsque l'interface est localisée en $y_M = y_{\text{nom}}$. Sa valeur est a priori différente lorsque l'interface est localisée en $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$ et nous la réévaluons pour cette nouvelle position de l'interface. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 8.4. Les valeurs obtenues dépendent plus fortement du nombre de Reynolds que lorsque l'interface est localisée en $y_M = y_{\text{nom}}$. Nous utiliserons dans la suite comme valeur pour ce coefficient C_s , la valeur moyenne, rappelée dans le tableau 8.4.

Re_H	$5 \cdot 10^4$	10^5	$2.5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	valeur moyenne
C_s	0.875	0.888	0.911	0.925	0.9

TAB. 8.4 – Coefficient de perte de charge singulière pour $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$.

Nous soulignons que les relations de fermeture (8.40) et (8.41) ne sont valables que pour des écoulements mono-dimensionnels, pour des géométries données du milieu poreux et pour des positions particulières de l'interface de discontinuité.

8.7 Écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur

L'objectif de cette section est à la fois de valider et d'utiliser les résultats obtenus dans les chapitres 3 et 7 et les sections 1 à 5 du chapitre 8 en étudiant un écoulement turbulent à l'intérieur d'un modèle simplifié de cœur de réacteur.

8.7.1 Présentation de la configuration étudiée

La configuration étudiée est identique à celle étudiée dans le cas laminaire (cf. figure 6.6), mis à part que la longueur des régions libres d'entrée et de sortie est prise égale à $2a$ au lieu de a . Ainsi, le cœur du réacteur est schématisé par une boîte rectangulaire bidimensionnelle avec deux régions libres (les plenums inférieur et supérieur) et une région poreuse centrale constituée d'un réseau de 7 canaux. Nous réalisons une seule étude sur cette configuration. Le débit de masse est imposé en entrée de façon à ce que le nombre de Reynolds moyen dans les canaux soit de $Re_H = 10^5$. Pour pouvoir valider notre modèle, nous réalisons une simulation à l'échelle microscopique en utilisant le modèle $k - \epsilon$ standard, afin de disposer d'une solution de référence.

8.7.2 Paramètres du modèle à l'échelle de description macroscopique

Pour résoudre ce problème à l'échelle macroscopique, nous considérons deux régions libres et une région poreuse homogène séparées par deux interfaces de discontinuité. L'utilisation du modèle à l'échelle macroscopique nécessite de spécifier les valeurs de la porosité et des termes sources \mathbf{f}_l , P_k et P_ϵ dans la région poreuse homogène, ainsi que les valeurs des différents paramètres de saut qui interviennent dans les conditions de saut à chaque interface.

8.7.2.1 Région poreuse homogène

La porosité de la région poreuse homogène ϕ_p est de 0.5 et le diamètre hydraulique D_h est de $0.2a$. Dans la direction x , l'écoulement est un écoulement turbulent entre plaques parallèles. La perte de charge par unité de longueur est alors donnée par la relation classique suivante (Dean, 1978) :

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}\rho U_d^2 \frac{\lambda_c}{D_h}, \quad \text{avec} \quad \lambda_c = 0.292 Re^{-1/4} \quad (8.42)$$

où U_d est la vitesse débitante, D_h est le diamètre hydraulique, λ_c est le coefficient de perte de charge et Re est le nombre de Reynolds construit à partir de la vitesse débitante et de la hauteur du canal. Ce nombre de Reynolds est donc égal à $Re = Re_H/2$.

Dans le réseau de canaux, le fluide ne peut pas circuler dans la direction y . La perte de charge par unité de longueur est donc infinie dans la direction y . Puisque nous ne pouvons pas imposer une perte de charge infinie, le coefficient de perte de charge dans la direction y est choisi très grand devant celui de la direction x , de l'ordre de 10^5 fois plus grand.

Pour les termes sources P_k et P_ϵ dans la zone poreuse homogène, nous utilisons les corrélations que nous avons déterminées dans le chapitre 3 (voir encadré page 49) et qui sont adaptées à l'étude d'un milieu poreux constitué d'un réseau de canaux plans.

8.7.2.2 Détermination de la valeur des paramètres de saut

Pour pouvoir utiliser les relations de saut (8.37) et (8.39) à chaque interface, *i.e.* en entrée et en sortie de la région poreuse, nous devons proposer des relations de fermeture pour les membres de droite de ces équations. Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse que les relations de fermeture valables dans le cas bidimensionnel sont une simple superposition des relations de fermeture valables dans chaque direction.

Lorsque l'écoulement moyen est **parallèle** à l'interface, nous avons montré dans le chapitre 7 que, pour **un milieu poreux constitué de petits cubes**, tous les paramètres de saut des conditions de saut à imposer à l'interface sont **nuls lorsque l'interface est localisée en** $y_M = y_{\text{imp}} + \sqrt{K_p/\phi_p}$ (cf. Eqs 8.40). Nous avons également montré que cette position est identique pour les écoulements laminaires et turbulents. Nous faisons l'hypothèse que ces résultats sont toujours valables pour **un milieu poreux constitué d'un réseau de canaux plans**. Il reste donc à déterminer les valeurs de y_{imp} et K_p pour un milieu poreux constitué d'un réseau de canaux plans. K_y est nulle et nous avons montré dans le chapitre 6 que pour un écoulement laminaire $y_{\text{imp}} = y_{\text{nom}}$ (cf. section 6.6.2.2, page 119).

Ainsi, le modèle à l'échelle macroscopique est fermé lorsque l'écoulement moyen est parallèle à l'interface et que le milieu poreux est constitué d'un réseau de canaux plans, si l'interface est localisée au niveau de l'interface nominale. En effet, les coefficients de saut qui interviennent dans les différentes relations de saut sont alors **nuls** (cf. Eqs 8.40).

Nous avons étudié dans les sections 8.2 à 8.5, le cas où l'écoulement moyen est **perpendiculaire** à l'interface et où le **milieu poreux est constitué d'un réseau de canaux plans**. Nous avons proposé des relations de fermeture (cf. Eqs. (8.41) valables pour la sortie du milieu poreux et pour une position particulière de l'interface qui correspond à $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$. En revanche, par manque de temps, nous n'avons pas étudié les relations de saut sur les grandeurs turbulentes en entrée du milieu poreux.

Ainsi, pour l'interface qui correspond à l'entrée dans le milieu poreux, nous utilisons les résultats obtenus dans le cas où l'écoulement est parallèle à l'interface. Nous localisons l'interface au niveau de l'interface nominale et nous considérons que les grandeurs en excès qui interviennent dans les relations de saut sur les grandeurs turbulentes sont alors **nulles**. En ce qui concerne les conditions de saut associées à l'équation de bilan de quantité de mouvement, les résultats obtenus dans le cas où l'écoulement est parallèle à l'interface nous apprennent que pour cette position particulière de l'interface, le saut de la composante tangentielle du tenseur des contraintes visqueuses projeté sur la normale est nul (cf. Eq (8.40a)). En revanche, lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'interface, le saut de la charge est loin d'être négligeable. Pour estimer ce saut, nous utilisons la corrélation (8.14) avec (Viollet *et al.*, 1998)

$$C_s = \frac{1}{2} \frac{(S_e - S_s)}{S_e} \frac{1}{\phi^2} \quad (8.43)$$

Etant donnée la géométrie étudiée, $C_s = 1.7$.

Pour l'interface qui correspond à la sortie du milieu poreux, la difficulté est différente. Nous disposons de relations de fermeture à la fois dans le cas où l'écoulement est parallèle et perpendiculaire à l'interface. Cependant, ces relations de fermeture ne sont pas valables pour la même position de l'interface de discontinuité. Pour l'écoulement parallèle à l'interface, le problème est fermé lorsque l'interface est localisée en $y_M = y_{\text{nom}}$, alors que pour l'écoulement perpendiculaire à l'interface, le problème est fermé lorsque l'interface est localisée en $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$. L'écoulement étant principalement perpendiculaire à l'interface en sortie de la région poreuse, nous localisons l'interface de discontinuité en $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$ et nous utilisons les relations de fermeture obtenus pour l'écoulement perpendiculaire à l'interface (cf. Eqs (8.41)).

8.7.3 Résultats

Nous avons réalisé un calcul de référence à l'échelle microscopique et une simulation à l'échelle macroscopique, les paramètres du modèle macroscopique ayant été déterminés dans la section précédente. Le maillage utilisé pour le calcul de référence est un maillage structuré qui comporte 400×280 noeuds. Pour la simulation à l'échelle macroscopique, nous avons utilisé un maillage structuré car la mise en œuvre est plus simple que dans le cas d'un maillage non-structuré. Comme dans le cas laminaire, l'utili-

sation de ce maillage structuré ne permet pas de modifier le pas du maillage entre les régions libres, où le maillage doit être fin, et les régions poreuses, où le maillage peut-être plus grossier. Ainsi, le maillage utilisé à l'échelle macroscopique comporte 400×140 noeuds. Par rapport au maillage du calcul de référence, nous avons divisé par deux le nombre de noeuds de maillage dans la direction y afin d'avoir des pas de maillage du même ordre de grandeur dans les directions x et y et car nous n'avons pas besoin, à la différence du cas microscopique, de décrire l'écoulement à l'intérieur des canaux. Ce maillage reste néanmoins beaucoup trop fin pour la région homogène. Nous avons vu dans le cas laminaire, que l'extension de la mise en œuvre au cas des maillages non-structurés, permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté à utiliser dans la région poreuse (cf. annexe D.3).

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 8.14 à 8.17. Nous rappelons que pour les grandeurs macroscopiques, c'est la moyenne volumique intrinsèque des grandeurs qui est présentée. Nous pouvons voir sur les figures 8.14 et 8.15 que, d'un point de vue qualitatif, le modèle à l'échelle macroscopique permet d'obtenir une bonne description générale de l'écoulement. En particulier, nous pouvons voir sur les figures 8.15(a) et (b) que l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation à l'échelle microscopique présentent des pics à la fois au niveau de l'entrée dans le milieu poreux en $x/a = 2$ et en sortie du milieu poreux en $x/a = 6$. Ces régions de fortes valeurs de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation sont retrouvées par le modèle à l'échelle macroscopique, même si leur extension semble plus faible dans le cas macroscopique.

Afin d'effectuer une comparaison plus quantitative nous avons réalisé des coupes des différentes grandeurs en $x/a = 5.5$ et 7, et également en $y/a = 0.7$ pour la pression (voir les figures 8.16 et 8.17). Afin d'appuyer cette comparaison quantitative, nous présentons également sur ces figures, le résultat obtenu en filtrant les résultats de la simulation réalisée à l'échelle microscopique avec un filtre chapeau de largeur $2 D_h$.

Nous nous intéressons tout d'abord aux résultats obtenus dans la région poreuse homogène en $x/a = 5.5$ (voir la figure 8.16). Nous nous sommes placés en $x/a = 5.5$ afin d'être à plus de $20 D_h$ de l'entrée. En effet, notre modèle n'est a priori pas capable de capturer les profils des différentes grandeurs dans la région d'établissement à l'entrée dans le milieu poreux. Nous pouvons voir sur la figure 8.16(a) que le modèle à l'échelle macroscopique permet de bien capturer les différences de débit entre les différents canaux à l'intérieur de la région poreuse homogène. Le modèle macroscopique donne également une très bonne estimation des profils des différentes grandeurs turbulentes (cf. figures 8.16(c), (d) et (e)). En ce qui concerne la moyenne volumique de la vitesse verticale, elle doit être nulle à l'intérieur de la région poreuse homogène, une fois que l'écoulement est établi. Nous pouvons voir sur la figure 8.16(b) que pour les rapports de perte de charge que nous avons choisis entre les directions longitudinale et transverse, la moyenne volumique de la vitesse verticale obtenue avec le modèle macroscopique reste négligeable devant l'autre composante de vitesse.

Ce résultat sur les profils des différentes grandeurs turbulentes est important. En effet, nous n'avons pas étudié la région d'entrée dans le milieu poreux lorsque l'écoulement est perpendiculaire à l'interface, en nous basant sur le fait que les profils des différentes grandeurs turbulentes ne dépendent que du débit, une fois que l'écoulement est établi. Or, la répartition de débit entre les différents canaux est bien capturée par le modèle et ce, même si le modèle macroscopique ne donne pas les bonnes valeurs des grandeurs turbulentes en entrée du milieu poreux comme nous pouvons le voir sur les figures 8.15 (a) et (b) aux alentours de $x/a = 2$. Ainsi, nous pensons qu'une étude plus approfondie de la région d'entrée dans le milieu poreux n'est pas nécessaire sauf si l'évolution des profils des grandeurs turbulentes dans cette région est nécessaire pour évaluer d'autres phénomènes comme les transferts de chaleur par exemple.

Nous nous intéressons maintenant aux résultats obtenus dans la région libre de sortie, en $x/a = 7$. (voir la figure 8.17). Pour mettre en évidence le rôle joué par les conditions de saut et le modèle de sillage

sur les grandeurs turbulentes dans la région libre de sortie, nous présentons également sur ces figures le résultat obtenu à l'échelle macroscopique lorsque le saut des grandeurs turbulentes est négligé et que le modèle de sillage n'est pas utilisé. Ce calcul, qualifié de "Macro sans CS" sur la figure 8.17 a été réalisé avec un maillage de 400×140 noeuds, comme le calcul à l'échelle macroscopique qui inclut le modèle. Nous pouvons voir sur les figures 8.17(c), (d) et (e) que, comparé aux résultats obtenus sans les conditions de saut, le modèle macroscopique que nous proposons permet d'obtenir les bons ordres de grandeurs des différentes grandeurs turbulentes dans la région libre de sortie. Néanmoins, les résultats sont moins satisfaisants que ceux obtenus dans les cas mono-dimensionnels. En particulier, le pic de viscosité turbulente en $y/a = 0.9$ n'est pas du tout capturé par le modèle macroscopique (cf. figure 8.17(e)). Nous pensons que le phénomène à l'origine de ce pic de viscosité turbulente est une instabilité qui se développe dans la région de sortie, suite à l'interaction entre les cinquième et sixième jets. Nous pouvons voir son effet sur les différentes grandeurs pour $0.7 < y/a < 1.1$: minimum pour la composante horizontale de la vitesse, maximum pour la composante verticale de la vitesse et présence de deux pics sur les profils de k et ϵ . Or, notre modèle macroscopique de sillage, développé sur un cas mono-dimensionnel, n'est pas capable de capturer l'influence de cet effet bidimensionnel sur les variables moyennées.

On peut voir sur les figures 8.17(a) et (b) que les profils de vitesse en $x/a = 7$ obtenus avec ou sans les conditions de saut sur les grandeurs turbulentes sont quasiment identiques. Ainsi, l'effet des grandeurs turbulentes sur la vitesse, qui se fait par le biais du terme de diffusion turbulente, est négligeable dans la région de sortie pour ce cas test. L'influence de la modélisation de la viscosité turbulente grâce à notre modèle macroscopique n'est pas visible. Nous pensons néanmoins que la connaissance du bon niveau de viscosité turbulence dans la région de sortie peut-être importante pour l'évaluation d'autres phénomènes comme le transport de la température ou d'un scalaire, ou sur d'autres cas test où la convection ne serait pas le phénomène dominant dans la région libre de sortie.

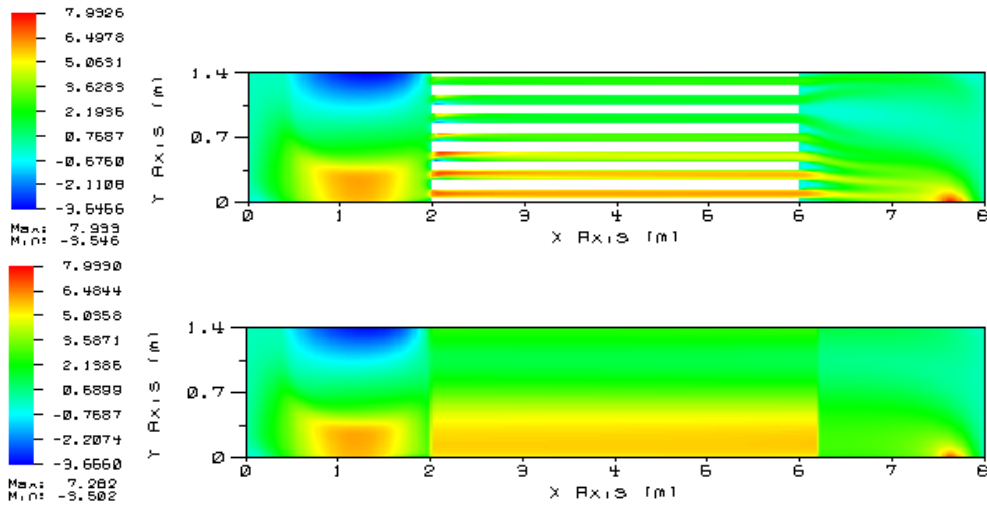
Nous présentons sur la figure 8.17(f) les profils de pression en $y/a = 0.7$. Nous pouvons voir sur cette figure, que l'évolution longitudinale de la pression est relativement bien capturée par le modèle macroscopique. Nous observons néanmoins un décalage entre les profils microscopique et macroscopique. Cette légère différence provient de la mauvaise évaluation de la pression dans la région libre de sortie par le modèle macroscopique. En effet, le modèle macroscopique ne capture pas l'effet de l'interaction entre les deux sillages. Cette différence se répercute ensuite dans l'ensemble du domaine.

8.7.4 Discussion

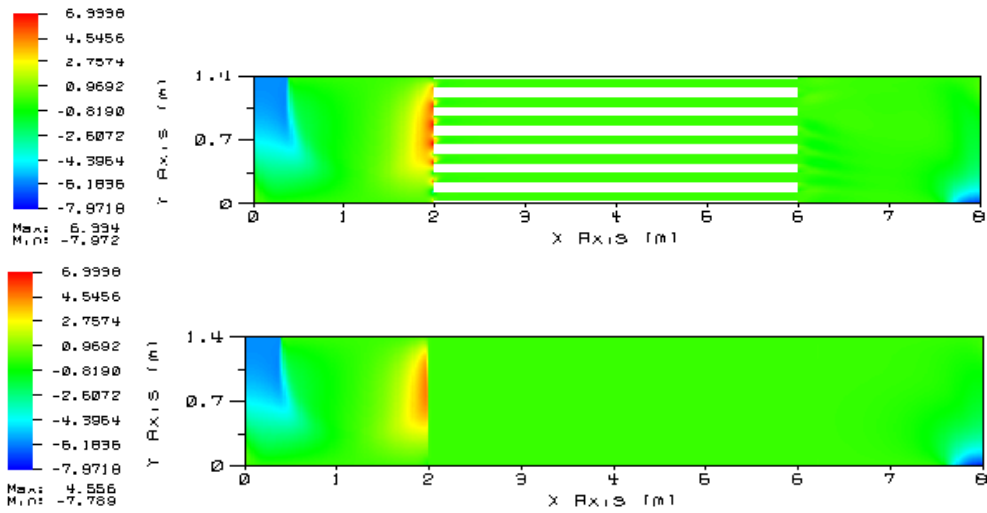
Finalement, les résultats obtenus à l'échelle macroscopique sont très satisfaisants, étant donné les différentes hypothèses sur lesquelles repose le modèle macroscopique. Nous souhaitons revenir ici sur ces différentes hypothèses afin de discuter des capacités du modèle macroscopique dans les différentes régions et des voies d'amélioration qui nous semblent possibles.

Nous nous intéressons tout d'abord à la **région d'entrée dans le milieu poreux**. Dans la direction parallèle à l'interface, nous avons étudié les conditions de saut pour un milieu poreux constitué de petits cubes. Les conditions de saut obtenues sont fermées pour une position particulière de l'interface. Ces conditions de saut portent à la fois sur les grandeurs associées à l'équation de bilan de quantité de mouvement (vitesse et pression) et sur les grandeurs turbulentes. Dans la direction perpendiculaire à l'interface, nous avons uniquement étudié la relation de fermeture pour la condition de saut associée à l'équation de bilan de quantité de mouvement. Cette relation de fermeture s'exprime à l'aide d'une corrélation de perte de charge singulière. En superposant les résultats obtenus dans le cas parallèle et dans le cas perpendiculaire, nous obtenons des résultats très satisfaisants en ce qui concerne la répartition de débit entre les différents canaux. En revanche, les profils des grandeurs turbulentes, $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$, ne sont pas correctement capturés dans la région d'entrée du milieu poreux, tant que l'écoulement n'est pas établi, *i.e.* pour $2 < x/a < 5$. Cependant, pour ce cas test, cela n'a pas d'influence sur les profils de vitesse en amont du milieu poreux et donc sur la répartition de débit entre les différents canaux. Puisque

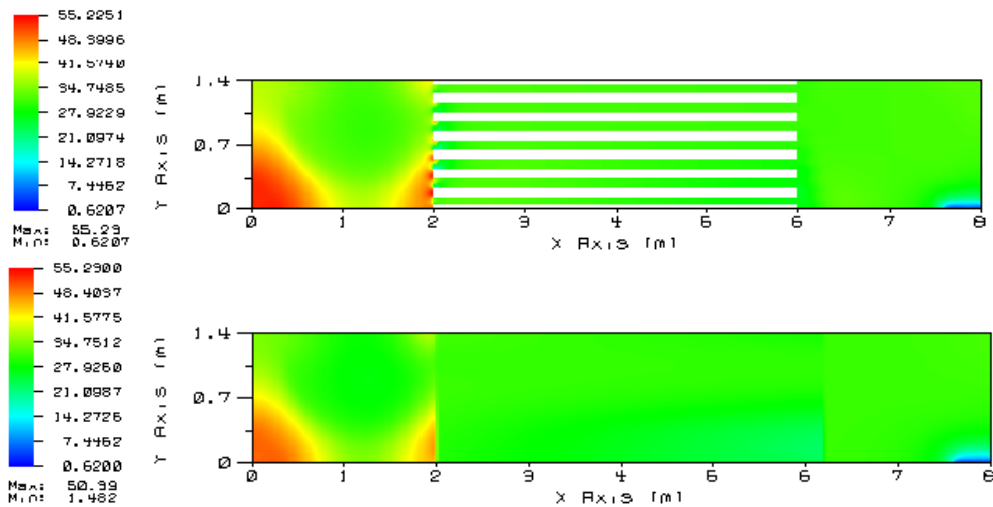
8.7 Écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur



(a) Vitesse horizontale aux échelles microscopique et macroscopique.

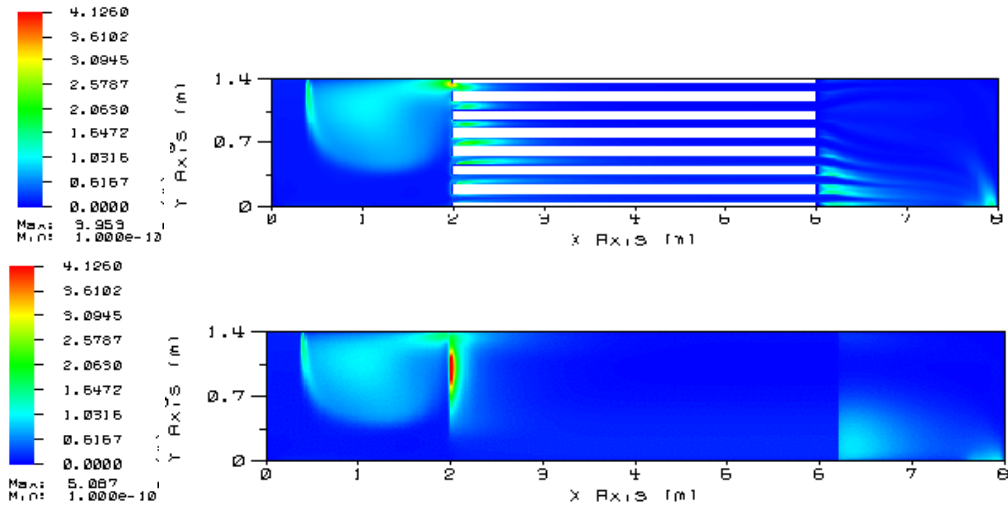


(b) Vitesse verticale aux échelles microscopique et macroscopique.

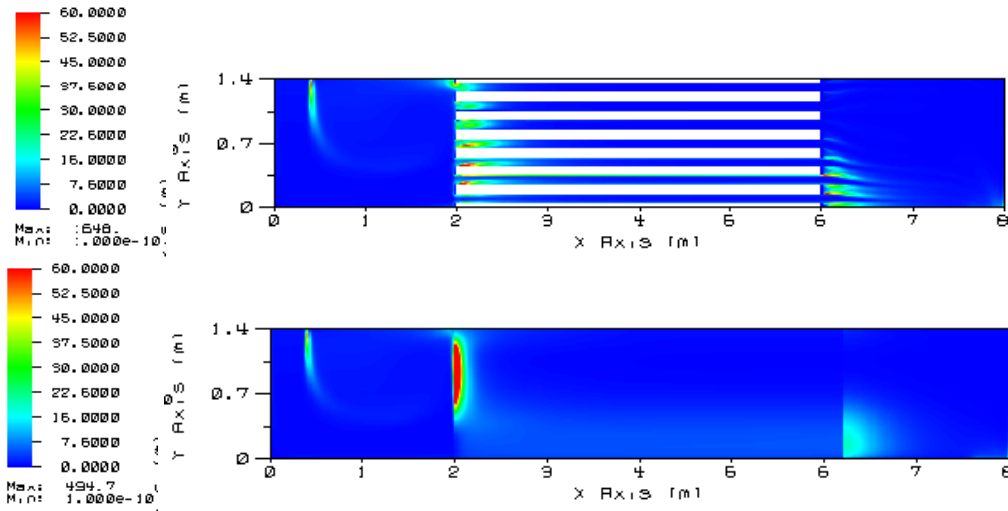


(c) Pression aux échelles microscopique et macroscopique.

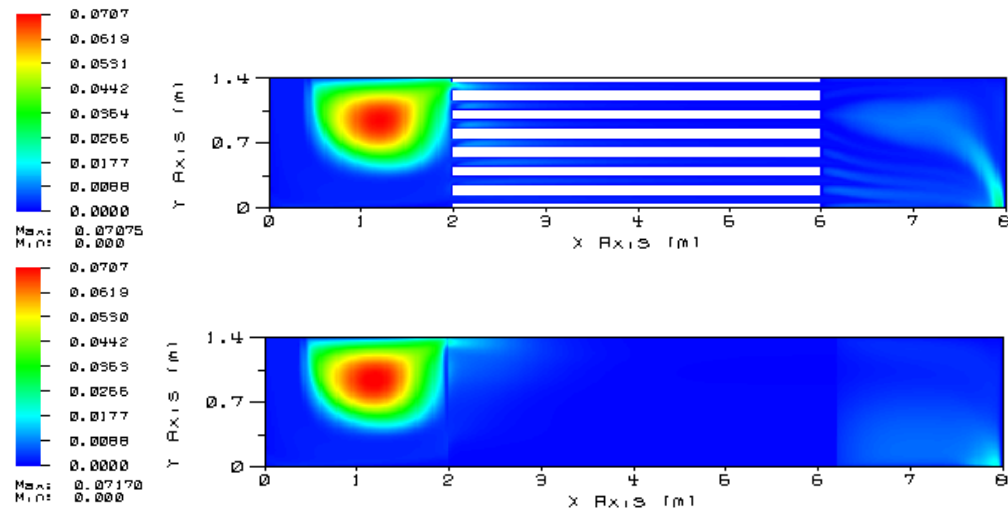
FIG. 8.14 – Comparaison de la vitesse et de la pression.



(a) Energie cinétique turbulente aux échelles microscopique et macroscopique.

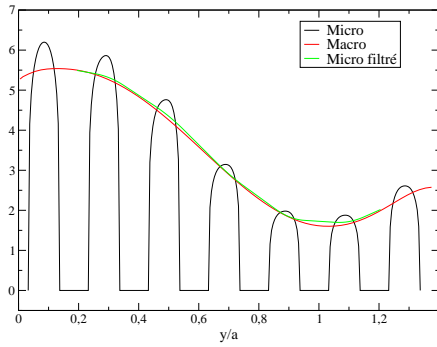


(b) Taux de dissipation aux échelles microscopique et macroscopique.

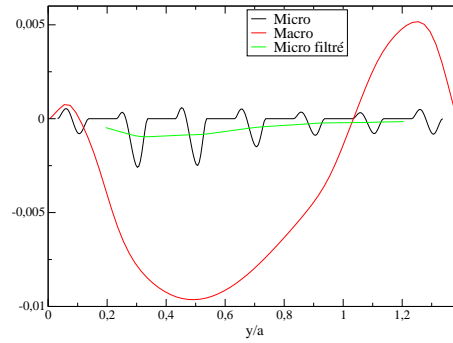


(c) Viscosité turbulente aux échelles microscopique et macroscopique.

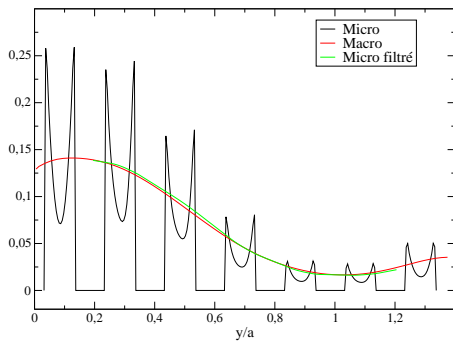
FIG. 8.15 – Comparaison des grandeurs turbulentes.



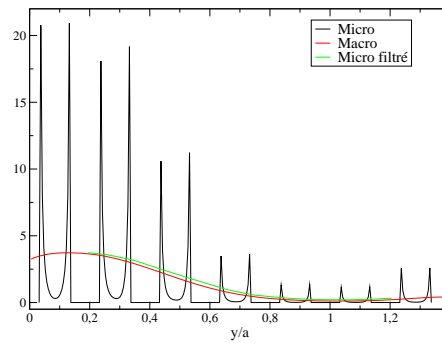
(a) Profils de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 5.5$



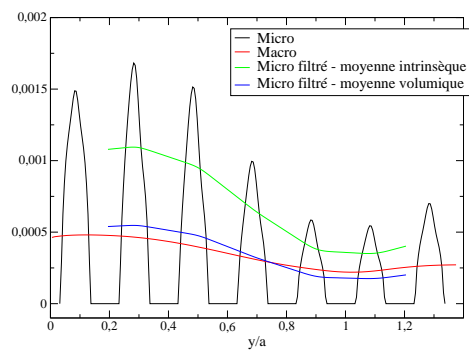
(b) Profils de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 5.5$



(c) Profils de $\langle k \rangle_f$ en $x/a = 5.5$

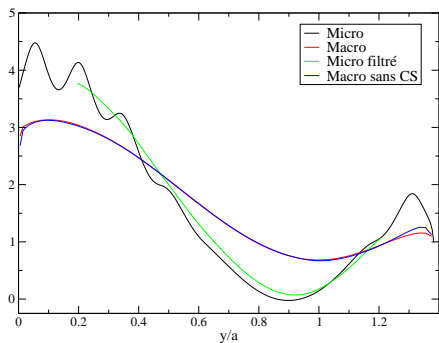


(d) Profils de $\langle \epsilon \rangle_f$ en $x/a = 5.5$

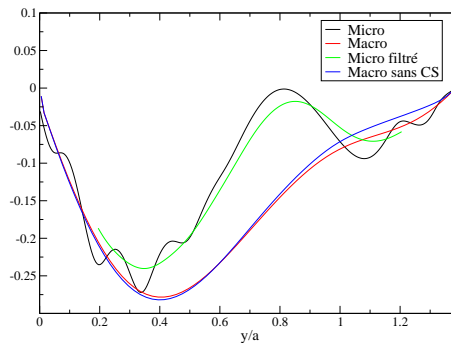


(e) Profils de viscosité turbulente en $x/a = 5.5$

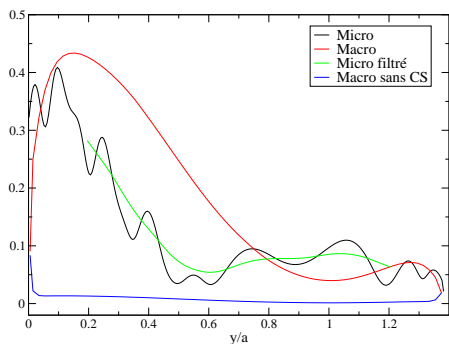
FIG. 8.16 – Comparaison des résultats dans la région poreuse homogène.



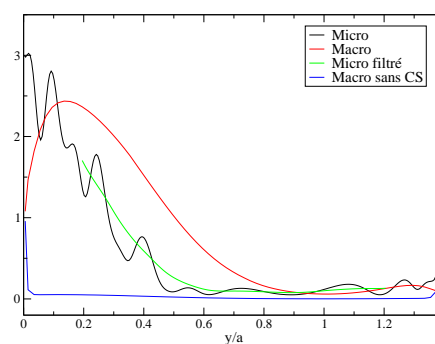
(a) Profils de $\langle u \rangle_f$ en $x/a = 7$



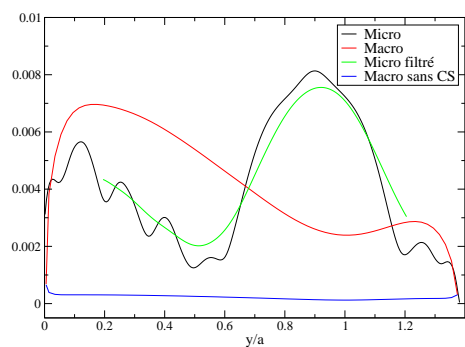
(b) Profils de $\langle v \rangle_f$ en $x/a = 7$



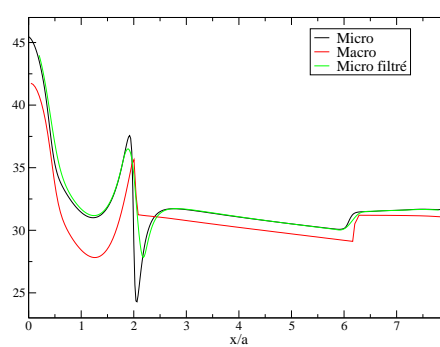
(c) Profils de $\langle k \rangle_f$ en $x/a = 7$



(d) Profils de $\langle \epsilon \rangle_f$ en $x/a = 7$



(e) Profils de viscosité turbulente en $x/a = 7$



(f) Profils de pression en $y/a = 0.7$

FIG. 8.17 – Comparaison des résultats dans la région libre de sortie et comparaison des profils de pression.

les profils des différentes grandeurs turbulentes ne dépendent que du débit une fois que l'écoulement est établi, les grandeurs turbulentes sont correctement capturées à plus de $20 D_h$ de l'entrée. Ainsi, une étude plus approfondie de la région d'entrée dans le cas où l'écoulement moyen est perpendiculaire à l'interface n'est nécessaire que si l'évolution des grandeurs turbulentes dans cette région doit être connue pour étudier d'autres phénomènes.

Dans la **région de sortie du milieu poreux**, nous avons proposé des relations de fermeture pour les conditions de saut à appliquer à l'interface, à la fois pour les écoulements parallèles et perpendiculaires à l'interface. Cependant, les relations de fermeture obtenues ne sont pas valables pour la même position de l'interface. Puisque l'écoulement est principalement perpendiculaire à l'interface en sortie de la région poreuse, nous avons privilégié les relations de fermeture obtenues pour l'écoulement perpendiculaire à l'interface. Le modèle macroscopique permet de prédire les bons ordres de grandeurs des différentes grandeurs physiques. Pour améliorer le modèle macroscopique, une voie possible serait d'étudier les relations de fermeture à utiliser pour l'écoulement parallèle à l'interface, pour cette autre position de l'interface de discontinuité. Néanmoins, le phénomène prépondérant, non capturé par le modèle macroscopique dans cette région de sortie semble plutôt être un phénomène bidimensionnel lié aux interactions entre les différents sillages. Pour capturer ce phénomène, il faudrait complexifier le modèle de turbulence macroscopique utilisé dans la région libre de sortie.

Nous nous intéressons maintenant à la **région poreuse homogène**. Les corrélations que nous avons établies dans le chapitre 3 pour estimer les termes sources de production sous-filtre P_k et P_ϵ des équations de transport de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ sont valables lorsque l'écoulement est établi (cf. Eqs. (3.52f) et (3.52g)). Nous avons vu dans le chapitre 3, que ces corrélations permettent également de rendre compte de la décroissance de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$, lorsque la turbulence est créée par la présence des parois. En revanche, ces corrélations ne permettent a priori pas de rendre compte de la turbulence créée par des recirculations dans la région d'entrée, comme celles qui se développent en entrée du milieu poreux pour le cas test étudié dans la section 8.7.

Nous avons vu que, pour le cas test étudié dans la section 8.7, les grandeurs turbulentes sont correctement capturées à plus de $20 D_h$ de l'entrée, une fois que l'écoulement est établi. Ainsi, on peut considérer que le modèle macroscopique proposé est suffisant. Néanmoins, si l'on souhaite décrire l'évolution des grandeurs turbulentes dans la région d'établissement, il faut proposer un modèle de turbulence macroscopique, qui permette de prendre en compte l'influence de ces recirculations sur les grandeurs turbulentes. Une fois ce modèle proposé, il faudrait également étudier les conditions de saut sur les grandeurs turbulentes associées à ce modèle.

En ce qui concerne l'hypothèse de viscosité turbulente macroscopique (cf. Eq. (3.52e)), cette hypothèse n'a pas pu être testée lors de l'étude de la région poreuse homogène, dans le chapitre 3, car l'influence du terme de diffusion est alors négligeable. En revanche, nous avons pu vérifier cette hypothèse dans le chapitre 7, lors de l'étude de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux. La viscosité turbulente macroscopique obtenue avec cette hypothèse se compare très bien aux résultats des DNS obtenues par [Breugem et Boersma \(2005\)](#).

8.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les conditions de saut à appliquer à l'interface libre/poreux lorsque l'écoulement est turbulent et perpendiculaire à l'interface.

Dans un premier temps, nous avons étudié la forme des conditions de saut à imposer à l'interface en utilisant l'analyse générique des processus interfaciaux. Les conditions de saut obtenues (cf. Eqs. (8.6), (8.12) et (8.13)) sont reliées à des grandeurs en excès qu'il faut évaluer afin de fermer le problème à l'échelle de description macroscopique. Nous nous sommes donc concentrés sur la détermination de ces grandeurs en excès pour une géométrie particulière de la région poreuse, qui correspond à la géométrie

du modèle simplifié de cœur de réacteur étudié dans ce mémoire.

La condition de saut associée à l'équation de bilan de quantité de mouvement (cf. Eq. (8.6)) correspond à un terme de perte de charge singulière. Nous avons alors vérifié que la fermeture des grandeurs en excès à l'aide des corrélations de perte de charge singulière disponibles dans la littérature est bien cohérente avec notre modèle.

En ce qui concerne les paramètres de saut sur les grandeurs turbulentes, nous avons montré que, à la différence du chapitre 7, nous ne pouvions pas les négliger. Avant de proposer une relation de fermeture pour ces paramètres de saut, nous avons dû améliorer le modèle macroscopique de la région libre de sortie. En effet, le modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard n'est pas valide à l'échelle macroscopique dans la région de sortie à cause de la présence de sillages. Nous avons donc présenté un modèle macroscopique qui permet de prendre en compte l'effet de ces sillages sur les grandeurs turbulentes dans la région libre de sortie. Le modèle père dégénérant alors correctement vers deux modèles fils dans les régions homogènes libre et poreuse, nous sommes revenus à l'étude des conditions de saut sur les grandeurs turbulentes.

Nous avons postulé des relations de fermeture pour les grandeurs en excès qui apparaissent dans les membres de droite des conditions de saut sur les grandeurs turbulentes (cf. Eqs. (8.34)). Nous avons alors évalué les valeurs des paramètres de saut associés (C_{ks} et $C_{\epsilon s}$) pour une position particulière de l'interface de discontinuité, $y_M = y_{\text{nom}} + D_h$. Cette position de l'interface de discontinuité correspond à la fin de la zone de variation de la porosité. Les résultats obtenus à l'échelle macroscopique pour l'étude de l'écoulement perpendiculaire à l'interface, en utilisant le modèle de turbulence $k - \epsilon$ macroscopique de la zone poreuse, le modèle macroscopique de la région libre adapté à la région de sillages et les conditions de saut sur les grandeurs turbulentes sont très satisfaisants (voir la figure 8.13).

Après avoir récapitulé les conditions de saut obtenues pour les écoulements turbulents mono dimensionnels dans la section 8.6, nous avons étudié dans la section 8.7 un écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur de réacteur. Le modèle macroscopique, qui combine les résultats obtenus dans les chapitres 3 et 7 et les sections 1 à 5 du chapitre 8, permet d'obtenir une très bonne description générale de l'écoulement. En particulier, il permet, comme dans le cas laminaire, de prédire de façon très précise les répartitions de débit dans l'ensemble du domaine. Les profils des différentes grandeurs turbulentes moyennées sont également très bien capturés dans la région poreuse homogène, une fois que l'écoulement est établi, *i.e.* à plus de $20 D_h$ de l'entrée environ. Dans la région libre de sortie, le modèle macroscopique donne accès aux bons ordres de grandeurs des différentes grandeurs physiques, mais il n'est pas capable de capturer des effets d'origine sous-filtre bidimensionnels.

Chapitre 9

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse s’inscrit dans un programme d’étude à long terme dont le but est de parvenir à simuler numériquement l’écoulement dans l’ensemble du cœur d’un réacteur nucléaire en utilisant des approches multi-échelles. L’utilisation d’approches multi-échelles est nécessaire car toutes les parties du cœur d’un réacteur nucléaire ne peuvent et ne doivent pas être résolues avec la même échelle de description. En effet, d’une part le nombre de degrés de liberté nécessaire à la description de la structure complexe de la région combustible est trop important pour effectuer des simulations numériques fines dans l’ensemble du cœur. D’autre part, et contrairement à d’autres régions du cœur, la connaissance fine de l’écoulement dans cette région combustible n’est pas nécessaire pour décrire l’écoulement dans l’ensemble du cœur.

Nous avons choisi d’aborder cette étude en décrivant l’écoulement dans la région combustible du cœur de réacteur à l’aide d’une description macroscopique, basée sur une modélisation de type milieu poreux. L’écoulement étant turbulent au sein de la région combustible du cœur de réacteur, cette approche nécessite de disposer d’un modèle de turbulence à l’échelle macroscopique pour modéliser l’écoulement dans la région combustible. De plus, afin de simuler l’écoulement dans l’ensemble du cœur de réacteur, cette approche nécessite également de disposer de conditions de raccord entre le modèle macroscopique de la région poreuse et le modèle “standard” utilisé dans les régions libres du cœur.

Pour modéliser la turbulence à l’échelle de description macroscopique, nous avons choisi de nous appuyer sur les modèles macroscopiques de la littérature qui combinent des modèles de turbulence de type RANS et la méthode de prise de moyenne volumique. En effet, cette approche permet de dissocier les deux étapes de fermeture, turbulence/milieu poreux, ce qui simplifie l’étude du problème. Néanmoins, les relations de fermeture proposées dans la littérature pour les termes non fermés des équations de transport de k et ϵ à l’échelle macroscopique et obtenues en effectuant des simulations numériques sur des cellules élémentaires, ne sont pas adaptées à la géométrie de la région combustible. Nous avons donc proposé, dans le chapitre 3, des relations de fermeture adaptées aux géométries de la région combustible. La physique de l’écoulement étant relativement simple pour les géométries étudiées, nous nous sommes à la fois appuyés sur des simulations numériques réalisées sur des cellules élémentaires et sur la connaissance de la physique de l’écoulement.

Dans la suite du mémoire, nous nous sommes concentrés sur l’étude des conditions de saut à une interface libre/poreux. Les questions qui se posent concernent :

- la forme des conditions de saut à imposer à l’interface : quelles sont les grandeurs physiques qui sont continues à l’interface libre/poreux ? Quelles sont celles qui présentent une discontinuité ? Pourquoi ?
- la valeur des paramètres de saut associés à ces conditions de saut : est-ce que ces paramètres de saut sont des grandeurs intrinsèques ? Comment détermine-t-on leurs valeurs ?

- la localisation de l'interface de discontinuité.

Pour aborder ces questions, nous avons choisi d'utiliser une méthodologie qui repose sur l'utilisation de trois niveaux de description de l'interface (microscopique, mésoscopique et macroscopique) et deux étapes de changement d'échelle. Ainsi, cette approche permet de dériver les conditions de saut à appliquer à l'échelle de description macroscopique de l'interface en partant de ce qui est connu à l'échelle de description microscopique. L'étude de ce problème étant complexe, nous avons tout d'abord étudié le cas des écoulements laminaires.

Les questions soulevées précédemment sont associées à la deuxième étape de changement d'échelle (passage méso/macro). Nous nous sommes donc essentiellement focalisés sur l'étude du changement d'échelle méso/macro. Ayant de plus constaté une forte analogie entre l'étude de ce changement d'échelle et l'étude des interfaces pour les écoulements diphasiques, nous avons transposé les méthodes de changement d'échelle usuelles pour l'étude des écoulements diphasiques, (analyse générique des processus interfaciaux et méthode des développements asymptotiques raccordés) à l'étude de l'interface libre/poreux.

Ainsi, nous avons mené une étude analytique poussée de l'écoulement de Poiseuille au-dessus d'un milieu poreux en utilisant à la fois la méthode des développements asymptotiques raccordés et l'analyse générique des processus interfaciaux. L'utilisation de ces deux méthodes nous a permis de beaucoup mieux comprendre la signification physique des conditions de saut à l'interface libre/poreux. Elle a également permis de montrer que :

- la condition de saut sur la composante tangentielle du gradient de vitesse est associée à un phénomène d'ordre 1 en ε . Ainsi, si l'on souhaite décrire des expériences où la valeur de ε est très petite, ces conditions de saut ne sont pas nécessaires.
- les paramètres de saut ne sont pas des grandeurs intrinsèques pour l'interface libre/poreux. Leur valeur dépend de la position de l'interface.
- la valeur des paramètres de saut peut-être reliée à des grandeurs intrinsèques à l'interface si on utilise la méthode des développements asymptotiques raccordés. Elle peut également être calculée directement pour une position de l'interface donnée, après avoir postulé une relation de fermeture en utilisant l'analyse générique des processus interfaciaux.

Un bilan plus exhaustif de l'étude laminaire est présenté page 128.

Nous avons ensuite étudié les conditions de saut à l'interface libre/poreux pour le cas des écoulements turbulents. Pour mener cette étude, nous nous sommes appuyés sur les connaissances que nous avons acquises lors de l'étude laminaire concernant les différentes méthodes de changement d'échelle. Par manque de temps, nous avons uniquement utilisé l'analyse générique des processus interfaciaux pour déterminer les conditions de saut à imposer à l'interface libre/poreux pour les écoulements turbulents. Nous n'avons pas utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés. En utilisant l'analyse générique des processus interfaciaux, les relations de saut obtenues sont des relations de saut *exactes*, mais non fermées, qui s'expriment en fonction de grandeurs en excès.

En ce qui concerne les conditions de saut associées à l'équation de bilan de quantité de mouvement, nous obtenons deux conditions de saut : une condition de saut sur la composante tangentielle du tenseur des contraintes visqueuses projeté sur la direction normale à l'interface et une condition de saut sur la charge, $p/\rho + u^2/2$ (cf. Eqs. (8.37)). Notre analyse ne nous donnant pas d'information sur le saut de la composante normale du tenseur des contraintes visqueuses projeté sur la direction normale à l'interface, nous supposons que le résultat obtenu dans le cas laminaire est également valable dans le cas turbulent (cf. Eq. (8.38)). En ce qui concerne les grandeurs turbulentes, nous avons montré que la condition de saut à imposer à l'interface porte à la fois sur le terme convectif et le terme diffusif (cf. Eqs. (8.39)). Nous soulignons que dans le cas où l'écoulement est parallèle à l'interface, le terme convectif est nul.

Les relations de saut (8.37) et (8.39) n'étant pas fermées, nous avons proposé des relations de fermeture pour les membres de droite de ces équations pour des géométries données du milieu poreux et des positions particulières de l'interface (cf bilan page 180). Les résultats obtenus en utilisant ces relations de saut pour les études mono-dimensionnelles des chapitres 7 et 8 sont très bons. Cette approche nous a également permis de réaliser une première étude d'un écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur de réacteur en utilisant notre modèle macroscopique. Le modèle macroscopique permet de prédire de façon très précise les répartitions de débit ainsi que les profils des différentes grandeurs turbulentes dans la région poreuse homogène. Il permet également d'avoir accès aux bons ordres de grandeurs des différentes grandeurs physiques dans la région libre de sortie.

Néanmoins, les résultats obtenus pour les conditions de saut dans le cas turbulent sont moins généraux que ceux obtenus dans le cas laminaire. Une étude à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés devrait permettre d'approfondir ces résultats. En particulier, elle devrait permettre d'étudier l'ordre en ε auquel interviennent les différentes relations de saut. Nous pensons par exemple que les termes convectif et diffusif n'interviennent pas au même ordre dans les relations de saut sur les grandeurs turbulentes. Elle devrait également permettre d'étudier les relations de fermeture utilisées pour modéliser la valeur des grandeurs en excès et de relier la valeur des paramètres de saut obtenus à des grandeurs intrinsèques à l'interface. Nous pourrions alors voir s'il est licite d'utiliser les mêmes paramètres de saut pour les conditions de saut sur la vitesse et les grandeurs turbulentes. Et enfin, cette étude pourrait permettre d'étudier l'influence de la position de l'interface sur la valeur des paramètres de saut.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont multiples. Tout d'abord, cette étude constitue une première étape vers la simulation de l'écoulement dans l'ensemble du cœur d'un réacteur en utilisant des méthodes multi-échelles. Elle a permis de soulever la question des conditions de raccord à utiliser entre le modèle macroscopique de la région poreuse et le modèle "standard" utilisé dans les régions libres du cœur.

De plus, cette étude a permis d'apporter une meilleure compréhension sur l'origine physique des conditions de saut à imposer à une interface libre/poreux. Nous pensons que la méthodologie que nous avons mis en œuvre pour réaliser cette étude peut-être transposée à l'étude d'une large classe de problèmes où les conditions de saut à l'interface libre/poreux doivent être spécifiées : transport d'un scalaire passif, transport de la température, étude de problèmes de convection naturelle, etc.

Cette transposition devrait être relativement aisée dans l'étude de problèmes où (i) le modèle de la région poreuse est obtenu par une méthode de type prise de moyenne volumique et où (ii) le modèle père, obtenu en appliquant la méthode de prise de moyenne volumique à l'ensemble du domaine, dégénère simplement vers le modèle "standard" associé à la région libre.

Dans le cas laminaire, ces deux conditions sont vérifiées. En revanche, dans le cas turbulent que nous avons étudié, la deuxième condition n'est pas vérifiée et nous avons du proposer un modèle macroscopique pour modéliser l'écoulement dans la région libre de sillages.

Nous soulignons que la solution proposée dans ce mémoire repose sur une modélisation de type $k - \epsilon$ de la turbulence. Le résultat obtenu est très satisfaisant. La description de la région combustible à l'aide d'un modèle de type milieu poreux permet de réduire grandement le nombre de degrés de liberté à utiliser et les résultats obtenus avec le modèle macroscopique se comparent très bien aux simulations de référence réalisées à l'échelle microscopique avec le modèle $k - \epsilon$ standard.

Cependant, les simulations réalisées dans les régions libres du cœur de réacteur ne sont généralement pas effectuées avec des modèles de turbulence de type $k - \epsilon$. Elles sont effectuées avec des modèles de turbulence plus riches, de type LES. Il faudrait donc transposer les résultats obtenus dans cette étude, à des modèles macroscopiques reposant sur une modélisation de type LES. Malheureusement, la transpo-

sition de notre méthodologie à des modèles de turbulence de type LES ne semble pas directe. En effet, la définition d'un modèle fils dans la région poreuse homogène reposant sur une modélisation de type LES n'apparaît pas comme triviale.

Annexe A

Estimation du coût de calcul pour un cœur de réacteur nucléaire

Dans cette annexe, nous cherchons à estimer le coût de calcul d'une simulation de l'écoulement dans l'ensemble d'un cœur de réacteur nucléaire, lorsque la structure de la région combustible doit être décrite. Pour effectuer cette estimation, nous nous appuyons sur les coûts de calculs des simulations qui sont réalisées à ce jour.

Actuellement, des simulations numériques basées sur une approche LES sont utilisées pour étudier l'écoulement dans les branches d'entrées du cœur ainsi que dans le plénum inférieur (voir la figure A.1). Pour donner un ordre de grandeur du nombre de cellules utilisées et du coût de ces calculs, nous prenons l'exemple de la simulation réalisée par [Bieder et Graffard \(2006\)](#). Dans cette étude, [Bieder et Graffard \(2006\)](#) s'intéressent à la prédiction de la concentration de Bore dans l'entrée d'un cœur de REP lors de conditions accidentelles. Le maillage de cette simulation comporte 20 millions de noeuds. Le temps de calcul nécessaire pour obtenir un transitoire de 180 secondes est de 45 jours sur 64 processeurs, soit environ 70.000 heures CPU. Le nombre de pas de temps calculé est de 250.000, ce qui revient à environ 10^3 secondes CPU par pas de temps de calcul et correspond à un pas de temps d'environ $7 \cdot 10^{-4}$ s.



FIG. A.1 – Champ instantané de concentration de Bore. D'après [Bieder et Graffard \(2006\)](#).

Pour estimer le coût d'un calcul similaire dans l'ensemble du cœur, nous commençons par évaluer le nombre de cellules nécessaires pour décrire la structure de la région qui contient les assemblages de crayons combustibles. Nous estimons qu'il faut environ 100 nœuds (10×10) pour décrire l'espace inter-crayons dans la direction transverse aux crayons et 100 nœuds dans la direction longitudinale aux crayons. Ainsi, il faut environ 10^4 mailles pour décrire un crayon. La région combustible du cœur contenant environ 450.000 crayons (300×150), le nombre de mailles nécessaire pour décrire la structure de la région combustible est d'environ $4.5 \cdot 10^9$. Ainsi, le nombre de mailles nécessaire pour décrire l'ensemble du cœur est deux ordres de grandeur au-dessus du nombre de nœuds des maillages utilisés aujourd'hui.

Or, on peut estimer que le temps de résolution d'un pas de temps de calcul varie comme $n \log n$, où n est le nombre de degrés de liberté du problème. Ainsi, en utilisant le fait que pour 20 millions de mailles, le temps de résolution d'un pas de temps de calcul est de 10^3 secondes CPU, on en déduit que pour $4.5 \cdot 10^9$ mailles, le temps de résolution d'un pas de temps de calcul sera d'environ $3 \cdot 10^5$ secondes CPU, soit 300 fois plus que pour le calcul présenté par [Bieder et Graffard \(2006\)](#).

Il faut de plus prendre en compte la valeur du pas de temps du schéma de résolution, qui est calculé à partir de critères de stabilité et est directement lié au pas du maillage. Le maillage étant extrêmement fin dans la région combustible afin de pouvoir décrire l'espace inter-crayon, on s'attend à ce que la valeur du pas de temps chute d'un ou deux ordres de grandeur.

Ainsi, le coût d'un calcul similaire à celui présenté par [Bieder et Graffard \(2006\)](#), mais réalisé dans l'ensemble du cœur serait entre mille fois à dix mille fois plus cher. On parlerait alors de centaines d'années de calcul si on utilise toujours 64 processeurs.

Annexe B

Éléments de calcul tensoriel dans le repère lié à l'interface

Dans cette annexe, nous donnons les définitions et résultats élémentaires nécessaires pour mener l'étude du chapitre 6 dans le système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) induit par l'interface. Dans la première section, nous rappelons la définition du système de coordonnées induit par l'interface, la définition des différentes bases associées à ce système de coordonnées, ainsi que les conventions de notation des composantes des vecteurs dans ces différentes bases. Dans la deuxième section, nous rappelons l'écriture des opérateurs gradient, divergence et laplacien dans ce système de coordonnées. Pour donner ces expressions nous avons utilisé les coefficients de Christoffel dont la définition ainsi que les valeurs sont données dans la troisième section. Et enfin, nous rappelons brièvement dans la dernière section la définition des opérateurs surfaciques ∇_s et \mathbf{I}_s qui sont utilisés dans la section 6.3 du chapitre 6.

B.1 Système de coordonnées associée à l'interface

Soit (ξ_1, ξ_2, ξ_3) le système de coordonnées induit par l'interface tel que (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface. Le point courant M s'exprime en fonction de ces coordonnées par la relation :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{r}_0(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{n} \quad (\text{B.1})$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface (Anderson *et al.*, 2001; Garrigues, 1999; Aris, 1962). On note $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ les vecteurs unitaires tangents à l'interface, parallèles aux directions principales de courbure. On rappelle que ces deux directions sont orthogonales (Garrigues, 1999). La base naturelle $\{\mathbf{g}_i\}$ associée à ce système de coordonnées est définie par :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \xi_i} \quad (\text{B.2})$$

Elle vérifie :

$$\mathbf{g}_1 = (1 - \xi_3 \kappa_1) \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{g}_2 = (1 - \xi_3 \kappa_2) \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{n} \quad (\text{B.3})$$

où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales (Anderson *et al.*, 2001; Garrigues, 1999).

Soit \mathbf{V} un vecteur, on a $\mathbf{V} = V^i \mathbf{g}_i$. Les nombres V^i sont appelés *composantes contravariantes* du vecteur \mathbf{V} sur la base $\{\mathbf{g}_i\}$. On définit la base duale $\{\mathbf{g}^i\}$ de la base naturelle par les relations suivantes :

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (\text{B.4})$$

Dans la base duale, le vecteur \mathbf{V} s'écrit : $\mathbf{V} = V_i \mathbf{g}^i$. Les nombres V_i sont appelés *composantes covariantes* du vecteur \mathbf{V} . Le tenseur métrique est défini par :

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (\text{B.5})$$

Les facteurs d'échelles sont définis par :

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{B.6})$$

Ils vérifient :

$$h_1 = |1 - \xi_3 \kappa_1|, \quad h_2 = |1 - \xi_3 \kappa_2|, \quad h_3 = 1 \quad (\text{B.7})$$

La base naturelle a le défaut de ne pas être normée. Pour éviter cet inconvénient, on introduit la base naturelle normée, dite encore base physique :

$$\left\{ \tilde{\mathbf{g}}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{\|\mathbf{g}_i\|} \right\} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}) \quad (\text{B.8})$$

Les composantes du vecteur \mathbf{V} dans cette base physique sont notées $V(i)$. Ainsi, les composantes du vecteur vitesse \mathbf{u} s'écrivent dans cette base :

$$\mathbf{u} = u(i) \tilde{\mathbf{g}}_i \quad (\text{B.9})$$

Elles vérifient les relations suivantes :

$$u(i) = h_i u^i = \frac{u_i}{h_i} \quad (\text{B.10})$$

B.2 Opérateurs de dérivation

B.2.1 Variations de la base naturelle

Les dérivées des vecteurs de base s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi_j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (\text{B.11})$$

Les nombres Γ_{ji}^i sont les coefficients de Christoffel. La définition des coefficients de Christoffel ainsi que leur calcul dans la base naturelle sont présentés dans l'annexe B.3.

B.2.2 Opérateur gradient

Le gradient de ψ s'exprime de la façon suivante (Garrigues, 2001, Chap 2) :

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{g}^i = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{g}_i \quad (\text{B.12})$$

En particulier, il vient :

$$\nabla \psi \cdot \tilde{\mathbf{g}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \quad (\text{B.13})$$

Le gradient d'un vecteur \mathbf{u} s'exprime de la façon suivante (Garrigues, 2001, Chap 2) :

$$\nabla \mathbf{u} = \left(u_{,i}^j + u^k \Gamma_{ki}^j \right) \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^i \quad (\text{B.14})$$

On en déduit que le gradient du vecteur \mathbf{u} contracté avec le vecteur normal à l'interface s'écrit,

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_{,3}^j \mathbf{g}_j + u^1 \Gamma_{13}^1 \mathbf{g}_1 + u^2 \Gamma_{23}^2 \mathbf{g}_2 \quad (\text{B.15})$$

car dans l'expression (B.14), Γ_{k3}^j est non nul uniquement pour Γ_{13}^1 et Γ_{23}^2 (voir annexe B.3). De plus, en utilisant les composantes des vecteurs associées à la base naturelle normée et en exprimant le résultat dans la base naturelle normée, il reste simplement :

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u(j)}{\partial \xi_3} \tilde{\mathbf{g}}_j \quad (\text{B.16})$$

B.2.3 Opérateur divergence

Par définition, la divergence d'un vecteur \mathbf{u} s'exprime de la façon suivante (Garrigues, 2001, Chap 2) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}^i \quad (\text{B.17})$$

En écrivant le vecteur \mathbf{u} sous forme contravariante et en utilisant la relation (B.11) sur la dérivée des vecteurs de base, il vient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u^i_{,i} + u^j \Gamma^i_{ji} \quad (\text{B.18})$$

Comme certains Γ^i_{ji} sont nuls (voir annexe B.3), il vient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u^2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u^3}{\partial \xi_3} + u^1(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) + u^2(\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22}) + u^3(\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32}) \quad (\text{B.19})$$

En utilisant les composantes des vecteurs associées à la base naturelle normées et les expressions des coefficients de Christoffel, on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[h_2 \frac{\partial u(1)}{\partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial u(2)}{\partial \xi_2} + h_1 h_2 \frac{\partial u(3)}{\partial \xi_3} - u(3)(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1) - \xi_3 \left(u(1) \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} + u(2) \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \right) \right] \quad (\text{B.20})$$

B.2.4 Opérateur laplacien

Le laplacien de \mathbf{u} s'exprime de la façon suivante (Garrigues, 2001; Lecorps, 2001) :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = g^{ij} (\mathbf{u}_{,ij} - \mathbf{u}_{,\alpha} \Gamma^{\alpha}_{ij}) \quad (\text{B.21})$$

Afin d'expliciter cette expression pour notre choix de coordonnées, on commence par développer l'expression de $\mathbf{u}_{,\alpha}$

$$\mathbf{u}_{,\alpha} = (u^m \mathbf{g}_m)_{,\alpha} = u^m_{,\alpha} \mathbf{g}_m + u^m \Gamma^k_{m\alpha} \mathbf{g}_k \quad (\text{B.22})$$

Puis celle de $\mathbf{u}_{,ij}$:

$$\mathbf{u}_{,ij} = (u^k \mathbf{g}_k)_{,ij} = u^k_{,ij} \mathbf{g}_k + u^k_{,i} \Gamma^p_{kj} \mathbf{g}_p + u^k_{,j} \Gamma^{\beta}_{ki} \mathbf{g}_{\beta} + u^k (\Gamma^l_{kj} \mathbf{g}_l)_{,i} \quad (\text{B.23})$$

De plus, les termes g^{ij} sont non nuls seulement lorsque $i = j$. En utilisant (B.22) et (B.23) et la remarque précédente, l'expression (B.21) devient :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = g^{ii} \left[\underbrace{u^k_{,ii} \mathbf{g}_k}_I + \underbrace{u^k (\Gamma^l_{ki} \mathbf{g}_l)_{,i}}_{II} + \underbrace{2u^k_{,i} \Gamma^p_{ki} \mathbf{g}_p}_{III} - \underbrace{(u^m_{,\alpha} \mathbf{g}_m + u^m \Gamma^k_{m\alpha} \mathbf{g}_k) \Gamma^{\alpha}_{ii}}_{IV} \right] \quad (\text{B.24})$$

On note que le terme I est le terme habituel que l'on obtient en coordonnées cartésiennes. Comme de nombreux coefficients de Christoffel sont non nuls (voir annexe B.3), il serait trop fastidieux de donner l'expression exacte du laplacien dans ce système de coordonnées. L'objectif étant ensuite de réaliser un développement limité, on n'a besoin pour réaliser l'étude que des termes qui sont en ε^{-2} , en ε^{-1} et d'ordre 0 en ε . On rappelle que le paramètre ε est introduit pour étudier le problème intérieur et qu'il est associé à la coordonnée normale à l'interface $\xi_3 = \varepsilon \tilde{\xi}$. On n'explicité donc que les termes qui seront non nuls jusqu'à l'ordre 0 en ε , une fois que le changement de variable $\xi_3 = \varepsilon \tilde{\xi}$ sera réalisé. Il vient pour le terme II :

$$g^{ii} II = -\frac{\kappa_1^2}{h_1^2} (u^1 \mathbf{g}_1 + u^3 \mathbf{g}_3) - \frac{\kappa_2^2}{h_2^2} (u^2 \mathbf{g}_2 + u^3 \mathbf{g}_3) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.25})$$

De même pour le troisième terme, il vient :

$$g^{ii III} = -\frac{2\kappa_1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1^2} u_{,1}^3 + u_{,3}^1 \right) \mathbf{g}_1 - \frac{2\kappa_2}{h_2} \left(\frac{1}{h_1^2} u_{,2}^3 + u_{,3}^2 \right) \mathbf{g}_2 + \left(2\frac{\kappa_1}{h_1} u_{,1}^1 + 2\frac{\kappa_2}{h_2} u_{,2}^2 \right) \mathbf{g}_3 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.26})$$

Et pour le quatrième terme :

$$g^{ii IV} = \left(u_{,3}^m \mathbf{g}_m - \frac{\kappa_1}{h_1} u^1 \mathbf{g}_1 - \frac{\kappa_2}{h_2} u^2 \mathbf{g}_2 \right) \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.27})$$

La composante de $\nabla^2 \mathbf{u}$ selon \mathbf{g}_1 s'écrit :

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^1 = g^{ii} u_{,ii}^1 + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{h_1 h_2} u^1 - u_{,3}^1 \left(\frac{3\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) - \frac{2\kappa_1}{h_1^3} u_{,1}^3 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.28})$$

En utilisant les composantes des vecteurs associées à la base naturelle normée, cette expression (B.28) devient :

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^1 = \frac{1}{h_1} \left[\frac{1}{h_1^2} u(1)_{,11} + \frac{1}{h_2^2} u(1)_{,22} + u(1)_{,33} - \frac{2\kappa_1}{h_1^2} u(3)_{,1} - u(1)_{,3} \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) - \frac{\kappa_1^2}{h_1^2} u(1) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.29})$$

De même, la composante de $\nabla^2 \mathbf{u}$ selon \mathbf{g}_2 s'écrit :

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^2 = \frac{1}{h_2} \left[\frac{1}{h_1^2} u(2)_{,11} + \frac{1}{h_2^2} u(2)_{,22} + u(2)_{,33} - \frac{2\kappa_2}{h_2^2} u(3)_{,2} - u(2)_{,3} \left(\frac{\kappa_2}{h_2} + \frac{\kappa_1}{h_1} \right) - \frac{\kappa_2^2}{h_2^2} u(2) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.30})$$

La composante de $\nabla^2 \mathbf{u}$ selon \mathbf{g}_3 s'écrit :

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^3 = g^{ii} u_{,ii}^3 - \left(\frac{\kappa_1^2}{h_1^2} + \frac{\kappa_2^2}{h_2^2} \right) u^3 + \frac{2\kappa_1}{h_1} u_{,1}^1 + \frac{2\kappa_2}{h_2} u_{,2}^2 - u_{,3}^3 \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.31})$$

En utilisant les composantes des vecteurs associées à la base naturelle normée, cette expression (B.31) devient :

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^3 = \frac{1}{h_1^2} u(3)_{,11} + \frac{1}{h_2^2} u(3)_{,22} + u(3)_{,33} - \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) u(3)_{,3} + \frac{2\kappa_1}{h_1^2} u(1)_{,1} + \frac{2\kappa_2}{h_2^2} u(2)_{,2} - \left(\frac{\kappa_1^2}{h_1^2} + \frac{\kappa_2^2}{h_2^2} \right) u(3) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{B.32})$$

Pour l'étude du chapitre 6, nous avons également besoin de connaître les composantes du laplacien de \mathbf{u} en $\xi_3 = 0$. Les expressions des différentes composantes du laplacien obtenues précédemment (B.29), (B.30) et (B.32) ne sont que des expressions approchées. Cependant, pour $\xi_3 = 0$ le terme que l'on a mis sous la forme d'un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ est nul car il provient d'une mise en facteur par ξ_3 . On a donc :

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^1|_{\xi_3=0} = \frac{\partial^2 u(1)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u(1)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u(1)}{\partial \xi_3^2} - 2\kappa_1 \frac{\partial u(3)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(1)}{\partial \xi_3} (\kappa_1 + \kappa_2) - \kappa_1^2 u(1) \quad (\text{B.33a})$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^2|_{\xi_3=0} = \frac{\partial^2 u(2)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u(2)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u(2)}{\partial \xi_3^2} - 2\kappa_2 \frac{\partial u(3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial u(2)}{\partial \xi_3} (\kappa_2 + \kappa_1) - \kappa_2^2 u(2) \quad (\text{B.33b})$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^3|_{\xi_3=0} = \frac{\partial^2 u(3)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u(3)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u(3)}{\partial \xi_3^2} - \frac{\partial u(3)}{\partial \xi_3} (\kappa_1 + \kappa_2) + 2\kappa_1 \frac{\partial u(1)}{\partial \xi_1} + 2\kappa_2 \frac{\partial u(2)}{\partial \xi_2} - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) u(3) \quad (\text{B.33c})$$

B.3 Coefficients de Christoffel

Par définition (Garrigues, 2001) :

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi_j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (\text{B.34})$$

On a également les deux relations (Garrigues, 2001) :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (\text{B.35})$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\mu} (g_{j\mu, i} + g_{i\mu, j} - g_{ij, \mu}) \quad (\text{B.36})$$

Pour le système de coordonnées induit par l'interface (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , les coefficients de Christoffel qui sont non nuls sont :

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{-\kappa_1}{h_1} \quad (\text{B.37a})$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{-\kappa_2}{h_2} \quad (\text{B.37b})$$

$$\Gamma_{11}^3 = \kappa_1 h_1 \quad , \quad \Gamma_{22}^3 = \kappa_2 h_2 \quad (\text{B.37c})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{-\xi_3}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \quad (\text{B.37d})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{-\xi_3}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} \quad (\text{B.37e})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-\xi_3}{h_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_1} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{-\xi_3}{h_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_2} \quad (\text{B.37f})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \xi_3 \frac{h_1}{h_2^2} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_1} \quad , \quad \Gamma_{22}^1 = \xi_3 \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_2} \quad (\text{B.37g})$$

B.4 Opérateurs surfaciques

Quand un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) est défini uniquement sur une surface Σ , il est qualifié de *champ surfacique*. Il est alors possible de définir des opérateurs de gradient et de divergence surfacique pour ce champ surfacique (Garrigues, 1999). Ces définitions peuvent être étendues au cas où l'on a un champ volumique défini dans l'ensemble du domaine, les opérateurs de gradient et de divergence surfacique devant alors être appliqués sur la surface Σ .

Soit \mathbf{n} , le vecteur unitaire normal à la surface Σ . L'opérateur identité sur la surface, \mathbf{I}_s , est défini par :

$$\mathbf{I}_s \hat{=} \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{B.38})$$

Cet opérateur est également un opérateur de projection sur le plan tangent à la surface Σ . En effet, lorsque l'on applique l'opérateur \mathbf{I}_s à un tenseur, on obtient la composante tangentielle de ce tenseur.

Soit \mathbf{T} un tenseur. Le gradient surfacique du tenseur \mathbf{T} , noté $\nabla_s \mathbf{T}$, est défini par :

$$\nabla_s \mathbf{T} \hat{=} \mathbf{I}_s \cdot \nabla \mathbf{T} \quad (\text{B.39})$$

La divergence surfacique du tenseur \mathbf{T} , notée $\nabla_s \cdot \mathbf{T}$, est définie par :

$$\nabla_s \cdot \mathbf{T} \hat{=} \mathbf{I}_s : \nabla \mathbf{T} \quad (\text{B.40})$$

Le théorème de la divergence surfacique (ou théorème de Gauss surfacique) s'écrit :

$$\int_{\partial A} \mathcal{R} d\mathbf{L} = \int_A \nabla_s \cdot (\mathbf{I}_s \mathcal{R}) dS \quad (\text{B.41})$$

où \mathcal{R} est un tenseur d'ordre arbitraire (Edwards *et al.*, 1991).

Annexe C

Étude analytique 3D

Dans cette annexe, nous développons les calculs effectués pour analyser les transferts hydrodynamiques à une interface libre/poreux dans le cas où l'écoulement est tridimensionnel et l'interface est courbe. Pour réaliser cette étude, nous appliquons la méthode des développements asymptotiques raccordés, présentée dans la section 2.3.3, à l'étude du système (6.25). Nous rappelons que dans le cadre de cette étude, le tenseur de perméabilité est supposé diagonal dans le repère induit par l'interface (Eq. (6.26)).

La méthode des développements asymptotiques raccordés a déjà été utilisée dans le chapitre 4 pour étudier les transferts hydrodynamiques à une interface libre/poreux dans le cas où l'écoulement est mono-dimensionnel et parallèle à une interface plane. Même si dans le cas présent les calculs sont très techniques, car effectués dans un système de coordonnées généralisées, les étapes de résolution entre l'étude mono-dimensionnelle et l'étude tridimensionnelle sont extrêmement similaires.

Dans la première section, nous déterminons l'expression des problèmes extérieur et intérieur aux différents ordres en ε , dans le système de coordonnées induit par l'interface. Puis, dans les deux sections suivantes, nous étudions le problème aux ordres 0 et 1 en ε afin de déterminer les conditions de saut à appliquer à l'interface libre/poreux dans le cas où l'écoulement est tridimensionnel et l'interface est courbe.

C.1 Expression du problème étudié dans le système de coordonnées induit par l'interface

Pour exprimer le problème (6.25) dans le système de coordonnées induit par l'interface, il suffit d'être capable d'exprimer les opérateurs gradient, divergence et laplacien dans ce système de coordonnées. Les expressions de ces opérateurs dans le système de coordonnées induit par l'interface sont présentées dans l'annexe B. A partir de ces expressions, nous sommes capables de déduire les problèmes extérieurs et intérieurs aux différents ordres.

C.1.1 Problème extérieur

Dans la région extérieure, les solutions du système (6.25a)-(6.25b) sont recherchées sous la forme :

$$p(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon) = p^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \varepsilon p^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{C.1a})$$

$$u^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon) = u^{(i)0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \varepsilon u^{(i)1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{C.1b})$$

Pour effectuer le développement asymptotique du système (6.25a)-(6.25b), il faut spécifier les variations de la porosité et de la perméabilité dans la région extérieure. Comme dans le cas mono-dimensionnel et afin d'assurer un maximum de généralité à l'étude, nous faisons uniquement l'hypothèse que ϕ et les composantes diagonales du tenseur de perméabilité K_i sont constantes dans chaque région, au moins

jusqu'à l'ordre 2 :

$$\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon) = \phi^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{C.2a})$$

$$1/K_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon) = 1/K_i^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{C.2b})$$

avec

$$\phi^0 = \begin{cases} \phi_p, & \xi_3 < 0 \\ 1, & \xi_3 > 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

$$1/K_i^0 = \begin{cases} K_p/K_i, & \xi_3 < 0 \\ 0, & \xi_3 > 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

A l'ordre 0, le système (6.25a)-(6.25b) s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0 \quad (\text{C.5a})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^0) = \phi^0 \nabla p^0 + \frac{1}{Da} \phi^0 (\mathbf{K}^0)^{-1} \mathbf{u}^0 \quad (\text{C.5b})$$

Et à l'ordre 1 :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^1 = 0 \quad (\text{C.6a})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^1) = \phi^0 \nabla p^1 + \frac{1}{Da} \phi^0 (\mathbf{K}^0)^{-1} \mathbf{u}^1 \quad (\text{C.6b})$$

C.1.2 Problème intérieur

Pour étudier le problème intérieur, une nouvelle variable d'espace est introduite :

$$\check{\xi} \triangleq \frac{\xi_3}{\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad \varepsilon \triangleq \frac{\delta}{h} \quad (\text{C.7})$$

Le système (6.25a)-(6.25b) est réécrit en utilisant cette nouvelle variable d'espace. Soit ψ une grandeur physique. On note :

$$\check{\psi}(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}) = \psi(\xi_1, \xi_2, \frac{\xi_3}{\varepsilon}) \quad (\text{C.8})$$

Dans la région intérieure, les solutions du système (6.25a)-(6.25b) sont recherchées sous la forme :

$$\check{p}(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}, \varepsilon) = \check{p}^0(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}) + \varepsilon \check{p}^1(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}) + \varepsilon^2 \check{p}^2(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\text{C.9a})$$

$$\check{u}(i)(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}, \varepsilon) = \check{u}^0(i)(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}) + \varepsilon \check{u}^1(i)(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}) + \varepsilon^2 \check{u}^2(i)(\xi_1, \xi_2, \check{\xi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (\text{C.9b})$$

La porosité et la perméabilité varient fortement dans la zone de transition dans la direction normale à l'interface. Nous faisons l'hypothèse que ces variations sont en ξ_3/ε . Cela signifie simplement que ces variations sont rapides dans la direction normale à l'interface et il s'ensuit que $\check{\phi}$ et \check{K}_i ne dépendent pas de ε .

C.1.2.1 Équation de continuité

D'après l'équation (B.20) de l'annexe B, l'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla \cdot \check{\mathbf{u}} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[h_2 \frac{\partial \check{u}(1)}{\partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial \check{u}(2)}{\partial \xi_2} + h_1 h_2 \frac{\partial \check{u}(3)}{\varepsilon \partial \check{\xi}} - \check{u}(3)(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1) - \varepsilon \check{\xi} \left(\check{u}(1) \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} + \check{u}(2) \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \right) \right] = 0 \quad (\text{C.10})$$

En injectant la relation (C.9b) dans l'équation (C.10) multipliée par $h_1 h_2$ et en utilisant le développement limité de h_i au premier ordre :

$$h_i = 1 - \varepsilon \check{\xi} \check{\kappa}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2 \quad (\text{C.11})$$

l'équation de continuité devient à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \check{u}^0(3)}{\partial \check{\xi}} = 0 \quad (\text{C.12a})$$

Puis, en utilisant la relation (C.12a), l'équation de continuité s'écrit de la façon suivante à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \check{u}^0(1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \check{u}^0(2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \check{u}^1(3)}{\partial \check{\xi}} - \check{u}^0(3)(\kappa_1 + \kappa_2) = 0 \quad (\text{C.12b})$$

et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{u}^1(1)}{\partial \xi_1} - \check{\xi} \check{\kappa}_2 \frac{\partial \check{u}^0(1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \check{u}^1(2)}{\partial \xi_2} - \check{\xi} \check{\kappa}_1 \frac{\partial \check{u}^0(2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \check{u}^2(3)}{\partial \check{\xi}} - \check{\xi}(\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\partial \check{u}^1(3)}{\partial \check{\xi}} \\ - \check{u}^1(3)(\kappa_1 + \kappa_2) + 2 \check{\xi} \check{\kappa}_1 \check{\kappa}_2 \check{u}^0(3) - \check{\xi} \left(\check{u}^0(1) \frac{\partial \check{\kappa}_2}{\partial \xi_1} + \check{u}^0(2) \frac{\partial \check{\kappa}_1}{\partial \xi_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.12c})$$

C.1.2.2 Équation de quantité de mouvement

Pour étudier l'équation de quantité de mouvement dans la région intérieure, l'équation de quantité de mouvement est projetée sur les vecteurs de la base duale $\{\mathbf{g}^i\}$ de la base naturelle. En utilisant l'expression du gradient donnée en annexe B (B.12), ainsi que la relation (B.10), il vient pour le terme de droite de l'équation de quantité de mouvement :

$$\left(\check{\phi} \check{\nabla} \check{p} + \frac{1}{Da} \check{\phi} \check{\mathbf{K}}^{-1} \check{\mathbf{u}} \right) \cdot \mathbf{g}^i = \frac{\check{\phi}}{h_i^2} \frac{\partial \check{p}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{\check{K}_i} \frac{\check{u}(i)}{h_i} \quad (\text{C.13})$$

Équation de quantité de mouvement projetée sur \mathbf{g}^1

En utilisant l'expression du laplacien projetée sur \mathbf{g}^1 donnée dans l'annexe B (Eq. B.29), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \check{u}(1)}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \check{u}(1)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \check{u}(1)}{\varepsilon^2 \partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}(1)}{\varepsilon \partial \check{\xi}} \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) - \frac{2\kappa_1}{h_1^2} \frac{\partial \check{u}(3)}{\partial \xi_1} - \frac{\kappa_1^2}{h_1^2} \check{u}(1) = \\ \frac{\check{\phi}}{h_1} \frac{\partial \check{p}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{\check{K}_1} \check{u}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

En injectant les relations (C.9a) et (C.9b) dans l'équation précédente, l'équation de quantité de mouvement projetée sur \mathbf{g}^1 s'écrit à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^0(1)}{\partial \check{\xi}^2} = 0 \quad (\text{C.15a})$$

à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^1(1)}{\partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}^0(1)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) = 0 \quad (\text{C.15b})$$

et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \check{u}^0(1)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^0(1)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^2(1)}{\partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}^1(1)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) - \check{\xi}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \frac{\partial \check{u}^0(1)}{\partial \check{\xi}} - 2\kappa_1 \frac{\partial \check{u}^0(3)}{\partial \xi_1} \\ - \kappa_1^2 \check{u}^0(1) = \check{\phi} \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{\check{K}_1} \check{u}^0(1) \end{aligned} \quad (\text{C.15c})$$

Équation de quantité de mouvement projetée sur \mathbf{g}^2

Les deux directions tangentes étant équivalentes, il vient par analogie avec les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \check{u}(2)}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \check{u}(2)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \check{u}(2)}{\varepsilon^2 \partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}(2)}{\varepsilon \partial \check{\xi}} \left(\frac{\kappa_2}{h_2} + \frac{\kappa_1}{h_1} \right) - \frac{2\kappa_2}{h_2^2} \frac{\partial \check{u}(3)}{\partial \xi_2} - \frac{\kappa_2^2}{h_2^2} u(2) = \\ \frac{\check{\phi}}{h_2} \frac{\partial \check{p}}{\partial \xi_2} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{K_2} \check{u}(2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

En injectant les relations (C.9a) et (C.9b) dans l'équation précédente, l'équation de quantité de mouvement projetée sur \mathbf{g}^2 s'écrit à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^0(2)}{\partial \check{\xi}^2} = 0 \quad (\text{C.17a})$$

à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^1(2)}{\partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}^0(2)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) = 0 \quad (\text{C.17b})$$

et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \check{u}^0(2)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^0(2)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^2(2)}{\partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}^1(2)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) - \check{\xi} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \frac{\partial \check{u}^0(2)}{\partial \check{\xi}} - 2\kappa_2 \frac{\partial \check{u}^0(3)}{\partial \xi_2} \\ - \kappa_2^2 \check{u}^0(2) = \frac{\check{\phi}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_2} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{K_2} \check{u}^0(2) \end{aligned} \quad (\text{C.17c})$$

Équation de quantité de mouvement projetée sur \mathbf{g}^3

En utilisant l'expression du laplacien projetée sur \mathbf{g}^3 donnée dans l'annexe B (Eq. B.32), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \check{u}(3)}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \check{u}(3)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \check{u}(3)}{\varepsilon^2 \partial \check{\xi}^2} - \left(\frac{\kappa_1}{h_1} + \frac{\kappa_2}{h_2} \right) \frac{\partial \check{u}(3)}{\varepsilon \partial \check{\xi}} + \frac{2\kappa_1}{h_1^2} \frac{\partial \check{u}(1)}{\partial \xi_1} + \frac{2\kappa_2}{h_2^2} \frac{\partial \check{u}(2)}{\partial \xi_2} \\ - \left(\frac{\kappa_1^2}{h_1^2} + \frac{\kappa_2^2}{h_2^2} \right) \check{u}(3) = \frac{\check{\phi}}{\varepsilon} \frac{\partial \check{p}}{\partial \check{\xi}} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{K_3} \check{u}(3) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

En injectant les relations (C.9a) et (C.9b) dans l'équation précédente, l'équation de quantité de mouvement projetée sur \mathbf{g}^3 s'écrit à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^0(3)}{\partial \check{\xi}^2} = 0 \quad (\text{C.19a})$$

à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^1(3)}{\partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}^0(3)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{\check{\phi}}{\partial \check{\xi}} \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \check{\xi}} \quad (\text{C.19b})$$

et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \check{u}^0(3)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^0(3)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^2(3)}{\partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}^1(3)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) - \check{\xi} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \frac{\partial \check{u}^0(3)}{\partial \check{\xi}} + 2\kappa_1 \frac{\partial \check{u}^0(1)}{\partial \xi_1} \\ + 2\kappa_2 \frac{\partial \check{u}^0(2)}{\partial \xi_2} - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \check{u}^0(3) = \frac{\check{\phi}}{\partial \check{\xi}} \frac{\partial \check{p}^1}{\partial \check{\xi}} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{K_3} \check{u}^0(3) \end{aligned} \quad (\text{C.19c})$$

C.1.3 Raccord entre la région intérieure et les régions extérieures

Les conditions de raccords s'écrivent :

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow \pm\infty} \check{f}^0 = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} f^0 \quad (\text{C.20a})$$

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow \pm\infty} \check{f}^1 = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} f^1 + \check{\xi} \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{df^0}{d\xi_3} \quad (\text{C.20b})$$

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{f}^0}{d\check{\xi}} = 0 \quad (\text{C.20c})$$

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{f}^1}{d\check{\xi}} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{df^0}{d\xi_3} \quad (\text{C.20d})$$

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{f}^2}{d\check{\xi}} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{df^1}{d\xi_3} + \check{\xi} \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d^2 f^0}{d\xi_3^2} \quad (\text{C.20e})$$

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow \pm\infty} \frac{d^2 \check{f}^2}{d\check{\xi}^2} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d^2 f^0}{d\xi_3^2} \quad (\text{C.20f})$$

C.2 Étude du problème à l'ordre 0 en ε

C.2.1 Condition de saut sur la vitesse

En utilisant l'équation de continuité dans la région intérieure à l'ordre 0 (Eq. (C.12a)), et la condition de raccord (C.20a), on en déduit que $\check{u}^0(3)$ est **indépendant de** $\check{\xi}$ et que la composante normale de la vitesse est continue à l'ordre 0 :

$$\check{u}^0(3) = u^0(3)|_+ = u^0(3)|_- \quad (\text{C.21})$$

Puis on regarde l'équation bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 0 projetée sur les vecteurs tangents à l'interface (Eqs. (C.15a)-(C.17a)). En utilisant les conditions de raccord (C.20a) et (C.20c), on en déduit que $\check{u}^0(1)$ et $\check{u}^0(2)$ sont **indépendants de** $\check{\xi}$ et que les deux composantes tangentiels de la vitesse sont continues à l'ordre 0 :

$$\check{u}^0(1) = u^0(1)|_+ = u^0(1)|_- \quad \text{et} \quad \check{u}^0(2) = u^0(2)|_+ = u^0(2)|_- \quad (\text{C.22})$$

La vitesse est donc continue à l'ordre 0 à la traversée de l'interface.

$$\mathbf{u}^0|_+ = \mathbf{u}^0|_- \quad (\text{C.23})$$

C.2.2 Condition de saut sur le gradient de vitesse normal

On s'intéresse maintenant à l'équation bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 1 projetée sur les vecteurs tangents à l'interface (Eqs. (C.15b)-(C.17b)). Puisque $\check{u}^0(1)$ et $\check{u}^0(2)$ sont indépendants de $\check{\xi}$ (résultat du paragraphe précédent), on en déduit tout d'abord que $\check{u}^1(1)$ et $\check{u}^1(2)$ sont **linéaires en** $\check{\xi}$. Puis, en utilisant la condition de raccord (C.20d), on en déduit que la dérivée selon la direction normale à l'interface des deux composantes tangentiels de la vitesse sont continues à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \check{u}^1(1)}{\partial \check{\xi}} = \frac{\partial u^0(1)}{\partial \xi_3}|_+ = \frac{\partial u^0(1)}{\partial \xi_3}|_- \quad (\text{C.24a})$$

$$\frac{\partial \check{u}^1(2)}{\partial \check{\xi}} = \frac{\partial u^0(2)}{\partial \xi_3}|_+ = \frac{\partial u^0(2)}{\partial \xi_3}|_- \quad (\text{C.24b})$$

En dérivant par rapport à $\check{\xi}$ l'équation de continuité de la région intérieure à l'ordre 1 (Eq. (C.12b)), en utilisant le fait que à l'ordre 0 les trois composantes de la vitesse dans la région intérieure sont indépendantes de $\check{\xi}$, et sachant que les courbures principales sont indépendantes de $\check{\xi}$, on en déduit que :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^1(3)}{\partial \check{\xi}^2} = 0 \quad (\text{C.25})$$

$\check{u}^1(3)$ est donc linéaire en $\check{\xi}$. En utilisant la condition de raccord (C.20d), on en déduit que la dérivée selon la direction normale de la composante normale de la vitesse est continue à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \check{u}^1(3)}{\partial \check{\xi}} = \frac{\partial u^0(3)}{\partial \xi_3} \Big|_+ = \frac{\partial u^0(3)}{\partial \xi_3} \Big|_- \quad (\text{C.26})$$

Finalement, d'après la définition de $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ en coordonnées généralisées (voir Eq. (B.16) de l'annexe B), on en déduit que **le gradient de vitesse projeté sur la normale est continu à l'ordre 0 à la traversée de l'interface** :

$$\nabla \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n} \Big|_+ = \nabla \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n} \Big|_- \quad (\text{C.27})$$

C.2.3 Condition de saut sur la pression

En réinjectant l'expression (C.25) dans l'équation bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 1 projetée sur la direction normale à l'interface (Eq. (C.19b)), on en déduit que :

$$\check{\phi} \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \check{\xi}} = 0 \quad (\text{C.28})$$

Puisque $\check{\phi}$ est toujours différente de zéro, on en déduit que \check{p}^0 est indépendant de $\check{\xi}$. Puis, en utilisant la condition de raccord (C.20a) on en déduit que **la pression est continue à l'ordre 0 à la traversée de l'interface** :

$$\check{p}^0 = p^0 \Big|_+ = p^0 \Big|_- \quad (\text{C.29})$$

C.3 Étude du problème à l'ordre 1 en ε

C.3.1 Condition de saut sur la vitesse

On a montré dans la section précédente que $\check{u}^1(1)$, $\check{u}^1(2)$ et $\check{u}^1(3)$ sont linéaires en $\check{\xi}$. En utilisant les conditions de raccord (C.20b) et (C.20d) on en déduit que les trois composantes de la vitesse sont continues à l'ordre 1 :

$$u^1(1) \Big|_+ = u^1(1) \Big|_- \quad , \quad u^1(2) \Big|_+ = u^1(2) \Big|_- \quad \text{et} \quad u^1(3) \Big|_+ = u^1(3) \Big|_- \quad (\text{C.30})$$

La vitesse est donc continue à l'ordre 1 à la traversée de l'interface.

$$\mathbf{u}^1 \Big|_+ = \mathbf{u}^1 \Big|_- \quad (\text{C.31})$$

C.3.2 Condition de saut sur le gradient de vitesse normal

On s'intéresse à l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 2 projetée sur \mathbf{g}^1 (Eq. (C.15c)). Par soucis de clarté on introduit la fonction f :

$$f \hat{=} - \frac{\partial^2 \check{u}^0(1)}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \check{u}^0(1)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial \check{u}^1(1)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) + 2\kappa_1 \frac{\partial \check{u}^0(3)}{\partial \xi_1} + \kappa_1^2 \check{u}^0(1) \quad (\text{C.32})$$

C.3 Étude du problème à l'ordre 1 en ε

En utilisant les équations (C.21), (C.22), (C.24a) et (B.33a) on remarque que la fonction f ne dépend pas de $\check{\xi}$. De plus, on peut montrer l'égalité suivante :

$$f = -\nabla^2 \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{g}^1 \Big|_{\xi_3=0} + \frac{\partial^2 u^0(1)}{\partial \xi_3^2} \Big|_{\xi_3=0} \quad (\text{C.33})$$

L'équation (C.15c) devient :

$$\frac{\partial^2 \check{u}^2(1)}{\partial \check{\xi}^2} = \check{\phi} \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \frac{\check{\phi}}{\check{K}_1} \check{u}^0(1) + f \quad (\text{C.34})$$

f , $\check{u}^0(1)$ et $\partial \check{p}^0 / \partial \xi_1$ ne dépendent pas de $\check{\xi}$. On peut donc réécrire l'équation (C.34) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \check{\xi}} \left[\frac{\partial \check{u}^2(1)}{\partial \check{\xi}} - \check{\xi} \left(\phi_{\pm} \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \frac{\phi_{\pm}}{K_{1\pm}} \check{u}^0(1) + f \right) \right] = (\check{\phi} - \phi_{\pm}) \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_1} - \frac{\phi_{\pm}}{K_{1\pm}} \right) \check{u}^0(1) \quad (\text{C.35})$$

où ψ_{\pm} sont les valeurs asymptotiques des quantités correspondantes lorsque $\check{\xi} \rightarrow \pm\infty$:

$$\psi_{\pm} = \lim_{\check{\xi} \rightarrow \pm\infty} \check{\psi} \quad (\text{C.36})$$

D'après la condition de raccord (C.20e), on a :

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow +\infty} \frac{\partial \check{u}^2(1)}{\partial \check{\xi}} = \frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3} \Big|_+ + \check{\xi} \frac{\partial^2 u^0(1)}{\partial \xi_3^2} \Big|_+ \quad (\text{C.37a})$$

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow -\infty} \frac{\partial \check{u}^2(1)}{\partial \check{\xi}} = \frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3} \Big|_- + \check{\xi} \frac{\partial^2 u^0(1)}{\partial \xi_3^2} \Big|_- \quad (\text{C.37b})$$

On intègre l'équation (C.35) pour $\check{\xi}$ variant de $-\infty$ à $\check{\xi}_{int}$, où $\check{\xi}_{int}$ est une position arbitraire à l'intérieure de la zone de transition et on utilise la condition de raccord (C.37b). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{u}^2(1)}{\partial \check{\xi}} \Big|_{\check{\xi}_{int}} - \frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3} \Big|_- - \check{\xi} \frac{\partial^2 u^0(1)}{\partial \xi_3^2} \Big|_- - (\check{\xi}_{int} - \check{\xi}) \left(\phi_- \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \frac{\phi_-}{K_{1-}} \check{u}^0(1) + f \right) = \\ \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} \int_{-\infty}^{\check{\xi}_{int}} (\check{\phi} - \phi_-) + \frac{\check{u}^0(1)}{Da} \int_{-\infty}^{\check{\xi}_{int}} \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_1} - \frac{\phi_-}{K_{1-}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Le terme qui reste en facteur de $\check{\xi}$ est solution du bilan de quantité de mouvement à l'ordre 0 de la zone extérieure homogène (C.5b) projetée sur \mathbf{g}^1 , pour $\xi_3 = 0^-$ et est donc nul. Puis on intègre l'Eq. (C.35) pour $\check{\xi}$ variant de $\check{\xi}_{int}$ à $+\infty$ et on utilise la condition de raccord (C.37a). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3} \Big|_+ + \check{\xi} \frac{\partial^2 u^0(1)}{\partial \xi_3^2} \Big|_+ - \frac{\partial \check{u}^2(1)}{\partial \check{\xi}} \Big|_{\check{\xi}_{int}} - (\check{\xi} - \check{\xi}_{int}) \left(\phi_+ \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \frac{\phi_+}{K_{1+}} \check{u}^0(1) + f \right) = \\ \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} \int_{\check{\xi}_{int}}^{+\infty} (\check{\phi} - \phi_+) + \frac{\check{u}^0(1)}{Da} \int_{\check{\xi}_{int}}^{+\infty} \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_1} - \frac{\phi_+}{K_{1+}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

De même, le terme qui reste en facteur de $\check{\xi}$ est solution du bilan de quantité de mouvement à l'ordre 0 de la zone extérieure homogène (C.5b) projetée sur \mathbf{g}^1 , pour $\xi_3 = 0^+$ et est donc nul. En ajoutant les équations (C.38) et (C.39), il vient :

$$\frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3} \Big|_+ - \frac{\partial u^1(1)}{\partial \xi_3} \Big|_- = \left(\check{\phi} \right)^{ex} \frac{\partial \check{p}^0}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Da} \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_1} \right)^{ex} u^0(1) \quad (\text{C.40})$$

où la quantité en excès est définie de la façon suivante :

$$\check{\psi}^{ex}(\xi_1, \xi_2) = \check{\xi}_{int}(\psi_- - \psi_+) + \int_{-\infty}^{\check{\xi}_{int}} (\check{\psi} - \psi_-) d\check{\xi} + \int_{\check{\xi}_{int}}^{+\infty} (\check{\psi} - \psi_+) d\check{\xi} \quad (\text{C.41})$$

Par analogie, on obtient pour l'autre composante tangentielle de la vitesse :

$$\left. \frac{\partial u^1(2)}{\partial \xi_3} \right|_+ - \left. \frac{\partial u^1(2)}{\partial \xi_3} \right|_- = \left(\check{\phi} \right)^{ex} \frac{\partial p^0}{\partial \xi_2} + \frac{1}{Da} \left(\frac{\check{\phi}}{\check{K}_2} \right)^{ex} u^0(2) \quad (\text{C.42})$$

On s'intéresse maintenant à la composante normale de la vitesse. On utilise l'équation de continuité dans la région intérieure à l'ordre 2 (Eq. (C.12c)). Dans les sections précédentes, on a montré que $\check{u}^0(1)$, $\check{u}^0(2)$ et $\check{u}^0(3)$ sont indépendants de $\check{\xi}$, et que $\check{u}^1(1)$, $\check{u}^1(2)$ et $\check{u}^1(3)$ sont linéaires en $\check{\xi}$. En injectant ces dépendances dans l'équation (C.12c), on en déduit que $\partial \check{u}^2(3)/\partial \check{\xi}$ est linéaire en $\check{\xi}$ et donc que $\partial^2 \check{u}^2(3)/\partial \check{\xi}^2$ est indépendant de $\check{\xi}$. En utilisant les conditions de raccord (C.20e) et (C.20f) on en déduit :

$$\left. \frac{\partial u^1(3)}{\partial \xi_3} \right|_+ = \left. \frac{\partial u^1(3)}{\partial \xi_3} \right|_- \quad (\text{C.43})$$

et

$$\frac{\partial^2 \check{u}^2(3)}{\partial \check{\xi}^2} = \left. \frac{\partial^2 u^0(3)}{\partial \xi_3^2} \right|_+ = \left. \frac{\partial^2 u^0(3)}{\partial \xi_3^2} \right|_- \quad (\text{C.44})$$

Finalement, d'après la définition de $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ en coordonnées généralisées (voir Eq. (B.16) de l'annexe B), de ∇p (voir Eq. B.13), et en utilisant le fait que $h_i = 1$ en $\xi_3 = 0$ quelque soit $i = 1, 2, 3$, on obtient à l'ordre 1 :

$$[\nabla \mathbf{u}^1] \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \left(\check{\phi} \right)^{ex} \nabla p^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_1 + 1/Da \left(\check{\phi}/\check{K}_1 \right)^{ex} \mathbf{u}^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \left(\check{\phi} \right)^{ex} \nabla p^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_2 + 1/Da \left(\check{\phi}/\check{K}_2 \right)^{ex} \mathbf{u}^0|_{\xi_3=0} \cdot \mathbf{t}_2 \\ 0 \end{cases} \quad (\text{C.45})$$

Les composantes tangentielles du gradient de vitesse projeté sur la normale ne sont pas continues à l'ordre 1 à la traversée de l'interface. En revanche, la composante normale du gradient de vitesse projeté sur la normale est continue à l'ordre 1 à la traversée de l'interface.

C.3.3 Condition de saut sur la pression

On s'intéresse à l'équation de bilan de quantité de mouvement dans la région intérieure à l'ordre 2 projetée sur la direction normale à l'interface (Eq. (C.19c)). Par soucis de clarté, on introduit la fonction w défini par :

$$w = \frac{\partial^2 \check{u}^0(3)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^0(3)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \check{u}^2(3)}{\partial \check{\xi}^2} - \frac{\partial \check{u}^1(3)}{\partial \check{\xi}} (\kappa_1 + \kappa_2) + 2\kappa_1 \frac{\partial \check{u}^0(1)}{\partial \xi_1} + 2\kappa_2 \frac{\partial \check{u}^0(2)}{\partial \xi_2} - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \check{u}^0(3) \quad (\text{C.46})$$

et l'équation (C.19c) devient :

$$\frac{\partial \check{p}^1}{\partial \check{\xi}} = \frac{1}{\check{\phi}} w - \frac{1}{Da} \frac{1}{\check{K}_3} \check{u}^0(3) \quad (\text{C.47})$$

D'après les résultats des sections précédentes la fonction w ne dépend pas de $\check{\xi}$. D'ailleurs, en utilisant les équations (C.21), (C.22), (C.26), (C.44) et (B.33c) on peut montrer l'égalité suivante :

$$w = \nabla^2 \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}|_{\xi_3=0} \quad (\text{C.48})$$

Puisque $\check{u}^0(3)$ ne dépend pas non plus de $\check{\xi}$, on peut réécrire l'équation (C.47) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \check{\xi}} \left[\check{p}^1 - \check{\xi} \left(\frac{1}{\phi_{\pm}} w - \frac{1}{Da} \frac{1}{K_{3\pm}} \check{u}^0(3) \right) \right] = \left(\frac{1}{\check{\phi}} - \frac{1}{\phi_{\pm}} \right) w - \frac{1}{Da} \left(\frac{1}{\check{K}_3} - \frac{1}{K_{3\pm}} \right) \check{u}^0(3) \quad (\text{C.49})$$

D'après la condition de raccord (C.20b), on a :

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow +\infty} \check{p}^1 = p^1|_+ + \check{\xi} \frac{dp^0}{d\xi_3}|_+ \quad (\text{C.50a})$$

$$\lim_{\check{\xi} \rightarrow -\infty} \check{p}^1 = p^1|_- + \check{\xi} \frac{dp^0}{d\xi_3}|_- \quad (\text{C.50b})$$

On intègre l'équation (C.49) pour $\check{\xi}$ variant de $-\infty$ à $\check{\xi}_{int}$, où $\check{\xi}_{int}$ est une position arbitraire à l'intérieure de la zone de transition et on utilise la condition de raccord (C.50b). Il vient :

$$\check{p}^1|_{\check{\xi}_{int}} - p^1|_- - \check{\xi} \frac{dp^0}{d\xi_3}|_- - (\check{\xi}_{int} - \check{\xi}) \left(\frac{1}{\phi_-} w - \frac{1}{Da} \frac{1}{K_{3-}} \check{u}^0(3) \right) = w \int_{-\infty}^{\check{\xi}_{int}} \left(\frac{1}{\check{\phi}} - \frac{1}{\phi_-} \right) - \frac{\check{u}^0(3)}{Da} \int_{-\infty}^{\check{\xi}_{int}} \left(\frac{1}{\check{K}_3} - \frac{1}{K_{3-}} \right) \quad (\text{C.51})$$

Le terme qui reste en facteur de $\check{\xi}$ est solution du bilan de quantité de mouvement à l'ordre 0 de la zone extérieure homogène (C.5b) projetée sur \mathbf{g}^3 , pour $\xi_3 = 0^-$ et est donc nul. Puis on intègre l'équation (C.49) pour $\check{\xi}$ variant de $\check{\xi}_{int}$ à $+\infty$ et on utilise la condition de raccord (C.50a). Il vient :

$$p^1|_+ + \check{\xi} \frac{dp^0}{d\xi_3}|_+ - \check{p}^1|_{\check{\xi}_{int}} - (\check{\xi} - \check{\xi}_{int}) \left(\frac{1}{\phi_+} w - \frac{1}{Da} \frac{1}{K_{3+}} \check{u}^0(3) \right) = w \int_{\check{\xi}_{int}}^{+\infty} \left(\frac{1}{\check{\phi}} - \frac{1}{\phi_+} \right) - \frac{\check{u}^0(3)}{Da} \int_{\check{\xi}_{int}}^{+\infty} \left(\frac{1}{\check{K}_3} - \frac{1}{K_{3+}} \right) \quad (\text{C.52})$$

De même, le terme qui reste en facteur de $\check{\xi}$ est solution du bilan de quantité de mouvement à l'ordre 0 de la zone extérieure homogène (C.5b) projetée sur \mathbf{g}^3 , pour $\xi_3 = 0^+$ et est donc nul. En ajoutant les équations (C.51) et (C.52), et en tenant compte de (C.48) on a :

$$p^1|_+ - p^1|_- = \left(\frac{1}{\check{\phi}} \right)^{ex} \nabla^2 \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}|_{\xi_3=0} - \frac{1}{Da} \left(\frac{1}{\check{K}_3} \right)^{ex} \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}|_{\xi_3=0} \quad (\text{C.53})$$

La pression n'est pas continue à l'ordre 1 à la traversée de l'interface.

Annexe D

Mise en œuvre numérique

Les calculs effectués dans ce mémoire ont été réalisés avec le logiciel de calcul Trio_U, développé dans le Service de Simulation Thermo-Hydraulique du CEA Grenoble. Un grand nombre de modèles liés aux études de thermo-hydraulique sont implémentés dans Trio_U (modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard, modèles de LES, équations de transport de la température, modèle de Boussinesq pour les écoulements dilatables, etc). La résolution numérique de ces différents systèmes d'équations est assurée par une approche de type volumes finis. De plus, Trio_U est capable de gérer des maillages soit structurés soit non structurés. Une présentation détaillée de l'architecture logicielle, ainsi que des informations sur l'implémentation des schémas numériques peuvent être trouvées dans [Calvin *et al.* \(2002\)](#); [Ackermann \(2000\)](#); [Chatelain \(2004\)](#).

Dans ce mémoire, nous avons étudié les écoulements dans les milieux poreux et à l'interface avec un milieu libre. Nous présentons donc dans cette annexe la façon dont nous avons pris en compte la porosité dans les différents opérateurs (voir la section [D.1](#)), ainsi que l'implémentation des conditions de saut à l'interface entre le milieu libre et le milieu poreux (voir la section [D.2](#)). Nous nous limitons ici à une présentation de la mise en œuvre numérique pour les maillages structurés.

Cette mise en œuvre a été étendue aux maillages non-structurés afin de mettre en évidence l'intérêt d'une modélisation de type milieu poreux. Nous présentons les résultats que nous avons obtenus dans la section [D.3](#), sur la configuration étudiée dans le chapitre 6.

D.1 Présentation de la mise en œuvre numérique pour la méthode des volumes finis

Les équations que nous devons résoudre à l'échelle macroscopique et pour lesquelles il faut prendre en compte la porosité sont l'équation de bilan de masse, l'équation de bilan de quantité de mouvement et les équations de transport de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ (cf. Eqs. [\(3.52a\)](#) - [\(3.52d\)](#)). La structure des équations de transport de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ étant identique, nous nous contentons ici de décrire la discrétisation de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$.

Afin d'écrire les équations à résoudre en formulation Volumes Finis, il faut définir les volumes de contrôle associés à la résolution de ces équations. Nous notons V le volume de contrôle pour l'équation de bilan de la quantité de mouvement, W le volume de contrôle pour l'équation de bilan de masse et K le volume de contrôle pour l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$. On note ∂V , ∂W et ∂K leur contour respectif. En intégrant les équations [\(3.52a\)](#), [\(3.52b\)](#) et [\(3.52c\)](#) sur leur volume de contrôle respectif et en utilisant la formule d'Ostrogradsky, il vient :

$$\int_{\partial W} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f n_i dS = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f dv \right) + \int_{\partial V} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f n_j dS = - \int_V \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle_f}{\partial x_i} dv \\ + \int_{\partial V} (\nu + \nu_{t_\phi}) \left(\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) n_j dS + \int_V \phi F_i dv \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_K \phi \langle k \rangle_f dv \right) + \int_{\partial K} \phi \langle k \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f n_j dS = \int_{\partial K} \left(\nu + \frac{\nu_{t_\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial x_j} n_j dS \\ + \int_K 2 \phi \nu_{t_\phi} \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f \langle \bar{S}_{ij} \rangle_f dv - \int_K \phi \langle \epsilon \rangle_f dv + \int_K \phi P_k dv \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

où \mathbf{n} est la normale aux faces des volumes de contrôle.

D.1.1 Discrétisation en maillage structuré

Pour le maillage structuré, la méthode des volumes finis utilisée ici s'appuie sur une évaluation des gradients par différence finie. Les éléments du maillage sont des rectangles en deux dimensions et des parallélépipèdes rectangles en trois dimensions. Le maillage repose sur une grille décalée des variables. Les variables scalaires (pression, k , et ϵ) sont discrétisées au centre de gravité des éléments, les composantes normales de la vitesse au centre de gravité des faces des éléments (cf. schéma D.1). Nous soulignons ici que les variables discrétisées sont les **moyennes volumiques intrinsèques** des variables. Le champ de porosité, qui est un champ connu, donné par l'utilisateur, est discrétisé à la fois au niveau des faces des éléments et des centres des éléments.

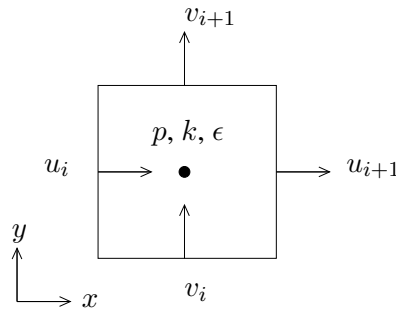


FIG. D.1 – Description de la discrétisation décalée en 2D.

Sur un maillage décalé, plusieurs volumes de contrôle doivent être définis :

- un volume de contrôle pour résoudre l'équation de bilan de masse et les équations de transport des grandeurs turbulentes. Ce volume correspond à l'élément lui-même.
- un volume de contrôle par composante de vitesse pour résoudre l'équation de bilan de quantité de mouvement projetée sur la direction considérée.

D.1.2 Opérateur de diffusion

Nous nous intéressons ici à l'évaluation du terme diffusif de l'équation de bilan de quantité de mouvement (D.2) qui a la forme suivante

$$F_d^u = \int_{\partial V} (\nu + \nu_{t_\phi}) \left(\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) n_j dS \quad (\text{D.4})$$

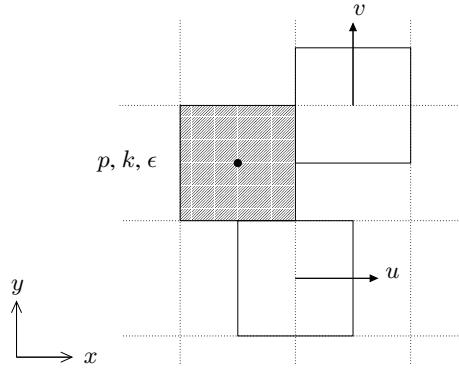


FIG. D.2 – Description des volumes de contrôle en 2D.

L'opérateur de diffusion est déjà codé dans Trio_U (voir la thèse de Ackermann (2000) pour plus d'informations sur son évaluation). Nous devons juste ajouter la prise en compte de la porosité dans cet opérateur de diffusion. Pour cela, nous remarquons que la porosité apparaît à l'intérieur de l'opérateur gradient dans l'expression (D.4) et qu'elle est toujours associée à l'inconnue de vitesse. Dans l'opérateur de diffusion codé dans Trio_U, il faut donc multiplier l'inconnue de vitesse par la porosité. L'inconnue de vitesse étant discrétisée aux faces, il faut utiliser pour cela la valeur de la porosité discrétisée aux faces.

Puis, nous nous intéressons à l'évaluation du terme diffusif de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$ (D.3) qui a la forme suivante

$$F_d^k = \int_{\partial K} \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \phi \langle k \rangle_f}{\partial x_j} n_j dS \quad (\text{D.5})$$

Comme précédemment, cet opérateur est déjà codé dans Trio_U et nous devons juste ajouter la prise en compte de la porosité dans cet opérateur de diffusion. La porosité apparaît à l'intérieur de l'opérateur gradient dans l'expression (D.5) et est toujours associée à l'inconnue $\langle k \rangle_f$. Il suffit donc de multiplier l'inconnue $\langle k \rangle_f$ par la porosité dans l'opérateur de diffusion codé dans Trio_U. L'inconnue $\langle k \rangle_f$ étant discrétisée au centre des éléments, il faut utiliser la valeur de la porosité discrétisée au centre des éléments.

D.1.3 Opérateur de convection

Pour l'équation de bilan de quantité de mouvement, le terme convectif s'écrit

$$F_c^u = \int_{\partial V} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f n_j dS \quad (\text{D.6})$$

Son traitement dépend du schéma de convection choisi (schéma amont, centré, quick, etc). La prise en compte de la porosité n'est pas aussi simple que pour l'opérateur de diffusion. En effet, il y a un terme de porosité pour deux termes de vitesses : la vitesse transportée et la vitesse transportante. Si dans le schéma de convection, l'évaluation de ces deux vitesses (transportée et transportante) est symétrique, comme c'est le cas pour le schéma centré, il suffit de multiplier dans l'évaluation de l'une de ces deux vitesses, l'inconnue de vitesse par la porosité. En revanche, si l'évaluation de la vitesse transportée et de la vitesse transportante n'est pas symétrique, comme c'est le cas pour le schéma amont, le résultat obtenu n'est pas nécessairement le même si on choisit de multiplier un des termes par la porosité et pas l'autre. Cette différence ne s'observe que si la porosité n'est pas constante. Pour savoir comment prendre en compte la porosité dans des schémas de convection non symétriques, nous avons utilisé le principe de

conservation de la charge. En 1D, nous savons que si la diffusion est négligeable, alors

$$\frac{1}{2}\rho \langle u \rangle_f^2 + \langle p \rangle_f = \text{cste} \quad (\text{D.7})$$

Ainsi, la prise en compte de la porosité dans le schéma de convection doit être telle que la charge se conserve lorsque la porosité varie. Pour le schéma de convection amont, cela signifie que ce sont les inconnues de vitesse qui correspondent au terme de vitesse transportée qui doivent être multipliées par la porosité.

Nous nous intéressons maintenant à l'évaluation du terme convectif de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$ (D.3) qui a la forme suivante

$$F_c^k = \int_{\partial K} \phi \langle k \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f n_j dS \quad (\text{D.8})$$

Son traitement dépend du schéma de convection choisi. Comme pour le terme convectif de l'équation de bilan de quantité de mouvement, le terme convectif (D.8) met en jeu un terme de porosité pour deux termes inconnus : la vitesse et l'énergie cinétique turbulente. La question est donc de savoir s'il faut associer la porosité à la grandeur transportante (la vitesse) ou à la grandeur transportée (l'énergie cinétique turbulente). Lorsque la diffusion et les termes sources de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$ sont négligeables, on a en 1D

$$\phi \langle u \rangle_f \langle k \rangle_f = \text{cste} \quad (\text{D.9})$$

Or, d'après l'équation de bilan de masse $\phi \langle u \rangle_f = \text{cste}$. Il faut donc conserver $\langle k \rangle_f$. Pour assurer cette conservation, c'est la grandeur transportante, *i.e.* la vitesse qu'il faut multiplier par la porosité.

D.1.4 Termes sources

La prise en compte de la porosité dans les différents termes sources des équations (D.2) et (D.3) est assez immédiate. Il suffit de les multiplier par la porosité qui correspond à l'endroit où ils sont évalués.

En ce qui concerne le terme de production d'énergie cinétique turbulente, il dépend du tenseur des déformations $\langle \bar{S}_{ij} \rangle_f$ qui est défini par

$$\langle \bar{S}_{ij} \rangle_f = \frac{1}{\phi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \quad (\text{D.10})$$

La porosité qui apparaît à l'intérieur des termes en gradient est toujours associée à l'inconnue de vitesse. Pour la prendre en compte, il suffit de multiplier l'inconnue de vitesse par la porosité discrétisée aux faces dans l'évaluateur du tenseur des déformations de Trio_U. Il faut également diviser le résultat obtenu pour le tenseur des déformations qui est évalué au centre de l'élément, par la porosité discrétisée au centre des éléments.

D.2 Prise en compte des conditions de saut

Le problème que nous devons résoudre à l'échelle macroscopique est constitué des équations de conservation associées à chaque région homogène (libre et poreuse) et de relations de saut à l'interface entre ces régions homogènes.

Différentes approches sont envisageables pour résoudre numériquement ce problème :

- Le problème macroscopique peut être résolu en considérant deux sous-problèmes, couplés par des conditions aux limites à l'interface. Cette approche nécessite de mettre en œuvre un algorithme de couplage.

- Le problème macroscopique peut-être résolu en utilisant une formulation mono-fluide. Cette approche permet de résoudre un unique problème dans l'ensemble du domaine, les conditions de saut à l'interface étant alors prises en compte sous forme de termes sources singuliers localisés à l'interface.

Nous avons choisi d'utiliser cette deuxième approche car notre problème s'écrit relativement aisément sous forme mono-fluide, comme nous le verrons dans la section suivante, et que cette approche nous évite d'avoir à mettre en œuvre un algorithme de couplage.

D.2.1 Formulation mono-fluide

L'idée de la formulation mono-fluide, introduite pour l'étude des écoulements diphasiques (voir [Kataoka \(1986\)](#) par exemple), est d'exprimer les équations de conservation de l'écoulement à l'aide d'un unique champ pour chaque grandeur physique (vitesse, masse volumique, pression, etc) au lieu d'utiliser un champ défini dans chaque phase. Pour cela, une fonction indicatrice de phase χ^j est associée à chaque phase du problème et le champ mono-fluide d'une grandeur physique ψ quelconque est défini par

$$\hat{\psi} = \sum_j \chi^j \psi^j \quad (\text{D.11})$$

où ψ^j est le champ de la grandeur ψ dans la phase j . L'objectif est ensuite de déterminer les équations de conservation vérifiées par les champs mono-fluides. Pour cela, les équations de conservation valables dans chaque phase sont multipliées par leur fonction indicatrice de phase correspondante puis sommées. Nous rappelons que les fonctions indicatrices de phase vérifient :

$$\sum_j \chi^j = 1 \quad (\text{D.12a})$$

$$\nabla \chi^j = -\mathbf{n}_j \delta_i \quad (\text{D.12b})$$

$$\chi^i \chi^j = \delta_{ij} \chi^i \quad (\text{D.12c})$$

où δ_i est la distribution de dirac localisée à l'interface et δ_{ij} est le symbole de Kronecker

Nous appliquons cette méthode au système d'équations (3.52a) - (3.52d) afin de déterminer la formulation mono-fluide associée à notre problème. Nous rappelons que le système d'équations (3.52a) - (3.52d) est à la fois valable dans la région poreuse homogène et dans la région libre. Dans ce dernier cas, la porosité est égale à 1 et les termes sources F_i , P_k et P_ϵ sont nuls.

D.2.1.1 Equation de bilan de masse

Pour obtenir la formulation mono-fluide de l'équation de bilan de masse, on multiplie l'équation de bilan de masse (3.52a) valable dans chaque région (poreuse et libre) par la fonction indicatrice de "région" qui lui est associée

$$\chi^j \nabla \cdot (\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) = 0 \quad (\text{D.13})$$

Cette équation est équivalente à

$$\nabla \cdot (\chi^j \phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) - \phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \cdot \nabla \chi^j = 0 \quad (\text{D.14})$$

En sommant cette équation pour $j = 1, 2$ et en utilisant les relations (D.12), il vient

$$\nabla \cdot (\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f) = -(\phi^1 \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^1 - \phi^2 \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^2) \cdot \mathbf{n}_1 \delta_i \quad (\text{D.15})$$

La composante normale de la moyenne volumique de la vitesse étant continue à l'interface libre poreux, la formulation mono-fluide de l'équation de bilan de masse s'écrit

$$\boxed{\nabla \cdot (\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f) = 0} \quad (\text{D.16})$$

Elle est identique à l'équation de bilan de masse valable dans chaque région homogène.

D.2.1.2 Equation de bilan de quantité de mouvement

Pour obtenir la formulation mono-fluide de l'équation de bilan de quantité de mouvement, on multiplie l'équation de bilan de quantité de mouvement (3.52b) valable dans chaque région (poreuse et libre) par la fonction indicatrice de "région" qui lui est associée

$$\chi^j \frac{\partial \phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j}{\partial t} + \chi^j \nabla \cdot \left(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \right) = \chi^j \nabla \cdot \left((\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \right) - \chi^j \frac{\phi^j}{\rho} \nabla \langle \bar{p} \rangle_f^j + \chi^j \phi^j \mathbf{F}^j \quad (\text{D.17})$$

Cependant, dans cette étude, on distingue les projections de l'équation de bilan de quantité de mouvement sur les directions normale et tangentielle à l'interface. On fait cette distinction car d'un point de vue mathématique, une grandeur discontinue en un point, multipliée par un dirac (*i.e.* un saut) en ce même point n'est pas définie. Il faut donc toujours bien vérifier que ce que l'on écrit est bien défini. Or, les grandeurs qui sont continues, discontinues, ou qui présentent des sauts, ne sont pas les mêmes dans les directions normale et tangentielle à l'interface. Pour que les relations que nous écrivons aient toujours un sens, nous avons donc du distinguer ces deux directions.

Direction tangentielle

La fonction χ^j ne dépendant pas du temps, l'équation D.17 est équivalente à

$$\frac{\partial \chi^j \phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\chi^j \phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \right) - \phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \cdot \nabla \chi^j = \nabla \cdot \left(\chi^j (\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \right) - (\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \cdot \nabla \chi^j - \chi^j \frac{\phi^j}{\rho} \nabla \langle \bar{p} \rangle_f^j + \chi^j \phi^j \mathbf{F}^j \quad (\text{D.18})$$

La moyenne volumique de la vitesse étant continue à l'interface libre/poreux, on peut montrer que la relation suivante est vérifiée

$$\sum_{j=1,2} \left(\chi^j (\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \right) = (\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f) + \nabla(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f)^T \right) \quad (\text{D.19})$$

Et on note

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \left(\nabla(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f) + \nabla(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f)^T \right) \quad (\text{D.20})$$

Ainsi, lorsque l'on somme l'équation (D.18) pour $j = 1, 2$, on obtient

$$\frac{\partial \hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right) - \sum_{j=1,2} \left(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \cdot \nabla \chi^j \right) = - \sum_{j=1,2} \left(\chi^j \frac{\phi^j}{\rho} \nabla \langle \bar{p} \rangle_f^j \right) + \hat{\phi} \hat{\mathbf{F}} - \nabla \cdot \left(2(\nu + \nu_{t_\phi}^j) \hat{\mathbf{S}} \right) - \sum_{j=1,2} \left((\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \cdot \nabla \chi^j \right) \quad (\text{D.21})$$

Il reste alors à discuter des trois termes qui font intervenir les sommes sur j .

Dans la direction tangentielle à l'interface, on peut montrer que la relation suivante est vérifiée

$$\left(\sum_{j=1,2} \chi^j \phi^j \nabla \langle \bar{p} \rangle_f^j \right) \cdot \mathbf{t}_i = (\hat{\phi} \nabla \langle \hat{p} \rangle_f) \cdot \mathbf{t}_i \quad (\text{D.22})$$

D.2 Prise en compte des conditions de saut

où \mathbf{t}_i est un des deux vecteurs tangents à l'interface. La moyenne volumique de la vitesse étant continue à l'interface libre/poreux, il vient

$$\sum_{j=1,2} \left(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \cdot \nabla \chi^j \right) = 0 \quad (\text{D.23})$$

Et pour la somme sur le tenseur des contraintes visqueuses, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i \cdot \sum_{j=1,2} \left((\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \cdot \nabla \chi^j \right) = \\ - \mathbf{t}_i \cdot \left((\nu + \nu_{t_\phi}^1) \left(\nabla(\phi^1 \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^1) + \nabla(\phi^1 \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^1)^T \right) - (\nu + \nu_{t_\phi}^2) \left(\nabla(\phi^2 \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^2) + \nabla(\phi^2 \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^2)^T \right) \right) \cdot \mathbf{n}_1 \delta_i \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Le membre de droite de cette équation correspond au saut de la composante tangentielle du tenseur des contraintes visqueuses projeté sur la normale à l'interface.

Ainsi, la formulation mono-fluide de l'équation de bilan de quantité de mouvement projetée sur une direction tangentielle à l'interface s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f}{\partial t} \cdot \mathbf{t}_i + \left(\nabla \cdot \left(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right) \right) \cdot \mathbf{t}_i = - \frac{\hat{\phi}}{\rho} \nabla \langle \hat{p} \rangle_f \cdot \mathbf{t}_i + \hat{\phi} \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{t}_i + \left(\nabla \cdot \left(2(\nu + \nu_{t_\phi}) \hat{\mathbf{S}} \right) \right) \cdot \mathbf{t}_i \\ + \mathbf{t}_i \cdot \left[(\nu + \nu_{t_\phi}) \left(\nabla(\phi \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f) + \nabla(\phi \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f)^T \right) \right] \cdot \mathbf{n} \delta_i \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Cette équation est identique à l'équation de bilan de quantité de mouvement valable dans chaque région homogène mis à part le saut de la composante tangentielle du tenseur des contraintes visqueuses projeté sur la normale à l'interface qui apparaît comme un terme source singulier localisé à l'interface.

Direction normale

Pour étudier la formulation mono-fluide dans la direction normale à l'interface, on repart de l'équation (D.17) divisée par la porosité ϕ^j . La fonction χ^j ne dépendant pas du temps, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left(\chi^j \left(\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j \right)^2 \nabla \chi^j = \\ \frac{\chi^j}{\phi_j} \nabla \cdot \left((\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \right) \\ - \frac{1}{\rho} \nabla(\chi^j \langle \bar{p} \rangle_f^j) + \frac{1}{\rho} \langle \bar{p} \rangle_f^j \nabla \chi^j + \chi^j \mathbf{F}^j \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

En sommant pour $j = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left(\langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^1 \right)^2 - \left(\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^2 \right)^2 \right) \mathbf{n}_1 \delta_i = - \frac{1}{\rho} \nabla \langle \hat{p} \rangle_f - \frac{1}{\rho} \left(\langle \bar{p} \rangle_f^1 - \langle \bar{p} \rangle_f^2 \right) \mathbf{n}_1 \delta_i \\ + \sum_{j=1,2} \left(\frac{\chi^j}{\phi_j} \nabla \cdot \left((\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \right) \right) + \hat{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Il reste à étudier le terme qui fait intervenir des sommes sur j . On peut montrer que **lorsque la composante normale du tenseur des contraintes projeté sur la normale est continue**, alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \left(\frac{\chi^j}{\phi_j} \nabla \cdot \left((\nu + \nu_{t_\phi}^j) \left(\nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j) + \nabla(\phi^j \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f^j)^T \right) \right) \right) \cdot \mathbf{n} = \\ \frac{1}{\hat{\phi}} \nabla \cdot \left((\nu + \nu_{t_\phi}) \left(\nabla(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f) + \nabla(\hat{\phi} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f)^T \right) \right) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Cette hypothèse de continuité n'a été montrée que pour le cas laminaire, lors de l'étude tridimensionnelle réalisée dans le chapitre 6. Nous supposons qu'elle est également vérifiée dans le cas turbulent.

Ainsi, la formulation mono-fluide de l'équation de bilan de quantité de mouvement projetée sur la direction normale à l'interface s'écrit :

$$\frac{\partial \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f}{\partial t} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \left(\nabla \left(\langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right)^2 \right) \cdot \mathbf{n} = - \frac{1}{\rho} \nabla \langle \hat{p} \rangle_f \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{\hat{\phi}} \left(\nabla \cdot \left(2(\nu + \nu_{t\phi}) \hat{\mathbf{S}} \right) \right) \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} - \left[\frac{\langle \hat{p} \rangle_f}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right)^2 \right] \delta_i \quad (\text{D.29})$$

Cette équation est identique à l'équation de bilan de quantité de mouvement valable dans chaque région homogène mis à part le saut de la charge $p + u^2/2$, qui apparaît comme un terme source singulier localisé à l'interface et le fait que l'équation de bilan de quantité de mouvement a été divisée par la porosité afin que tous les termes de l'équation (D.29) aient bien un sens.

D.2.1.3 Equations de transport des grandeurs turbulentes

Pour obtenir la formulation mono-fluide de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$, on multiplie l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$ (3.52c) valable dans chaque région (poreuse et libre) par la fonction indicatrice de "région" qui lui est associée

$$\chi^j \frac{\partial \phi^j \langle k \rangle_f^j}{\partial t} + \chi^j \nabla \cdot \left(\phi^j \langle k \rangle_f^j \langle \mathbf{u} \rangle_f^j \right) = \chi^j \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^j}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi^j \langle k \rangle_f^j \right) \right) + \chi^j \phi^j P_M^j + \chi^j \phi^j P_k^j - \chi^j \phi^j \langle \epsilon \rangle_f^j \quad (\text{D.30})$$

où on a noté P_M , le terme de production de turbulence par les gradients de vitesse macroscopiques. La fonction χ^j ne dépendant pas du temps, cette équation est équivalente à

$$\frac{\partial \chi^j \phi^j \langle k \rangle_f^j}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\chi^j \phi^j \langle k \rangle_f^j \langle \mathbf{u} \rangle_f^j \right) - \phi^j \langle k \rangle_f^j \langle \mathbf{u} \rangle_f^j \nabla \chi^j = \nabla \cdot \left(\chi^j \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^j}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi^j \langle k \rangle_f^j \right) \right) - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^j}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi^j \langle k \rangle_f^j \right) \nabla \chi^j + \chi^j \phi^j P_M^j + \chi^j \phi^j P_k^j - \chi^j \phi^j \langle \epsilon \rangle_f^j \quad (\text{D.31})$$

En sommant cette équation pour $j = 1, 2$ et en utilisant les relations (D.12), il vient

$$\frac{\partial \hat{\phi} \langle \hat{k} \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\hat{\phi} \langle \hat{k} \rangle_f \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \left(\phi^1 \langle k \rangle_f^1 \langle \mathbf{u} \rangle_f^1 - \phi^2 \langle k \rangle_f^2 \langle \mathbf{u} \rangle_f^2 \right) \cdot \mathbf{n}_1 \delta_i = \sum_{j=1,2} \nabla \cdot \left(\chi^j \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^j}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi^j \langle k \rangle_f^j \right) \right) + \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^1}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi^1 \langle k \rangle_f^1 \right) - \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^2}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi^2 \langle k \rangle_f^2 \right) \right) \cdot \mathbf{n}_1 \delta_i + \hat{\phi} \hat{P}_M + \hat{\phi} \hat{P}_k - \hat{\phi} \langle \hat{\epsilon} \rangle_f \quad (\text{D.32})$$

Il reste à étudier le terme de diffusion de $\langle k \rangle_f$, qui est toujours écrit sous forme d'une somme sur j . Comme nous n'avons pas d'information sur la continuité de $\phi \langle k \rangle_f$ à l'interface, il vient :

$$\sum_{j=1,2} \chi^j \nabla \left(\phi^j \langle k \rangle_f^j \right) = \nabla \left(\hat{\phi} \langle \hat{k} \rangle_f \right) + \left(\phi^1 \langle k \rangle_f^1 - \phi^2 \langle k \rangle_f^2 \right) \mathbf{n}_1 \delta_i \quad (\text{D.33})$$

On a donc

$$\sum_{j=1,2} \nabla \cdot \left(\chi^j \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^j}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi^j \langle k \rangle_f^j \right) \right) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\hat{\phi} \langle \hat{k} \rangle_f \right) \right) - \sum_{j=1,2} \nabla \cdot \left(\chi^j \left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}^j}{\tilde{\sigma}_k} \right) \phi^j \langle k \rangle_f^j \mathbf{n}_j \delta_i \right) \quad (\text{D.34})$$

Le second terme du membre de droite de cette équation n'est pas bien défini car il fait intervenir une grandeur discontinue (la fonction indicatrice de phase χ^j) multipliée par un dirac. Comme nous ne savons pas comment traiter ce terme, nous avons supposé qu'il était négligeable. Ainsi, la formulation mono-fluide de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$ s'écrit

$$\frac{\partial \hat{\phi} \langle \hat{k} \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\hat{\phi} \langle \hat{k} \rangle_f \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \left[\phi \langle k \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right] \cdot \mathbf{n} \delta_i = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\hat{\phi} \langle \hat{k} \rangle_f \right) \right) + \left[\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_k} \right) \nabla \left(\phi \langle k \rangle_f \right) \right] \cdot \mathbf{n} \delta_i + \hat{\phi} \hat{P}_M + \hat{\phi} \hat{P}_k - \hat{\phi} \langle \epsilon \rangle_f \quad (\text{D.35})$$

La structure de l'équation de transport de $\langle \epsilon \rangle_f$ étant identique à celle de l'équation de transport de $\langle k \rangle_f$, on en déduit

$$\frac{\partial \hat{\phi} \langle \hat{\epsilon} \rangle_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\hat{\phi} \langle \hat{\epsilon} \rangle_f \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_f \right) + \left[\phi \langle \epsilon \rangle_f \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_f \right] \cdot \mathbf{n} \delta_i = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \nabla \left(\hat{\phi} \langle \hat{\epsilon} \rangle_f \right) \right) + \left[\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\tilde{\sigma}_\epsilon} \right) \nabla \left(\phi \langle \epsilon \rangle_f \right) \right] \cdot \mathbf{n} \delta_i + \hat{\phi} \left(c_1 \hat{P}_M - c_2 \langle \hat{\epsilon} \rangle_f \right) \frac{\langle \hat{\epsilon} \rangle_f}{\langle \hat{k} \rangle_f} + \hat{\phi} \hat{P}_\epsilon \quad (\text{D.36})$$

Les équations (D.35) et (D.36) sont identiques aux équations de transport de $\langle k \rangle_f$ et $\langle \epsilon \rangle_f$ valables dans chaque région homogène mis à part les deux sauts qui apparaissent comme des termes sources singuliers localisés à l'interface.

Ainsi, le problème macroscopique constitué des équations de conservation associés à chaque région homogène (libre et poreuse) et de relations de saut à l'interface entre ces régions homogènes peut s'écrire à l'aide d'une formulation mono-fluide. Les équations mono-fluides obtenues sont identiques aux équations valables dans chaque région homogène mis à part les relations de saut qui apparaissent comme des termes sources singuliers localisés à l'interface.

L'implémentation de ces conditions de saut sous forme de termes sources singuliers localisés à l'interface est discuté dans la section suivante.

D.2.2 Implémentation des conditions de saut

Les relations de saut que nous avons obtenues dans le cas laminaire (cf. chapitre 6), valables à l'ordre 1 en ε , s'expriment en fonction de la vitesse et de la pression solutions du problème à l'ordre 0 en ε . Ainsi, l'implémentation de ces conditions de saut nécessite a priori de résoudre le problème en deux étapes : à l'ordre 0 puis à l'ordre 1.

Néanmoins, pour l'étude que nous avons réalisée dans la section 6.6, nous avons localisé l'interface de telle façon que tous les paramètres de saut soient nuls. Ainsi, le problème peut être résolu en une unique étape. De plus, les termes sources singuliers des équations de bilan de quantité de mouvement projetées sur les directions normale (D.29) et tangentielles (D.25) sont nuls. Donc, le problème à ré-

soudre est constitué des équations mono-fluide sans les termes sources singuliers.

Les relations de saut que nous avons obtenues dans le cas turbulent (cf. Eqs. (8.37) et (8.39)) apparaissent sous forme de termes sources singuliers dans les équations de la formulation mono-fluide (cf. Eqs. (D.25), (D.29), (D.35) et (D.36)). Les relations de fermeture que nous avons proposées pour les membres de droite des relations de saut (8.37) et (8.39) sont soit nulles pour la position de l'interface choisie, soit s'expriment en fonction de corrélations construites sur la moyenne volumique de la vitesse. Ainsi, nous avons implémenté ces différentes relations de saut sous la forme de terme sources singuliers localisés à l'interface et dont la valeur est donnée par les corrélations adaptées.

D.3 Résultats obtenus sur maillages non-structurés

Nous présentons dans cette section les résultats que nous avons obtenus avec des maillages non-structurés pour l'application étudiée dans le chapitre 6 (cf. sections 6.6, page 118). L'objectif est de montrer que le nombre de degrés de liberté nécessaire à la simulation de l'écoulement dans la région poreuse a été considérablement réduit par l'introduction de la modélisation de type milieu poreux. Ainsi, la résolution du problème dans la région poreuse homogène ne nécessite pas un maillage aussi raffiné que dans la région libre.

Nous présentons uniquement les résultats obtenus pour le premier cas test ($Re = 10$), les résultats en terme de comparaison maillage structuré/ maillage non-structuré étant similaires pour le deuxième cas test.

Le maillage utilisé est présenté sur la figure D.3. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, le pas de maillage utilisé dans la région poreuse est beaucoup plus grand que celui utilisé dans la région libre. Les résultats obtenus pour la vitesse et la pression sont présentés sur la figure D.4. Ils sont à comparer aux résultats de la figure 6.10, page 124. D'un point de vue qualitatif, les résultats sont identiques. Nous noterons néanmoins que les maximums de vitesse dans la région libre d'entrée ne sont pas retrouvés par le calcul réalisé avec le maillage non-structuré. Cela est dû au fait que le pas du maillage non-structuré utilisé dans la région libre n'est pas aussi fin que le pas de maillage que nous avons utilisé pour le calcul de référence.

Afin d'effectuer une comparaison plus quantitative, nous présentons également sur la figure D.5 les coupes de vitesse horizontale et verticale en $x/a = 5.2$. Les résultats obtenus sont très satisfaisants.

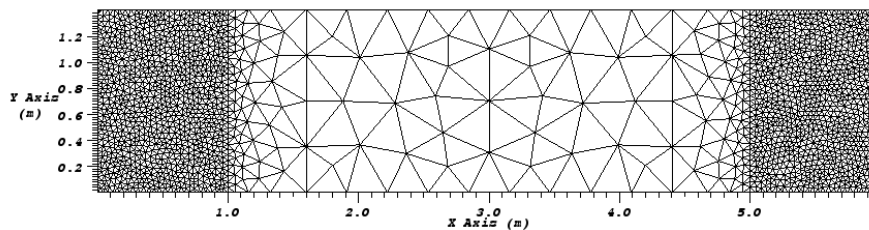


FIG. D.3 – Maillage non-structuré utilisé pour le premier cas test : $Re = 10$.

D.3 Résultats obtenus sur maillages non-structurés

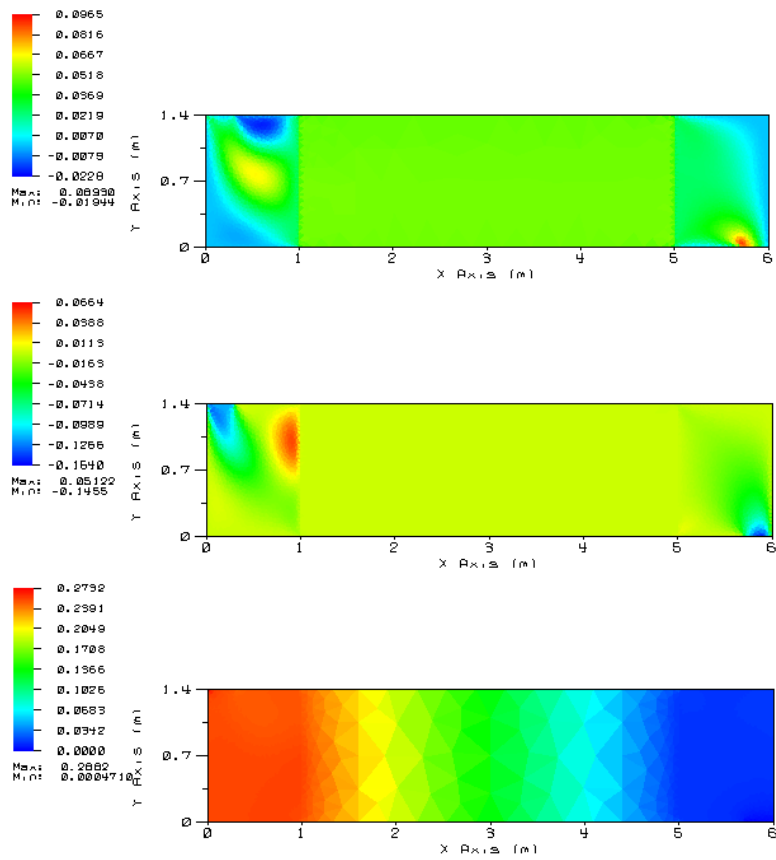


FIG. D.4 – Résultats obtenus pour la vitesse horizontale, la vitesse verticale et la pression sur maillage non-structuré (cas test : $Re = 10$).

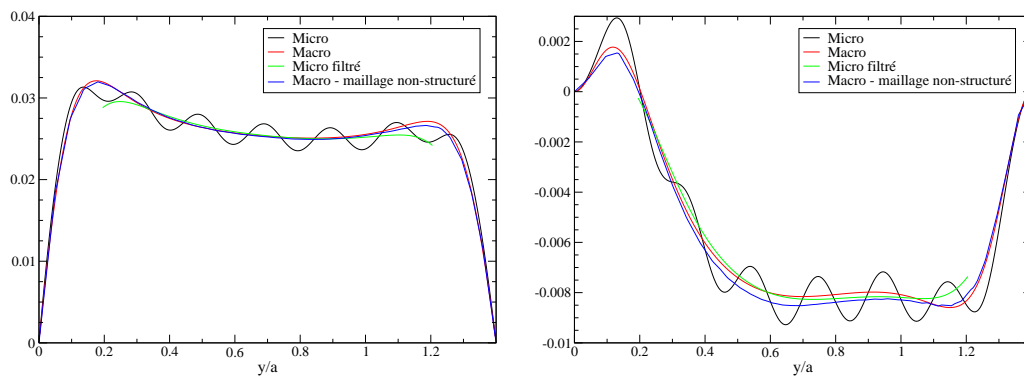


FIG. D.5 – Comparaison des vitesses horizontales et verticales en $x/a = 5.2$ pour le premier cas test : $Re = 10$.

Bibliographie

- Ackermann, C. (2000). *Développements et validation de simulation des grandes échelles d'écoulements turbulents dans un code industriel*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Allaire, G. (1989). Prolongement de la pression et homogénéisation des équations de Stokes dans un milieu poreux connexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 309(Série I) :717–722.
- Alvarez, G., Bournet, P.E., et Flick, D. (2003). Two dimensional simulation of turbulent flow and transfer through stacked spheres. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46 :2459–2469.
- Anderson, D.M., McFadden, G.B., et Wheeler, A.A. (1999). Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 30 :139–165.
- Anderson, D.M., McFadden, G.B., et Wheeler, A.A. (2001). A phase-field model with convection : sharp-interface asymptotics. *Physica D*, 151 :305–331.
- Antohe, B.V. et Lage, J.L. (1997). A general two-equation macroscopic turbulence model for incompressible flow in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40 :3013–3024.
- Aris, R. (1962). *Vectors, Tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Dover, New York.
- Bailly, C. et Comte-Bellot, G. (2003). *Turbulence*. CNRS Editions, Paris.
- Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier, New York.
- Beavers, G.S. et Joseph, D.D. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech.*, 30 :197–207.
- Beavers, G.S., Sparrow, E.M., et Masha, B.A. (1974). Boundary conditions at a porous surface which bounds a fluid flow. *AIChE J.*, 20 :596–597.
- Bieder, U. et Graffard, E. (2006). Qualification of the CFD code Trio_U for full scale nuclear reactor applications. In *Proc. of CDF4NRS, Benchmarking of CFD code for Application to Nuclear Reactor Safety, 5-7 September 2006, Munich Germany*.
- Bosq, J.C. et Conti, A. (2005). Avancées dans la conception des assemblages combustibles des RNR-G. Impact sur la neutronique et la thermo-aéraulique. Note Technique 2004-420, CEA DEN/DER/SPRC/LEDC.
- Breugem, W.P. (2005). *The influence of wall permeability on laminar and turbulent flows : Theory and simulations*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Delft.
- Breugem, W.P. et Boersma, B.J. (2005). Direct numerical simulations of turbulent flow over a permeable wall using a direct and a continuum approach. *Phys. Fluids*, 17(2) :025103.
- Breugem, W.P., Boersma, B.J., et Uittenbogaard, R.E. (2004). Direct numerical simulation of plane channel flow over a 3D cartesian grid of cubes. In *Applications of Porous Media, Evora Geophysics Center*, pages 27–35. A.H. Reis and A.F. Miguel Editors.
- Breugem, W.P., Boersma, B.J., et Uittenbogaard, R.E. (2005). The laminar boundary layer over a permeable wall. *Transport Porous Media*, 59(3) :267–300.

- Brinkman, H.C. (1948). A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Applied Scientific Research*, A1 :27–34.
- Calvin, C., Cueto, O., et Emonot, P. (2002). An object-oriented approach to the design of fluid mechanics software. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 36(5) :907–921.
- Carbonell, R.G. et Whitaker, S. (1984). *Fundamentals of transport phenomena in porous media*. M. Nijhoff, Dordrecht.
- Chandesris, M. et Jamet, D. (2006). Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a poiseuille flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49 :2137–2150.
- Chandesris, M., Serre, G., et Sagaut, P. (2006). A macroscopic turbulence model for flow in porous media suited for channel, pipe and rod bundle flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49 :2739–2750.
- Chatelain, A. (2004). *Simulation des grandes échelles d'écoulements turbulents avec transfert de chaleur*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Chen, Y.S. et Kim, S.W. (1987). Computation of turbulent flows using an extended $k - \epsilon$ turbulence closure model. *NASA CR-179204*.
- Chung, K., Lee, K.S., et Kim, W.S. (2003). Modified macroscopic turbulence modeling for the tube with channel geometry in porous media. *Numer. Heat Transfer, Part A*, 43 :659–668.
- Cioni, O. (2004). Numerical study of a blocking situation of some helium channels in the core of a HTGR with Trio_U - benchmark with MINATOM. Note Technique 2004-027, CEA DEN/DER/SSTH/LMDL.
- Comte-Bellot, G. (1965). Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air no. 419*.
- Darcy, H.P.G. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Victor Dalmont, Paris.
- De Lemos, M.J.S. (2005). Turbulent kinetic energy distribution across the interface between a porous and a clear region. *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 32 :107–115.
- De Lemos, M.J.S. et Pedras, M.H.J. (2000). Simulation of turbulent flow through hybrid porous medium - clear fluid domains. In *Proc. of the ASME Heat Transfer Division*, volume 5, pages 113–122.
- De Lemos, M.J.S. et Silva, R.A. (2006). Turbulent flow over a layer of a highly permeable medium simulated with a diffusion-jump model for the interface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49 :546–556.
- De Lemos, M. J. S. et Pedras, M. H. J. (2001). Recent mathematical models for turbulent flow in saturated rigid porous media. *J. Fluids Eng.*, 123 :935–940.
- Dean, R.B. (1978). Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow. *J. Fluids Eng.*, 100 :215–223.
- Edwards, D.A., Brenner, H., et Wasan, D.T. (1991). *Interfacial transport processes and rheology*. Butterworth-Heinemann.
- Eggels, J.G.M, Unger, F., Weiss, M.H., Westerweel, J., Adrian, R.J., Friedrich, R., et Nieuwstadt, F.T.M. (1994). Fully developed turbulent pipe flow : A comparison between direct numerical simulation and experiment. *J. Fluid Mech.*, 268 :175–209.
- Emmerich, H. (2003). *The Diffuse Interface Approach in Materials Science*. Springer.
- Emonot, P. (1992). *Méthodes de Volumes Elements Finis : Application aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon I.
- Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. *Chem. Eng. Progress*, 48(2) :89–94.
- Falk, F. et Momponteil, A. (1998). Détermination d'un champ de vitesses 3D en géométrie complexe par vélocimétrie laser 2d. In *6ème Congrès francophone de Vélocimétrie laser, Saint Louis, France, Sept. 22-25*.

BIBLIOGRAPHIE

- Finnigan, J. (2000). Turbulence in plant canopies. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 32 :519–571.
- Forchheimer, P. (1901). Wasserbewegung durch boden. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 45 :1736–1741 & 1781–1788.
- Fouillet, C. (2003). *Généralisation à des mélanges binaires de la méthode du second gradient et application à la simulation numérique directe de l'ébullition nucléée*. Thèse de doctorat, Univ. Paris 6.
- Garrigues, J. (1999). Statique des coques élastiques. <http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/coques.html>.
- Garrigues, J. (2001). Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens. <http://jgarrigues.perso.egim-mrs.fr/tenseurs.html>.
- Getachew, D., Minkowycz, W.J., et Lage, J.L. (2000). A modified form of the $k - \epsilon$ model for turbulent flows of an incompressible fluid in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43 :2909–2915.
- Goharzadeh, A., Khalili, A., et Jorgensen, B.B. (2005). Transition layer thickness at a fluid-porous interface. *Phys. Fluids*, 17 :057102.
- Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D., et Velarde, M. G. (2003). Momentum transport at a fluid-porous interface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46 :4071–4081.
- Gray, W.G. (1975). A derivation of the fluid equations for multi-phase transport. *Chem. Eng. Science*, 30 :229–233.
- Guo, B., Yu, A., Wright, B., et Zulli, P. (2003). Comparison of several turbulence models applied to the simulation of gas flow in a packed bed. In *Third Int. Conf. on CFD in the minerals and Process Industries*. CSIRO, Melbourne, Australia, pages 509–514.
- Hahn, S., Je, J., et Choi, H. (2002). Direct numerical simulation of turbulent channel flow with permeable walls. *J. Fluid Mech.*, 450 :259–285.
- Hirt, C.V., Nichols, B.D., et Romero, N.C. (1975). Sola - a numerical solution algorithm for transient flow. *Los Alamos National Laboratory, Report LA-5852*.
- Idel'cik, I.E. (1969). *Memento des pertes de charge*. Direction des études et recherches d'EDF.
- Irmay, S. (1965). Modèles théoriques d'écoulement dans les corps poreux. *Bulletin Rilem*, 29 :37–43.
- James, D.F. et Davis, M.J. (2001). Flow at the interface of a model fibrous porous medium. *J. Fluid Mech.*, 426 :47–72.
- Kakac, S., Shah, R.K., et Aung, W. (1987). *Handbook of Single-Phase Convective Heat transfer*. John Wiley & Sons, New York.
- Kataoka, I. (1986). Local instant formulation of two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 12(5) :745–758.
- Kaviany, M. (1995). *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. Springer-Verlag, New York, second edition.
- Kong, F.Y. et Schetz, J.A. (1982). Turbulent boundary layer over porous surfaces with different surface geometries. In *AIAA 20th Aerospace Sciences Meeting, January 11-14, Orlando, Florida*, pages AIAA-82-0030.
- Kuwahara, F., Kameyama, Y., Yamashita, S., et Nakayama, A. (1998). Numerical modeling of turbulent flow in porous media using a spatially periodic array. *J. Porous Media*, 1(1) :47–55.
- Kuwahara, F., Nakayama, A., et Koyama, H. (1996). A numerical study of thermal dispersion in porous media. *J. Heat Transfer*, 118 :756–761.
- Kuwahara, F., Shirota, M., et Nakayama, A. (2001). A numerical study of interfacial convective heat transfer coefficient in two-energy equation model for convection in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44 :1153–1159.
- Lage, J.L. (1998). *The fundamental theory of flow through permeable porous media from Darcy to turbulence*. D.B. Ingham and I.Pop, editors, *Transport phenomena in porous media*.

- Larson, R.E. et Higdon, J.J.L (1986). Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. part 1. axial flow. *J. Fluid Mech.*, 166 :449–472.
- Larson, R.E. et Higdon, J.J.L (1987). Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. part 2. transverse flow. *J. Fluid Mech.*, 178 :119–136.
- Launder, B.E. et Spalding, D.B. (1972). *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London.
- Lecorps, J.-M. (2001). Les tenseurs. http://membres.lycos.fr/thebody/Tenseurs_index.htm.
- Lee, K. et Howell, J.R. (1987). Forced convective and radiative transfer within a highly porous layer exposed to a turbulent external flow field. In *Proc. of the 1987 ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conf.*, volume 2, pages 377–386.
- MacDonald, I.F., El-Sayed, M.S., Mow, K., et Dullien, F.A.L. (1979). Flow through porous media : the Ergun equation revisited. *J. Fluid Mech.*, 18 :199–208.
- Matheron, G. (1967). *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson.
- Mazuoka, T. et Takatsu, Y. (1996). Turbulence model for flow through porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39 :2803–2809.
- Mikelic, A. (2000). *Filtration in Porous Media and Industrial Application*, volume 1734, chapter Homogenization theory and applications to filtration through porous media, pages 127–214. Springer.
- Moser, R.D., Kim, J., et Mansour, N.N. (1999). Direct numerical simulation of channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 4(11) :943–945.
- Nakayama, A. et Kuwahara, F. (1999). A macroscopic turbulence model for flow in a porous medium. *J. Fluids Eng.*, 121 :427–433.
- Nakayama, A., Kuwahara, F., et Hayashi, T. (2004). Numerical modelling for the three-dimensional heat and fluid flow through a bank of cylinders in yaw. *J. Fluid Mech.*, 498 :139–159.
- Neale, G. et Nader, W. (1974). Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law : Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *Can. J. Chem. Eng.*, 52 :475–478.
- Nield, D.A. (1991). The limitations of the Brinkman-Forchheimer equations in modeling flow in a saturated porous medium and at an interface. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 12(3) :269–272.
- Nield, D.A. (2001). Alternative models of turbulence in a porous medium, and related matters. *J. Fluids Eng.*, 123 :928–931.
- Ochoa-Tapia, J.A. et Whitaker, S. (1995a). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - I. theoretical development. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38(14) :2635–2646.
- Ochoa-Tapia, J.A. et Whitaker, S. (1995b). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - II. comparison with experiment. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38(14) :2647–2655.
- Pedras, M.H.J. et De Lemos, M.J.S. (2000). On the definition of turbulent kinetic energy for flow in porous media. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 27(2) :211–220.
- Pedras, M.H.J. et De Lemos, M.J.S. (2001a). Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44 :1081–1093.
- Pedras, M.H.J. et De Lemos, M.J.S. (2001b). On the mathematical description and simulation of turbulent flow in a porous medium formed by an array of elliptic rods. *J. Fluids Eng.*, 123 :941–947.
- Pedras, M.H.J. et De Lemos, M.J.S. (2001c). Simulation of turbulent flow in porous media using a spatially periodic array and a low Reynolds two-equation closure. *Num. Heat Transfer, Part A*, 39 :35–59.

BIBLIOGRAPHIE

- Pedras, M.H.J. et De Lemos, M.J.S. (2003). Computation of turbulent flow in porous media using a low-reynolds $k - \epsilon$ model and an infinite array of transversally displaced elliptic rods. *Num. Heat Transfer, Part A*, 43 :585–602.
- Perry, A.E., Henbest, S.M., et Chong, M.S. (1986). A theoretical and experimental study of wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 165 :163–199.
- Pinson, F. (2006). *Modélisation à l'échelle macroscopique d'un écoulement turbulent au sein d'un milieu poreux*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- Poulikakos, D. et Kazmierczak, M. (1987). Forced convection in a duct partially filled with a porous material. *J. Heat Transfer*, 109 :653–662.
- Prinos, P., Sofiadis, D., et Keramaris, E. (2003). Turbulent flow over and within a porous bed. *J. Hydraulic Eng.*, pages 720–733.
- Quintard, M. et Whitaker, S. (1994a). Transport in order and disordered porous media - I. The cellular average and the use of weighting functions. *Transport Porous Media*, 14 :163–177.
- Quintard, M. et Whitaker, S. (1994b). Transport in order and disordered porous media - II. Generalized volume averaging. *Transport Porous Media*, 14 :179–206.
- Renard, P. et de Marsily, G. (1997). Calculating equivalent permeability : a review. *Advances in Water Resources*, 20 :253–278.
- Richardson, S. (1971). A model for the boundary condition of a porous material. Part II. *J. Fluid Mech.*, 49(2) :327–336.
- Rudraiah, N. (1985). Coupled parallel flows in a channel and a bounding porous medium of finite thickness. *J. Fluids Eng.*, 107 :322–329.
- Saffman, P.G. (1971). On the boundary condition at the surface of a porous medium. *Stud. Appl. Math.*, L(2) :93–101.
- Sagaut, P. (2003). *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer Verlag, second edition.
- Sahraoui, M. et Kaviani, M. (1992). Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35(4) :927–943.
- Saleh, S., Thovert, J.F., et Adler, P.M. (1993). Flow along porous media by partial image velocimetry. *AIChE Journal*, 39(11) :1765–1776.
- Sanchez-Palencia, E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux hétérogènes. *Int. J. Eng. Sc.*, 12 :331–351.
- Shaw, R.H. et Schumann, U. (1992). Large-eddy simulation of turbulent flow above and within a forest. *Boundary-Layer Meteorology*, 61 :47–64.
- Silva, R.A. et De Lemos, M.J.S. (2003). Turbulent flow in a channel occupied by a porous layer considering the stress jump at the interface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46 :5113–5121.
- Slattery, J.C. (1972). *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*. McGraw-Hill, New York.
- Taylor, G.I. (1971). A model for the boundary condition of a porous material. Part I. *J. Fluid Mech.*, 49(2) :319–326.
- Vafai, K. et Kim, S.J. (1990). Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer - an exact solution. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 11(3) :254–256.
- Vafai, K. et Kim, S.J. (1995). On the limitations of the brinkman-forchheimer-extended darcy equation. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 16(1) :11–15.

- Vafai, K. et Thiyagaraja, R. (1987). Analysis of flow and heat transfer at the interface region of a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30 :1391–1405.
- Vafai, K. et Tien, C. L. (1981). Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24 :195–203.
- Valdes-Parada, F.J., Goyeau, B., et Ochoa-Tapia, J.A. (2006). Diffusive mass transfer between a microporous medium and an homogeneous fluid : Jump boundary conditions. *Chem. Eng. Sc.*, 61 :1692–1704.
- Valdes-Parada, F.J. et Ochoa-Tapia, J.A. (2005). Jump condition at the boundary between a porous catalyst and a homogeneous fluid. In *Proc. of the 4th Int. Conf. on Computational Heat and Mass Transfer*, volume 1, pages 323–326.
- Van Dyke, M. (1975). *Perturbation methods in fluid mechanics*. The Parabolic Press, Standford, California.
- Viollet, P-L, Chabard, J-P, Esposito, P., et Laurence, D. (1998). *Mécanique des fluides appliquée*. Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées.
- Watanabe, T. (2004). Large-eddy simulation of coherent turbulence structures associated with scalar ramps over plant canopies. *Boundary-Layer Meteorology*, 112 :307–341.
- Whitaker, S. (1969). Advances in theory of fluid motion in porous media. *Ind. Eng. Chem.*, 61 :14–28.
- Whitaker, S. (1986). Flow in porous media I : A theoretical derivation of Darcy's law. *Transport Porous Media*, 1 :3–25.
- Whitaker, S. (1996). The Forchheimer equation : A theoretical development. *Transport Porous Media*, 25 :27–61.
- Whitaker, S. (1999). *The method of volume averaging*. Kluwer academic publishers.
- Wood, B.D., Quintard, M., et Whitaker, S. (2000). Jump conditions at non-uniform boundaries : the catalytic surface. *Chem. Eng. Sc.*, 55 :5231–5245.
- Zagni, A.F.E et Smith, K.V.H. (1976). Channel flow over permeable beds of graded spheres. *Journal of Hydraulics Division*, 102(HY2) :207–222.
- Zeytounian, R. Kh. (1986). *Les modèles Asymptotiques de la mécanique des fluids I, Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Zippe, H.J. et Graf, W.H. (1983). Turbulent boundary-layer flow over permeable and non-permeable rough surfaces. *J. Hydraulic Research*, 21(1) :51–65.
- Zwillinger, D. (1989). *Handbook of differential equations*. Academic Press, Boston.

RÉSUMÉ

Ce travail porte sur la simulation numérique d'écoulements turbulents dans l'ensemble d'un cœur de réacteur nucléaire en utilisant des approches multi-échelles. Nous proposons tout d'abord un modèle de turbulence macroscopique, basé sur une approche de type milieu poreux, pour décrire l'écoulement dans la région combustible du cœur de réacteur. Puis, nous étudions les conditions de saut à imposer aux interfaces entre les régions libres et les régions poreuses. Une étude analytique poussée, menée sur le cas des écoulements laminaires, permet de répondre à des questions fondamentales concernant la signification physique des conditions de saut, la valeur des paramètres de saut, ainsi que la position de l'interface. En utilisant les connaissances acquises au cours de cette analyse, nous proposons des conditions de saut à l'interface libre/poreux pour le cas des écoulements turbulents. Le modèle obtenu est alors appliqué à la simulation d'un écoulement turbulent dans un modèle simplifié de cœur de réacteur.

MOTS-CLÉS

Milieu poreux, turbulence, prise de moyenne volumique, interface, grandeur en excès, conditions aux limites, méthode des développements asymptotiques raccordés, écoulements incompressibles, multi-échelles.

ABSTRACT

This work deals with the numerical simulation of turbulent flows in the whole nuclear reactor core, using multi-scale approaches. First, a macroscopic turbulence model is built, based on a porous media approach, to describe the flow in the fuel assemblies part of the nuclear core. Then, we study the jump conditions that have to be applied at a free fluid/porous interface. A thorough analytical study is carried out for laminar flows. This study allows to answer some fundamental questions about the physical meaning of the jump conditions, the values of the jump parameters and the location of the interface. Using these results, jump conditions for turbulent flows are proposed. The model is then applied to the simulation of a turbulent flow in a simplified model of a reactor core.

KEYWORDS

Porous media, turbulence, volume averaging method, interface, excess quantity, boundary conditions, matched asymptotic expansions, incompressible flow, multi-scale.