

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
**Docteur**

Délivré par  
**UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA**

Préparée au sein de l'école doctorale : **Energie  
Environnement E<sup>2</sup>**

Et de l'unité de recherche CNRS-PROMES

Spécialité : **Sciences pour l'ingénieur**

Présentée par **Frédéric AULERY**

**Analyse du couplage entre turbulence et gradient  
de température dans les écoulements pariétaux par  
simulations numériques fines**

Soutenue le 14 novembre 2013 devant le jury composé de

Mme Françoise BATAILLE, Pr, PROMES - UPVD  
M Jérôme BELLETRE, Pr, Polytech Nantes  
M Guillaume BRILLANT, Cr HDR, LESAM- IRSN  
M Daniel PETIT, Pr Institut Pprime, CNRS - ENSMA  
M Franck NICOUD, Pr, IMMM Montpellier  
M Adrien TOUTANT, Mcf, PROMES - UPVD  
M Stéphane VIAZZO, Mcf HDR M2P2 Marseille  
M Ye ZHOU, Dr, LLNL - USA.

Directeur de thèse  
Président  
Rapporteur

Co-directeur  
Rapporteur  
Co-directeur

---

« Je soussigné, Frédéric Aulery, certifie être l'auteur de cette thèse de 174 pages, avoir moi-même effectué les recherches qui la sous-tendent, et atteste que cette thèse n'a pas déjà été soutenue dans le cadre d'une autre École doctorale. Toute phrase ou paragraphe empruntés au travail d'un autre (avec ou sans changements mineurs) et cités dans cette thèse apparaissent entre guillemets, et cet emprunt est reconnu précisément par une référence à l'auteur, à l'ouvrage et à la page cités. Je suis conscient que le plagiat - l'emploi de tel ou tel écrit sans le reconnaître - peut se traduire par l'interdiction de soutenir la thèse ou son invalidation et des sanctions pénales. J'affirme également qu'à l'exception des emprunts dûment reconnus, cette thèse constitue un travail personnel. »

---



# Résumé

Une des voies de production d'électricité renouvelable est l'utilisation de centrale solaire à concentration. Dans les centrales solaires à tour, le niveau de concentration est très important ce qui conduit à d'excellents rendements. Les récepteurs solaires reçoivent le flux de chaleur et le transfère à un fluide caloporteur qui s'écoule avec un fort niveau de turbulence. Le gradient thermique subi par ces écoulements provoque des changements de comportement qui ne sont pas explicables par les simples variations des propriétés du fluide. Afin d'expliquer ces modifications, nous utilisons le code Trio\_U pour réaliser des simulations numériques fines.

Après avoir introduit les différents outils numériques nécessaires à l'étude de ces écoulements, et les améliorations du code pour la capture de la physique, nous présentons des simulations des grandes échelles et des simulations numériques directes obtenues en utilisant l'approximation de bas nombre de Mach. Ces simulations sont faites dans des canaux plans turbulents aux nombres de Reynolds de frottement  $Re_\tau = 180$  et  $Re_\tau = 395$ , pour des ratios de température entre les parois du canal plan  $T_r = \frac{T_{chaud}}{T_{froid}} = 1$  et  $T_r = 2$ .

Nous comparons les profils des grandeurs moyennes et fluctuantes dans l'espace physique puis dans l'espace spectral. L'étude dans l'espace physique permet d'évaluer l'impact de la modélisation en comparant différentes simulations numériques directes et simulations des grandes échelles. La comparaison avec la littérature valide les modifications du code. L'analyse spectrale permet d'étudier l'impact du changement de nombre de Reynolds et du gradient de température sur la structure des écoulements en canal plan turbulent anisotherme. On observe ainsi des modifications dans la répartition de l'énergie des structures porteuses en fonction du nombre de Reynolds. Sous l'action du gradient de température, la taille des structures porteuses d'énergie change.

# Abstract

One way for renewable electricity production is the concentrate solar power plants. In tower solar power plant, the solar concentration level leads to very interesting efficiency. The solar receivers absorb the flux and transfer it to a turbulent flow. The thermal gradient suffered by these flows induces some behavior change that cannot be explained only by the fluid propriety variations. In order to explain these changes, we use the Trio\_U code and realize some fine numerical simulations.

After introducing the numerical tools, necessary for studying these flows, and the Trio\_U enhancements for the physical behavior capture, we present the large eddy simulations and direct numerical simulations, using the low Mach number assumption. These simulations are turbulent channel flows at friction Reynolds numbers  $Re_\tau = 180$  and  $Re_\tau = 395$  with thermal gradient  $T_r = \frac{T_{hot}}{T_{cold}} = 1$  and  $T_r = 2$ .

We compare the mean and fluctuating values in physical and spectral space. The study in physical space allows us to evaluate the model impact by comparison of large eddy simulations and direct numerical simulation. By comparison with literature we validated the code enhancements. The spectral space analyses allow studying the impact of turbulent Reynolds number and thermal gradient on the flow. Thus, according to the Reynolds number, we observe variations in the energy distribution. Due to the thermal gradient, the turbulent scales that carry the turbulent kinetic energy change.

# Remerciements

Ces travaux ont bénéficié d'un accès aux moyens de calcul du CINES au travers des allocations de ressources 2011-c2011025099,2012-c2012025099,2013-c2013025099 attribuées par GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif)



# Table des matières

Résumé . . . . .	v
Abstract . . . . .	vi
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Cadres physique et numérique</b>	<b>5</b>
1.1 Équations à bas nombre de Mach . . . . .	5
1.1.1 Hypothèses . . . . .	6
1.1.2 Équation de conservation de la masse . . . . .	7
1.1.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	8
1.1.4 Équation de conservation de l'énergie . . . . .	9
1.1.5 Variation des propriétés du fluide . . . . .	11
1.2 Simulation des grandes échelles . . . . .	12
1.2.1 Principe . . . . .	12
1.2.2 Équations Filtrées . . . . .	13
1.2.3 Modélisations sous-maillages . . . . .	16
1.2.3.1 Modélisation sous-maille pour le tenseur $\tau_{ij}$ . . . . .	16
1.2.3.2 Modélisation sous-maille pour le flux $\mathfrak{S}_j$ . . . . .	17
1.3 Le Logiciel de CFD Trio_U . . . . .	18
1.3.1 Méthode des Volumes finis . . . . .	18
1.3.2 Schémas numériques . . . . .	21
1.3.2.1 Schémas de convections . . . . .	21
1.3.2.2 Schéma de diffusion . . . . .	21
1.3.3 Solveur pour la pression . . . . .	24
<b>2 Modélisation et analyse des écoulements</b>	<b>27</b>
2.1 Amélioration de la résolution des équations . . . . .	27
2.1.1 Algorithme de résolution conservatif . . . . .	27
2.1.1.1 Principe . . . . .	27
2.1.1.2 Ordre de résolution des équations . . . . .	29
2.1.1.3 Validation des propriétés de conservation de l'algorithme . . . . .	29
2.1.2 Modification du schéma en temps . . . . .	30
2.1.2.1 Principe . . . . .	30
2.1.2.2 Cas test de la source volumique . . . . .	31
2.1.2.3 Validation . . . . .	33
2.1.3 Schéma centré d'ordre 4 pour la convection de la vitesse . . . . .	33
2.1.3.1 Formalisme du schéma . . . . .	34

2.1.3.2	Cas test de la solution sinusoïdale . . . . .	36
2.1.3.3	Validation . . . . .	36
2.2	Grandeurs caractéristiques dans l'espace physique . . . . .	37
2.3	Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral . . . . .	38
2.3.1	Changement de variable . . . . .	39
2.3.2	Passage dans l'espace spectral . . . . .	39
2.3.3	Décomposition de l'équation . . . . .	41
2.3.4	Procédure d'obtention des spectres . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Canal plan bi-périodique</b>	<b>47</b>
3.1	Domaine de calcul . . . . .	47
3.1.1	Géométrie . . . . .	48
3.1.2	Conditions aux limites . . . . .	50
3.1.3	Conditions initiales . . . . .	50
3.1.4	Maillages . . . . .	51
3.2	Simulations isothermes . . . . .	52
3.2.1	Simulation à $Re_\tau = 180$ . . . . .	52
3.2.2	Simulation à $Re_\tau = 395$ . . . . .	52
3.3	Simulation anisothermes . . . . .	55
3.3.1	Simulation à $Re_\tau = 180$ . . . . .	55
3.3.2	Simulation à $Re_\tau = 395$ . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Établissement d'une couche limite thermique</b>	<b>65</b>
4.1	Domaine de calcul . . . . .	65
4.1.1	Géométrie . . . . .	65
4.1.2	Maillages . . . . .	66
4.2	Post-traitement spécifique . . . . .	67
4.3	Résultats . . . . .	68
4.3.1	Canal précurseur . . . . .	68
4.3.2	Canal ouvert . . . . .	69
4.3.2.1	Evolution globale . . . . .	69
4.3.2.2	Profil de sortie . . . . .	71
4.3.2.3	Profils parallèles aux parois . . . . .	72
4.3.2.4	Profils perpendiculaires aux parois . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Analyse spectrale</b>	<b>85</b>
5.1	Simulation isotherme à $Re_\tau = 180$ . . . . .	85
5.1.1	Validation du post-traitement. . . . .	85
5.1.1.1	Comparaison à Moser <i>et al.</i> . . . . .	86
5.1.1.2	Comparaison à Bolotnov et al. . . . .	88
5.1.2	Spectres . . . . .	90
5.1.2.1	Mécanismes fondamentaux . . . . .	91
5.1.2.2	Décomposition du terme de transfert . . . . .	92
5.2	Simulation anisotherme à $Re_\tau = 180$ . . . . .	95
5.2.1	Mécanismes fondamentaux . . . . .	95
5.2.2	Décomposition du terme de transfert . . . . .	97

5.3	Simulation isotherme à $Re_\tau = 395$ . . . . .	101
5.3.1	Mécanismes fondamentaux . . . . .	101
5.3.2	Décomposition du terme de transfert . . . . .	102
5.4	Simulation anisotherme à $Re_\tau = 395$ . . . . .	105
5.4.1	Mécanismes fondamentaux . . . . .	105
5.4.2	Décomposition du terme de transfert . . . . .	107
5.5	Comparaison des spectres . . . . .	111
5.5.1	Effet du nombre de Reynolds (simulations isothermes et non isothermes) . . . . .	111
5.5.2	Effet du gradient de Température . . . . .	113
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>127</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>131</b>
<b>A Production scientifique</b>		<b>137</b>
<b>B Utilisation du solveur multi-grilles</b>		<b>167</b>
B.1	Rappel sur la méthode . . . . .	167
B.2	Définition des niveaux de maillages . . . . .	168
B.2.1	Niveau 0 . . . . .	168
B.2.2	Agglomérations . . . . .	168
B.2.3	Niveaux 1 à $k$ . . . . .	169
B.3	Paramètre du solveur multigrille . . . . .	172





# Introduction

Dans la nature, la température est une forme d'énergie privilégiée pour la conversion de l'énergie. L'émission d'un rayonnement refroidit le corps émetteur et chauffe le corps récepteur. Les réactions chimiques sont endothermiques ou exothermiques, c'est à dire qu'elles absorbent ou émettent de la chaleur. Les différences de température dans l'atmosphère ou les océans créent des écoulements de fluides très importants. De la même manière, les procédés de tous genres ont pour but de déplacer ou convertir. Que ce soit pour modifier la densité d'une couche mince, amorcer et maintenir une réaction chimique ou produire un travail, la température joue un rôle central dans de nombreux procédés.

Le Laboratoire PROMES (PROcédé Matériaux et Énergie Solaire, UPR 8521), développe des procédés autour de la conversion de l'énergie solaire. Ces procédés vont du traitement des eaux usées [1], à la production d'électricité [2]. La conversion de l'énergie solaire en chaleur est nécessaire à la production d'électricité. Au sein du laboratoire, plusieurs technologies de conversion de l'énergie solaire pour la production d'électricité sont étudiées selon leur niveau de concentration de l'énergie. Le projet PEGASE (Production d'Électricité par turbine à GAZ et énergie SolairE) s'intéresse à la conversion d'un rayonnement solaire très concentré dans une centrale électrique solaire à tour. Un composant critique dans la conversion de l'énergie solaire est le récepteur solaire. Celui-ci reçoit l'ensemble du rayonnement solaire concentré, sa capacité à absorber les très forts flux reçus (pouvant aller de 500 à 1000 soleils) puis à les transmettre à un fluide caloporteur est directement liée au rendement de la centrale. Dans le cadre du projet PEGASE, le récepteur solaire utilisé est un récepteur surfacique, c'est à dire que l'ensemble du rayonnement est reçu sur une surface. La chaleur ainsi reçue est ensuite extraite par échange avec un fluide de transfert (ici de l'air pressurisé). Plus le rayonnement sera fort, plus la température d'échange avec le fluide sera importante et meilleurs seront les rendements. Du point de vue de l'échangeur plus cette température sera élevée, plus la différence de température entre la face irradiée du récepteur solaire et la face arrière sera importante. Pour assurer de bons coefficients d'échanges, il sera nécessaire d'avoir un niveau de turbulence important. De plus, les grandes différences de températures imposent de très fortes contraintes sur les matériaux du récepteur. Il est alors nécessaire d'avoir une bonne connaissance de ces écoulements et de ces contraintes. La simulation numérique apparaît comme un bon moyen de réponse à ce besoin.

Les conditions d'utilisation du récepteur solaire ont fait apparaître des difficultés pour les modèles RANS standard à simuler ces écoulements. La compressibilité des écoulements, les très fortes températures et le haut niveau de turbulence créent d'importants couplages entre les champs dynamique et thermique dans ces écoulements qui nécessitent une approche adaptée.

Les écoulements fortement anisothermes sont peu documentés dans la littérature. Du point de vue expérimental, il est extrêmement difficile d'avoir simultanément les champs de température et de vitesse d'un écoulement et donc de calculer les corrélations entre vitesse et température. Des techniques développées par plusieurs laboratoires (par exemple l'ONERA et ParisTech [3]), permettent dans certaines conditions d'écoulement d'avoir ces deux informations simultanément.

Du point de vue de la simulation numérique, il existe beaucoup d'études ayant simultanément turbulence et température. Mais, parmi celles-ci peu s'intéressent aux couplages entre champ thermique et champ dynamique en écoulements compressibles. Kawamura [4] et Morinishi *et al.* [5] réalisent la simulation d'un canal plan chauffé asymétriquement mais la température est alors un scalaire passif (écoulements incompressibles). A l'opposé, des études tiennent compte des effets thermique et dynamique, mais l'écoulement est alors soumis à une compressibilité en vitesse (grand nombre de Mach). Morinishi *et al.* [6] réalisent la simulation numérique directe d'un canal plan compressible et comparent différentes conditions thermiques de paroi, mais la température n'est alors qu'une conséquence des effets de compressibilité. Les études des paramètres semblables aux nôtres (faible nombre de Mach et fort gradient thermique) sont peu nombreuses. On pourra citer Nicoud [7] et Lessani *et al.* [8] qui réalisent des simulations numériques d'écoulements quasi-compressibles chauffés asymétriquement à nombres de Reynolds faibles. Brillant [9, 10], Husson [11, 12] puis Serra [13] étudient cette même configuration avec une précision croissante et la volonté de se rapprocher de configurations réelles à haut nombre de Reynolds. Serra [14, 15] a mis en évidence l'existence d'un phénomène lié au gradient de température. Ce phénomène impacte non seulement l'écoulement moyen, mais aussi fortement sa partie instationnaire puisqu'il change la répartition de l'énergie cinétique turbulente dans l'écoulement. Ce phénomène ne peut s'expliquer par les seuls changements des propriétés du fluide, il naît du couplage entre la dynamique et la thermique des écoulements.

En nous basant sur les travaux antérieurs, nous chercherons à étudier le couplage entre gradient de température et turbulence en allant chercher une information différente, la répartition fréquentielle de l'énergie cinétique turbulente. Notre étude se basera sur des simulations numériques, réalisées avec le logiciel Trio\_U, d'un canal plan. Cette configuration simple permet de se concentrer sur les phénomènes physiques, d'utiliser des outils numériques performants et d'avoir une résolution spatiale importante. Serra *et al.* [15] ayant commencé l'étude de ce phénomène dans l'espace physique, nous la compléterons avec des simulations plus précises tant par les méthodes numériques que par les maillages utilisés. En partant des simulations dans l'espace physique, nous ferons l'analyse dans l'espace spectral des transferts d'énergie cinétique turbulente. L'objectif est de comprendre ce couplage entre dynamique et thermique.



Ce manuscrit est structuré de la manière suivante :

**Le chapitre 1** introduit les équations à bas nombre de Mach et les méthodes numériques qui seront la base de nos simulations numériques.

**Le chapitre 2** portera sur les différentes améliorations apportées au code Trio\_U pour la résolution d'écoulements très turbulents à faible nombre de Mach. Nous décrirons ensuite la modélisation et les outils nécessaires à l'étude spectrale des écoulements simulés.

**Le chapitre 3** reprendra les analyses dans l'espace physiques faites par Serra, pour les appliquer aux simulations réalisées avec les outils du chapitre 2. Ceci nous permettra de mettre en évidence les effets de la simulation des grandes échelles sur les profils des écoulements ainsi que les effets du gradient de température.

**Le chapitre 4** présentera l'étude de l'établissement d'une couche limite thermique. Ce travail, préliminaire à de futures études, a pour objectif de se rapprocher de la configuration réelle d'un récepteur solaire.

**Le chapitre 5** fera l'analyse spectrale des simulations en canal plan bi-périodique présentées au chapitre 3. Nous comparerons les différents termes de transfert de l'énergie cinétique turbulente pour voir l'influence du gradient de température sur l'organisation de la turbulence.

# Chapitre 1

## Cadres physique et numérique

Les équations qui régissent les écoulements de fluides sont riches et complexes. Cette richesse vient du couplage entre les différents phénomènes physiques qui interagissent et créent une dynamique unique (compressibilité de Mach ou thermique, convection, diffusion, glissement, etc). Bien qu'il soit possible de décrire complètement certains systèmes et de les résoudre numériquement, il est souvent préférable de faire la part entre les phénomènes de forte influence et les phénomènes négligeables selon les configurations d'étude. Dans ce chapitre, nous décrirons les choix relatifs à nos études en termes de modélisations physique et numérique.

### 1.1 Équations à bas nombre de Mach

Dans nos études, nous utilisons l'approche dite de bas nombre de Mach ( $Ma$ ) ou quasi-compressibilité. Cette approche est adéquate pour les écoulements qui ne peuvent être considérés comme incompressibles du fait d'effets thermiques et où les phénomènes acoustiques sont négligeables ( $Ma < 0.3$ ).

En ne résolvant plus la partie acoustique de l'écoulement, la limitation sur le pas de temps nécessaire pour capturer l'acoustique des écoulements est supprimée. De plus, les outils numériques destinés aux écoulements incompressibles deviennent utilisables pour résoudre l'écoulement [16]. La compressibilité du fluide, due aux variations de température, est alors gouvernée par une loi d'état. Dans notre cas, il s'agit de la loi des gaz parfait.

Cette approximation est très utilisée pour l'étude des phénomènes complexes pour lesquels les temps caractéristiques sont grands devant les échelles de temps associées aux sons. On trouvera des études utilisant l'approximation de faible nombre de Mach dans le domaine de la combustion. Majda [17] pose les bases théoriques de ces études. Santos *et al.* [18] utilisent l'approximation à faible nombre de Mach pour étudier le couplage entre turbulence, combustion et échanges radiatifs. Teleaga *et al.* [19] utilisent l'approximation de faible nombre de Mach pour proposer une modélisation simple des effets radiatifs sur des écoulements réactifs avec combustion. De manière plus surprenante, Flemming *et al.* [20] utilisent l'approximation à bas nombre de Mach pour obtenir les caractéristiques sonores d'une flamme. En se basant sur le champ de pression obtenu, ils identifient les paramètres de l'équation

de propagation des ondes en milieux continus. Ainsi, ils obtiennent une information instationnaire correspondante à la moyenne des ondes sonores sans payer l'important coût numérique de sa résolution. Cette technique est en plein essor et on trouve de nombreux articles sur son application à d'autres phénomènes [21–25]. Brillant *et al.* [9] étudient le refroidissement par film fin en utilisant l'approximation de bas nombre de Mach pour leur écoulements. Dans un autre domaine, Dellacherie [26] développe une approche qui étend les possibilités de l'approximation de bas nombre de Mach à l'étude d'écoulements diphasiques. Ceci lui permet d'étudier la dilatation de bulles ainsi que l'interaction d'un ensemble de bulles soumis à un gradient thermique.

L'approximation de bas nombre de Mach, que nous utilisons, se base sur les équations sans dimension. Nous commencerons par écrire chacune des équations sous forme adimensionnelle en utilisant les grandeurs caractéristiques suivantes :

- $x^*$  pour la longueur,
- $c^*$  (vitesse du son) pour la vitesse,
- $t^* = x^*/U_f$  pour le temps, où  $U_f$  est la vitesse caractéristique du fluide,
- $\rho^*$  pour la masse volumique,
- $\lambda^*$  pour la conductivité thermique,
- $\mu^*$  pour la viscosité,
- $P^*$  pour la pression,
- $T^*$  pour la température,
- $C_p^*$  pour la capacité calorifique à pression constante.

$$\begin{aligned} x^X &= \frac{x}{x^*}; t^X = \frac{t}{x^*/U_f}; \rho^X = \frac{\rho}{\rho^*}; U^X = \frac{U}{c^*}; P^X = \frac{P}{P^*} \\ \mu^X &= \frac{\mu}{\mu^*}; \lambda^X = \frac{\lambda}{\lambda^*}; T^X = \frac{T}{T^*}; C_p^X = \frac{C_p}{C_p^*} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Avec par définition,  $c^* = \sqrt{\gamma r T^*}$ , où  $r$  est la constante spécifique des gaz parfaits ( $r = 287$ ) qui vérifie :  $r = C_p - C_v$ , et  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

De plus, d'après la loi des gaz parfaits,  $P^* = \rho^* r T^*$ . On obtient donc :  $P^* = \frac{\rho^* (c^*)^2}{\gamma}$ .

### 1.1.1 Hypothèses

L'approche à bas nombre de Mach se base sur un développement asymptotique des équations de conservation pour obtenir un nouveau système d'équations libre de contrainte acoustique. Selon la physique que l'on souhaite résoudre, il est nécessaire de faire ce développement selon plusieurs échelles de temps et d'espace ; on pourra se reporter aux travaux de [27] pour plus de précisions. Paolucci [28] propose un développement en fonction du carré du nombre de Mach ( $Ma^2$ ) de chaque variable (équations (1.2)) pour l'étude d'écoulements fortement anisothermes. Le nombre de Mach étant faible, les termes dont l'ordre de Mach est élevé sont négligeables devant les termes de faible ordre.

$$U^X = Ma(U^{(0)} + Ma^2 U^{(1)} + o(Ma^2)) \quad (1.2a)$$

$$\rho^X = \rho^{(0)} + Ma^2 \rho^{(1)} + o(Ma^2) \quad (1.2b)$$

$$P^X = P^{(0)} + Ma^2 P^{(1)} + o(Ma^2) \quad (1.2c)$$

$$T^X = T^{(0)} + Ma^2 T^{(1)} + o(Ma^2) \quad (1.2d)$$

$$\lambda^X = \lambda^{(0)} + Ma^2 \lambda^{(1)} + o(Ma^2) \quad (1.2e)$$

$$\mu^X = \mu^{(0)} + Ma^2 \mu^{(1)} + o(Ma^2) \quad (1.2f)$$

$$C_p^X = C_p^{(0)} + Ma^2 C_p^{(1)} + o(Ma^2) \quad (1.2g)$$

### 1.1.2 Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse traduit l'évolution des quantités de matière des fluides composant un système. Un domaine avec création/destruction de matière verra ce bilan être positif/négatif ; on peut citer comme exemple les écoulements réactifs où des espèces chimiques apparaissent et disparaissent. Au contraire, dans nos études, les systèmes considérés sont des systèmes fermés ou imposant la conservation de leur masse globale (canaux plans ouverts) et sans réaction chimique. Leurs bilans de masse sont nuls localement comme globalement. Les écoulements que nous simulons suivent donc l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1.3)$$

En utilisant la notation indicielle, avec sommation sur l'indice  $j$ , elle devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.4)$$

Une fois adimensionnée, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho^X}{\partial t^X} + Ma^{-1} \frac{\partial (\rho^X U_j^X)}{\partial x_j^X} = 0 \quad (1.5)$$

Nous appliquons le développement asymptotique :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t^X} + \frac{\partial (\rho^{(0)} U_j^{(0)})}{\partial x_j^X} + Ma^2 \left( \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t^X} + \frac{\partial (\rho^{(1)} U_j^{(0)})}{\partial x_j^X} + \frac{\partial (\rho^{(0)} U_j^{(1)})}{\partial x_j^X} \right) + Ma^4 \frac{\partial (\rho^{(1)} U_j^{(1)})}{\partial x_j^X} = 0$$

L'ordre le plus petit étant,  $Ma^0$ , nous négligeons les termes d'ordre supérieur ou égaux à  $Ma^2$ .

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t^X} + \frac{\partial (\rho^{(0)} U_j^{(0)})}{\partial x_j^X} = 0 \quad (1.6)$$

Une fois remise sous forme dimensionnelle, l'équation de conservation de la masse dans l'hypothèse de bas-Mach s'écrit au final :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.7)$$

### 1.1.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de quantité de mouvement découle directement du principe fondamental de la dynamique. Elle représente l'équilibre des forces de pression, des forces visqueuses, et des forces d'entraînement. Pour un fluide Newtonien, l'équation de conservation de quantité de mouvement est :

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U} \vec{U}) = -\vec{\nabla} \cdot (P \mathbf{I}) + \nabla \cdot (\mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla}^T \cdot \vec{U})) - \frac{2}{3} \nabla \cdot (\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \quad (1.8)$$

Ce qui donne en notation indicelle :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $P$  la pression.

Une fois adimensionnée cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^X U_i^X}{\partial t^X} + Ma^{-1} \frac{\partial \rho^X U_j^X U_i^X}{\partial x_j^X} = \\ -\frac{Ma^{-1}}{\gamma} \frac{\partial P^X}{\partial x_i^X} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left[ \mu^X \left( \frac{\partial U_i^X}{\partial x_j^X} + \frac{\partial U_j^X}{\partial x_i^X} \right) \right] - \frac{2}{3 Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left( \mu^X \frac{\partial U_j^X}{\partial x_j^X} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

En appliquant le développement asymptotique, nous n'écrivons pour les produits de termes que le résultat du produit des termes d'ordre 0, les autres étant systématiquement négligeables devant les premiers. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} Ma \frac{\partial \rho^{(0)} U_i^{(0)}}{\partial t^X} + Ma \frac{\partial \rho^{(0)} U_j^{(0)} U_i^{(0)}}{\partial x_j^X} = -\frac{Ma^{-1}}{\gamma} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_i^X} \\ -\frac{Ma}{\gamma} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_i^X} + \frac{Ma}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left[ \mu^{(0)} \left( \frac{\partial U_i^{(0)}}{\partial x_j^X} + \frac{\partial U_j^{(0)}}{\partial x_i^X} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{Ma}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left( \mu^{(0)} \frac{\partial U_j^{(0)}}{\partial x_j^X} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le terme dont l'ordre de Mach est le plus petit dans l'équation (1.11) est le terme de gradient de pression d'ordre 0 ( $P^{(0)}$ ). Tous les autres termes étant d'ordre de Mach très supérieur, ils deviennent négligeables devant le terme de gradient de pression d'ordre 0. Ainsi, il ne reste que :

$$0 = -\frac{Ma^{-1}}{\gamma} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_i^X} \quad (1.12)$$

$$\text{soit :} \quad \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_i^X} = 0 \quad (1.13)$$



Nous obtenons ici que la pression d'ordre 0 est une constante de l'espace. Le gradient de la pression  $P^{(0)}$  est donc nul. En tenant compte de ceci, si on conserve uniquement les termes d'ordre inférieur à  $Ma^2$ , l'équation de quantité de mouvement simplifiée s'écrit :

$$Ma \frac{\partial \rho^{(0)} U_i^{(0)}}{\partial t^X} + Ma \frac{\partial \rho^{(0)} U_j^{(0)} U_i^{(0)}}{\partial x_j^X} = -\frac{Ma}{\gamma} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_i^X} + \frac{Ma}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left[ \mu^{(0)} \left( \frac{\partial U_i^{(0)}}{\partial x_j^X} + \frac{\partial U_j^{(0)}}{\partial x_i^X} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{Ma}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left( \mu^{(0)} \frac{\partial U_j^{(0)}}{\partial x_j^X} \right) \quad (1.14)$$

où la pression  $P^{(1)}$  peut varier spatialement.

Une fois remise sous formes dimensionnelles, l'équation (1.14), dans l'hypothèse bas-Mach, devient :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \quad (1.15)$$

L'application du développement asymptotique nous a amené à considérer deux pressions. Une première constante dans l'espace qui est caractéristique du fluide et intervient donc dans la loi d'état (ici la loi des gaz parfaits). Nous appellerons cette pression, la pression thermodynamique ( $P_{th}$ ). La deuxième pression est caractéristique des petites variations du milieu liées à la dynamique de l'écoulement et sera appelée pression dynamique ( $P_{dyn}$ ).

### 1.1.4 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie découle du premier principe de la thermodynamique. La variation de l'énergie d'un système est égale au travail des forces s'exerçant sur le système plus la puissance thermique échangée avec l'extérieur. Dans nos simulations, nous considérons des écoulements non réactifs, les effets radiatifs sont négligés. Ainsi, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit comme :

$$\rho \frac{\partial (e + \kappa)}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial (e + \kappa)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma'_{jl} U_l}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.16)$$

où  $j$  et  $l$  sont des indices de sommation.  $e$  et  $\kappa$  sont respectivement l'énergie interne massique et l'énergie cinétique massique ;  $\sigma'_{ij}$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

$$\sigma'_{ij} = \mu \left( 2S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{kk} \right) + \xi \delta_{ij} S_{kk} \quad (1.17)$$

avec  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$

Pour simplifier cette équation, nous utilisons l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Chaque composante de l'équation est multipliée par la composante correspondante du vecteur vitesse (par  $U_x$  pour  $x_i = x$ , par  $U_y$  pour  $x_i = y$ , par

$U_z$  pour  $x_i = z$ ). Les trois composantes sont ensuite sommées et la somme soustraite à l'équation (1.16). On obtient ainsi l'équation de variation de l'énergie interne :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + (\rho U_j) \frac{\partial e}{\partial x_j} = -P \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \sigma'_{jk} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.18)$$

On peut introduire l'enthalpie  $H = e + \frac{P}{\rho}$  dans cette équation. En utilisant alors l'équation de continuité, on fait apparaître le gradient de  $U_j P$  ce qui simplifie l'équation :

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} + (\rho U_j) \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial t} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \sigma'_{jk} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.19)$$

Nos études se faisant avec un gaz parfait et considérant que, dans la gamme de température étudiée, la capacité calorifique isobare  $C_p$  est constante, nous avons proportionnalité entre variation d'enthalpie et variation de température  $dh = C_p dT$ . Ceci nous permet d'écrire l'équation d'évolution de la température :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \sigma'_{jk} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.20)$$

Une fois adimensionnée, cette équation devient :

$$\begin{aligned} \rho^X C_p^X \frac{\partial T^X}{\partial t^X} + \rho^X C_p^X U_j^X \frac{\partial T^X}{\partial x_j^X} = \\ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial P^X}{\partial t^X} + M_a^{-1} \frac{\gamma - 1}{\gamma} U_j^X \frac{\partial P^X}{\partial x_j^X} + \frac{\gamma - 1}{Re} \sigma'_{jk} \frac{\partial U_k^X}{\partial x_j^X} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left( \lambda^X \frac{\partial T^X}{\partial x_j^X} \right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

avec :

$$Pe = Re Pr = \frac{\rho^* C_p^* U_f x^*}{\lambda^*} \quad (1.22)$$

Le nombre de Péclet ( $Pe$ ), produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl, traduit l'importance relative des transferts de chaleur par convection et par conduction thermique.

Comme pour l'équation de conservation de quantité de mouvement, lors du développement asymptotique nous ne retiendrons que les produits d'ordre 0 des grandeurs. De plus, du point de vue du développement asymptotique  $\sigma'_{jk}$  est analogue à une vitesse. Nous obtenons donc, après développement, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} C_p^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t^X} + \rho^{(0)} C_p^{(0)} U_j^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j^X} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial t^X} + \\ \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left( \lambda^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j^X} \right) + (\gamma - 1) \frac{Ma^2}{Re} \sigma'_{jk}^{(0)} \frac{\partial U_k^{(0)}}{\partial x_j^X} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} U_j^{(0)} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_j^X} \end{aligned} \quad (1.23)$$

On se rend compte ici que seul le terme visqueux est négligeable. Comme nous l'avons vu précédemment, le terme faisant intervenir le gradient de la pression d'ordre 0 est nul. Il reste ainsi :

$$\rho^{(0)} C_p^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t^X} + \rho^{(0)} C_p^{(0)} U_j^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j^X} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial t^X} + \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x_j^X} \left( \lambda^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j^X} \right) \quad (1.24)$$

Une fois remise sous forme dimensionnelle, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P_{th}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.25)$$

Sous forme différentielle, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial \rho C_p T}{\partial t} + \nabla(\rho C_p U T) = \frac{\partial P_{th}}{\partial t} + \nabla(\lambda \nabla T) \quad (1.26)$$

### 1.1.5 Variation des propriétés du fluide

Les grandes variations de température vont influencer sur les propriétés du fluide. Les variations de densité sont déjà prises en compte dans les équations bas-Mach à l'aide de la loi des gaz parfaits. Par contre, les variations de la viscosité moléculaire et de la conductivité ne le sont pas encore. Aussi, nous utiliserons les équations de Sutherland, qui permettent de faire varier la viscosité et la conductivité en fonction de la température selon les formes suivantes :

$$P_{th} = \rho r T \quad (1.27)$$

$$\mu = 1,4110^{-6} \frac{T^{1,5}}{T + 111} \quad (1.28)$$

$$\lambda = \frac{\mu C_p}{Pr} \quad (1.29)$$

Ces lois de variations sont les relations typiquement utilisées pour de l'air [29]. Elles montrent que la conductivité thermique  $\lambda$ , la viscosité dynamique  $\mu$  et la viscosité cinématique ( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ), augmentent avec la température. La loi de Sutherland est valide pour des températures comprises entre 220 K et 1900 K.

#### Résumé

Le système physique que nous allons résoudre est :

La conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.30a)$$

La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \quad (1.30b)$$

La conservation de l'énergie :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.30c)$$

La loi des gaz parfaits :

$$P_{th} = \rho r T \quad (1.30d)$$

L'homogénéité de la pression thermodynamique :

$$\frac{\partial P_{th}}{\partial x_i} = 0, \quad \forall x_i \in \{x, y, z\} \quad (1.30e)$$

## 1.2 Simulation des grandes échelles

La connaissance des équations qui caractérisent un système permet d'en prévoir le comportement. Cette capacité de prévision est directement liée au nombre de calculs qu'il nous est possible de réaliser. Par leurs grandes capacités de calculs, les ordinateurs (et particulièrement les super-calculateurs) rendent la simulation d'écoulements possible. La simulation numérique donne alors accès aux différentes grandeurs de l'écoulement avec simultanément une grande précision et une excellente résolution. Ce couple résolution-précision est souvent inaccessible par l'expérience.

Mais, dans le cas des écoulements turbulents, la taille des structures turbulentes (les tourbillons), ainsi que les temps caractéristiques associés aux phénomènes physiques, varient sur plusieurs ordres de grandeur. Les maillages doivent donc comporter des mailles 100 à 10000 fois plus petites que la taille du domaine. Simultanément, les pas de temps doivent être environ 10 à 100 fois plus petits que le plus petit temps caractéristique, alors que le caractère chaotique de la turbulence impose d'étudier de manière statistique les écoulements sur des temps pouvant aller jusqu'à 100 fois le temps caractéristique le plus grand. Ainsi, dès que l'on s'éloigne de géométries à fort degré de symétrie, que l'on couple les phénomènes, ou simplement que le niveau de turbulence est trop élevé, il devient impossible de simuler simultanément tous les phénomènes qui composent les écoulements. Le chercheur ou l'ingénieur qui désire réaliser une simulation numérique est très rapidement confronté à cette limite parce que les ressources numériques (logiciel ou matérielle) à sa disposition sont quasiment-toujours insuffisantes.

Nous avons déjà exploité, une des voies qui permet de réduire le coût des simulations numériques en utilisation l'approximation du bas nombre de Mach. Dans cette partie, nous allons présenter une autre voie que nous allons utiliser pour réduire le coût de nos simulation, la simulation des grandes échelles (SGE) ou Large Eddy Simulation (LES) en anglais.

### 1.2.1 Principe

Pour introduire la simulation des grandes échelles, nous devons définir le concept d'échelle de turbulence. Dans un écoulement turbulent, le fluide suit deux types de mouvement : un mouvement moyen qui déplace le fluide dans son ensemble et un mouvement instationnaire caractérisé par des fluctuations autour du mouvement moyen. Ces mouvements tri-dimensionnels et chaotiques s'organisent en structures tourbillonnaires de différentes tailles. La taille d'un tourbillon crée par la partie instationnaire de l'écoulement est appelée échelle de turbulence.

Il existe 3 grands types de simulations, la RANS pour Reynolds Average Navier-Stokes, la simulation des grandes échelles et la simulation numérique directe.

Les modèles RANS se concentrent sur le mouvement moyen du fluide, ils modélisent l'effet de l'ensemble des fluctuations sur l'écoulement moyen au travers d'équations supplémentaires dérivées des équations de conservation. Ces modèles ont l'avantage d'être très légers et d'être peu dépendants de la géométrie. Il sont donc utilisables par l'ingénieur notamment pour réaliser des études paramétriques. Mais, la modélisation RANS induit de nombreuses erreurs et l'absence de résolution

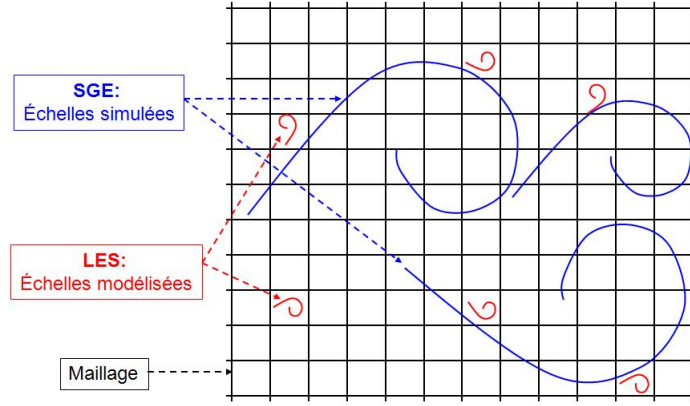


FIGURE 1.1 – Filtrage SGE

des échelles turbulentes peut masquer certains phénomènes [30].

La simulation numérique directe (SND) ou Direct numerical simulation (DNS) en anglais consiste à résoudre l'écoulement avec une précision suffisante pour décrire le comportement de toutes les échelles de la turbulence. Cette méthode nécessite un maillage très important, des méthodes numériques extrêmement précises et par conséquent de très grands temps de calcul pour des géométries pourtant simples.

A l'intermédiaire des deux, la simulation des grandes échelles développée initialement par Smagorinsky [31] consiste à modéliser le comportement d'une partie des échelles alors les autres sont résolues. Les échelles ainsi modélisées sont les petites échelles dont le comportement est plutôt bien compris et associé à un phénomène de dissipation de l'énergie cinétique. La distinction entre les échelles résolues et modélisées est liée au maillage. Comme le montre, de façon schématique, la figure 1.1, les structures turbulentes de tailles inférieures à la taille des mailles sont modélisées alors que celles dont la taille est supérieure à la taille du maillage sont résolues. Un modèle dit modèle sous-maille calcule l'effet des échelles modélisées sur les échelles résolues.

La figure 1.1 donne une représentation schématique des différentes approches du point de vue de l'énergie cinétique turbulente. La longueur de coupure étant déterminée par le maillage, le coût de la simulation est d'autant plus réduit que le maillage est léger. Dans notre cas, l'utilisation de la simulation a pour but de permettre des études précises, sur des simulations qui ne pourrait être réalisées en simulation numérique directe. En utilisant un maillage très fin, la SGE nous permet de gagner un facteur 50 sur les coûts des simulations numériques par rapport à une SND tout en conservant une excellente description des mécanismes de l'écoulement.

### 1.2.2 Équations Filtrées

D'un point de vue théorique, la simulation des grandes échelles est analogue à l'application d'un filtre sur les équations du système. On peut trouver, de manière détaillée, l'ensemble des considérations associé à la SGE dans les ouvrages de Sagaut [32] et Lesieur [33].

Nous appellerons  $G(x, t)$  dans l'espace physique et  $\hat{G}(k, t)$  dans l'espace spectral,

le filtre utilisé pour réaliser la séparation des échelles. Une variable  $\phi(x, t)$  sur lequel est appliqué le filtre  $G$  sera notée  $\bar{\phi}(x, t)$  (équation (1.31)) et dans l'espace spectral  $\hat{\bar{\phi}}(k, t)$ .

Nous notons  $\hat{\phi}(k, t)$  sa transformée de Fourier en espace et  $\bar{\phi}(x, t)$  la variable filtrée correspondante. La relation entre les variables  $\phi(x, t)$  et  $\bar{\phi}(x, t)$  est donnée par un produit dans l'espace spectral (1.31) et un produit de convolution dans l'espace physique (1.32) :

$$\hat{\bar{\phi}}(k, t) = \hat{G}(k, t) \hat{\phi}(k, t) \quad (1.31)$$

$$\bar{\phi}(x, t) = [G * \phi](x, t) \quad (1.32)$$

La partie non résolue de  $\phi(x, t)$  est noté  $\phi'(x, t)$ . Elle est définie par :

$$\phi'(x, t) = \phi(x, t) - \bar{\phi}(x, t) \quad (1.33)$$

Le filtre vérifie les propriétés suivantes :

- conservation des constantes :  $\bar{a} = a$ ,
- linéarité :  $\bar{\phi} + \bar{\psi} = \overline{\phi + \psi}$ ,
- commutativité avec les opérateurs de dérivation temporelle et spatiale :  $\overline{\frac{\partial \phi}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s}$ .

Une fois le filtre appliqué au système d'équations (1.30), on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right) \quad (1.35)$$

$$C_p \left( \frac{\partial \bar{\rho} \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_j \bar{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \quad (1.36)$$

$$\bar{P}_{thermo} = r \bar{\rho} \bar{T} \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.38)$$

La densité variant fortement dans notre étude, l'utilisation d'un autre type de filtrage, basé sur la moyenne de Favre, est préférable. Ce filtrage, symbolisée par  $\tilde{()}$ , a comme avantage de pouvoir s'affranchir des termes double et triple :  $\bar{\rho} \bar{U}_j$ ,  $\bar{\rho} \bar{T}$ ,  $\bar{\rho} \bar{U}_i \bar{U}_j$  et  $\bar{\rho} \bar{U}_j \bar{T}$ .

La moyenne de Favre de la variable  $\phi$  est définie de la façon suivante :

$$\tilde{\phi} = \frac{\bar{\rho} \phi}{\bar{\rho}} \quad (1.39)$$

Dans ce cas là, la partie non résolue de  $\phi$ , notée  $\phi''$ , est définie par :

$$\phi'' = \phi - \tilde{\phi} \quad (1.40)$$

En utilisant ce filtrage, les équations de bas-Mach deviennent :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_j \tilde{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_j} \right) \quad (1.42)$$

$$C_p \left( \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_j \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) \quad (1.43)$$

$$\bar{P}_{thermo} = r \bar{\rho} \tilde{T} \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.45)$$

Dans ces équations, les corrélations viscosité-gradient de vitesse et conductivité-gradient de température sont négligées.

Il reste encore deux termes non résolus :  $\widetilde{U_i U_j}$  et  $\widetilde{U_j T}$ . En utilisant la décomposition dite double, introduite par [34], on exprime ces deux termes en fonction de  $\tilde{U}$ ,  $U''$ ,  $\tilde{T}$ , et  $T''$  :

$$\begin{aligned} \widetilde{U_i U_j} &= (\tilde{U}_i + U_i'') \widetilde{(\tilde{U}_j + U_j'')} = \tilde{U}_i \tilde{U}_j + \tilde{U}_i U_j'' + U_i'' \tilde{U}_j + U_i'' U_j'' \\ \widetilde{U_j T} &= (\tilde{U}_j + U_j'') \widetilde{(\tilde{T} + T'')} = \tilde{U}_j \tilde{T} + \tilde{U}_j T'' + U_j'' \tilde{T} + U_j'' T'' \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ceci permet de transformer les équations (1.42) et (1.43) :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.47)$$

$$C_p \left( \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_j \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} C_p \mathfrak{S}_j}{\partial x_j} \quad (1.48)$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \widetilde{\tilde{U}_i U_j''} + \widetilde{U_i'' \tilde{U}_j} + \widetilde{U_i'' U_j''} = \tilde{C}_{ij} + \tilde{R}_{ij} + \tilde{L}_{ij} = \widetilde{U_i U_j} - \tilde{U}_i \tilde{U}_j \\ \mathfrak{S}_j &= \widetilde{\tilde{U}_j T''} + \widetilde{U_j'' \tilde{T}} + \widetilde{U_j'' T''} = \tilde{C}_{jT} + \tilde{R}_{jT} + \tilde{L}_{jT} = \widetilde{U_j T} - \tilde{U}_j \tilde{T} \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \tilde{C}_{ij} = \widetilde{\tilde{U}_i U_j''} + \widetilde{U_i'' \tilde{U}_j} \\ \tilde{R}_{ij} = \widetilde{U_i'' U_j''} \\ \tilde{L}_{ij} = \widetilde{\tilde{U}_i \tilde{U}_j} - \tilde{U}_i \tilde{U}_j \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{C}_{jT} = \widetilde{\tilde{U}_j T''} + \widetilde{U_j'' \tilde{T}} \\ \tilde{R}_{jT} = \widetilde{U_j'' T''} \\ \tilde{L}_{jT} = \widetilde{\tilde{U}_j \tilde{T}} - \tilde{U}_j \tilde{T} \end{cases}$$

Les deux termes  $\tau_{ij}$  et  $\mathfrak{S}_j$  sont les deux termes qui restent à modéliser pour fermer les équations bas-Mach en LES. Ces deux termes représentent l'effet des petites échelles sur les grandes échelles.

### 1.2.3 Modélisations sous-maillages

Dans les travaux de Brillant et al. [9] et Serra *et al.* [13], différents modèles sous-maillages sont passés en revue et comparés. Brillant conclut que le modèle WALE est adapté à la simulation d'écoulements pariétaux notamment car il permet une décroissance des profils en proche paroi selon la bonne puissance de  $y$ . De son côté, Serra étudie différents modèles sous-maillages thermiques et constate que pour des ratios de température inférieur à 5, le modèle sous-maille à Prandtl constant et à Prandtl dynamique donnent des résultats proches. Il en conclut qu'il est préférable d'utiliser le modèle sous-maille à nombre de Prandtl constant.

Dans les sous parties suivantes, nous présentons les méthodes qui permettent de construire les modèles sous-maillages que nous utilisons. Il existe d'autre méthodes pour créer des modèles sous-maillages (voir [32]).

#### 1.2.3.1 Modélisation sous-maille pour le tenseur $\tau_{ij}$

Le tenseur sous-maille  $\tau_{ij}$ , présent dans l'équation (1.47) représente l'effet des petites échelles de vitesse sur les grandes échelles. La méthode que l'on utilise suppose que le transfert direct vers les échelles sous-maillages (énergie transférée des grandes échelles vers les petites) peut être représenté par un terme de diffusion faisant apparaître la viscosité sous-maille aussi appelée hypothèse de viscosité turbulente (hypothèse de Boussinesq). Le transfert inverse, la cascade d'énergie transmise des petites échelles vers les grandes échelles, est supposé négligeable.

Ce modèle se traduit par :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_{sm}\tilde{S}_{ij} \quad (1.50)$$

où  $\tilde{S}_{ij}$  est le tenseur des déformations filtré :

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.51)$$

Comme seule la partie anisotrope du tenseur sous-maille est modélisée, la partie isotrope  $\tau_{kk}$  de ce tenseur est ajoutée à la pression dynamique dans l'équation (1.47) :

$$\overline{P'} = \overline{P_{dyn}} + \frac{1}{3}\overline{\rho}\tau_{kk} \quad (1.52)$$

Il existe plusieurs modèles qui proposent une expression de  $\nu_{sm}$ . Le plus connu est le modèle de Smagorinsky [31] qui est basé sur une hypothèse dans laquelle on considère que la viscosité sous-maille est proportionnelle à :

- une échelle de longueur associée au filtrage des équations, à savoir, la taille caractéristique du maillage (noté  $\Delta$ ),
- une échelle de vitesse déterminée par le produit  $\Delta\|\tilde{S}\|$ , où  $\|\tilde{S}\|$  est la norme du tenseur des taux de déformations résolus définie par :

$$\|\tilde{S}\| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}} \quad (1.53)$$



Finalement, l'écriture du modèle de Smagorinsky se fait de la façon suivante

$$\nu_{sm} = \left(C_s \tilde{\Delta}\right)^2 \|\tilde{S}\| \quad (1.54)$$

où  $C_s$  est une constante déterminée d'après l'hypothèse d'équilibre local entre production et dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

Ce modèle est le plus ancien et le plus simple. Il sert encore souvent de modèle de référence. Cependant il présente plusieurs inconvénients [35, 36] :

- la constante  $C_s$  n'est pas universelle, dans la pratique elle doit être adaptée au cas par cas,
- il est trop dissipatif,
- il ne s'annule pas à la paroi,
- il simule mal les régimes de transition laminaire-turbulent,
- il ne peut pas simuler la cascade d'énergie inverse (*backscatter*).

Pour notre étude, nous allons utiliser un modèle, également basé sur les échelles résolues, mais qui prend en compte à la fois le tenseur des déformations et le tenseur de rotation afin d'améliorer les performances de la SGE. Ce modèle, proposé par Nicoud [37] est le modèle WALE pour *Wall Adapting Local Eddy*. L'avantage de prendre en compte le tenseur de rotation est de rendre le modèle invariant par translation ou rotation des coordonnées et d'être utilisable pour des géométries plus complexes. Sa formulation est :

$$\nu_{sm} = \left(C_w \tilde{\Delta}\right)^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{\left(\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}\right)^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (1.55)$$

où  $C_w$  est une constante et,

$$s_{ij}^d = \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{kj} + \tilde{\Omega}_{ik} \tilde{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left( \tilde{S}_{mn} \tilde{S}_{mn} - \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{mn} \right) \quad (1.56)$$

avec :

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.57)$$

Les auteurs ont observé les améliorations apportées par ce modèle par rapport au modèle de Smagorinsky dans le cas test de turbulence isotrope et d'un écoulement en canal. La viscosité sous-maille s'annule à la paroi en suivant la loi désirée ( $\propto y^3$ ) et le modèle est capable de simuler les régimes transitoires.

### 1.2.3.2 Modélisation sous-maille pour le flux $\mathfrak{S}_j$

La modélisation du flux de chaleur sous-maille, donnée par l'équation (1.49), repose souvent sur une approche Fickienne, tout comme l'hypothèse de Boussinesq pour la modélisation du tenseur  $\tau_{ij}$ . Par analogie à la loi de Fourier ([38]), le flux de chaleur sous-maille est relié au gradient de température, résolu à l'aide d'une diffusivité sous-maille,  $\kappa_{sm}$  :

$$\mathfrak{S}_j = \kappa_{sm} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (1.58)$$

On introduit la notion de Prandtl sous-maille,  $Pr_{sm}$ , qui est défini par :

$$Pr_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{\kappa_{sm}} = \frac{\tau_{ij} \partial \tilde{T} / \partial x_i}{\mathfrak{I}_j \partial \tilde{u}_i / \partial x_j} \quad (1.59)$$

Le modèle le plus simple fait l'hypothèse que le nombre de Prandtl sous-maille est constant ( $Pr_{sm} = 0,9$  voir [12]). Ceci revient à considérer que les phénomènes sous-maille thermiques sont déterminés par l'évolution sous-maille dynamique de l'écoulement et non du champ de température résolue. Cette hypothèse peut être mise en défaut dans certaines configurations pour lesquelles les variations de température sont très importantes (ce qui est notre cas). Un autre désavantage de ce modèle est le fait qu'il ne puisse pas prendre en compte l'anisotropie. Brillant [10] montre qu'il ne permet pas à la diffusivité sous-maille d'avoir le bon comportement asymptotique en proche paroi.

Dans le cadre de nos études, nous utilisons un maillage très fin en proche paroi. Le modèle WALE fait tendre vers zero la viscosité sous maille avec le bon comportement ( $\nu_{sm} \propto y^3$ ). La résolution des équations en proche paroi est donc faite avec une influence minimale du modèle. Sous cette condition, Serra *et al.* [13] montrent que pour des ratios de températures inférieurs à 5, ce modèle est suffisant pour étudier l'interaction des champs dynamique et thermique.

## 1.3 Le Logiciel de CFD Trio\_U

Le logiciel Trio\_U est un code de calcul multiphysiques développé par le C.E.A Grenoble. C'est un code C++ modulaire et ouvert utilisant les volumes finis et les éléments finis. Il peut simuler tout type de géométries de la plus complexe à la plus simple grâce à des maillages tétraédriques ou carrés.

### 1.3.1 Méthode des Volumes finis

Pour nos simulations, nous utiliserons la partie volumes finis du code qui nécessite des maillages cubiques conformes. Les volumes finis consistent à calculer l'intégrale sur le volume des mailles des quantités qui doivent être conservées pour assurer l'équilibre entre flux entrant et flux sortant.

Afin de décrire les équations en formulation Volumes Finis, il faut définir les volumes de contrôle. Leur définition dépend de la discrétisation choisie. Soit  $V$ , un volume de contrôle pour la conservation de la masse,  $W$ , un volume de contrôle pour la conservation de la quantité de mouvement, et  $K$  un volume de contrôle pour la conservation de l'énergie. On note  $\delta V$ ,  $\delta W$ , et  $\delta K$  leur contour respectif. En intégrant les équations de conservations filtrées sur leur volume de contrôle respectif, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} dv + \int_V \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U}_j)}{\partial x_j} dv &= 0 \\ \int_W \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} dv + \int_W \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j)}{\partial x_j} dv &= - \int_W \frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_i} dv + \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\int_W \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] dv - \frac{2}{3} \int_W \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_j} \right) dv - \int_W \frac{\partial \bar{\rho} \tau_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} & C_p \int_K \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{T})}{\partial t} dv + C_p \int_K \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{U}_j \tilde{T})}{\partial x_j} dv = \\ & \int_K \frac{\partial \overline{P_{thermo}}}{\partial t} dv + \int_K \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) dv - C_p \int_K \frac{\partial \bar{\rho} \mathfrak{S}_j}{\partial x_j} dv \end{aligned} \quad (1.62)$$

D'après le théorème d'Ostrogradski, les intégrales de volume (volume invariant dans le temps) peuvent se transformer en intégrales surfaciques qui sont les équations finales à résoudre :

$$\int_V \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} dV + \int_{\delta V} \bar{\rho} \tilde{U}_j n_j dS = 0 \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} & \int_W \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} dW + \int_{\delta W} \bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j n_j dS = \\ & - \int_{\delta W} \bar{P} n_i dS + \int_{\delta W} \bar{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) n_j dS - \frac{2}{3} \int_{\delta W} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_j} n_i dS - \int_{\delta W} \bar{\rho} \tau_{ij} n_j dS \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} & C_p \int_K \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{T})}{\partial t} dK + C_p \int_{\delta K} \bar{\rho} \tilde{U}_j \tilde{T} n_j dS = \\ & \int_K \frac{\partial \overline{P_{thermo}}}{\partial t} dK + \int_{\delta K} \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} n_j dS - C_p \int_{\delta K} \bar{\rho} \mathfrak{S}_j n_j dS \end{aligned} \quad (1.65)$$

$\vec{n}$  étant la normale aux faces des volumes de contrôle. La résolution des équations (1.63), (1.64), et (1.65) nous donne les champs, solutions de notre problème,  $(\vec{U}, \bar{P}', \overline{P_{thermo}}$  et  $\tilde{T})$ .

Nous résolvons les équations ci-dessus, en ayant évalué les différentes grandeurs par Différences Finies.

Les maillages structurés sont constitués de parallélépipèdes rectangles en trois dimensions, qui seront nommés éléments dans la suite. Nous utilisons une grille décalée : la vitesse et la pression ne sont pas définis aux mêmes points (voir figure 1.2). Les composantes des vitesses sont localisées au centre des faces qui leurs sont perpendiculaires et les champs scalaires sont discrétisés au centre de gravité des éléments. Ceci permet d'avoir un calcul de la divergence des grandeurs plus précis (voir [39]).

Pour résoudre les équations, il faut définir plusieurs volumes de contrôle. Pour l'équation de quantité de mouvement, il faut un volume de contrôle (W) par composante de vitesse. Pour les équations de conservation de la masse et d'énergie, les volumes de contrôle ((V) ou (K)) correspondent à l'élément lui même (volumes bleus, voir figures 1.3).

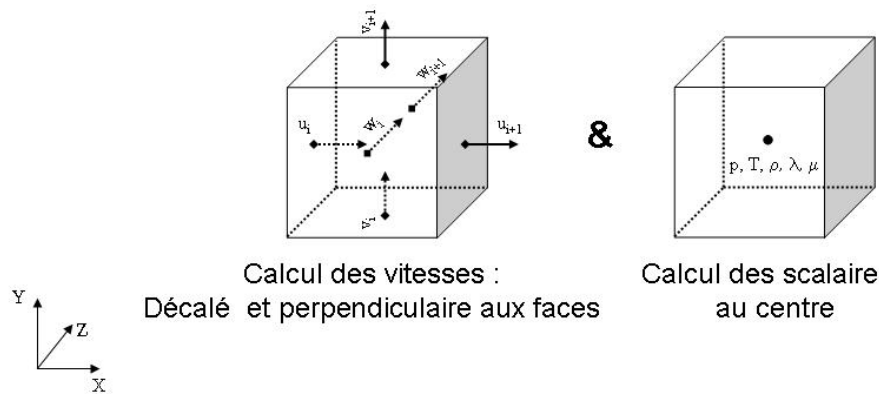


FIGURE 1.2 – Description de la discrétisation décalée en 3D.

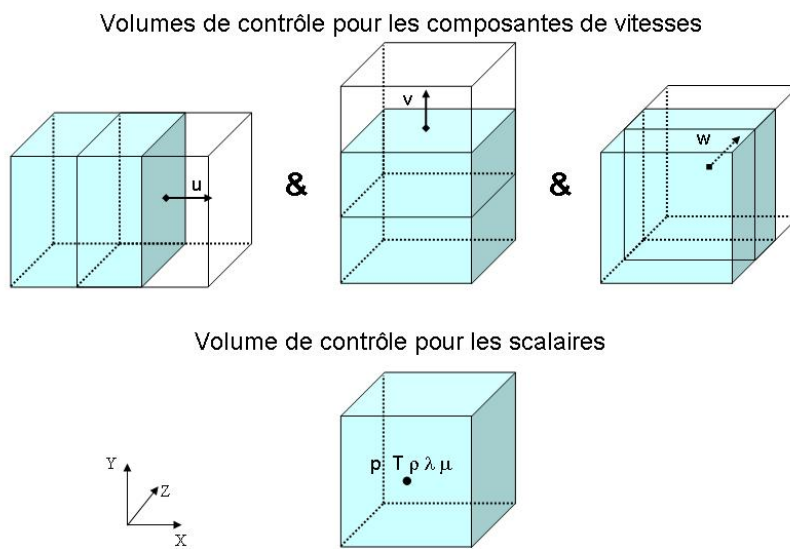
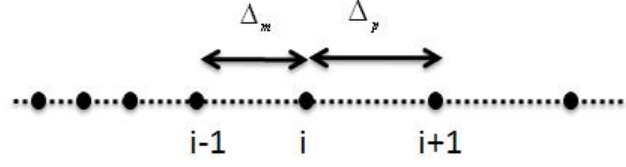


FIGURE 1.3 – Description des volumes de contrôle en 3D.



$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x = \frac{\frac{\Delta_m}{\Delta_p}(f_{i+1} - f_i) + \frac{\Delta_p}{\Delta_m}(f_i - f_{i-1})}{\Delta_m - \Delta_p} + \Theta(\Delta_m^2) \quad (1.68)$$

FIGURE 1.4 – Schéma 1D du schéma centré d'ordre 2 pour la convection (maillage non uniforme)

### 1.3.2 Schémas numériques

#### 1.3.2.1 Schémas de convections

Parmi les schémas numériques pour la convection des grandeurs scalaires et vectorielles que propose Trio\_U, nous utilisons le schéma centré d'ordre 2 pour la convection de la vitesse et le schéma QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics [40]) d'ordre 3 pour la convection des grandeurs scalaires.

#### Schéma centré pour la convection de quantité de mouvement

Le schéma centré d'ordre 2 est le schéma numérique non diffusif le plus simple. Ce schéma s'obtient à partir de la différence des développements de Taylor de la grandeur à transporter aux points les plus proches dans la direction de dérivation (équations (1.66) et (1.67)). Dans le cas d'un maillage irrégulier (figure 1.4), une combinaison linéaire des développements de Taylor permet de retrouver l'expression du schéma d'ordre 2 (équation 1.68).

$$f_{i+1} = f_i + \Delta_p \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x + \frac{\Delta_p^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x + \Theta(\Delta_p^3) \quad (1.66)$$

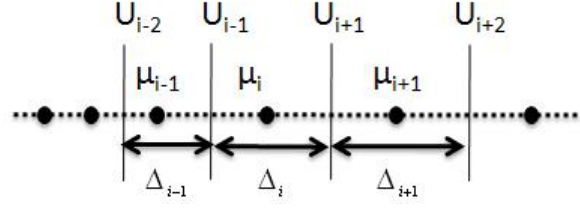
$$f_{i-1} = f_i - \Delta_m \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x + \frac{\Delta_m^2}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x + \Theta(\Delta_m^3) \quad (1.67)$$

#### Schéma QUICK pour la convection de grandeurs scalaires

Pour la convection des grandeurs scalaires, nous utilisons un schéma upwind d'ordre 3 (ou schéma QUICK) muni d'un limiteur. Ce schéma légèrement diffusif assure la stabilité du calcul [12] tout en maintenant un ordre similaire à celui de la convection de la vitesse.

#### 1.3.2.2 Schéma de diffusion

Pour le calcul des opérateurs de diffusions des grandeurs scalaires et vectorielles, nous utilisons un schéma centré d'ordre 2. Selon la grandeur à diffuser, l'opérateur de dérivation n'utilisera pas la même formulation.

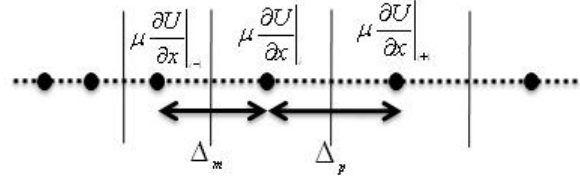


$$\mu \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i-1} = \mu_{i-1} \frac{U_{i-1} - U_{i-2}}{\Delta_{i-1}} + \Theta(\Delta_{i-1}^2) \quad (1.69)$$

$$\mu \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_i = \mu_i \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta_i} + \Theta(\Delta_i^2) \quad (1.70)$$

$$\mu \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i+1} = \mu_{i+1} \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta_{i+1}} + \Theta(\Delta_{i+1}^2) \quad (1.71)$$

FIGURE 1.5 – Calcul du flux diffusif centré d'ordre 2 (maillage non uniforme)



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) \Big|_i = \frac{\frac{\Delta_m}{\Delta_p} (\mu \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i+1} - \mu \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_i) + \frac{\Delta_p}{\Delta_m} (\mu \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_i - \mu \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i-1})}{\Delta_m - \Delta_p} + \Theta(\Delta_m^2) \quad (1.72)$$

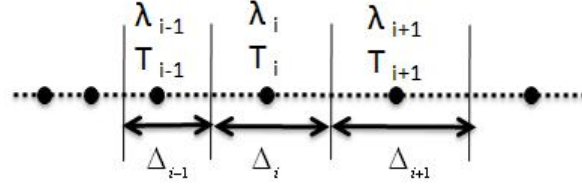
FIGURE 1.6 – Calcul du flux diffusif centré d'ordre 2 (maillage non uniforme)

### Diffusion de la vitesse

Pour la diffusion de la vitesse, l'opérateur commence par calculer la composante de la divergence de la vitesse au centre de chaque maille et la multiplie par la viscosité de la maille pour obtenir le flux diffusif (equations (1.69), (1.70) et (1.71)). Puis, les grandeurs sont dérivées avec un schéma centré d'ordre 2 pour obtenir la dérivée seconde (équation, (1.72)). Les figures 1.5 et 1.6 représentent le cas 1D. La même logique est utilisée dans le cas 3D, c'est alors le calcul du flux diffusif qui change selon les directions de dérivation.

### Diffusion des scalaires

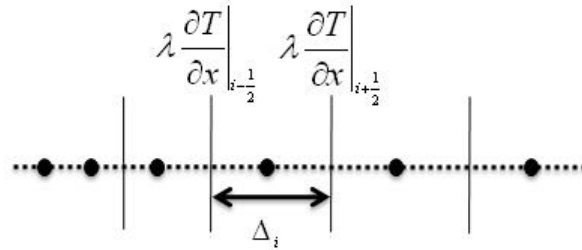
La diffusion des grandeurs scalaires suit la même logique. On commence par calculer le flux diffusif de cette grandeur aux faces (équations (1.73) et (1.74)), puis on calcule comme une divergence la dérivée seconde (équation (1.75)). Les figures 1.7 et 1.8 représentent le calcul de la diffusion de la température (mais cela pourrait être un autre scalaire).



$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_i \Delta_{i-1} + \lambda_{i-1} \Delta_i}{\Delta_i \Delta_{i-1}} \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} + \Theta(\Delta_i^2) \quad (1.73)$$

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_{i+1} \Delta_i + \lambda_i \Delta_{i+1}}{\Delta_{i+1} \Delta_i} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta_{i+1} + \Delta_i} + \Theta(\Delta_i^2) \quad (1.74)$$

FIGURE 1.7 – Calcul du flux diffusif centré d'ordre 2 (maillage non uniforme)



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_i = \frac{\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta_i} + \Theta((\Delta_i)^2) \quad (1.75)$$

FIGURE 1.8 – Calcul du flux diffusif centré d'ordre 2 (maillage non uniforme)

### 1.3.3 Solveur pour la pression

Dans Trio\_U la résolution de l'équation de poisson se fait par résolution de l'incrément de pression. Pour résoudre le système linéaire associé, plusieurs solveurs sont disponibles (Cholesky, Gradient conjugué, Gauss, Jacobi). Bien que très rapide pour des écoulements incompressibles, la résolution de type factorisation Cholesky ne peut être utilisée dans nos simulations. Le coût principal de cette méthode est le calcul des sous-matrices. Si les sous-matrices sont constantes, la résolution est directe et rend le coût de préparation négligeable. Or, dans notre cas, la masse volumique variable rend les sous-matrices variables et doivent donc être recalculées à chaque pas de temps.

Il est donc nécessaire d'utiliser un solveur de type Gradient conjugué (GPC [41]) avec pré-conditionnement (Symmetric Successive Over Relaxation (SSOR)). Ce type de solveur est capable de résoudre tout type d'écoulement et peut facilement être combiné avec d'autres techniques numériques pour accélérer la résolution.

Une de ces techniques a été implémentée récemment par le CEA-Grenoble dans le code Trio\_U pour la partie VDF. L'essentiel du développement a été réalisé par Benoit Mathieu (expert en parallélisme au CEA.Grenoble). Cette technique est dite de résolution multi-grilles de la pression. La vitesse de convergence des solveurs de type GCP dépend beaucoup de la condition initiale du solveur ; le but d'un solveur multi-grilles est d'approcher la condition initiale du solveur de la solution finale. On définit  $n$  grilles ; entre chaque grille le maillage est réduit (déraffiné) d'un facteur 1 à 2 sur chaque direction. Puis :

1. le système est résolu sur la grille la plus grossière ;
2. un lisseur Jacobi est appliqué pour projeter le résultat de la grille grossière sur un grille de niveau intermédiaire ;
3. le système est résolu sur la grille intermédiaire en utilisant les données lissées comme condition initiale ;
4. on répète les opérations 2 à 4 jusqu'à atteindre la grille la plus fine.

Le schéma 1.9 résume le fonctionnement du solveur multigrilles. Pour mieux expliquer le gain apporté par cette méthode, nous prenons l'exemple d'un canal plan turbulent comportant 7 niveaux de grilles. Avec un solveur classique, il faut environ 200 itérations pour capturer les variations les plus fines. Il est donc nécessaire de faire 200 itérations sur la grille la plus fine. Avec un solveur multi-grilles, chaque partie de la solution est résolue avec un maillage adapté et ne nécessite pas plus de 20 itérations, plus l'équivalent de 5 itérations pour intégrer les coûts de changement de grille. Sur l'ensemble des grilles, le nombre d'itérations sera similaire à celui du solveur classique ( $7 \times 20 + 6 \times 5 = 170$ ), mais la grille la plus fine n'aura eu que 20 itérations. Dans le cadre de nos simulations, le gain peut aller d'un facteur 5 à 10 en fonction des contraintes de la simulation.

Un long travail préparatoire est nécessaire pour chaque simulation. Ce travail est expliqué en détail en annexe B.



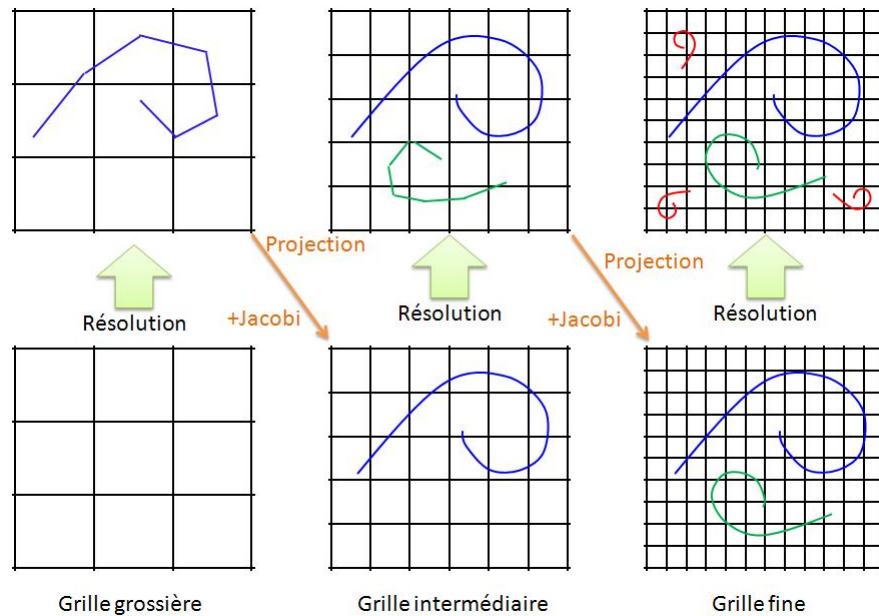


FIGURE 1.9 – Schéma de fonctionnement du solveur multi-grilles

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les choix de modélisation de la physique des écoulements. Pour réaliser la simulation numérique d'écoulements complexes, nous avons vu que l'approche de la simulation des grandes échelles nous permet de réduire le coût des simulations numériques tout en conservant une excellente description de l'écoulement. Puis, nous avons présenté l'outil Trio\_U que nous utiliserons pour réaliser nos simulations ainsi que les différents outils numériques implémentés dans Trio\_U que nous utiliserons.

Par la suite, nous présenterons les apports faits à la modélisation et à l'outil numérique Trio\_U dans le cadre de ce travail.



# Chapitre 2

## Modélisation et analyse des écoulements

La simulation numérique d'écoulements permet une connaissance complète des champs associés à ces écoulements. Le pendant de cette grande quantité d'information est la nécessité d'y associer une modélisation efficace ainsi que l'utilisation d'outils numériques précis. Dans ce chapitre, nous présentons le travail fait pour améliorer la résolution des équations, puis nous explicitons les modélisations utilisées pour exploiter les données à notre disposition.

### 2.1 Amélioration de la résolution des équations

Nous présentons ici les différentes modifications faites pour améliorer la résolution des équations. Nous validons ces modifications par un cas test où nous quantifions, lorsque c'est possible, le gain lié aux modifications. Les cas tests constituent une étape dans le processus de validation de ces améliorations ; l'étape finale de la validation est la réalisation de multiples simulations et leurs comparaisons aux données disponibles dans la littérature. Ces comparaisons seront faites au chapitre 3.

#### 2.1.1 Algorithme de résolution conservatif

##### 2.1.1.1 Principe

Lors des simulations effectuées par Serra *et al.* [15], la propriété de conservation du flux de chaleur au sein d'un écoulement turbulent fut obtenue en utilisant un maillage d'autant plus raffiné que le gradient de température dans le domaine était important.

Pour obtenir de façon indépendante du maillage cette propriété, un nouvel algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes quasi-compressible est proposé. En s'inspirant des travaux de Nicoud *et al.* [7], le nouvel algorithme est obtenu à partir des équations de conservation et a pour but de placer la conservation de l'énergie au centre de la résolution.

Les inconnues à trouver sont :

- la masse volumique

- la vitesse
- la pression thermodynamique
- la température
- la pression dynamique

En partant de l'équation de conservation de l'énergie (équation 1.26), nous cherchons une évaluation de la pression thermodynamique. On remplace tout d'abord le produit  $\rho T$  par  $\frac{P_{th}}{r}$  en utilisant la loi d'état :

$$\frac{C_p}{r} \frac{\partial P_{th}}{\partial t} + \frac{C_p}{r} P_{th} \nabla \cdot U = \frac{\partial P_{th}}{\partial t} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S$$

Ceci permet d'exprimer la variation de la pression thermodynamique au cours du temps :

$$\frac{\partial P_{th}}{\partial t} = \frac{r}{C_p - r} \left( -\frac{C_p}{r} P_{th} \nabla \cdot U + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S \right) \quad (2.1)$$

Calculons maintenant l'intégrale sur le volume de l'équation de conservation de l'énergie ; comme la pression thermodynamique est constante dans l'espace elle sort de l'intégrale, de plus le théorème de Green-Ostrogradski ramène l'intégrale sur un volume de la divergence d'une grandeur à une intégrale de cette grandeur sur le contour du domaine entourant ce volume. Ainsi, on obtient l'évolution de la pression thermodynamique en fonction de la quantité d'énergie qui traverse les frontières du domaine par convection  $\phi_{cv} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P_{th} U$  et par conduction  $\phi_{cd} = -\lambda \nabla T$  et des sources volumiques internes du système  $S$ . On notera que l'on remplace  $\frac{C_p}{r}$  par  $\frac{\gamma}{\gamma-1}$  :

$$\frac{\partial P_{th}}{\partial t} = \frac{\gamma-1}{V} \left( \int_S \left[ \lambda \nabla T - \frac{\gamma}{\gamma-1} P_{th} U \right] dS + \int_V S dV \right) \quad (2.2)$$

Dans le cas d'un canal plan bi-périodique, le bilan se simplifie car il n'y a pas de source et la condition de périodicité annule les flux convectifs et conductifs sur ces frontières. Il reste alors la somme des flux conductifs sur les parois :

$$\frac{\partial P_{th}}{\partial t} = -\frac{\gamma-1}{V} \int_{parois} \phi_{cd} dS \quad (2.3)$$

Pour calculer la pression dynamique, nous utilisons un solveur itératif multi-grille qui calcule l'incrément de pression. Pour réaliser cette opération, nous devons connaître la divergence de la vitesse au temps suivant. Dans le cas incompressible cette divergence est toujours connue (car nulle) ; dans le cas quasi-compressible on peut la trouver en partant de l'équation (2.1) :

$$\nabla \cdot U = \frac{1}{\gamma P_{th}} \left[ (\gamma-1)(\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S) - \frac{\partial P_{th}}{\partial t} \right] \quad (2.4)$$

Grâce à ces équations, nous pouvons fermer le système en respectant à la fois la conservation de l'énergie globalement lors de l'évolution de la pression thermodynamique et localement avec la divergence de la vitesse. La conservation de la masse est assurée par les volumes finis.

### 2.1.1.2 Ordre de résolution des équations

Pour résoudre notre système, nous calculons les grandeurs dans l'ordre suivant :

1. la masse volumique à partir de l'équation 1.3 ;
2. la pression thermodynamique à partir de l'équation 2.2 ;
3. la température à partir de la loi des gaz parfaits ;
4.  $\nabla U^{n+1}$  à partir de l'équation 2.4 et des grandeurs calculées au points 1, 2 et 3 ;
5. la vitesse à partir de l'équation 1.8 en utilisant  $\nabla U^{n+1}$  pour la projection de la pression.

### 2.1.1.3 Validation des propriétés de conservation de l'algorithme

Les propriétés de conservation du code sont validées en vérifiant la conservation du flux de chaleur traversant un segment parallèle aux parois dans un canal plan périodique 2D de hauteur  $2h$ .

Dans ce canal plan, le champ de vitesse initial, dont résultera un champ oscillant, est un profil de vitesse longitudinal parabolique perturbé par un sinus sur la composante verticale de la vitesse :

$$\begin{aligned} U &= 15 \frac{(2h - y)y}{h^2} \\ V &= 2 \sin(67.01x) \end{aligned}$$

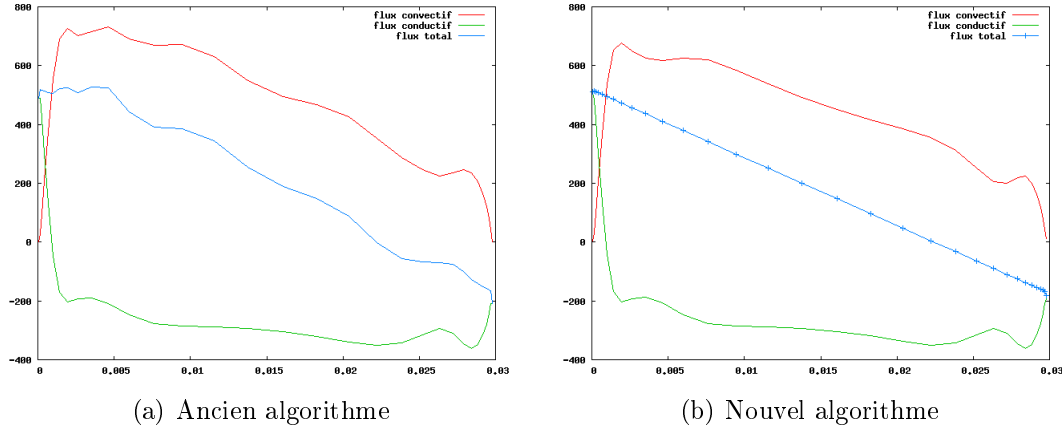
Les conditions aux limites thermiques imposées sont : un flux de chaleur constant  $\phi_h = -170 \text{ W.m}^{-2}$  sur la paroi supérieure et une température imposée  $T_b = 290 \text{ K}$  pour la paroi inférieure.

On peut facilement trouver la solution spatiale de ce système en utilisant sa direction d'homogénéité. En partant de l'équation (2.1), on calcule la moyenne dans la direction longitudinale pour arriver à :

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial P_{th}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_{th} \bar{V} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

où  $\frac{\gamma}{\gamma - 1} P_{th} \bar{V}$  et  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$  sont respectivement le flux convectif moyen et le flux conductif moyen traversant un plan parallèle aux parois où  $\bar{f}$  représente la moyenne spatiale sur le segment  $y = \text{cste}$  de la grandeur  $f$ . Compte tenu de l'homogénéité en volume de la pression thermodynamique, le flux total traversant un plan parallèle aux parois est donc une fonction linéaire de la hauteur dans le canal dont le coefficient directeur est proportionnel à  $\frac{\partial P_{th}}{\partial t}$  et la constante d'intégration égale au flux de chaleur traversant la paroi inférieure :

$$\overline{\phi_{tot}}(y, t) = \overline{\phi_{cv}}(y, t) + \overline{\phi_{cd}}(y, t) = - \left( \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial P_{th}}{\partial t} \right) y + \overline{\phi_{cd}}(y = 0, t) \quad (2.5)$$


 FIGURE 2.1 – Flux de chaleur traversant un plan parallèle aux parois ( $W.m^{-2}$ )

La figure 2.1(a) représente les flux de chaleur traversant une surface parallèle aux parois avec l'ancien algorithme. On peut observer que le flux total (courbe bleue) a un comportement non linéaire et donc non conservatif. Bien que ce ne soit pas montré ici, l'utilisation d'un maillage plus fin permet de retrouver un comportement linéaire. Le graphique 2.1(b) présente la même simulation réalisée avec le nouvel algorithme. La propriété de linéarité du flux de chaleur est obtenue ici indépendamment du maillage. La pente de la droite du flux total est bien proportionnelle à la variation instantanée de la pression thermodynamique, la valeur en  $y = 0$  est égale au flux conductif et la valeur en  $y = 2h$  est égale au flux imposé  $\phi_w$ . Ceci montre l'intérêt du changement d'algorithme de résolution qui respecte désormais les lois de conservation au niveau local et au niveau global, le tout indépendamment du maillage.

L'implémentation dans le code de cet algorithme et les très fortes modifications de Trio\_U qui ont découlé n'aurait put être faits sans l'aide de Gauthier Fauchet (responsable du projet Trio\_U).

## 2.1.2 Modification du schéma en temps

### 2.1.2.1 Principe

Les schémas d'avancement en temps tels qu'ils sont à l'origine programmés dans Trio\_U sont adaptés aux écoulements où les quantités scalaires ont un rôle passif. Lors du calcul, le schéma en temps traite chaque équation séparément sans que la précision de la solution soit altérée. Pour notre étude cette stratégie nécessite d'être remise en cause. En effet, le système d'équations est désormais complètement couplé par la conservation de la masse, la loi des gaz parfaits et la conservation de l'énergie. En faisant progresser simultanément les équations, on préserve le couplage des équations tout en assurant que, pour des schémas explicites, chaque sous-pas de temps respecte les lois de conservations.

Les figures 2.2 et 2.3 résument le comportement d'un schéma en temps de type Runge-Kutta d'ordre 3 entre les pas de temps  $n$  et  $n+1$  avant et après modification.

$$\begin{pmatrix} \rho^n \\ \vec{U}^n \\ T^n \\ P_{dyn}^n \\ P_{th}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+1} \\ \vec{U}^n \\ T^n \\ P_{dyn}^n \\ P_{th}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+1} \\ \vec{U}^{n+1} \\ T^n \\ P_{dyn}^n \\ P_{th}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+1} \\ \vec{U}^{n+1} \\ T^{n+1} \\ P_{dyn}^n \\ P_{th}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+1} \\ \vec{U}^{n+1} \\ T^{n+1} \\ P_{dyn}^{n+1} \\ P_{th}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+1} \\ \vec{U}^{n+1} \\ T^{n+1} \\ P_{dyn}^{n+1} \\ P_{th}^{n+1} \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.2 – Traitement initial des équations par le schéma en temps

$$\begin{pmatrix} \rho^n \\ \vec{U}^n \\ T^n \\ P_{dyn}^n \\ P_{th}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+\frac{1}{3}} \\ \vec{U}^{n+\frac{1}{3}} \\ T^{n+\frac{1}{3}} \\ P_{dyn}^{n+\frac{1}{3}} \\ P_{th}^{n+\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+\frac{3}{4}} \\ \vec{U}^{n+\frac{3}{4}} \\ T^{n+\frac{3}{4}} \\ P_{dyn}^{n+\frac{3}{4}} \\ P_{th}^{n+\frac{3}{4}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho^{n+1} \\ \vec{U}^{n+1} \\ T^{n+1} \\ P_{dyn}^{n+1} \\ P_{th}^{n+1} \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.3 – Traitement modifié des équations par le schéma en temps

### 2.1.2.2 Cas test de la source volumique

Pour valider les modifications apportées au code nous utilisons un cas test bidimensionnel nommé "source volumique" (figure 2.4). Ce cas correspond à la chauffe d'une cavité par une source de chaleur volumique homogène et constante  $S = 1000 \text{ W.m}^{-3}$ . La pression thermodynamique est constante en temps et en espace  $P_{th} = 100000$  et la diffusion négligée. Les conditions aux limites pour la vitesse et respectivement la température sont :

- Bord inférieur,  $U = 0$  et paroi adiabatique  $\phi_b = 0$  ;
- Bord supérieur, gradient de pression nul et flux convectif ;
- Bords latéraux, symétrie.

Les conditions des bords latéraux ramènent le problème à une seule dimension. Le système se résout à partir de l'équation de la chaleur (equation 2.4). La pression thermodynamique étant constante, la diffusion négligée et le problème 1D, on peut simplifier l'équation à l'expression :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{S}{P_{thermo}}$$

La condition s'appliquant sur le bord inférieur annule la constante d'intégration, on trouve ainsi la vitesse dans la cavité :

$$U(x) = \alpha x \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{S}{P_{thermo}} \quad (2.6)$$

On résout ensuite l'équation de conservation de la masse avec sa contrainte de condition initiale :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha x \rho(x, t)}{\partial x} &= 0 \\ \rho(x, 0) &= \rho_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

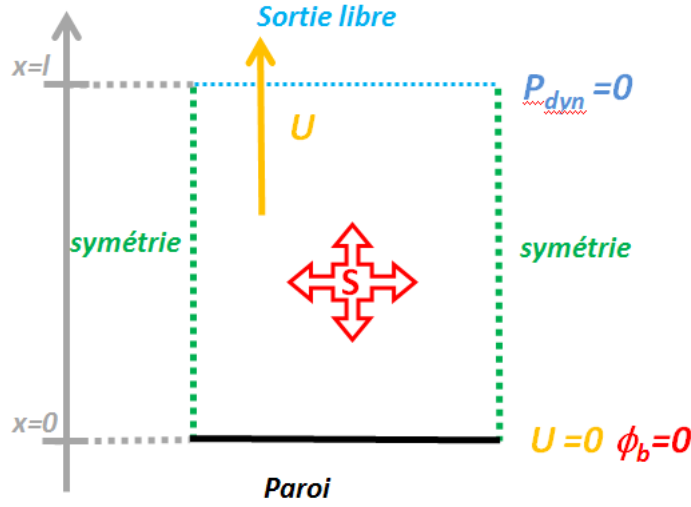


FIGURE 2.4 – Cas test de la source volumique

L'analyse numérique [42] nous assure l'unicité de la solution qui prend la forme :

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho(X(x, 0)) \frac{c(X(x, 0))}{c(X(x, t))} \quad \text{si } c(x) \neq 0 \\ \rho(x, t) &= \rho(x, 0) e^{-c'(x)t} \quad \text{si } c(x) = 0 \\ \text{avec } \frac{\partial X}{\partial t} &= c(X(x, t)) \quad \text{et } c(X(x, t)) = \alpha X(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Or dans notre cas,  $\rho(X(x, 0)) = \rho_0$  et l'équation sur  $X$  est soluble directement.

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 e^{\alpha t} \\ \rho(x, t) &= \rho_0 \frac{\alpha X_0}{\alpha X_0 e^{\alpha t}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } X_0 \neq 0 \\ \text{si } X_0 = 0 \end{array} \right. \\ \rho(x, t) &= \rho_0 e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

On observe ici l'égalité de la solution pour  $c(x) \neq 0$  et  $c(x) = 0$  on a donc :

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\alpha t} \quad (2.10)$$

Enfin, la pression dynamique se déduit de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho(U \cdot \nabla) U = -\nabla P_{dyn} + \nabla \cdot [\mu (\nabla U + \nabla^T U)] - \frac{2}{3} \nabla \cdot (\mu \nabla U) + F$$

Ici, la diffusion est négligée et, comme nous l'avons vu, le vecteur vitesse se résume à la seule composante  $U(x)$ . L'équation se simplifie donc :

$$\rho(t) U(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} = -\frac{\partial P_{dyn}(x, t)}{\partial x}$$



Ce qui nous mène à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial P_{dyn}(x, t)}{\partial x} = -\alpha^2 \rho_0 e^{-\alpha t} x \quad (2.11)$$

On a ainsi :

$$P_{dyn}(x, t) - P_{dyn}(x_1, t) = -\alpha^2 \rho_0 e^{-\alpha t} (x^2 - x_1^2) \quad (2.12)$$

La pression dynamique étant définie par rapport à une référence de pression, on choisit de prendre pour  $x_1 = l$ ,  $P_{dyn}(l, t) = 0$ . La solution complète du système est donc :

$$\begin{aligned} U(x) &= \alpha x \\ \rho(x, t) &= \rho_0 e^{-\alpha t} \\ P_{dyn}(x, t) &= -\alpha^2 \rho_0 e^{-\alpha t} (x^2 - l^2) \\ \text{avec } \alpha &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{S}{P_{thermo}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nous ferons référence au nouveau schéma comme étant le schéma Runge-Kutta d'ordre 3 couplé (RK3 couplé), sachant que le schéma d'origine de Trio\_U sera nommé RK3 Standard.

### 2.1.2.3 Validation

La solution étant connue, nous pouvons calculer l'erreur engendrée par le schéma en temps par rapport à la solution analytique. Il suffit de comparer l'erreur du code en fonction du pas de temps pour déterminer son ordre. De plus, en comparant les erreurs commises par les deux versions du schéma en temps, on évalue l'impact sur la constante d'erreur du schéma en temps.

Nous avons représenté sur la figure 2.5 l'écart à la solution exacte pour deux pas de temps dont le rapport est 2 ( $\Delta t_1 = 20s$  et  $\Delta t_2 = 40s$ ). Le rapport des pentes donne l'ordre du schéma en temps. On peut observer un rapport de  $7.9 \simeq \left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right)^3$  entre les pentes des droites, ce qui indique comme attendu que le schéma est d'ordre 3. Sur la figure 2.6 sont présentées les erreurs sur la masse volumique de l'ancien et du nouveau schéma en temps (pour un pas de temps  $\Delta t = 1s$ ). Nous pouvons observer sur la figure 2.6 que le nouveau schéma en temps crée une erreur inférieure d'un facteur 1400 à l'erreur du schéma initial. Ces résultats valident l'implémentation réalisée et mettent en évidence l'intérêt de modifier la méthode de résolution dans un cas fortement couplé.

### 2.1.3 Schéma centré d'ordre 4 pour la convection de la vitesse

Le schéma de convection de la vitesse de Trio\_U est originellement un schéma centré d'ordre 2. Ce type de schéma est performant et non diffusif, mais, comparativement à d'autres schémas, nécessite un maillage plus important pour capturer les statistiques d'ordres élevées. Il a ainsi été décidé d'implémenter un schéma centré d'ordre 4.

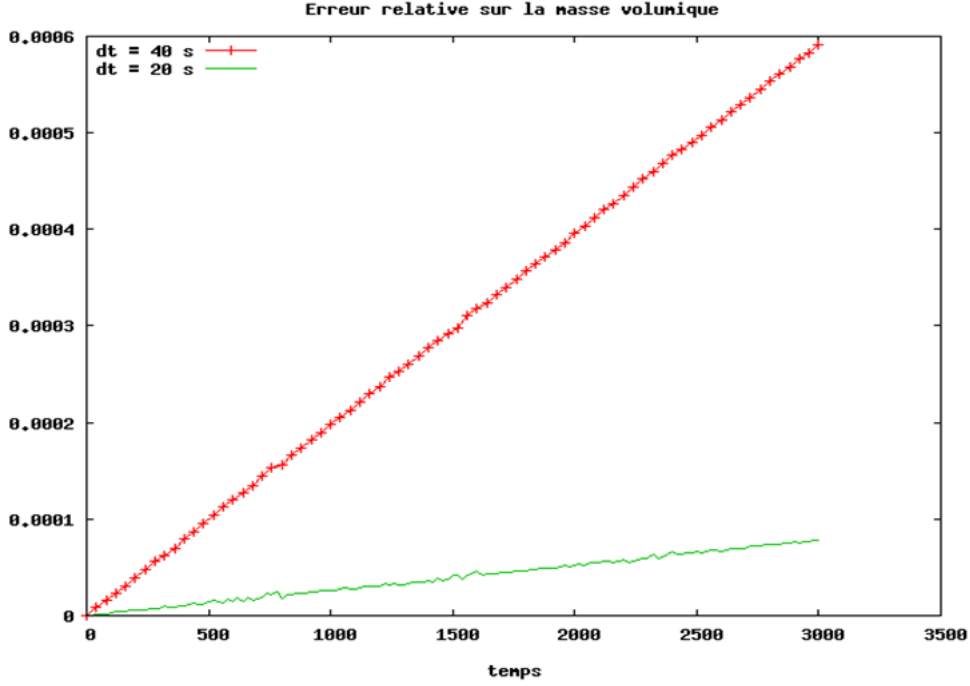


FIGURE 2.5 – Erreurs relatives du nouveau schéma en temps pour  $\Delta t = 20s$  et  $\Delta t = 40s$ .

### 2.1.3.1 Formalisme du schéma

Le schéma centré d'ordre 4 est un schéma numérique qui est très simple dans le cas 1D avec maillage régulier (de pas  $\Delta x$ ), le calcul de la dérivée au point  $i$  en fonction de ces proche voisin ( $i - 2, i - 1, i + 1, i + 2$  voir figure 2.7) est alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{i-2} + 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x} + \Theta(\Delta x^3) \quad (2.14)$$

Mais dans notre cas, le code doit gérer la changement de taille entre deux mailles consécutives, il est alors nécessaire de réaliser un développement de Taylor des 4 points et de réaliser des combinaisons linéaires pour éliminer les termes d'ordre inférieur à  $\Theta(\Delta x^4)$ . Pour simplifier l'écriture, nous le calcul de la dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g_1 f_{i-2} + g_2 f_{i-1} + g_3 f_{i+1} + g_4 f_{i+2} + \Theta(\Delta x^3) \quad (2.15)$$

Nous évitons ici de faire le long développement numérique, débouchant sur la résolution d'un système linéaire d'ordre 4, permettant de trouver les coeffi-

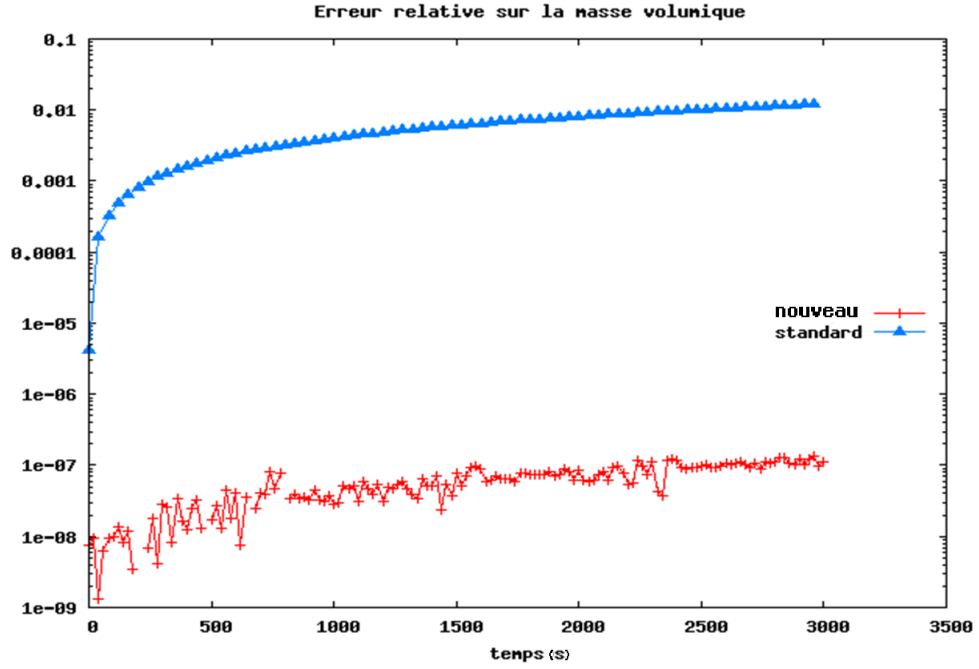


FIGURE 2.6 – Erreurs relatives du nouveau schéma et du schéma standard en échelle logarithmique ( $\Delta t = 1s$ )

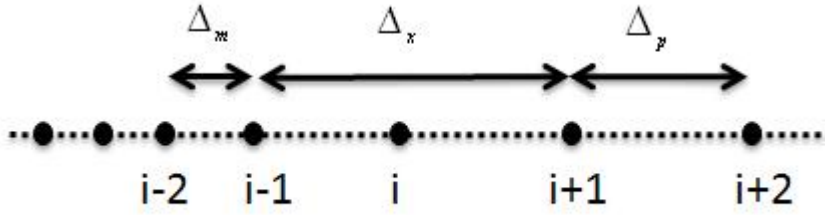


FIGURE 2.7 – schéma 1D du schéma centré d'ordre 4 pour un maillage non uniforme

cients  $g_1, g_2, g_3, g_4$ .

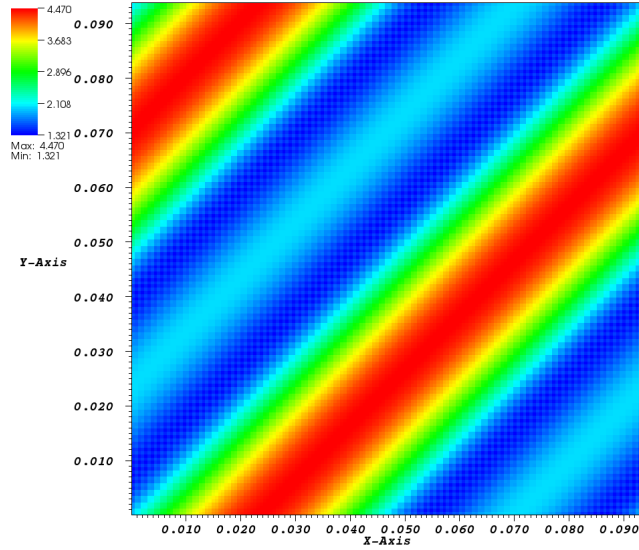
$$g_1 = \frac{\Delta_x^2(\Delta_x/2 + \Delta_p)}{4\Delta_p(\Delta_x + \Delta_p + \Delta_p)(\Delta_x + \Delta_p)} \quad (2.16)$$

$$g_2 = \frac{(\Delta_x + 2\Delta_p)(\Delta_x + 2\Delta_p)}{8\Delta_p(\Delta_x + \Delta_p)} \quad (2.17)$$

$$g_3 = \frac{(\Delta_x + 2\Delta_p)(\Delta_x + 2\Delta_p)}{8\Delta_p(\Delta_x + \Delta_p)} \quad (2.18)$$

$$g_4 = -\frac{\Delta_x^2(\Delta_x/2 + \Delta_p)}{4\Delta_p(\Delta_x + \Delta_p + \Delta_p)(\Delta_x + \Delta_p)} \quad (2.19)$$

La représentation ici est 1D mais s'applique au cas 3D en remplaçant les  $f_i$  par l'interpolation des vitesses aux faces dans le cas de dérivées de composantes mixtes.



$$\begin{aligned} U &= A + A * \sin(B(x - y - At)) \\ V &= A * \sin(B(x - y - At)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

FIGURE 2.8 – Champ de vitesse utilisé pour le cas test de la solution sinusoïdale

Puisque nous réalisons des calculs en volumes finis, les points ici représentés désignent l'intégrale sur le volume de contrôle du flux de quantité du mouvement.

### 2.1.3.2 Cas test de la solution sinusoïdale

Pour vérifier l'ordre du schéma, nous utilisons un champ de vitesse sinusoïdale connu. Ce champ est solution des équations de Navier-Stokes sans diffusion dans un domaine 2D bi-périodique. Nous faisons varier la taille et le nombre de mailles. En comparant les erreurs sur la vitesse pour les trois maillages, nous déterminons l'ordre. Les maillages sont nommés de la manière suivante : "grossier" (16x16), "lâche" (48x48) et "fin" (80x80). Le domaine est isotherme et initialisé par un champ de vitesse sinusoïdale. Lors de la résolution, la diffusion est négligée. Un pas de temps identique est fixé pour toutes les simulations ; sa valeur est obtenue en divisant par dix la valeur préconisée par le code pour le maillage le plus fin. Ensuite, nous comparons les erreurs selon deux normes : la première se calcule à partir du maximum de l'erreur sur la vitesse dans le domaine  $N_1 = \max_N |U_i - U_{exact}|$ . La deuxième norme se calcule comme la moyenne de l'erreur sur la vitesse dans le domaine  $N_2 = \frac{1}{N} \sum_i^N |U_i - U_{exact}|$ .

### 2.1.3.3 Validation

Lors de nos essais, nous avons obtenu les résultats du tableau 2.1. Nous observons que bien que notre schéma soit théoriquement d'ordre 4, il apparaît ici comme d'ordre légèrement supérieur à 2 quelque soit la norme ou les maillages utilisés. Ceci s'explique par l'ordre de l'approximation des volumes finis, cette approximation est

Comparaison	Ordre	
	N1	N2
Grossier/Lâche	2.07	2.08
Lâche/Fin	2.05	2.07
Grossier/Fin	2.12	2.09

TABLE 2.1 – Ordre du schéma centré d'ordre 4 en fonction de la norme.

valable jusqu'à l'ordre 2, ainsi notre l'ordre de notre schéma est limité. L'assimilation de la grandeur au volume de contrôle est faite lors du calcul des contributions, ainsi les flux sont évalués à l'ordre 4 alors que la dérivée de ces flux est d'ordre 2. Si l'on s'intéresse maintenant à l'erreur engendrée par le schéma au cours du temps, on observe sur la figure 2.9 que l'erreur pour le maillage "Fin" est diminuée d'un facteur 4.3 entre le schéma centré d'ordre 2 et le schéma centré d'ordre 4. L'erreur du schéma de convection se comporte donc comme un schéma centré d'ordre 2 avec une constante d'erreur inférieure. L'utilisation d'un schéma de convection d'ordre 4 apporte une précision supplémentaire à l'évaluation de la convection, l'utilisation d'un schéma numérique non diffusif d'ordre supérieur aurait un coût numérique très important pour un gain qui serait de plus en plus limité.

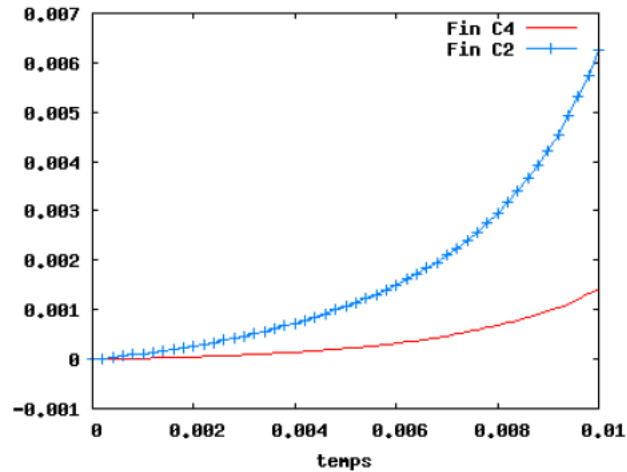


FIGURE 2.9 – Evolution de l'erreur relative sur la vitesse en fonction du schéma en espace.

## 2.2 Grandeurs caractéristiques dans l'espace physique

Maintenant que nous nous sommes assurés que les phénomènes physiques sont correctement capturés, nous allons détailler les différents paramètres qui sont étudiés sur les écoulements en canal plan soumis à un gradient de température.

Quelle que soit la grandeur étudiée, elle est toujours représentative, non pas d'un état instantané mais, d'un état statistique. La méthode statistique classiquement

utilisée pour étudier ces grandeurs est la moyenne de Reynolds. Cette méthode décompose une grandeur  $f$  en sa partie moyenne  $\bar{f}$  et sa partie fluctuante  $f'$ . Les parties fluctuantes sont de valeur moyenne nulle et représentent l'oscillation autour de la valeur moyenne  $\bar{f}$  de la grandeur  $f$ .

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.21)$$

$$\bar{f'} = 0 \quad (2.22)$$

La moyenne statistique est la moyenne sur un nombre d'expériences  $N$  très grand :

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_i^N f_i \quad (2.23)$$

Dans notre cas, l'hypothèse d'ergodicité nous permet d'assimiler cette moyenne à une moyenne en temps et sur les directions d'homogénéités. Il est important de noter qu'il est impossible a priori de connaître le nombre d'expériences nécessaire pour obtenir une valeur qui n'évolue plus. De plus, ce nombre d'expériences est fonction de la grandeur que l'on souhaite étudier. Par exemple, dans un canal plan, il faut environ 20 fois plus d'expériences pour converger le carré des fluctuations de vitesse dans la direction transverse à l'écoulement que pour converger la vitesse moyenne dans la direction de l'écoulement.

Ainsi, pour nos canaux plans, les moyennes de Reynolds sont calculées en utilisant les directions homogènes  $ox$  et  $oz$  ainsi que le temps.

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{N_x N_z N_t} \sum_{N_x} \sum_{N_z} \sum_{N_t} f(x, y, z, t) \quad (2.24)$$

En utilisant ces moyennes, nous calculons les grandeurs suivantes :

- les moyennes des vitesses  $\bar{U}_i$  ;
- les moyennes de température  $\bar{T}$  ;
- les écarts types des vitesses  $\overline{u_{rms}} = \sqrt{\overline{U_i^2} - \bar{U}_i^2}$  ;
- les écarts types de température  $\overline{\theta_{rms}} = \sqrt{\overline{T^2} - \bar{T}^2}$  ;
- l'énergie cinétique turbulente moyenne  $\bar{k} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  ;
- les corrélations des vitesses  $\overline{u'_i u'_j} = \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j$  ;
- les corrélations vitesse-température  $\overline{u'_i \theta} = \overline{U_i T} - \bar{U}_i \bar{T}$  ;
- la vitesse de frottement  $u_\tau = \sqrt{\nu \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y}}$  .
- la température de frottement  $T_w = \frac{Q_w}{\rho_w C_p u_\tau}$

## 2.3 Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral

L'énergie cinétique turbulente définie comme la demi-somme des carrés des fluctuations de vitesse  $k = \frac{1}{2} \sum_i u'_i u'_i$  est un paramètre fondamental des écoulements turbulents. Son intensité et sa répartition, à la fois spatiale et fréquentiel, sont caractéristiques de chaque type d'écoulements et en même temps universel puisque de

nombreuses similarités existent. Pour étudier les spectres des termes de l'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente en canal plan anisotherme, nous nous intéressons aux corrélations doubles des vitesses.

### 2.3.1 Changement de variable

Pour nous focaliser sur l'évolution des spectres des variations de l'énergie cinétique turbulente, nous utilisons un changement de variable efficace pour l'étude des écoulements à fortes variations de masse volumique [43] [44].

Nous nous intéressons au côté gauche de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et nous utilisons l'hypothèse de bas nombre de Mach :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j}$$

On introduit le changement de variables  $V_i = \rho^{\frac{1}{2}} U_i$  et  $b = \rho^{-\frac{1}{2}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial \sqrt{\rho} V_i}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{\rho} V_i U_j}{\partial x_j} \\ &= \sqrt{\rho} \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{2} b V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sqrt{\rho} \frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} V_i U_j b \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \\ &= \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} b V_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

De la conservation de la masse, il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

En le substituant, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j} &= \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} b V_i \left( -\rho \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{b} \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2} V_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Cela permet d'arriver à une nouvelle écriture de l'équation d'évolution de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2} V_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = b \left[ -\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Passage dans l'espace spectral

Pour étudier les différentes contributions de l'équation de l'énergie cinétique turbulente, nous appliquons une transformée de Fourier à l'équation (2.26). La transformée

de Fourier bidimensionnelle, dans un plan  $xoz$  parallèle aux parois, d'une fonction  $g(x, y, z)$  est définie comme :

$$F_k^y \{g(x, y, z)\} = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} g(x, y, z) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) dx dz = \widehat{g}(\mathbf{k}, y)$$

où  $\mathbf{x} = (x, z)$  est le vecteur position dans le plan  $xoz$  et  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$  est le vecteur d'onde dans le plan  $k_x ok_z$ . Cette transformée de Fourier sera notée  $\widehat{g}$ . L'équation (2.26) devient :

$$\frac{\partial \widehat{V}_i}{\partial t} = F_k^y \left\{ -\frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} V_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - b \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} \right\} + F_k^y \left\{ b \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - b \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (2.27)$$

En utilisant une décomposition de Reynolds des vitesses en partie fluctuante et partie moyenne ( $V_i = \overline{V}_i + v'_i$ ) ainsi que les conditions de symétrie et d'homogénéité de l'écoulement ( $\overline{U_z} = 0, \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$ ), nous pouvons effectuer les remplacements suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{V}_i}{\partial t} &= \frac{\partial \widehat{v}'_i}{\partial t} \\ F_k^y \left[ \frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} \right] &= \overline{V}_i \widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + \widehat{v}'_i \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} + \widehat{u}'_y \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial y} \delta_{i,x} + \overline{U}_j \widehat{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} + F_k^y \left[ \frac{\partial v'_i u'_j}{\partial x_j} \right] \\ F_k^y \left[ V_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right] &= \overline{V}_i \widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + \widehat{v}'_i \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} + v'_i \widehat{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

Ainsi l'équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{v}'_i}{\partial t} &= -\widehat{u}'_y \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial y} \delta_{i,x} + \overline{U}_j \widehat{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} - \frac{1}{2} \left( \overline{V}_i \widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + \widehat{v}'_i \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} - v'_i \widehat{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \right) - F_k^y \left[ \frac{\partial v'_i u'_j}{\partial x_j} \right] - b \frac{\partial \widehat{P}_{dyn}}{\partial x_i} \\ &\quad + F_k^y \left[ b \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - b \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nous multiplions désormais cette équation par  $\widehat{v}'_i^*$  où  $\widehat{g}^*$  est le complexe conjugué de  $\widehat{g}$  et nous sommes sur les indices  $i$  et  $j$  (on utilise ici la convention des indices répétés).

$$\begin{aligned} \widehat{v}'_i^* \frac{\partial \widehat{v}'_i}{\partial t} &= -\widehat{v}'_x^* \widehat{u}'_y \frac{\partial \overline{V}_x}{\partial x_y} + \widehat{v}'_i^* \overline{U}_j \widehat{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} - \frac{\widehat{v}'_i^*}{2} \left( \overline{V}_i \widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + \widehat{v}'_i^* \widehat{v}'_i \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} - \widehat{v}'_i^* v'_i \widehat{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \right) \\ &\quad - \widehat{v}'_i^* F_k^y \left[ \frac{\partial v'_i u'_j}{\partial x_j} \right] - \widehat{v}'_i^* b \frac{\partial \widehat{P}_{dyn}}{\partial x_i} + \widehat{v}'_i^* F_k^y \left[ b \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \widehat{v}'_i^* \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - b \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

En remarquant que

$$\Re \left( \widehat{v}'_i^* \frac{\partial \widehat{v}'_i}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \widehat{v}'_i^* \widehat{v}'_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E_c}{\partial t} \quad (2.30)$$



où  $E_c$  est l'énergie cinétique turbulente dans l'espace de Fourier et  $\Re$  la partie réelle d'un nombre complexe, nous obtenons l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral (équation (2.31)). On notera que le terme  $\Re \left( \widehat{v'_i}^* \overline{U_x} \widehat{\frac{\partial v'_i}{\partial x}} \right)$  s'annule, car  $\widehat{v'_i}^* \overline{U_x} \widehat{\frac{\partial v'_i}{\partial x}}$  est un imaginaire pur, pour laisser uniquement  $\Re \left( \widehat{v'_i}^* \overline{U_y} \widehat{\frac{\partial v'_i}{\partial y}} \right)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial t} = & 2\Re \left( -\widehat{v'_x}^* \widehat{u'_y} \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial y} - \widehat{v'_i}^* F_k^y \left[ \frac{\partial v'_i u'_j}{\partial x_j} \right] - \widehat{v'_i}^* b \frac{\partial \widehat{P_{dyn}}}{\partial x_i} \right. \\ & - \frac{\widehat{v'_i}^*}{2} \left( \overline{V_i} \widehat{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + \widehat{v'_i} \frac{\partial \overline{U_y}}{\partial y} - v'_i \widehat{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \right) + \widehat{v'_i}^* \overline{U_y} \widehat{\frac{\partial v'_i}{\partial y}} \\ & \left. + \widehat{v'_i}^* F_k^y \left[ b \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - b \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Cette équation est riche en information. En effet, elle dépend de trois paramètres  $k_x$  le vecteur d'onde dans la direction  $ox$ ,  $k_z$  le vecteur d'onde dans la direction  $oz$  et  $y$  la position du plan dans le canal. Il a été choisi, pour simplifier l'interprétation des résultats, de travailler en norme de vecteur d'onde. Les termes de l'équation sont intégrés dans le plan d'onde  $\underline{k}$  pour n'en garder que la variation selon la norme  $k$  (equation (2.32)).

$$f(k, y) = \int_{\underline{k}} f(k_x, k_z, y) d\underline{k} \quad (2.32)$$

### 2.3.3 Décomposition de l'équation

Pour étudier les transferts d'énergie, il est nécessaire de regrouper les informations. Il a été choisi de regrouper les termes de façon similaire à celle de Bolotnov *et al.* [45]. Ceci nous permettra de nombreuses comparaisons avec le cas isotherme.

Nous choisissons tout d'abord d'exprimer cette variation comme la somme de trois mécanismes : un mécanisme de Production qui va fournir de l'énergie cinétique turbulente à l'écoulement  $\Pi$ , un mécanisme de transfert composé par un ensemble de sous mécanismes  $\sum_n T_n$  qui va déplacer cette énergie cinétique turbulente vers une autre échelle et/ou vers un autre plan et un mécanisme de dissipation  $D$  qui va détruire l'énergie cinétique turbulente (équation (2.33)).

$$\frac{\partial E_c(k, y)}{\partial t} = \Pi(k, y) + \sum_n T_n(k, y) + D(k, y) \quad (2.33)$$

Le découpage du transfert en sous-mécanismes est fait selon 3 classes :

- Les termes qui sont non-nuls suite à l'existence d'un gradient de densité comprenant les termes composés d'une vitesse verticale moyenne  $\overline{U_y}$  et les termes des divergences de vitesse.
- Les termes dans le plan "homogène" qui intègrent des dérivées en  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ .
- Les termes inter-plan qui intègrent des dérivées en  $\frac{\partial}{\partial y}$ .

Les différents termes issus de cette décomposition sont :

La production turbulente :

$$\Pi = \int_k -2\Re \left[ \widehat{v}_x^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{V}_x}{\partial y} \right] d\mathbf{k} \quad (2.34a)$$

Le transfert triadique dans le plan :

$$T_{in} = \int_k -2\Re \left[ \sum_i \sum_{j=x,z} \widehat{v}_i^* \frac{\partial \widehat{v}_i' u_j'}{\partial x_j} \right] d\mathbf{k} \quad (2.34b)$$

Le transfert triadique inter-plan :

$$T_{it} = \int_k -2\Re \left[ \sum_i \widehat{v}_i^* \frac{\partial \widehat{v}_i' u_y'}{\partial y} \right] d\mathbf{k} \quad (2.34c)$$

Le transfert thermique :

$$\Gamma = \int_k -2\Re \left[ \sum_i \left[ \widehat{v}_i^* \overline{U}_y \frac{\partial \widehat{v}_i'}{\partial y} + \frac{1}{2} \widehat{v}_i^* \widehat{v}_i' \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} - \sum_j \frac{1}{2} \widehat{v}_i^* \left( \widehat{v}_i' \frac{\partial \widehat{u}_j'}{\partial x_j} \right) + \sum_j \widehat{v}_i^* \overline{V}_i \frac{\partial \widehat{u}_j'}{\partial x_j} \right] \right] d\mathbf{k} \quad (2.34d)$$

Le transfert par la pression dans le plan :

$$\Phi_{in} = \int_k -2\Re \left[ \sum_{i=1,3} \widehat{v}_i^* \left( b \frac{\partial \widehat{P}_{dyn}}{\partial x_i} \right) \right] d\mathbf{k} \quad (2.34e)$$

Le transfert par la pression inter-plan :

$$\Phi_{it} = \int_k -2\Re \left[ \widehat{v}_y^* \left( b \frac{\partial \widehat{P}_{dyn}}{\partial y} \right) \right] d\mathbf{k} \quad (2.34f)$$

La dissipation :

$$D = \int_k 2\Re \left( \widehat{v}_i^* F_k^y \left[ b \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - b \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \right) d\mathbf{k} \quad (2.34g)$$

### 2.3.4 Procédure d'obtention des spectres

Ce paragraphe décrit la procédure qui a été suivie pour obtenir les spectres des termes de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral.

#### Calcul des termes dans l'espace physique

La première étape, pour l'obtention des spectres, est la convergence des grandeurs moyennes. Les différentes grandeurs instationnaires et moyennes sont calculées pendant la simulation. Lorsqu'elles n'évoluent plus, une routine ajoutée au code Trio\_U est exécutée. Cette routine calcule dans l'espace physique les différentes contributions de l'équation de l'énergie cinétique turbulente plan par plan ( par exemple :  $b \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x}$ ,  $v_x' \frac{\partial u_z'}{\partial x_z}$ ). Ainsi, pour chaque point d'un plan post traité 18 sommes de contributions sont obtenues avec une fréquence d'échantillonnage de  $10^{-3}s$ .

## Intégration dans spectres l'espace de Fourier

Les termes obtenus dans l'espace physique sont ensuite pris en charge par une routine extérieure au code. Cette routine calcule les transformées de Fourier bidimensionnelles, réalise l'intégration dans l'espace des fréquences et moyenne l'ensemble des échantillons recueillis. Elle fournit ainsi pour chaque plan des données ne dépendant plus que de la norme du vecteur d'onde  $k$ .

Bien que long, les temps de moyenne des statistiques ne sont pas suffisants pour éliminer le bruit numérique associés aux différentes étapes du post traitement. Il a ainsi été décidé de réaliser un filtrage des signaux 1D obtenus.

## Filtrage par boîtes de fréquences

Le premier type de filtrage, pouvant être utilisé, est un filtrage par "boîte de fréquences". Ce filtrage détaillé dans les travaux de Boltonov *et al.* [45] consiste à considérer que l'ensemble des comportements sur une gamme de fréquences est représentatif d'une seule et même fréquence. Les boîtes qui enferment ces gammes de fréquences sont distribuées de manière logarithmique sur l'axe des fréquences. Ainsi, lors de représentation en échelle logarithmique, les points sont régulièrement espacés.

Dans notre cas, le filtrage par boîtes de fréquence est utilisé pour rediscrétiser les signaux 1D obtenus sur un axe logarithmique au travers de 96 boîtes.

Les limites  $k_i$  et  $k_{i+1}$  de la boîte  $i$  sont calculées en fonction de la fréquence minimale  $k_{min}$ , de la fréquence maximale  $k_{max}$  et du nombre de boîtes avec la formule suivante :

$$k_i = k_{min} \left( \frac{k_{max}}{k_{min}} \right)^{\frac{i-1}{N_b-1}} \quad (2.35)$$

## Filtrage fréquentiel passe bas

Le signal obtenu par le filtrage précédent n'est pas toujours suffisant. En effet, ponctuellement des valeurs affectées par du bruit peuvent par leurs normes devenir prépondérantes. Il a été observé sur les différents signaux une rupture dans leur contenu fréquentiel. Il a ainsi été décidé d'utiliser un filtrage fréquentiel passe bas à la fréquence de rupture.

La figure 2.10 montre l'effet du filtrage fréquentiel. On applique sur la courbe rouge une transformée de Fourier qui permet de passer à la courbe de la figure 2.11. Nous pouvons voir qu'à la fréquence 11 il y a rupture du spectre ; la séparation des échelles est faite à cette fréquence. Par transformée de Fourier inverse et en ne conservant que la partie norme du signal, nous obtenons la courbe bleue de la figure 2.10. L'utilisation de cette méthode par rapport au filtrage par boîte de fréquences possède deux avantages majeurs : l'existence de normes très différentes ponctuellement n'impacte plus le signal et on conserve l'intégralité des fréquences. Cela permet de conserver les effets fins sur les hautes fréquences qui seraient détruit par la taille de plus en plus grande des boîtes de fréquences. Les paramètres du filtre (fréquence de coupure, taille de la fenêtre, forme) sont choisis pour un terme et une simulation. Par la suite, nous avons validé la bonne capture du comportement

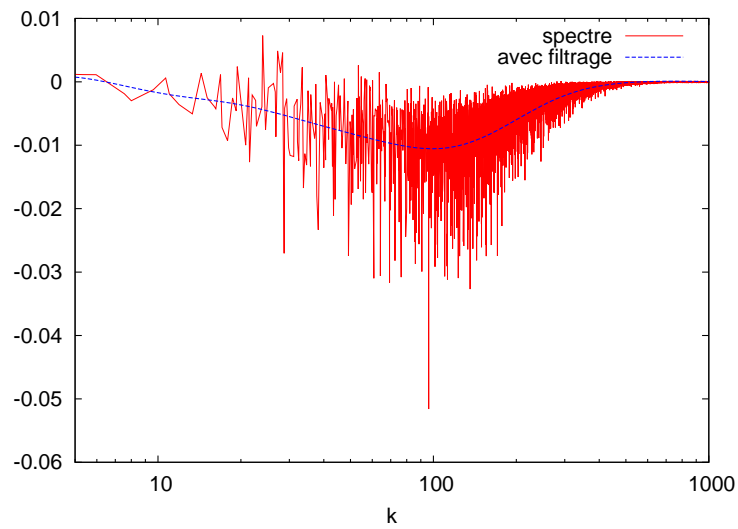


FIGURE 2.10 – Filtrage fréquentiel du transfert triadique dans le plan

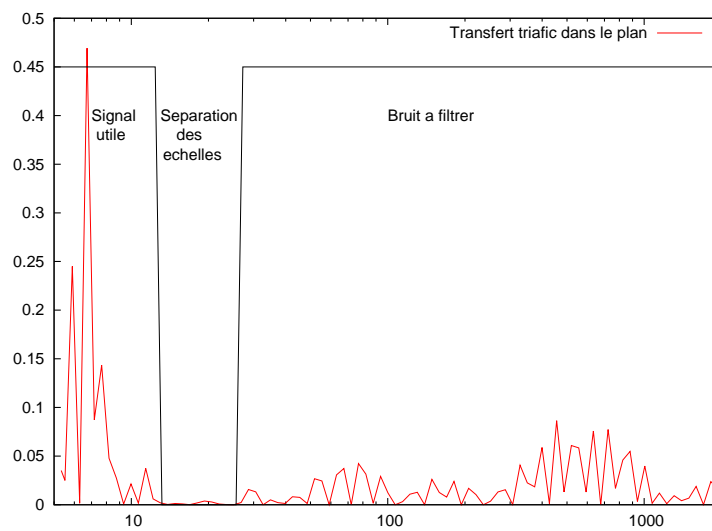


FIGURE 2.11 – Transformée de Fourier du transfert triadique dans le plan

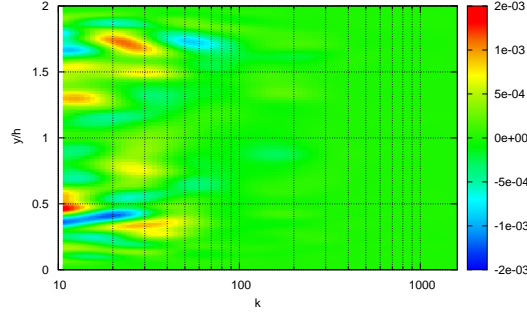


FIGURE 2.12 – Exemple de spectre représenté en surface

des autres termes avec ces paramètres, pour les utiliser pour l'ensemble de nos simulations.

### Reconstitution en surface des spectres

Pour permettre de visualiser à la fois les transferts inter-échelles et les transferts inter-plan, les différents spectres 1D sont mis côte à côte pour former une surface. Nous obtenons donc des figures semblables à la figure 2.12 où l'abscisse est la fréquence  $k$ , l'ordonnée la distance à la paroi froide adimensionnée par la demi-hauteur du canal  $y/h$ , et l'échelle de couleur l'intensité du terme.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous venons de présenter les nouveaux outils numériques que nous utiliserons pour réaliser nos simulations. Les modifications apportées à Trio\_U permettent de capturer les écoulements avec plus de précisions, l'erreur générée par chacun des nouveaux opérateurs est inférieure à celle des opérateurs initiaux de Trio\_U. L'utilisation d'un nouvel algorithme de résolution permet une meilleure conservation de l'énergie au niveau local et au niveau global. Nous avons introduit les méthodes utilisées pour le calcul des statistiques de l'écoulement, dans l'espace physique et dans l'espace spectral. La procédure d'obtention des spectres comporte de nombreuses étapes qui ont été précisées du point de vue numérique et des équations.

Munis de l'ensemble de ces outils, nous allons réaliser la simulation numérique d'écoulement en canal plan bi-périodique.



# Chapitre 3

## Canal plan bi-périodique

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire la géométrie et le maillage utilisé pour réaliser les simulations de notre étude. Puis, nous montrerons la capacité du code à simuler les écoulements isothermes et anisothermes. Notre objectif étant l'analyse spectrale de l'écoulement, cette approche est très importante. Nous devons être capable d'évaluer la qualité de nos simulations et l'impact des choix de modélisations.

Les simulations présentées dans les chapitre 3 et 4 ont été réalisées sur la machine JADE du CINES.

### 3.1 Domaine de calcul

La base de notre étude est l'utilisation du cas académique du canal plan. Sa géométrie simple permet de s'intéresser aux mécanismes essentiels liés à la présence des parois. Cette configuration est particulièrement utilisée pour la mise au point des outils numériques destinés à l'étude des phénomènes turbulents. Par exemple, Jarrin *et al.* [46] développe une technique dites de "synthetic-eddy-method" qui permet de créer une entrée pseudo-turbulente à faible coût, Patil *et al.* [47] testent des lois de paroi adaptées à la SGE et Housiadas *et al.* [48] mettent au point un schéma implicite pour des écoulements visco-élastiques. L'étude de phénomènes couplés qui interagissent avec la turbulence est aussi un des champs d'application de cette géométrie. De manière non exhaustive, on pourra trouver des études portant sur :

- Les écoulements diphasiques :
  - Brenn *et al.* [49] étudient la dispersion de bulles par la turbulence et comparent modèles numériques et expérience ;
  - Eaton [50] pointe les problèmes d'adaptation de la SGE au suivi de particules dont la taille est semblable aux petites échelles de la turbulence ;
  - Nars et Ahmadi [51] s'intéressent à l'interaction entre la turbulence et des particules qui collisionnent.
- Les couches limites :
  - Le *et al.* [52] étudient les structures turbulentes qui composent la couche limite d'un canal plan dont la paroi est en mouvement.
  - Quand *et al.* [53] mettent en évidence des relations entre statistiques d'ordres élevés dans les couches limites d'écoulements turbulents.

- Buffat *et al.* [54] s'intéressent au développement de la couche limite pendant la transition entre écoulement laminaire et écoulement turbulent.
- Le phénomène d'effusion :
  - Brillant *et al.* [9] étudient l'interaction entre des films refroidissant une paroi et la couche limite dans un écoulement turbulent.
  - Tardu [55] réalise dans les conditions d'un canal plan une expérience de contrôle de la couche avec par effusion.
  - Haddad [56] travail au contrôle de turbulence par effusion dans un milieu poreux.
- les phénomènes de compressibilités :
  - Serra [14] dont le travail précède le présent manuscrit, s'intéresse à l'impact des forts gradients de température dans un écoulement faiblement compressible.
  - Bspalko *et al.* [57] comparent les performances des méthodes Lattice-Boltzmann (LBM) avec les méthodes classiques de résolution des équations de Navier-Stokes pour la prédiction des instationnarités de pression d'un écoulement compressible.
  - Enfin Gordeev and al. [58] utilisent la configuration du canal plan pour prédire la relaminarisation d'un écoulement d'hélium chauffé dans des conditions de forte turbulence.

### 3.1.1 Géométrie

Dans un canal plan bi-périodique, représenté sur figure 3.1, le fluide (ici de l'air à pression atmosphérique) s'écoule entre deux parois planes séparées par la distance  $2h$  (avec  $h = 0.014923\text{ m}$  la demi-hauteur du canal). Les parois sont positionnées dans les plans  $y = 0$  et  $y = 2h$  et les conditions aux limites qui s'y appliquent sont uniformes.

Compte tenu des conditions d'homogénéités, les variations des grandeurs moyennes dans les directions  $ox$  et  $oz$  sont nulles ce qui ramène la configuration à un problème monodimensionnel (dans l'espace physique). L'ensemble des grandeurs sera donc analysé en fonction de  $y$ , la distance à la paroi froide, ou  $y^+$ , la distance en unité de paroi ( $y^+ = yRe_\tau/h$  avec  $Re_\tau$  le nombre de Reynolds de frottement associé à la paroi proche).

Dans les directions homogènes, les dimensions choisies doivent être suffisantes pour assurer que l'écoulement soit décorrélé, c'est à dire que le champ de vitesse au milieu du domaine soit très peu corrélé avec le champ de vitesse au début du canal. Les différents auteurs [4, 7, 59–61] n'énoncent pas de règle pour choisir les tailles du domaine. Dans la littérature, les tailles varient de  $L_x = 2\pi h, L_z = \frac{2\pi}{3}h$  pour Moser *et al.* à  $L_x = 4\pi h, L_z = 2\pi h$  pour Trofimova *et al.* Tous admettent la nécessité d'un ratio  $\frac{L_z}{L_x} \geq \frac{1}{3}$ . De plus, ils doivent limiter la taille de leur domaine lorsque le nombre de Reynolds turbulent augmente pour être compatible avec les capacités numériques à leur disposition. Pour nos simulations, nous avons d'abord commencé avec une très grande taille de domaine ( $L_x = 8\pi h$  et  $L_z = 4\pi h$ ) et une simulation fortement turbulente ( $Re_\tau = 395$ ). Pour valider notre choix, nous avons calculé les auto-corrélations des vitesses de cette simulation. Nous observons que l'auto-corrélation des vitesses longitudinales (figure 3.2(a)) atteint le seuil de 10% (seuil



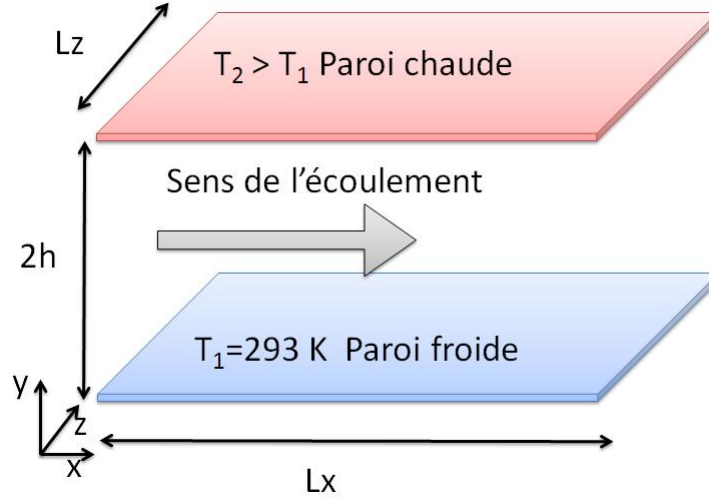
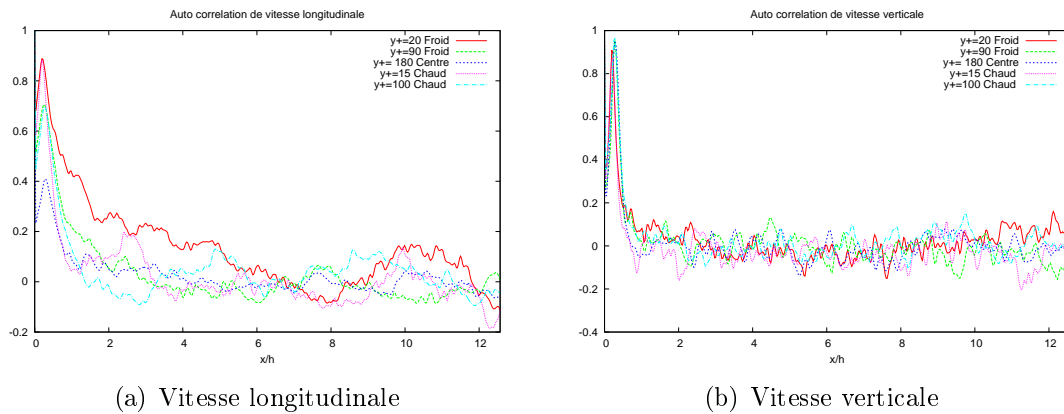


FIGURE 3.1 – Géométrie du canal plan bi-périodique

que nous considérons suffisant pour que l'écoulement soit considéré comme décoloré) aux environs de  $2\pi h$ . Les auto-corrélations des autres grandeurs de l'écoulement se comportent comme l'auto-corrélation des vitesses verticales représentées sur la figure 3.2(b). Suite à ce résultat, nous avons décidé de réduire la taille de domaine à  $L_x = 4\pi h$  et  $L_z = 2\pi h$  qui semble suffisante pour assurer un écoulement décorrélé. Le temps de calcul ainsi économisé sera utilisé pour accroître le temps des moyennes statistiques de nos différentes simulations.


 FIGURE 3.2 – Auto-corrélation de vitesse en canal plan quasi-isotherme à  $Re_\tau = 395$ 

Dans un canal plan bi-périodique, il n'existe pas de gradient de pression dans la direction de l'écoulement. Pour jouer le rôle de ce gradient, une force est ajoutée dans la direction de l'écoulement. Cette force maintient un débit massique constant.

### 3.1.2 Conditions aux limites

Les plans  $x = 0$ ,  $x = L_x$ ,  $z = 0$  et  $z = L_z$  sont des plans périodiques, la continuité des grandeurs est imposée au travers de ces surfaces ( $f(0, y, z) = f(L_x, y, z)$  et  $f(x, y, 0) = f(x, y, L_z)$ ). Aux parois, on impose une condition de non-glissement ( $\vec{U} = 0$ ) et une température uniforme. Selon les simulations, le rapport entre les températures  $T_r = T_{chaud}/T_{froid}$  varie de 1 à 2. Pour toutes nos simulations, la température froide  $T_f = 293K$  est appliquée sur la paroi inférieure ( $y = 0$ ).

### 3.1.3 Conditions initiales

L'initialisation des simulations se fait selon 2 paramètres : le champ de vitesse et un couple pression/température. Si on s'intéresse à la pression thermodynamique, pour un domaine à la température  $T$ , l'utilisation de deux pressions thermodynamiques différentes conduira à enfermer deux masses volumiques moyenne  $m_1$  et  $m_2$  dans le domaine (avec  $m_1 \neq m_2$ ).

$$m_i = \frac{P_{th_i}}{Vr} \int_V \frac{1}{T} dV \quad (3.1)$$

On se rend ainsi compte que le choix du couple pression/température n'est pas une conditions initiale, au sens de conditions qui n'influencent pas la solution finale obtenue, mais bien un paramètre du système qui influera notamment sur la quantité d'énergie stockable dans le domaine et donc les températures moyennes obtenues. Pour nos simulations, il a été choisi de travailler avec une masse volumique moyenne  $m$  constante ;  $m$  est calculée à partir du cas isotherme à  $T = 293K$  et d'une pression thermodynamique de  $100000P_a$ . La pression thermodynamique est adaptée pour conserver la masse dans le domaine. Pour un champ de température initial  $T_1$ , on utilisera la pression  $P_{th_1}$  calculée avec l'expression (3.2).

$$P_{th_1} = \frac{2hrm}{\int_0^{2h} \frac{1}{T_1} dy} \quad (3.2)$$

Les champs de température initiaux utilisés sont des champs linéaires par morceaux variant dans la direction  $y$  et uniforme dans un plan  $xoz$ . Ils permettent aux simulations d'évacuer rapidement leurs états transitoires, tout en rendant l'intégrale  $\int_V \frac{1}{T} dV$  calculable sans utiliser de méthode numériques. En utilisant les champs de température obtenus par Serra [13], deux points sont fixés dans les zones de fortes courbures et délimitent les zones linéaires (figure 3.3). Les champs des vitesses initiales sont composés de profils paraboliques sur la vitesse longitudinale, de profils paraboliques perturbés par des fonctions sinusoïdales variant dans les directions homogènes sur la vitesse verticale et d'une vitesse transversale nulle (voir (3.3)).

$$\begin{aligned} U &= U_c y \frac{2h - y}{4h^2} \\ V &= y \frac{2h - y}{4h^2} \sum_i \sin\left(\frac{-\alpha_i \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\beta_i \pi z}{L_z}\right) \\ W &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$U_c$ , la vitesse au centre de l'écoulement, est choisie pour imposer un débit massique correspondant au nombre de Reynolds voulu.

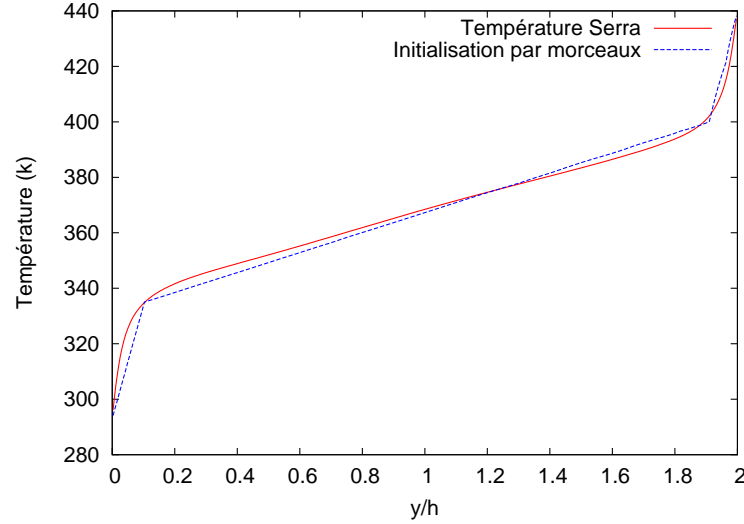


FIGURE 3.3 – Variation du champ de température initial en fonction de la hauteur dans le canal ( $Re_\tau = 180$  et  $T_r = 2$ )

Nom	Type	$Re_\tau^{froid}$	$T_r$	$L_x$	$L_z$	$\Delta x^+$	$\Delta z^+$	$\Delta y_0^+$	$\Delta y_c^+$	$N_x$	$N_y$	$N_z$
180-1	SND	184	1	$4\pi h$	$2\pi h$	6	3	0.25	2.3	382	300	382
180-2	SND/SGE	270	2	$4\pi h$	$2\pi h$	17.6	5.9	0.5	7.8	192	140	288
395-1	SGE	395	1.01	$8\pi h$	$4\pi h$	11	11	0.75	7.5	896	200	448
395-2	SGE	542	2	$4\pi h$	$2\pi h$	14	14	1	7.5	448	200	224

TABLE 3.1 – Paramètre de maillage des simulations

### 3.1.4 Maillages

Un des avantages de la géométrie du canal plan est la possibilité d'utiliser un maillage raffiné uniquement à l'approche des parois pour capturer les forts gradients en proche paroi. De fait, l'ensemble de nos maillages sont des maillages à pas constant dans les directions d'homogénéités. Dans la direction perpendiculaire aux parois, un raffinement hyperbolique est utilisé (voir équation (3.4),  $y_k$  est la position du noeud  $k$  et  $a$  le paramètre de finesse de maille). Ce raffinement permet de capturer correctement la couche limite tout en diminuant la puissance de calcul nécessaire pour réaliser la simulation par rapport à un maillage uniforme d'un facteur supérieur à 5. Le tableau 3.1 liste les caractéristiques des maillages utilisés dans nos simulations numériques. Le calcul des variables adimensionnelles est basé sur le nombre de Reynolds de frottement local le plus contraignant (c.à.d. le plus grand). Dans notre cas, c'est systématiquement le côté froid ( $y = 0$ ) qui présente le plus fort nombre de Reynolds de frottement.

$$y_k = L_y \left( 1 + \frac{1}{a} \tanh \left[ \left( -1 + \frac{k-1}{N_y-1} \right) a \tanh(a) \right] \right), k \in [1, N_y]. \quad (3.4)$$

## 3.2 Simulations isothermes

Que ce soit pour valider les développements présentés à la partie 2.1, ou pour obtenir des points de comparaisons à résolution similaire, la réalisation de simulations isothermes apporte à notre étude de nombreuses informations indispensables.

### 3.2.1 Simulation à $Re_\tau = 180$

Les développements précédents 2.1 ont été validés sur différents cas tests, mais l'ensemble de ces améliorations doit encore montrer sa capacité à simuler un écoulement pleinement turbulent. Dans ce but, nous avons réalisé une simulation numérique directe dans les conditions d'écoulement de Kim *et al.* [61]. Nous avons réalisé plusieurs simulations jusqu'à obtenir la convergence en maillage. Nous représentons la convergence en maillage sur la figure 3.4 en étudiant le comportement des fluctuations de la vitesse longitudinale ; le même raisonnement aurait pu être appliqué aux différentes grandeurs de l'écoulement. Nous observons que la simulation avec un maillage de haute résolution (382x300x382) permet de retrouver les mêmes fluctuations de vitesse longitudinale que Kim *et al.* [61], alors que les autres résolutions ne capturent correctement que la couche limite ( $y^+ \leq 10$ ).

Les figures 3.5(a) et 3.5(b) comparent les profils de vitesse de cette simulation aux résultats de Kim *et al.*. On observe que l'intégralité des grandeurs sont identiques à cette référence. Ces résultats confirment que les modifications apportées à l'algorithme de résolution et plus généralement au code Trio\_U permettent de bien résoudre les équations de Navier-Stokes dans le cas isotherme.

### 3.2.2 Simulation à $Re_\tau = 395$

Nous avons réalisé une simulation des grandes échelles (SGE) à plus haut nombre de Reynolds turbulent et pour un ratio de température de  $T_r = 1,01$ . Les caractéristiques de cette simulation des grandes échelles sont comparables à celle de la simulation numérique directe de Moser *et al.* [59]. La température modifie très peu l'écoulement (les nombres de Reynolds de frottement varient de moins de 2% entre le côté chaud ( $Re_\tau^{chaud} = 384$ ) et le côté froid ( $Re_\tau^{froid} = 390$ ) de l'écoulement). De la même manière que précédemment, nous comparons sur les figures 3.6(a) et 3.6(b) les profils de notre simulation aux statistiques de Moser *et al.* [59]. On observe que la vitesse moyenne est très bien capturée, et que les fluctuations de vitesse ont des bons comportements physiques. Alors que les fluctuations de la vitesse longitudinale sont légèrement sur-estimées ; les fluctuations des vitesses verticale et transversale sont légèrement sous-estimées. Ce faible écart provient de l'utilisation d'une simulation des grandes échelles qui redistribue l'énergie depuis les directions verticale et transversale vers la direction longitudinale.

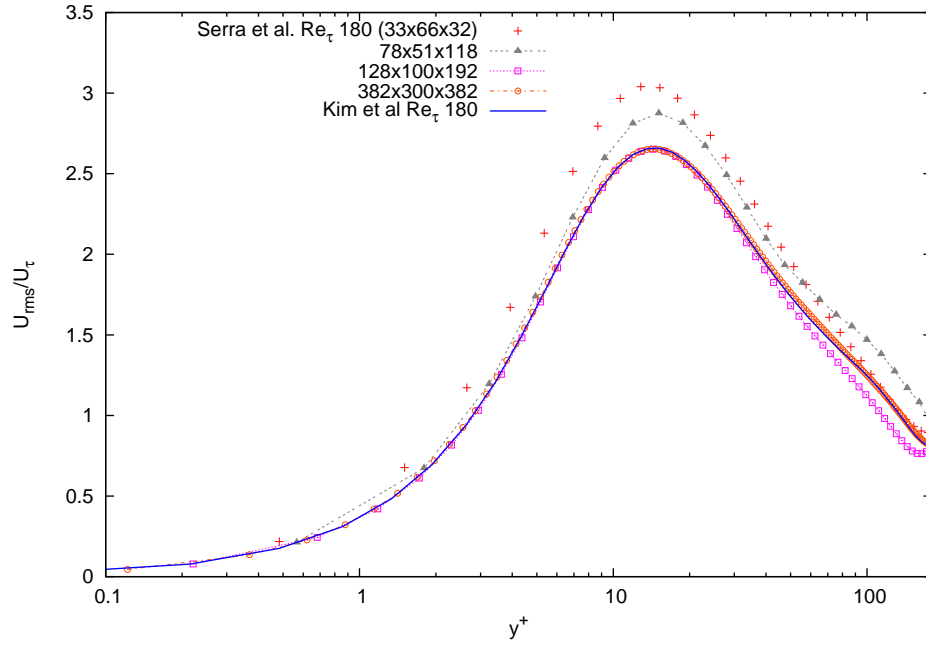


FIGURE 3.4 – Convergence des fluctuations de vitesse longitudinale avec la résolution du maillage

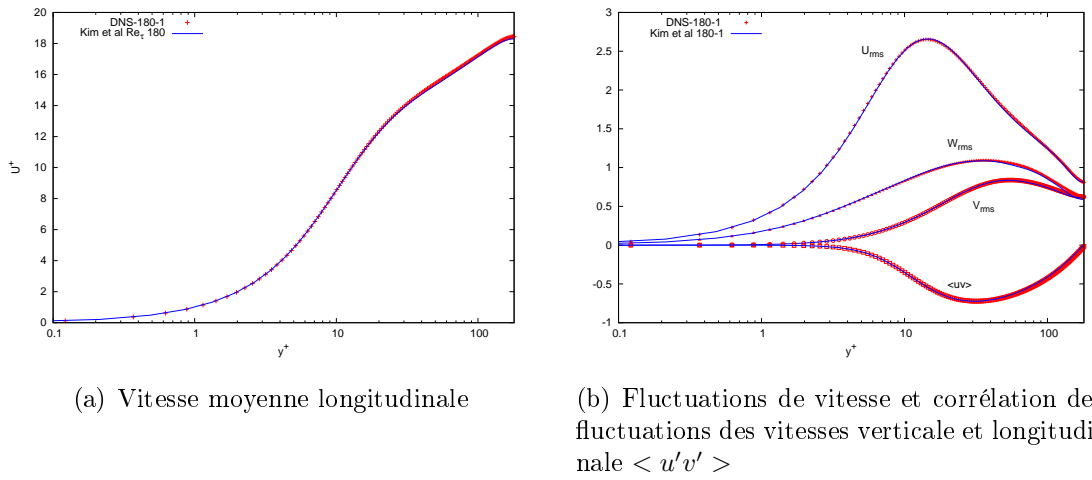


FIGURE 3.5 – Comparaison à la simulation numérique directe de Kim et al. [61]  $Re_\tau = 180$

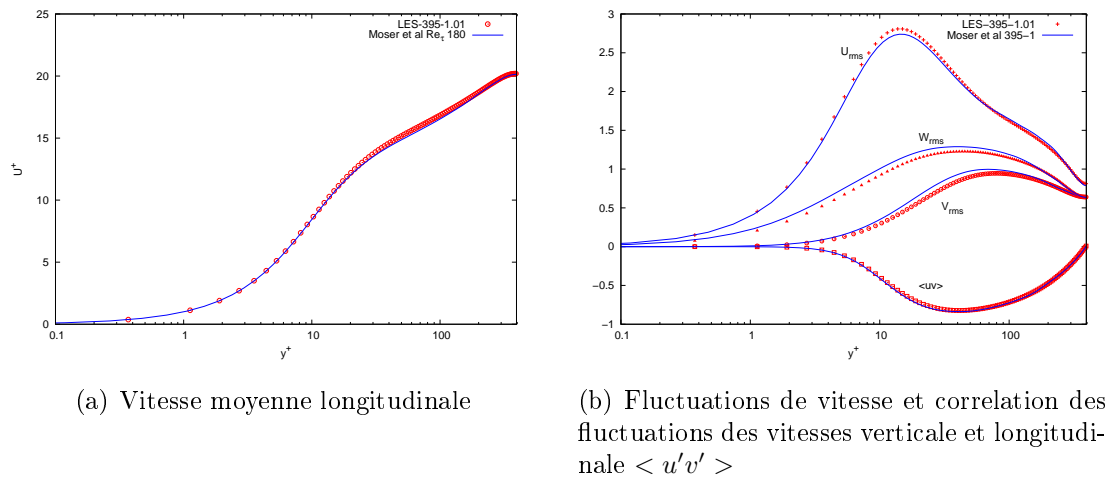


FIGURE 3.6 – Comparaison à la simulation de Moser et al. [59]  $Re_\tau = 395$

### 3.3 Simulation anisothermes

Nous avons réalisé deux simulations isothermes aux nombres de Reynolds de frottement de 180 et 395. Deux simulations anisothermes ont été réalisées aux mêmes nombres de Reynolds de frottement moyens. Le nombre de Reynolds de frottement des simulations est un nombre adimensionnel moyen calculé à partir des nombres de Reynolds de frottement chaud et froid  $Re_\tau = \frac{Re_\tau^{chaud} + Re_\tau^{froid}}{2}$ . Les profils sont séparés entre côté froid du canal ( $y \leq h$ ) et côté chaud du canal ( $y \geq h$ ). Les grandeurs adimensionnelles sont calculées aux deux parois et servent à adimensionner les profils respectifs.

#### 3.3.1 Simulation à $Re_\tau = 180$

Nous avons réalisé une simulation numérique directe en utilisant des caractéristiques adimensionnelles de maillages équivalentes à celle de la simulation numérique directe anisotherme à faible nombre de Reynolds de Nicoud *et al.* [7]. Nous traçons, à titre de comparaison, les profils de la simulation de Nicoud lorsqu'ils sont disponibles. Certaines différences sont liées au fait que la simulation de Nicoud est à plus faible nombre de Reynolds de frottement ( $Re_\tau = 140$ ) que notre simulation. Nous avons réalisé sur le même maillage que notre SND anisotherme une SGE qui nous permet d'observer l'effet de la SGE sur les statistiques de l'écoulement.

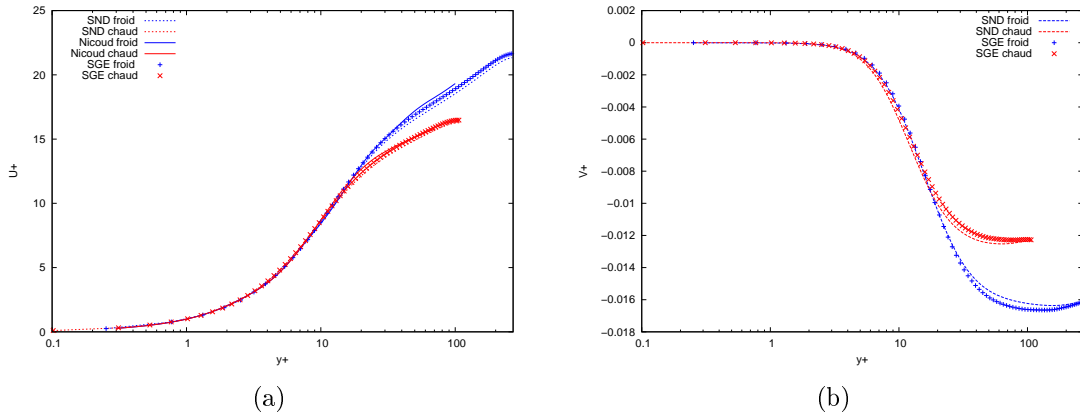


FIGURE 3.7 – Vitesses moyennes longitudinales (a) et verticales (b)  $Re_\tau = 180$ ,  $Tr = 2$

Les figures 3.7(a) et 3.7(b) représentent respectivement les vitesses moyennes longitudinale et transversale. On observe que l'ajout du modèle de turbulence a augmenté légèrement les vitesses longitudinales moyennes qui se rapprochent des profils obtenus par Nicoud. Par rapport à la SND sous-résolue, le caractère dissymétrique de la vitesse verticale augmente avec l'utilisation de la SGE. L'augmentation de la conduction par le modèle sous-maille thermique alors que la diffusion thermique est sous-estimée par la SND sous-résolue explique en partie ce phénomène. La conduction turbulente étant plus forte du côté froid que du côté chaud le flux conductif augmente plus du côté chaud que du côté froid. L'équilibre local des flux (équation

(2.4)) impose alors la diminution ou l'augmentation du flux convectif et, puisqu'elles lui sont proportionnelles, la variation des vitesses verticales moyennes. L'impact théorique d'un modèle de turbulence de type SGE est sensiblement nul lorsque le maillage est suffisant pour capturer toutes les échelles de la turbulence. Les observations faites sur les deux premières figures indiquent donc que la SND réalisée est sous-résolue en maillage.

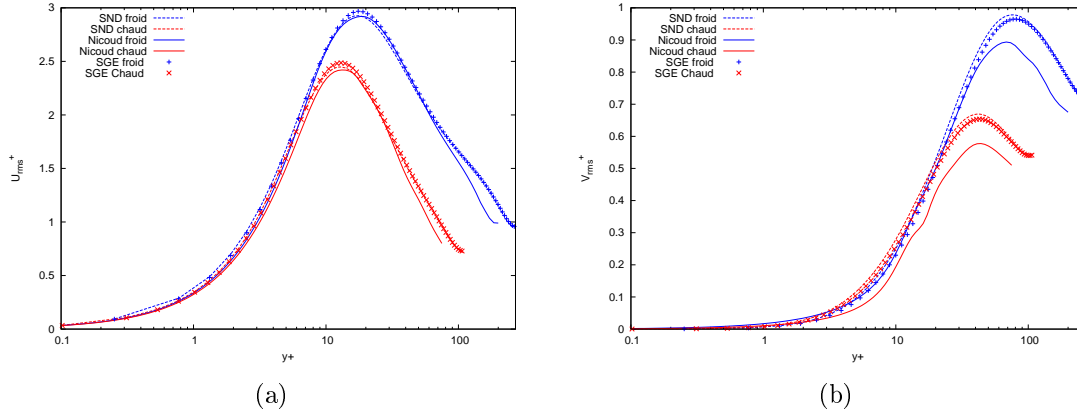


FIGURE 3.8 – Fluctuations des vitesses longitudinales (a) et verticales (b)  $Re_\tau = 180$ ,  $Tr = 2$

Les fluctuations des vitesses longitudinales (figure 3.8(a)) des deux simulations sont très semblables à celles de Nicoud. L'intensité des fluctuations de la SGE est supérieure du côté chaud comme du côté froid à celles de la SND. Les fluctuations des vitesses verticale (figure 3.8(b)) et transversale (figure 3.9(a)) sont très différentes des profils de Nicoud. Que ce soit en SND ou SGE, les fluctuations sont plus importantes. Les différences de nombre de Reynolds vont dans le sens des différences observées. Contrairement aux fluctuations longitudinales, les fluctuations verticales et transversales de la SGE sont inférieures aux fluctuations de la SND. La SGE semble redistribuer les vitesses, augmentant la vitesse longitudinale moyenne et ses fluctuations et diminuant les fluctuations des autres composantes de vitesse. Ces observations sont semblables aux résultats obtenus pour la simulation quasi-isotherme à haut nombre de Reynolds (voir 3.2.2) où les écarts à la SND de Moser *et al* [59] montrent une surestimation de la composante longitudinale de la vitesse et une sous-estimation des autres composantes.

La figure 3.9(b) représente les corrélations vitesse longitudinale-vitesse verticale. Nous voyons que le pic de la corrélation est commun pour les 3 simulations. La SGE et la SND ont des résultats quasiment identiques. A bas nombre de Reynolds, la position du pic de cette corrélation est donc plus liée au gradient de température qu'au niveau de turbulence (qui varie de 22% entre les simulations). L'intensité de la corrélation est inférieure à celle de Nicoud côté chaud alors qu'elle est de même ordre côté froid.

Les températures moyennes adimensionnées (figure 3.10(a)) sont similaires entre SGE et SND et sont inférieures à celles de Nicoud. Les fluctuations de la tempéra-



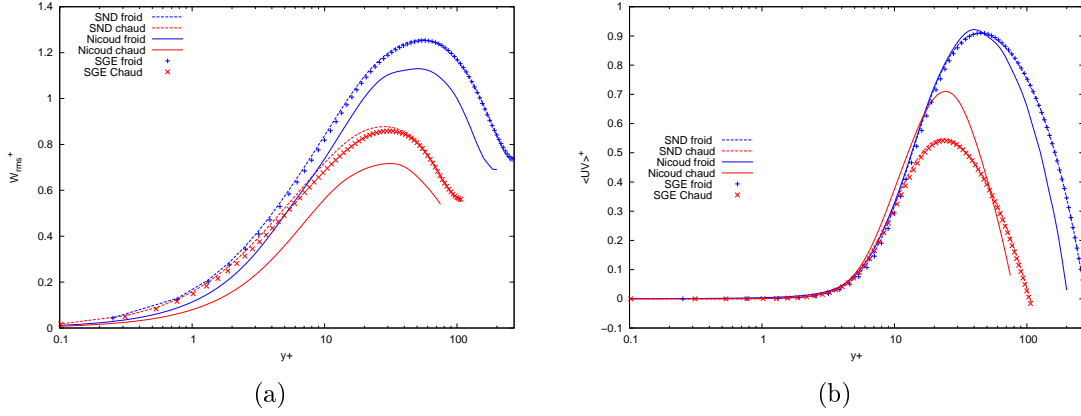


FIGURE 3.9 – Fluctuations de la vitesse transversale (a) et corrélation  $\overline{u'v'}$  (b)  $Re_\tau = 180$ ,  $Tr = 2$

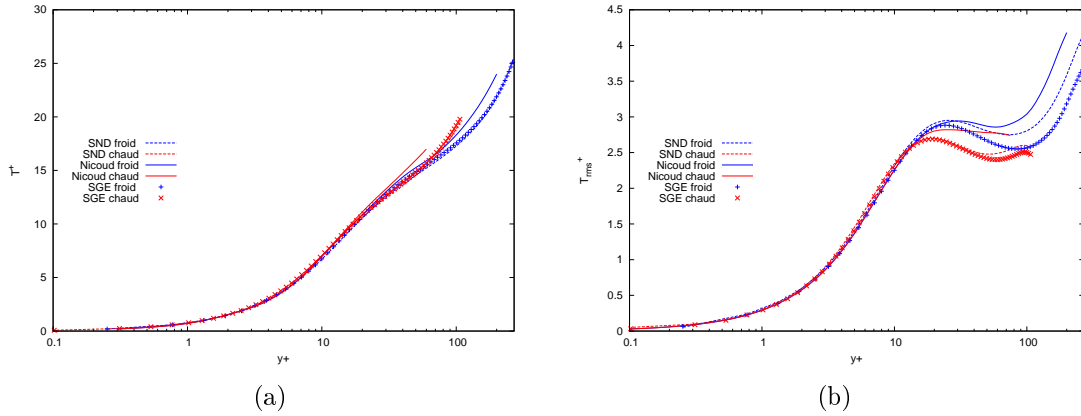


FIGURE 3.10 – Températures moyennes (a) et fluctuations de la température (b)  $Re_\tau = 180$ ,  $Tr = 2$

ture (figure 3.10(b)) de la SGE sont inférieures à celles de la SND, et inférieures à celle de Nicoud. L'augmentation des fluctuations de vitesse provoque une meilleure homogénéisation de la température et donc une diminution des fluctuations de température. Les différences entre SND et SGE se manifestent surtout du côté froid où la diffusion turbulente est plus importante. Enfin, les corrélations vitesse longitudinale-température (figure 3.11(b)) et l'énergie cinétique turbulente (figure 3.11(a)) sont légèrement supérieures avec la SGE.

Dans l'ensemble des figures que nous avons observées, les écarts entre SND et SGE sont faibles et les effets du nombre de Reynolds ou du gradient de température sont bien plus forts que l'effet du maillage. Pour la suite de notre étude, notamment dans l'espace spectral, il a été choisi d'utiliser la SND sous-résolue. Par la suite, il faudra tenir compte de ce phénomène qui se caractérise notamment par une dissipation sous-estimée.

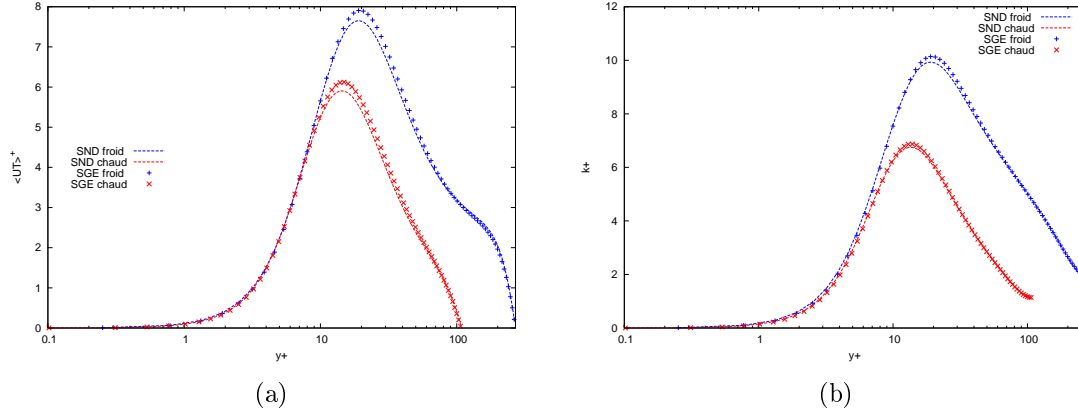


FIGURE 3.11 – Corrélations vitesses longitudinales-températures (a) et énergie cinétique turbulente (b)  $Re_\tau = 180$ ,  $Tr = 2$

### 3.3.2 Simulation à $Re_\tau = 395$

La simulation numérique directe de Toutant *et al.* [62] et la simulation des grandes échelles de Serra *et al.* [15] nous permettent d'avoir une comparaison efficace de notre simulation anisotherme à haut nombre de Reynolds. La SND de Toutant *et al.* et la SGE de Serra *et al.* ont été réalisées avec l'ancienne version du code Trio\_U. Les configurations d'études utilisées sont respectivement, un domaine de taille  $L_x = 4\pi h$   $L_z = 2\pi h$  en utilisant 1536x396x768 points et un domaine de taille  $L_x = 2\pi h$   $L_z = \pi h$  comportant 64x65x32 points pour la SND et la SGE. Sur les figures 3.12 à 3.17, nous comparons notre simulation dites "SGE fine" à la SND de Toutant et la SGE de Serra. Lorsque c'est possible, lors des comparaisons, nous nous efforcerons de faire la part entre des changements de comportement liés au changement de l'algorithme de résolution et aux effets liés à la différence des grilles de résolution que ce soit en taille du maillage ou en taille de domaine.

Lorsque nous comparons les vitesses longitudinales moyennes (figure 3.12(a)), nous observons que les profils s'approchent des résultats de la SND et contrairement à la SGE de Serra ne sont pas sur-estimés mais sous-estimés. Le changement de maillage modifie la fréquence de coupure associée au filtrage SGE, les diffusions turbulente et numérique qui en résultent sont vraisemblablement trop importantes chez Serra alors qu'elle semble légèrement insuffisantes pour la SGE fine.

Si l'on observe la température moyenne dans le domaine (figure 3.12(b)), les mêmes effets sont visibles : les profils de la SGE fine sont quasi-identiques à la SND, alors que les profils de la SGE de Serra sont très sur-estimés. La diffusion thermique turbulente est calculée à partir du nombre de Prandtl et de la diffusion turbulente visqueuse. Il y a donc une diffusion thermique turbulente trop importante pour la SGE de Serra et une dissipation turbulente thermique pas assez importante pour la SGE fine.

Le changement de l'algorithme de résolution change la manière dont le gradient de température est pris en compte dans la résolution de l'équation de quantité de

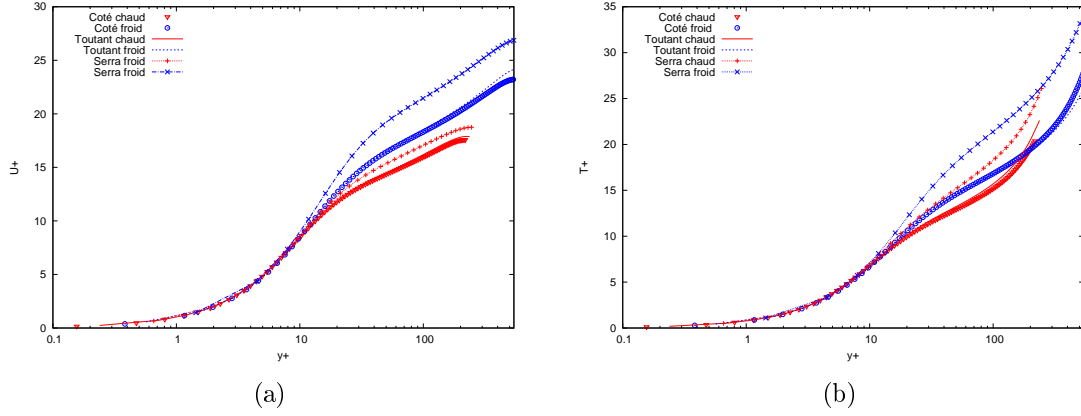


FIGURE 3.12 – Vitesse moyenne longitudinale (a) et température moyenne (b)  $Re_\tau = 395$ ,  $Tr = 2$

mouvement (voir partie 2.1). Ce changement se retrouve dans la vitesse verticale moyenne qui est créée par le gradient de température. La vitesse, représentée sur la figure 3.13(a), présente un comportement fortement différent entre la SGE fine et la SND ou la SGE de Serra. Après  $y^+ = 30$  pour le côté chaud et  $y^+ = 70$  pour le côté froid, la norme de la vitesse se stabilise pour la SGE fine alors qu'elle continue de varier fortement pour les deux autres simulations. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'homogénéité en volume de la pression thermodynamique fait que la vitesse verticale moyenne est directement proportionnelle au flux convectif de chaleur qui traversent le domaine dans un plan parallèle aux parois. En nous intéressant à ce flux, nous pouvons obtenir des informations supplémentaires sur la vitesse verticale moyenne. La figure 3.13(b) représente le flux convectif de chaleur

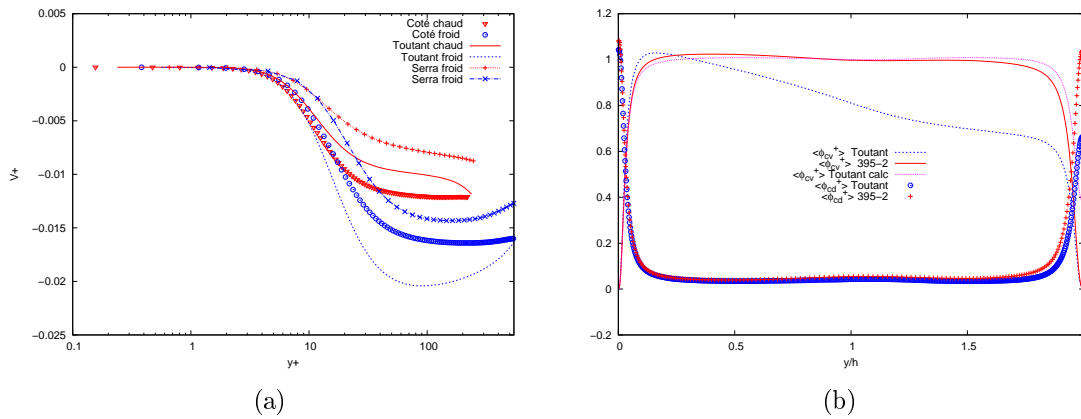


FIGURE 3.13 – Vitesse moyenne verticale (a) et comparaison des flux de chaleur moyens (b)  $Re_\tau = 395$   $Tr = 2$

moyen dans le domaine (lignes) ainsi que le flux conductif (points). Les valeurs sont adimensionnées par la norme du flux convectif au centre du canal (bleu : SND Toutant, rouge : SGE fine). On observe, pour la SND, une variation du flux convectif

de chaleur dans la zone centrale du domaine ( $0,14 < \frac{y}{h} < 1,82$ ) alors que le flux conductif est constant. Comme nous l'avons vu pour le cas de test de l'algorithme 2.1, les deux flux doivent être de somme nulle si le système est parfaitement à l'équilibre. Ceci montre que la SND n'a pas complètement atteint un état de d'équilibre thermique, dont résulte la non égalité des flux aux parois froide et chaude.

En considérant que le champ de température obtenu par la SND est convergé, ce que tend à confirmer la SGE fine, nous pouvons estimer le flux convectif moyen de la SND en calculant l'intégrale de la valeur moyenne de l'équation (2.4) lorsque l'équilibre thermique du système est atteint. Le flux convectif est ainsi calculé en utilisant comme référence du flux à la paroi, la valeur du flux de chaleur obtenue par la SGE fine (équation (3.5)) :

$$\overline{\phi_{cv}}(y) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial y'} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y'} \right) dy = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 \quad (3.5)$$

Le flux calculé est représenté en violet sur la figure 3.13(b). Nous observons que le flux calculé est similaire au flux convectif obtenu en SGE. La modification de l'algorithme de résolution a donc amélioré la convergence de la vitesse verticale moyenne et permet d'arriver rapidement à un équilibre thermique du système. Mais ces considérations sont faites sous réserve de la convergence de la température moyenne dans la SND de Toutant. Des investigations supplémentaires sont donc nécessaires. Il serait intéressant par exemple de réaliser une SND équivalente à celle de Toutant en utilisant la nouvelle version du code Trio\_U. Ceci permettrait notamment d'évaluer précisément l'impact de l'algorithme de résolution.

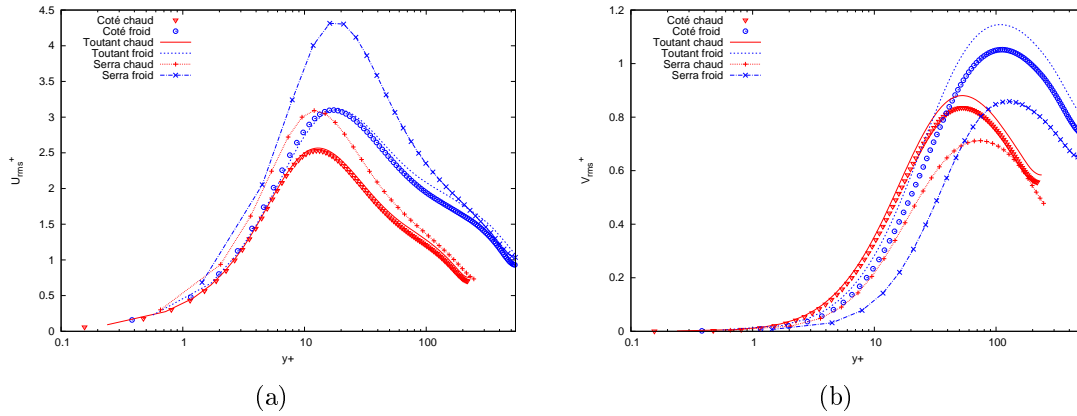


FIGURE 3.14 – Fluctuations de la vitesse longitudinale (a) et verticale (b)  $Re_\tau = 395$   $Tr = 2$

Contrairement à la SGE de Serra qui sur-estime systématiquement les valeurs, les fluctuations de la vitesse longitudinale (figure 3.14(a)) sont quasi-parfaitement capturées pour  $y^+ < 30$  et légèrement sous-estimées au-delà. La très importante sur-estimation de la SGE de Serra peut s'expliquer par la taille du domaine et la résolution du maillage qui ne sont pas suffisantes pour complètement décorrélérer l'écoulement dans la direction longitudinale. Les fluctuations des vitesses verticale (figure

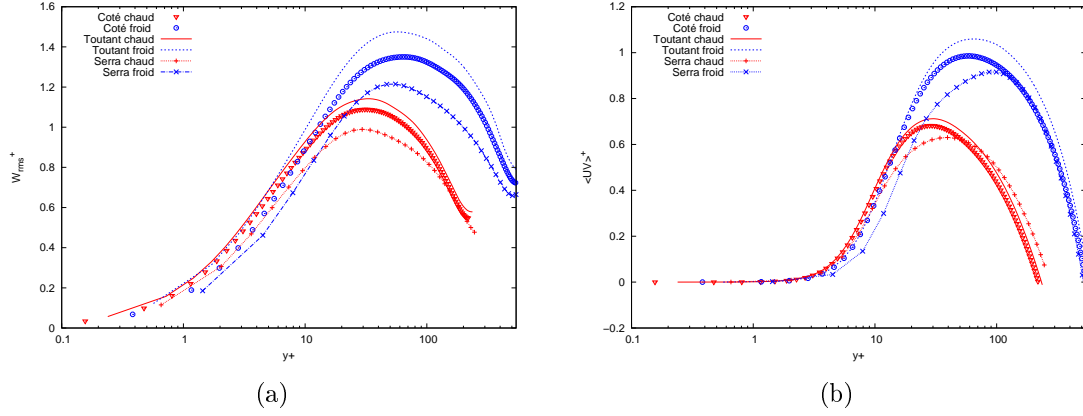


FIGURE 3.15 – Fluctuations de la vitesse transversale (a) et corrélation  $\overline{u'v'}$  (b)  $Re_\tau = 395$   $Tr = 2$

3.14(b)), transversale (figure 3.15(a)) et les corrélations  $\overline{u'v'}$  (figure 3.15(b)) ont de plus grands écarts à la SND que les fluctuations de la vitesse longitudinale. Le gain de précision par rapport à la SGE de Serra est du même ordre pour toutes les grandeurs. Elles sont sous-estimées d'environ 6% pour le côté chaud et 8% pour le côté froid. Le fait que toutes les grandeurs présentent les mêmes écart à la SND et les mêmes évolutions par rapport à Serra semble indiquer que les différences des tailles de domaines et de résolution des maillages soient les principales sources de ces changements.

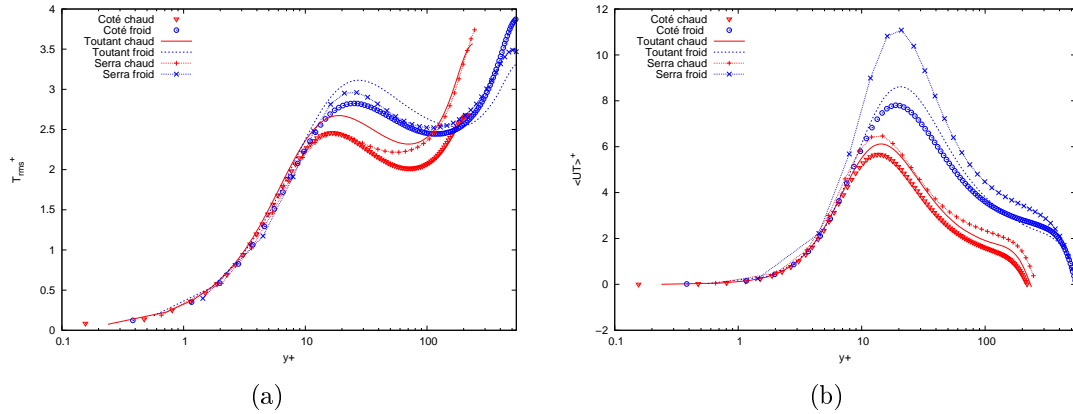


FIGURE 3.16 – Fluctuations de température (a) et corrélation  $\overline{u'\theta'}$  (b)  $Re_\tau = 395$   $Tr = 2$

Si l'on s'intéresse aux fluctuations de température (figure 3.16(a)), nous observons que la SGE de Serra est plus proche des résultats de la SND que la SGE fine. La différence de maillage des deux SGE nous incite à anticiper l'observation inverse, cet écart provient donc du changement d'algorithme de résolution. Du côté chaud le profil a un comportement similaire à celui de la SND mais avec une amplitude

inférieure de 11%. Du côté froid, on observe un très léger décalage du "pic" de fluctuations  $y^+ = 30$  pour la SND à  $y^+ = 20$  pour la SGE fine, une sous-estimation de l'ordre 12% pour  $y^+ < 100$  et enfin une augmentation importante des fluctuations au delà de  $y^+ = 100$  jusqu'à dépasser de 10% la valeur de la SND au centre du canal. Actuellement, nous ne savons pas expliquer quel mécanisme provoque ce changement.

Les corrélations de vitesse longitudinale-fluctuation de température montrent un changement de comportement entre les deux SGE, alors que la SGE de Serra sur-estime les fluctuations de température, la SGE fine les sous-estime.

Comme les corrélations vitesse-température, l'énergie cinétique turbulente (figure

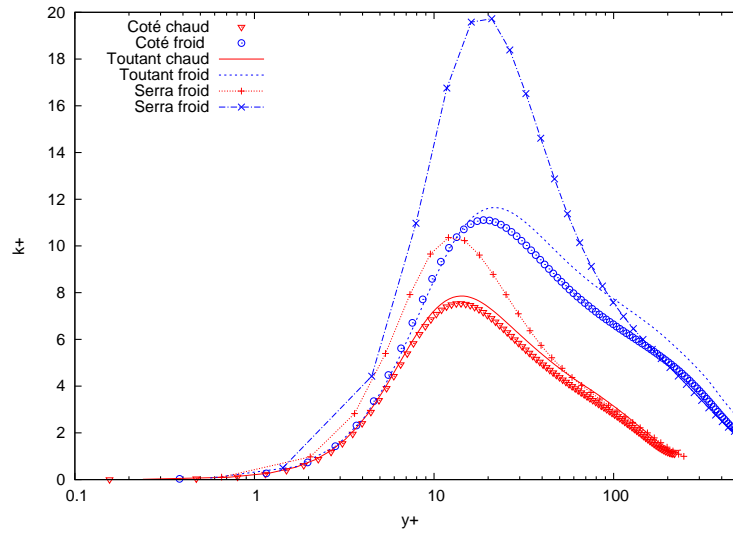


FIGURE 3.17 – Énergie cinétique turbulente (a) et corrélation vitesse température (b)  $Re_\tau = 395$   $Tr = 2$

3.17) est sous-estimée par la SGE fine alors que la SGE de Serra sur-estime fortement cette grandeur (sauf au centre du canal). Comme nous l'avons observé sur la figure 3.14(a), le changement de la taille du domaine et le changement de maillage ont provoqué une diminution des fluctuations des vitesses longitudinales entre les deux SGE. L'énergie cinétique turbulente et les corrélations  $\overline{u'T'}$  subissent donc logiquement les mêmes variations.

## Conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons montré la capacité du code Trio\_U, muni de ses améliorations, à simuler les écoulements anisothermes de manière très précise que ce soit en SND ou en SGE. L'impact de la modélisation SGE a été visualisé sur un cas anisotherme à bas nombre de Reynolds. Il a ainsi été observé que le modèle de turbulence augmente les fluctuations de la vitesse longitudinale et réduit les autres composantes. Sur un cas anisotherme fortement turbulent, le maillage fin et la taille du domaine ont permis une diminution importante des erreurs sur les corrélations basées sur la vitesse longitudinale. Pour les mêmes raisons, les

vitesses moyennes et fluctuantes sont également plus précises. Le changement de l'algorithme de résolution conduit à une modification de la vitesse verticale moyenne qui équilibre désormais le flux conductif. De plus, il apparait que les fluctuations de la température sont de normes inférieures avec le nouvel algorithme.

Du fait de l'ensemble de ces résultats, nous pouvons considérer que les grandeurs issues de nos simulations sont représentatives de la physique des écoulements. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons aussi aux profils dans l'espace physique, mais pour un canal plan ouvert dans lequel s'établit la couche limite thermique.





## Chapitre 4

# Établissement d'une couche limite thermique

La problématique des écoulements liés aux récepteurs solaires à haute température intègre de nombreuses contraintes supplémentaires par rapport aux canaux périodiques. Nous pouvons lister quelques modifications qu'il est possible d'apporter aux canaux plans pour se rapprocher des conditions d'écoulements réels :

- un nombre de Reynolds plus élevé ;
- remplacement des conditions de température par un flux de chaleur sur une paroi d'épaisseur non nulle ;
- une différence de température entre paroi chaude et paroi froide plus faible ;
- un domaine de dimension longitudinale  $L_x$  fini représentant l'établissement de l'écoulement à l'entrée du récepteur solaire ;
- un domaine de dimension transversale  $L_z$  fini (c.a.d avec deux parois supplémentaires) ;
- une modification de la géométrie des parois visant à augmenter les échanges thermiques ;
- des températures de parois variables dans le temps qui représentent l'effet des intermittences solaires.

L'augmentation du coût numérique sera directement liée au nombre de modifications utilisées. Parmi ces possibilités, nous avons choisi de commencer par étudier le cas de l'établissement de la couche limite thermique en retirant la condition de périodicité dans la direction longitudinale. De cette façon, on tient compte de l'échauffement du fluide à mesure de son avancée dans le récepteur. Ces résultats sont publiés au sein d'un article dans Journal of Fluids Engineering [63]. L'article intitulé "Large eddy simulation of thermal boundary layer spatial development in a turbulent channel flow" est disponible en annexe [A](#).

## 4.1 Domaine de calcul

### 4.1.1 Géométrie

Pour réaliser la simulation de l'établissement d'une couche limite thermique, il est important d'avoir une condition d'entrée du fluide qui soit pleinement représenta-

tive de la physique. Lorsque la température peut être considérée comme un scalaire passif, il est possible d'utiliser un canal plan bi-périodique pour simuler la partie dynamique de l'écoulement. Le champ de température n'est pas périodique dans la direction longitudinale et s'établit le long du canal. Avec cette technique, il est aussi possible de récupérer le champ de température en sortie pour l'imposer en condition d'entrée et ainsi agrandir artificiellement la longueur d'établissement [64, 65]. Dans notre cas, la dilatation thermique du fluide empêche d'utiliser cette technique et nous nous sommes tournés vers une autre technique déjà utilisée par de nombreux auteurs [66, 67]. Cette technique nécessite deux domaines de calculs, le premier domaine dit "précurseur" est un canal bi-périodique isotherme ; le débit est imposé pour maintenir un nombre de Reynolds turbulent de  $Re_\tau = 180$  alors que la température est imposée à  $T_f = 293\text{ K}$  (figure 4.1). Il génère un écoulement turbulent pleinement développé dont nous récupérons le champ de vitesse pour l'utiliser comme condition d'entrée du deuxième domaine. Le deuxième domaine est un canal ouvert anisotherme (voir figure 4.1). Imposer le champ de vitesse de cette manière fait que seule la partie thermique de l'écoulement doit s'établir (voir figure 4.3). Dans le canal ouvert, les modifications de la vitesse sont liées aux changements de la viscosité et de la masse volumique avec la température. Les températures imposées sur les parois du canal ouvert sont  $T_f = 293\text{ K}$  et  $T_c = 586\text{ K}$  respectivement pour la paroi basse et la paroi haute. En l'absence de condition de sortie plus adaptée, la pression dynamique est imposée à zéro ; en cas de retour de fluide la température imposée est celle de la plaque froide  $T_f$ . Il est à noter que la valeur de la pression thermodynamique est imposée par le domaine isotherme  $P_{th} = 100000$ . D'un point de vue informatique, le code Trio\_U n'a pas été conçu pour fonctionner avec le nouvel algorithme et le nouveau schéma en temps dans le cas de deux domaines couplés avec un domaine ouvert. Malgré les lourdes modifications du code faites pour permettre son utilisation en canal plan bi-périodique, nous avons dû utiliser l'ancienne version du code pour réaliser cette simulation. L'implémentation d'un module spécifique aux canaux couplés utilisant les améliorations mises en places pour le canal plan est prévue dans une version ultérieure. Même si nous n'utilisons pas les améliorations, la pression thermodynamique ne variant pas, les deux algorithmes tendent vers des méthodes de résolution très proches. On s'attend donc à ce que, dans le cas d'un domaine ouvert, les solutions obtenues avec les deux algorithmes soient très similaires (d'avantage que dans le cas bi-périodique où les 2 algorithmes ont été comparés ; voir chapitre 3).

### 4.1.2 Maillages

Le domaine précurseur est un canal de dimensions  $L_x = 2\pi h$ ,  $L_z = 2\pi h$  et  $L_y = 2h$  pour un maillage de  $116 \times 66 \times 234$  mailles. Le domaine ouvert est trois fois ( $L_x = 6\pi h$ ) plus long et possède donc 348 mailles dans la direction longitudinale. Tout comme précédemment, le maillage utilise un raffinement hyperbolique en proche paroi (équation (3.4)). En comparaison des simulations présentées à la partie 3, le maillage est plus léger. En effet, les contraintes numériques de la simulation étant plus fortes, il a été nécessaire de réduire le maillage. Malgré cette réduction, la zone chaude reste très bien capturée. Comme nous pouvons le voir dans le tableau 4.1 les tailles adimensionnelles sont suffisantes du côté chaud pour capturer la couche

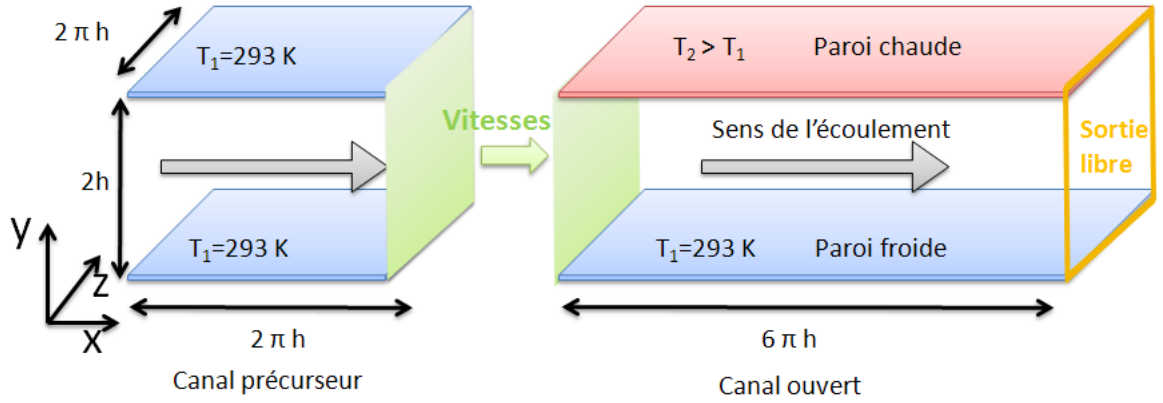


FIGURE 4.1 – Géométrie du canal plan bi-périodique

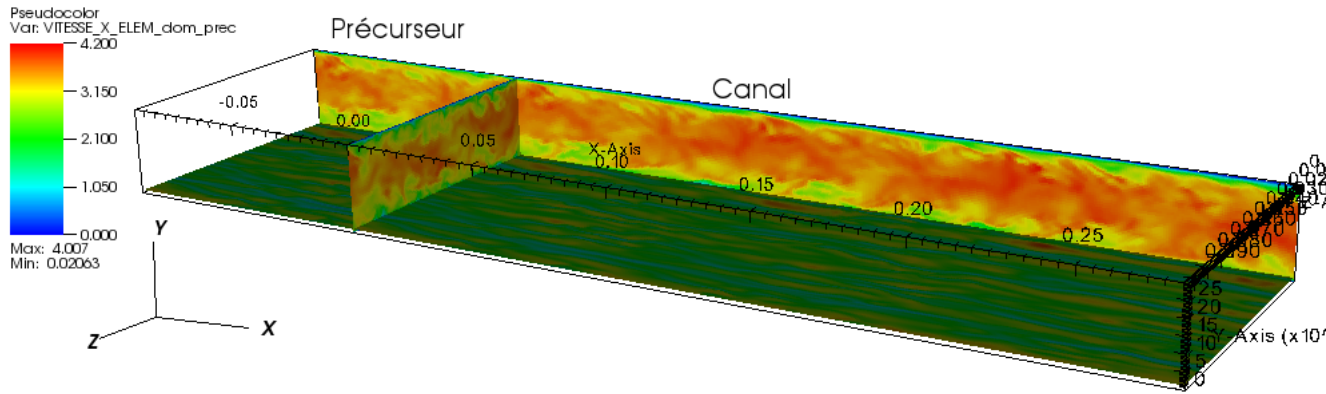


FIGURE 4.2 – Vitesse longitudinale dans le domaine couplé anisotherme

limite.

## 4.2 Post-traitement spécifique

Pour réaliser l'étude du canal ouvert, il a été nécessaire de modifier le post-traitement original de Trio\_U pour obtenir des grandeurs moyennes sur des plans  $xoy$  calculées dans la direction  $oz$ . Ainsi la moyenne de Reynolds (2.24) est désormais calculée à

Zone	$Re_{\tau}^{max}$	$\Delta x^+$	$\Delta y^+$	$\Delta z^+$
Canal Précurseur	189	10.2	1-11.3	5.1
Canal ouvert froid	192	10.3	1-11.5	5.2
Canal ouvert chaud	106	5.7	0.55-6.35	2.86

TABLE 4.1 – Paramètres de maillage

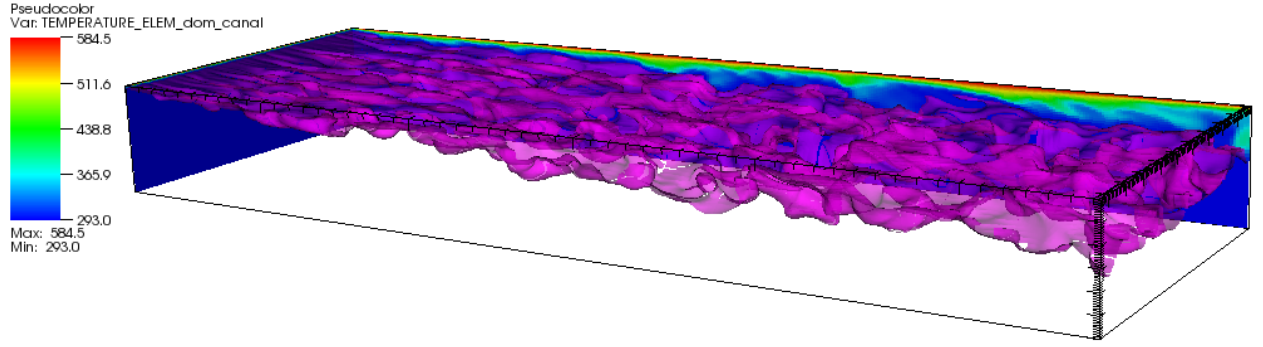


FIGURE 4.3 – Echauffement du fluide le long du canal, la surface violette représente l'isotherme à 296 K

partir de l'expression (4.1).

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N_z N_t} \sum_{N_z} \sum_{N_t} f(x, y, z, t) \quad (4.1)$$

Le développement de ce post-traitement est validé en comparant les statistiques obtenues sur un canal plan bipériodique anisotherme avec la méthode de post-traitement standard de Trio\_U. Sur les figures 4.4(a) et 4.4(b), sont comparées les moyennes obtenues pour un seul temps (et donc uniquement calculées dans les directions homogènes). Chaque point représente la valeur calculée par le post-traitement de surface pour un couple  $(x, y)$ . Pour chaque position  $y$  dans le canal, nous observons la dispersion des valeurs autour de la valeur moyenne calculé par le code standard. Puis, nous avons comparé les moyennes calculées sur 2 secondes de temps physique provenant de notre post-traitement aux moyennes de Trio\_U. Puisque les temps de moyennes sont longs et le canal bi-périodique, les valeurs moyennes à  $y$  fixé doivent être égales. Que ce soit pour la vitesse longitudinale moyenne (figure 4.5(a)) ou pour les fluctuations de vitesse longitudinale (figure 4.5(b)), nous observons cette égalité (pour un même  $y$  les points sont superposés et égaux à la valeur calculée par le post-traitement pour canal plan représenté par une ligne).

## 4.3 Résultats

Pour étudier l'établissement de la couche limite thermique dans le domaine, nous présenterons les données sous forme de surface et de profils variant le long de  $x$  ou de  $y$ .

### 4.3.1 Canal précurseur

Avant de présenter les données issues du canal ouvert, les figures 4.6(a) et 4.6(b) comparent les profils de vitesse du canal précurseur aux résultats précédemment

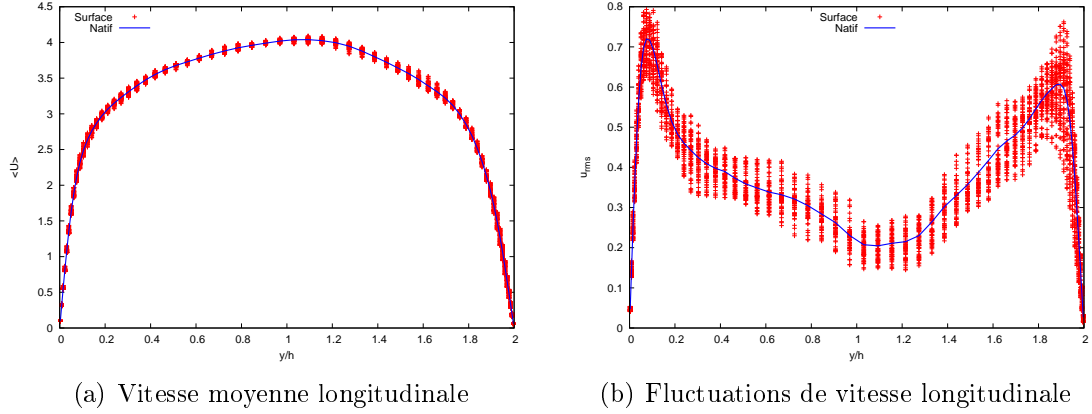


FIGURE 4.4 – Comparaison des moyennes spatiales en canal plan bi-périodique

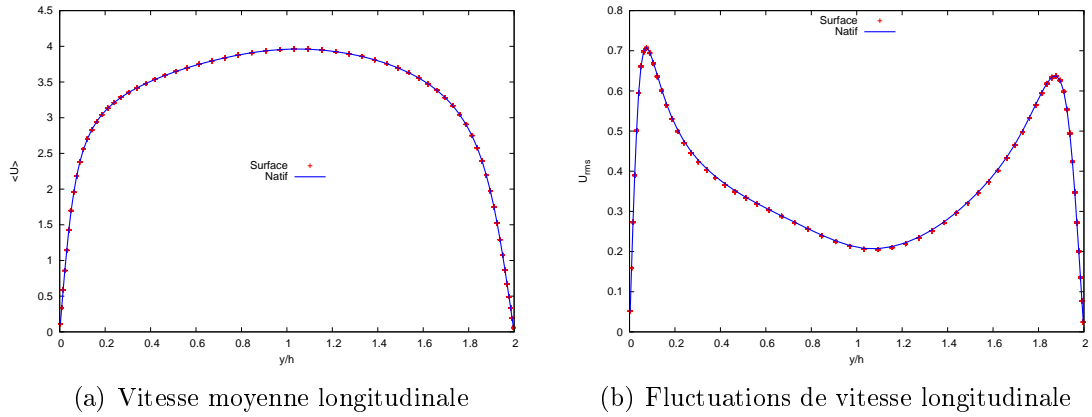


FIGURE 4.5 – Comparaison des moyennes temporelles en canal plan bi-périodique

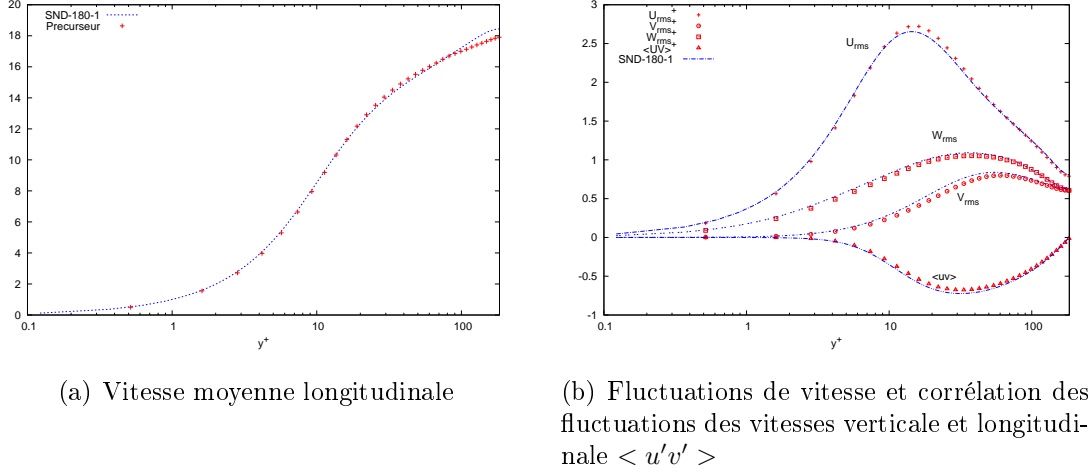
obtenue. Bien que le maillage soit moins resserré que dans la SND, la vitesse moyenne est bien capturée. Les fluctuations des vitesses verticale et transversale sont légèrement sous-estimées alors que les fluctuations de vitesse longitudinale sont légèrement sur-estimées.

## 4.3.2 Canal ouvert

### 4.3.2.1 Evolution globale

Les données du canal ouvert sont présentées en surface dans les figures 4.7 à 4.12; l'abscisse représente la distance à l'entrée du canal ( $x = 0$ ) divisée par la demi hauteur du canal  $h$ , l'ordonnée est mesurée en distance à la paroi froide ( $y = 0$ ) divisée par la demi hauteur du canal  $h$ , enfin l'échelle de couleur représente l'intensité du terme.

La vitesse longitudinale moyenne (figure 4.7) évolue peu le long du canal. Le comportement est quasi symétrique entre le côté chaud et le côté froid. La couche


 FIGURE 4.6 – Profils de vitesse du canal précurseur  $Re_\tau = 180$ 

visqueuse est plus épaisse côté chaud que côté froid ; ceci est lié à l'augmentation de la viscosité avec la température. Le fluide accélère en avançant dans le canal du fait de la dilatation (la température augmentant, la masse volumique diminue ce qui provoque l'accélération). Cet effet, très important dans le cas réel, n'est pas pris en compte dans le cas bi-périodique.

La figure 4.8 représente la température moyenne dans le canal. La ligne rouge est l'isotherme  $T = 296K$  et représente la couche limite thermique définie comme le contour au dessous duquel la température du fluide n'a pas varié de plus d'1% par rapport à la température d'entrée. Comme nous pouvons le voir, à la sortie du canal la couche limite thermique atteint presque la demi-hauteur du canal. La zone de haute température a pénétré sur une épaisseur d'environ  $0.25h$ . En se basant sur la pente de la couche limite thermique et en considérant qu'elle continue à suivre cette pente jusqu'à rencontrer la paroi froide, il faudrait une longueur totale de  $120\pi h$  (soit 20 fois la longueur simulée) pour que la couche limite atteigne la paroi froide.

$$\begin{aligned}\Delta T &= 293 K \\ 1\% \Delta T &\simeq 3 K\end{aligned}$$

La vitesse moyenne verticale (figure 4.9) montre l'impact du gradient de température sur la dynamique moyenne de l'écoulement. Les très forts gradients thermiques à l'entrée du canal créent une vitesse verticale éjectant le fluide vers la paroi froide.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.10, l'énergie cinétique turbulente augmente le long du canal. De plus, les zones, où l'énergie cinétique turbulente est maximale, grandissent. Ceci résulte notamment de l'augmentation de la vitesse longitudinale moyenne dans le centre du canal observée précédemment.

La figure 4.11 représente les fluctuations de température dans le canal. On observe que hors de la zone de proche paroi, les fluctuations de température sont de même ordre que la différence entre la température moyenne du fluide et la température froide. L'épaisseur de la zone des fluctuations de température augmente aussi vite

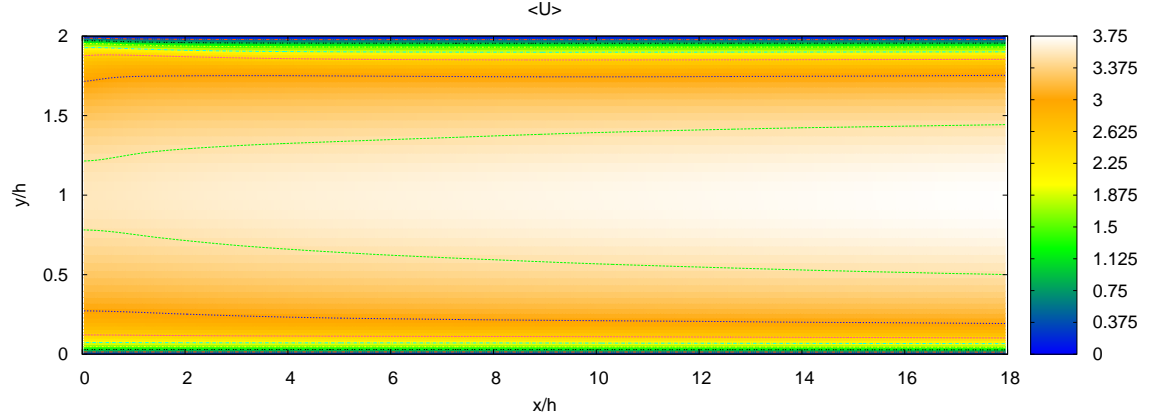


FIGURE 4.7 – Vitesse longitudinale moyenne

que l'épaisseur de la couche limite thermique.

La corrélation vitesse longitudinale-température (figure 4.12) suit le comportement des fluctuations de température. L'épaisseur de la zone des corrélation est semblable à celle où l'énergie cinétique turbulente est grande.

#### 4.3.2.2 Profil de sortie

Nous nous intéressons maintenant aux profils de sortie du canal. Si nous calculons les nombres de Reynolds de frottement en sortie du canal, nous trouvons  $Re_{\tau}^{chaud} = 82$  et  $Re_{\tau}^{froid} = 190$ . Ces nombres correspondent aux nombres de Reynolds de la SND en canal plan bi-périodique de Nicoud [7] ( $Re_{\tau}^{chaud} = 82$  et  $Re_{\tau}^{froid} = 200$ ). Les ratios de température de notre simulation et de la SND de Nicoud sont identiques ( $T_r = 2$ ). En comparant les profils obtenus à ceux de Nicoud, nous pourrions constater les différences entre un écoulement en cours d'établissement et un écoulement établi. Les figures 4.13 et 4.14 comparent les profils de sortie du canal aux profils de la SND de Nicoud.

La vitesse longitudinale moyenne (figure 4.13(a)) s'écarte fortement du profil initial en se dissymétrisant. Du côté froid, elle est un peu inférieure à la SND de Nicoud et est comprise entre le profil initial et la courbe de la SND. Du côté chaud, la vitesse est très inférieure au profil de la SND et n'est plus comprise entre la SND et le profil initial. Dès cette première figure, on se rend compte que l'établissement de la couche limite thermique modifie la dynamique de l'écoulement. De plus, l'effet de l'établissement de la couche limite thermique est beaucoup plus important que l'effet isolé du gradient de température dans le cas d'un écoulement établi dynamiquement et thermiquement. La figure 4.13(b) nous permet le même constat, le profil de température moyenne côté chaud est différent des profils issus du canal plan bi-périodique de Nicoud. La couche limite thermique n'a pas pénétré du côté

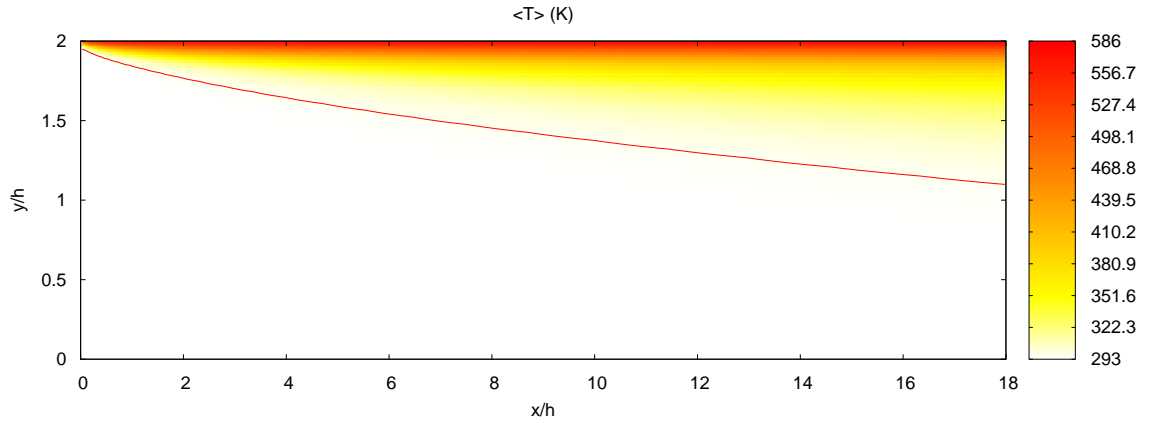


FIGURE 4.8 – Température moyenne et couche limite thermique (isotherme à 296K)

froid (voir figure 4.3), il n'y a donc pas d'évolution de la température dans la direction perpendiculaire à la paroi.

Les fluctuations de l'écoulement (figures 4.14(a) et 4.14(b)) sont elles aussi modifiées. On observe, comme pour les grandeurs moyennes, que les profils se dissymétrisent entre côté chaud et côté froid. Les fluctuations de la vitesse longitudinales sont de norme très inférieures à la SND de Nicoud. Le décalage des profils que nous observons du côté chaud s'explique en partie par la modification des gradients de vitesse et température moyennes en proche paroi. Les vitesses de frottement calculées à partir du gradient de vitesse moyenne sont multipliées par 1.5 par rapport à un écoulement bipériodique. Hors des sous-couches visqueuses, la dynamique n'a pas eu l'occasion de s'adapter à ce changement et conserve un état proche de son état initial. Les températures de frottement sont multipliées par un facteur allant de 20 à l'entrée du canal (respectivement 5 à la sortie du canal) par rapport à un canal plan bi-périodique.

#### 4.3.2.3 Profils parallèles aux parois

Dans les figures 4.15(a) à 4.18(b), nous représentons les différentes grandeurs le long du canal pour des plans  $y = cte$  parallèles aux parois. Les vitesses sont adimensionnées par leurs valeurs à l'entrée, la température moyenne et les fluctuations de température sont adimensionnées par la différence de température entre les deux plaques ; enfin les corrélations vitesse longitudinale/température sont adimensionnées par la valeur de la fluctuation de vitesse à l'entrée multipliée par la différence de température imposée. Les adimensionnements sont résumés dans le tableau 4.2. Les profils notés  $\frac{y}{h} = 0$  et  $\frac{y}{h} = 2$  ne sont pas exactement localisés aux parois mais à la distance égale à la demi hauteur de la maille la plus proche de la paroi (soit  $\frac{y}{h} = 0.00274$  et  $\frac{y}{h} = 1.99725$ ). Cet écart explique notamment que les



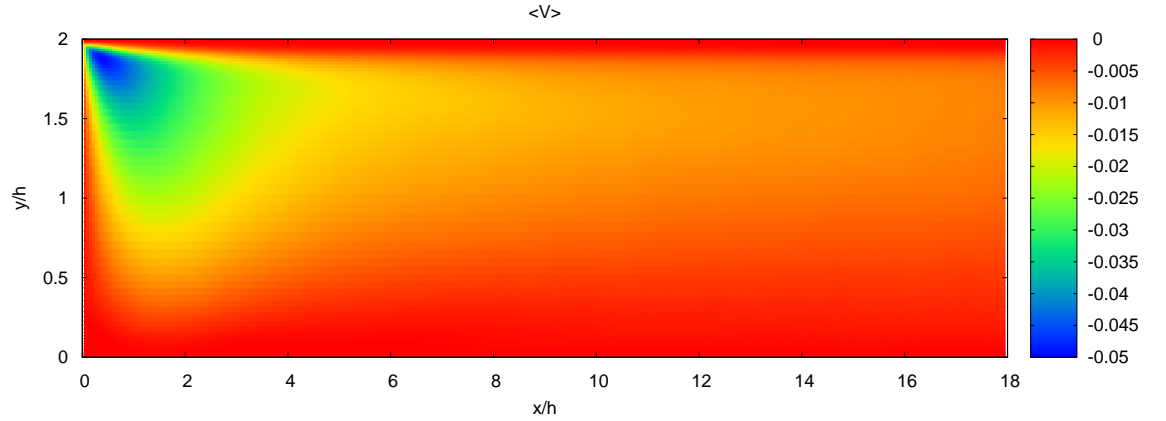


FIGURE 4.9 – Vitesse moyenne verticale

Grandeur	$\overline{U}(x, y)$	$\overline{V}(x, y)$	$U_{rms}(x, y)$	$\overline{T}(x, y)$	$T_{rms}(x, y)$
Adimensionnement	$\overline{U}(0, y)$	$\overline{V}(0, y)$	$U_{rms}(0, y)$	$T_c - T_f$	$T_c - T_f$

TABLE 4.2 – Adimensionnement utilisés pour les profils parallèles aux parois.

vitesses ne soit pas nulles dans ces plans.

La figure 4.15(a) montre comment la vitesse longitudinale moyenne est modifiée par la couche limite thermique. Ces changements apparaissent de façon différente pour la zone proche de la paroi chaude ( $\frac{y}{h} > 1,75$ ) et pour la zone de centre canal ( $\frac{y}{h} < 1,75$ ). En proche paroi, la vitesse longitudinale moyenne diminue rapidement pour perdre jusqu'à 40% de sa valeur (en très proche paroi). A partir de  $\frac{x}{h} = 6$ , la vitesse commence à augmenter mais beaucoup plus lentement. Dans la zone de centre canal, nous observons une augmentation de la vitesse longitudinale moyenne au delà de  $\frac{x}{h} = 1$ . Nous observons ici un double effet de l'augmentation de la température. L'augmentation de la viscosité freine le fluide en proche paroi et provoque la redistribution de l'écoulement dans la zone inférieure. La diminution de la masse volumique s'ajoute à la redistribution et crée une accélération du fluide.

La température moyenne (figure 4.15(b)) est évidemment plus importante proche de la paroi chaude qu'au centre du canal. On observe une similitude entre l'évolution de la température le long du canal et les variations de température dans la direction perpendiculaire aux parois. Particulièrement pour les courbes  $\frac{y}{h} = 1,92$  et  $\frac{y}{h} = 1,86$ , il existe ainsi une zone quasi-linéaire suivie d'une zone de transition et enfin d'une asymptote logarithmique.

La figure 4.16(a) représente la vitesse verticale moyenne. Pour les profils à  $\frac{y}{h} \leq 1,5$ , la norme de cette vitesse augmente jusqu'à  $\frac{x}{h} < 1$  puis diminue constamment jusqu'à la sortie. Pour les profils à  $\frac{y}{h} > 1,5$ , la norme de la vitesse suit la même évolution mais avec un extremum autour de  $\frac{x}{h} = 0,3$ . On notera que, pour  $\frac{y}{h} = 2$ , la vitesse verticale moyenne est de signe opposé. En grandeur dimensionnelle, les

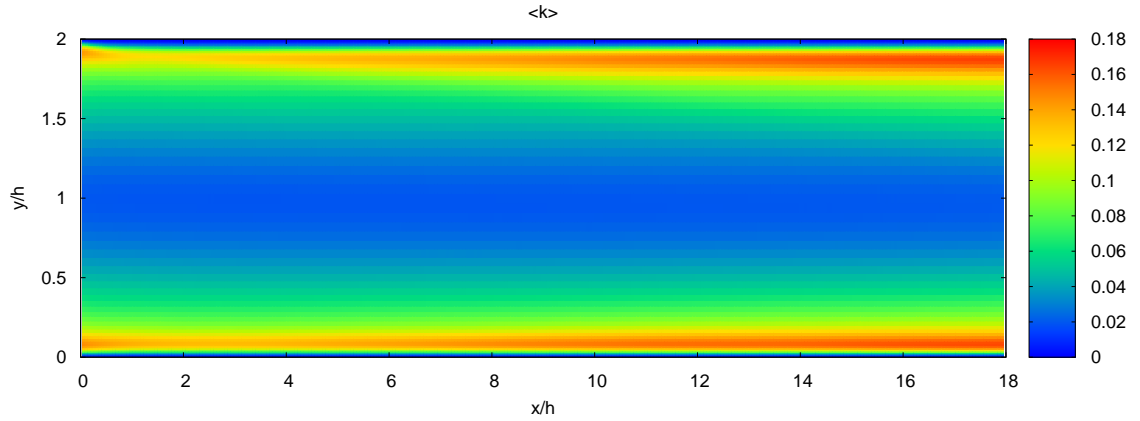


FIGURE 4.10 – Energie cinétique turbulente

valeur de la vitesse verticale en  $\frac{y}{h} = 2$  sont très faibles de l'ordre de  $10^{-5} m.s^{-1}$  alors qu'elles sont de l'ordre de  $10^{-1} m.s^{-1}$  dans le reste du canal.

Les fluctuations de vitesse longitudinale (figure 4.16(b)) diminuent fortement dans la sous-couche visqueuse ( $\frac{y}{h} = 2$  et  $\frac{y}{h} = 0$ ) tant que  $\frac{x}{h} < 2$ . Cette diminution est plus forte côté chaud ( $-50\%$ ) que côté froid ( $-10\%$ ). À partir de  $\frac{x}{h} = 2$  et jusqu'à la sortie du canal, les profils de fluctuations de vitesse longitudinale augmentent lentement. On notera que la sous-couche visqueuse côté froid dépasse sa valeur d'entrée, alors que la sous-couche visqueuse côté chaud regagne environ 10% de sa valeur initiale.

Dans la zone  $\frac{x}{h} < 2$ , nous pouvons observer que l'écoulement se réorganise sous l'effet des changements de propriétés du fluide, avec la création d'une vitesse verticale moyenne et une diminution des fluctuations de vitesse longitudinale. Après  $\frac{x}{h} = 2$ , l'écoulement accélère et la vitesse verticale moyenne laisse sa place aux fluctuations de vitesse.

Dans les figures 4.17(a) et 4.17(b), qui représentent les fluctuations de température et les corrélations vitesse longitudinale/température, ne sont tracés que les profils pour lesquels l'évolution de la grandeur est suffisante pour être observée.

Les différents profils de fluctuations de température sont nuls tant que la couche limite thermique n'est pas atteinte. Quand la couche limite est atteinte (par exemple en  $\frac{x}{h} = 1$  pour  $\frac{y}{h} = 1,66$ ) les fluctuations de température augmentent très rapidement puis saturent. Nous observons un comportement qui semble différent pour les profils à  $\frac{y}{h} = 2$  et  $\frac{y}{h} = 1,96$ . Ce comportement résulte du fait que, contrairement aux autres, ces profils sont déjà dans la zone chauffée de l'écoulement. Nous observons donc la fin de l'augmentation des fluctuations avec une légère baisse et leur stabilisation. On notera que le maximum est situé autour de  $\frac{y}{h} = 1,86$  ce qui correspond à la zone très agitée de l'écoulement. Nous remarquons que les corrélations vitesse longitudinale/température ont un comportement similaire à celui des fluctuations de température. Le principal changement est la position

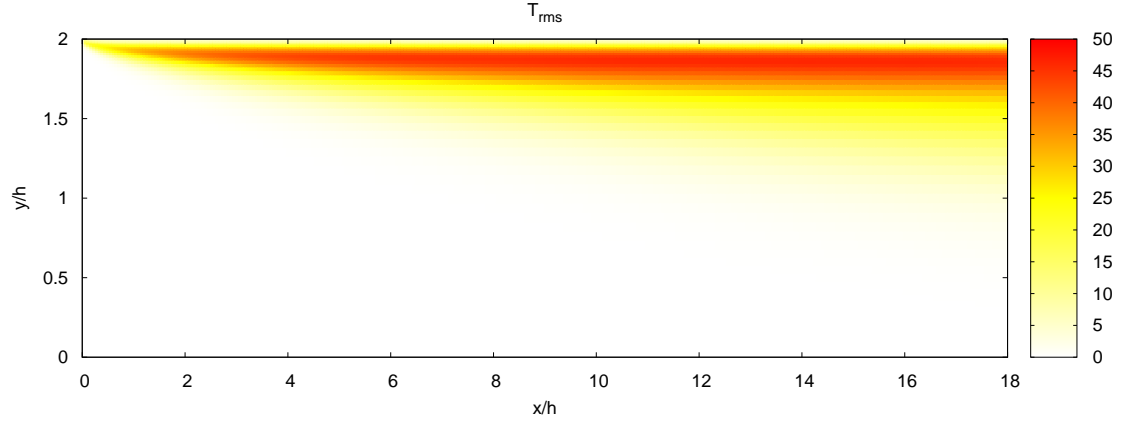


FIGURE 4.11 – Fluctuation de température

relative des profils à  $\frac{y}{h} = 2$ ,  $\frac{y}{h} = 1,66$  et  $\frac{y}{h} = 1,5$  par rapport aux autres courbes. Elles sont proportionnellement beaucoup plus importantes que pour les fluctuations de température.

Nous nous intéressons maintenant à deux grandeurs globales du canal : la température moyenne dans les sections de passage du fluide (pour un  $x$  donné, voir figure 4.18(a)) ainsi que le nombre de Nusselt (défini par l'équation (4.2)), caractéristique de l'efficacité de l'échangeur, représenté figure 4.18(b).

$$Nu = \frac{\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Big|_w}{\frac{T_c - T_f}{2h}} \quad (4.2)$$

Nous observons que la température moyenne du domaine augmente rapidement et suit un profil logarithmique. Par identification, nous trouvons l'expression (4.3) associée à ce profil. A la sortie du canal, la température moyenne a augmenté de 18%.

$$\frac{\langle T \rangle}{T_f}(x) = 1,091 + 0,032 \ln \left( \frac{x}{h} + 0,15 \right) \quad (4.3)$$

La corrélation de Colburn (équation (4.4) [68]) permet de calculer le nombre de Nusselt d'un écoulement en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl. En partant des nombres de Reynolds de frottement locaux et du nombre de Reynolds de frottement moyen de l'écoulement, nous utilisons la corrélation de Dean (équation (4.5)) pour calculer les nombres de Reynolds correspondant ( $Re_c$ ,  $Re_f$  et  $Re_m$ ). Ensuite, les nombres de Nusselt correspondant au comportement du fluide aux deux parois ( $Nu_c$ ,  $Nu_f$ ) et du comportement moyen ( $Nu_m$ ) sont calculés à partir de ces nombres de Reynolds.

$$Nu_f = 0,023 Re_f^{0.8} Pr^{0.33} \quad (4.4a)$$

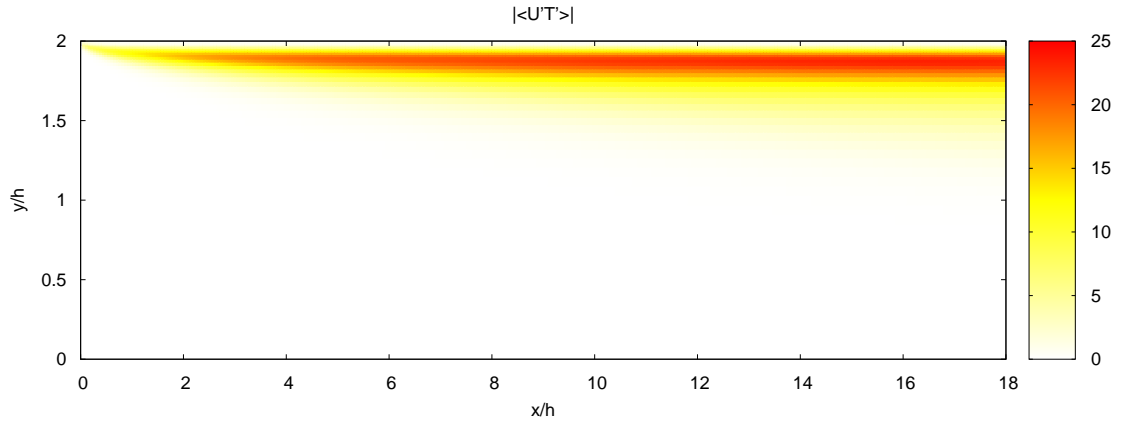
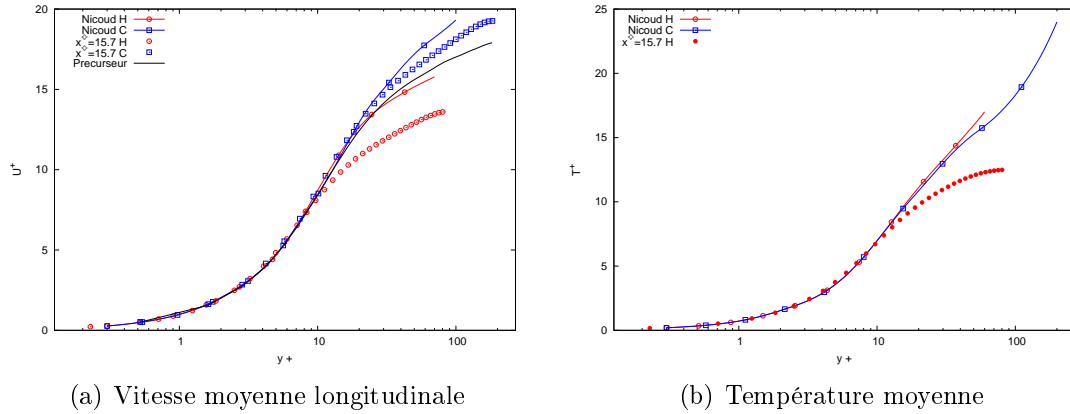


FIGURE 4.12 – Correlation vitesse longitudinale-température

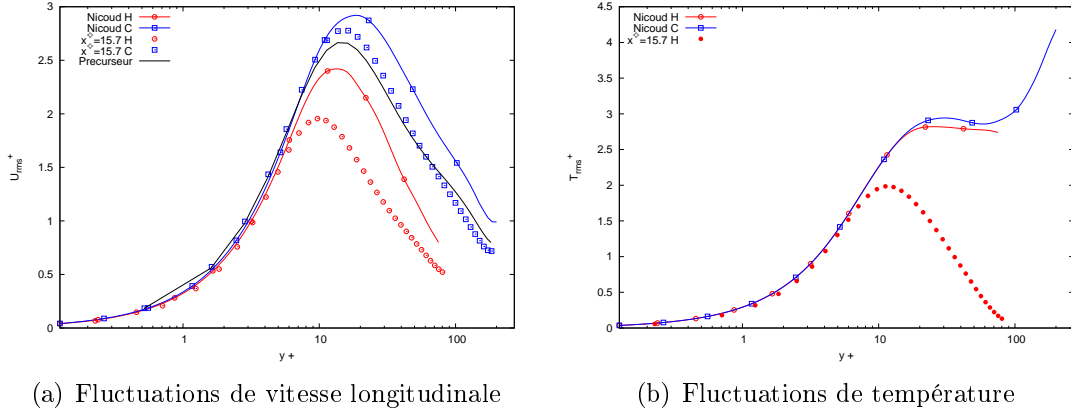
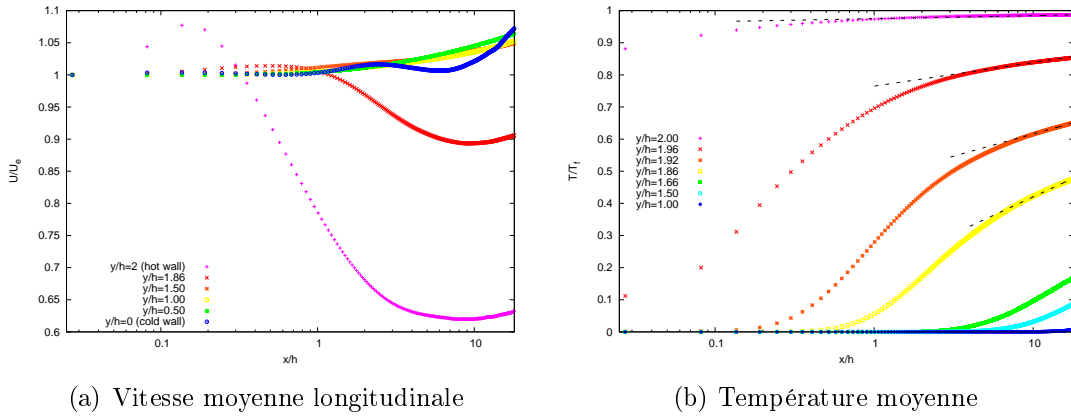

 FIGURE 4.13 – Comparaisons des Profils en sortie du canal ouvert ( $\frac{x}{h} = 15.7$ )

$$Nu_c = 0,023 Re_c^{0.8} Pr^{0.33} \quad (4.4b)$$

$$Nu_m = 0,023 Re_m^{0.8} Pr^{0.33} \quad (4.4c)$$

$$Re = \left( \frac{Re_\tau}{0,19} \right)^{\frac{9}{7}} \quad (4.5)$$

Figure 4.18(b), nous comparons les différents nombres de Nusselt calculés avec la corrélation au nombre de Nusselt issu de notre simulation. Les 3 nombres de Nusselt issus des corrélations sont constant le long du canal. Nous observons que le nombre de Nusselt issue de la simulation diminue rapidement le long du canal. Il tend asymptotiquement vers le nombre de Nusselt calculé avec la corrélation de Colburn en utilisant le nombre de Reynolds moyen. Le nombre de Nusselt moyen


 FIGURE 4.14 – Comparaisons des Profils en sortie du canal ouvert ( $\frac{x}{h} = 15.7$ )

 FIGURE 4.15 – Profils le long du canal à  $y = cst$ 

calculé avec la corrélation de Colburn correspond assez bien aux valeurs de sortie du canal.

Nous pouvons observer en fin de canal une très légère oscillation des différents profils. L'influence de la condition aux limites, de pression dynamique nulle, ne peut être écarté comme possible origine de ce phénomène. Une simulation supplémentaire utilisant un canal plus long permettrait d'étudier ce point.

#### 4.3.2.4 Profils perpendiculaires aux parois

De la même manière que pour les profils parallèles aux grandeurs, nous devons adapter les adimensionnements pour que la comparaison des profils tienne compte des fortes variations des propriétés du fluide. Nous utiliserons un adimensionnement semi-local où les propriétés du fluide varient selon la distance à la paroi. Les adimensionnements sont :

$$y^* = \frac{yU_\tau^*}{\mu(y)} \quad (4.6)$$

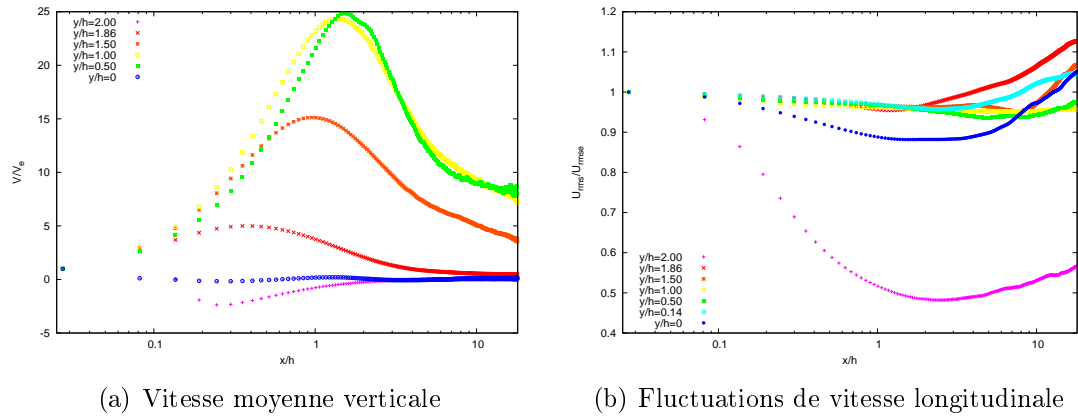
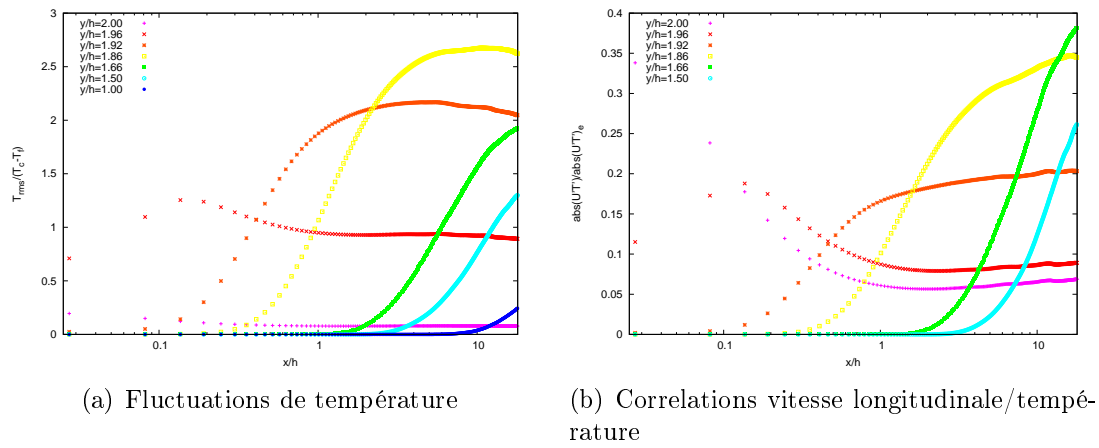
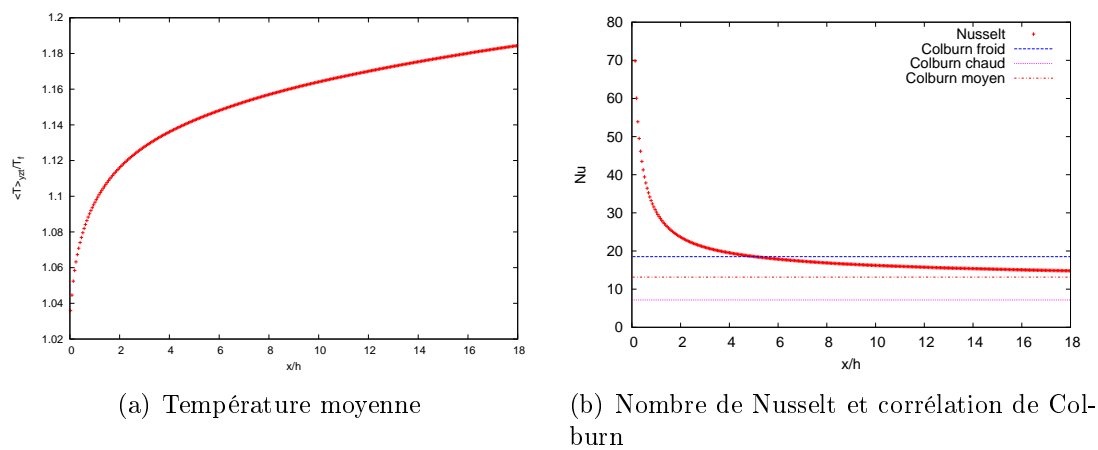

 FIGURE 4.16 – Profils le long du canal à  $y = cst$ 

 FIGURE 4.17 – Profils le long du canal à  $y = cst$ 


FIGURE 4.18 – Evolution thermique global du canal dans la direction longitudinale

$$U_{\tau}^* = \sqrt{\frac{\mu_w}{\rho(y)} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_w} \quad (4.7)$$

$$T_{\tau}^* = \frac{\lambda_w \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w}{\rho(y) C_p U_{\tau}^*} \quad (4.8)$$

Pour la vitesse longitudinale moyenne, nous pouvons définir une autre grandeur adimensionnelle. Cet adimensionnement, dit de Van Driest [69], prend en compte les effets de dilatation et se calcule en utilisant l'équation (4.9). Nicoud et Bradshaw [70] soulignent que l'adimensionnement de Van Driest est mathématiquement analogue à la transformation de Simpson. Cette dernière transformation est utilisée pour les écoulements incompressibles avec une effusion uniforme [71]. Toutant *et al.* [62] souligne que l'analogie mathématique traduit une analogie physique : dans les récepteurs, la vitesse verticale créée par le gradient de température est équivalente à la vitesse verticale créée par l'injection de fluide au travers des parois poreuses pour le refroidissement. En rapprochant les adimensionnements de Van driest et de Bradsham, Toutant identifie une vitesse d'injection équivalente adimensionnelle définie par l'équation (4.10).

$$U_{VD}^+ = \frac{2}{Pr_t T_{\tau}/T_w} (1 - \sqrt{Pr_t T_{\tau}/T_w U/U_{\tau}}) \quad (4.9)$$

$$V_{inj}^+ = Pr_t \frac{T_{\tau}}{T_w} \quad (4.10)$$

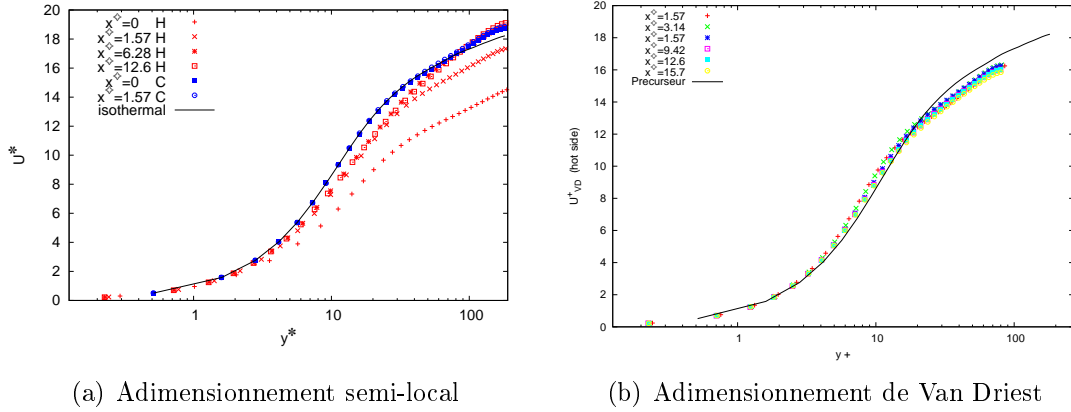


FIGURE 4.19 – Vitesse moyenne longitudinale

Sur la figure 4.19(a), nous observons que du côté froid, la vitesse longitudinale moyenne n'est pas modifiée alors que du côté chaud, la vitesse longitudinale moyenne est fortement modifiée par la température. L'influence de la température est très forte à l'entrée du canal et diminue à l'approche de la sortie du canal. La figure 4.19(b), en utilisant l'adimensionnement de Van Driest, représente uniquement les profils du côté chaud. La couche limite thermique n'ayant pas atteint

le côté froid, le gradient thermique calculé à la paroi froide est nul. La grandeur adimensionnelle  $T_r$  définie par l'expression (4.8) sera alors nulle. On ne peut donc pas adimensionner de profils par cette grandeur. Nous observons que l'ensemble des profils du canal suit un même comportement ; ceci implique que les différences observées sur la figure 4.19(a) proviennent de l'effet de la dilatation du fluide. Contrairement aux résultats de Nicoud en canal bi-périodique, l'adimensionnement de Van Driest ne permet pas de faire coïncider le profil d'entrée avec les profils le long du canal.

La figure 4.20(a) représente la vitesse verticale moyenne en adimensionnement

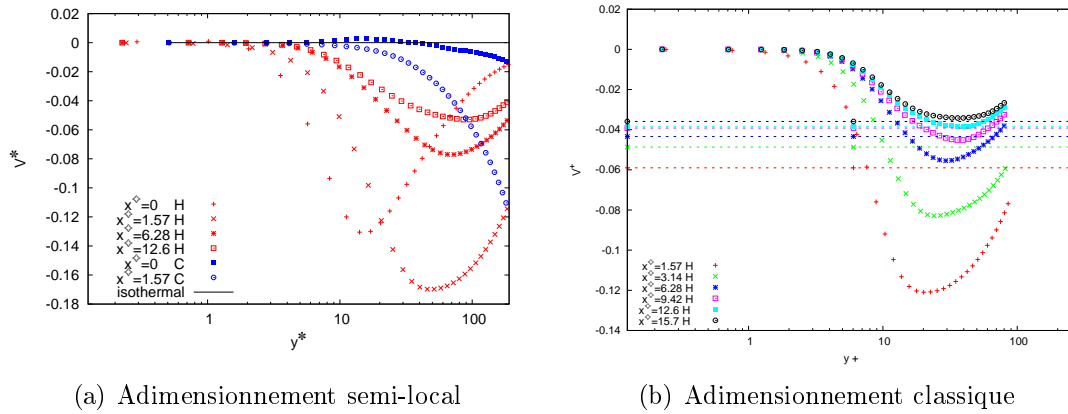


FIGURE 4.20 – Vitesse moyenne verticale

semi-local. Alors que la vitesse est nulle dans le canal isotherme, nous observons, dès l'entrée dans le canal, une brusque augmentation de la vitesse verticale moyenne à  $y^* > 3$  et au contraire une vitesse verticale moyenne quasi-stable du côté froid. Plus on avance dans le canal, plus les profils sont de normes faibles et la création de vitesse verticale lointaine du mur. A l'entrée du canal, seule une très petite épaisseur du canal est chauffée. Dans cette épaisseur, le gradient de température et donc le gradient de masse volumique, est très fort. Cette importante dilatation crée donc une grande vitesse verticale. Dans le reste du canal, l'épaisseur chauffée augmente ce qui réduit d'autant la norme des gradients de masse volumique et donc la vitesse verticale créée par dilatation. L'épaisseur de la sous-couche visqueuse, une fois établie, freine le fluide, ce qui explique que la vitesse verticale se crée un peu plus loin de la paroi lorsque l'on progresse dans le canal. La figure 4.20(b) représente, en adimensionnement classique, la vitesse verticale moyenne (en points) ainsi que la valeur de la vitesse d'injection équivalente, calculée à partir de l'équation (4.10) correspondante au profil (en lignes pointillées). On observe que la vitesse d'injection équivalente n'est pas représentative de la vitesse verticale moyenne dans le cas d'un canal au contraire des canaux plans bi-périodiques [62].

Les fluctuations de la vitesse longitudinale (figure 4.21(a)) sont plus importantes côté froid que côté chaud. Les profils côté froid suivent le comportement du profil isotherme et les pics d'intensité sont centrés autour de  $y^* = 12$ . Du côté chaud, l'amplitude des fluctuations augmente le long du canal et le pic de fluctuations se



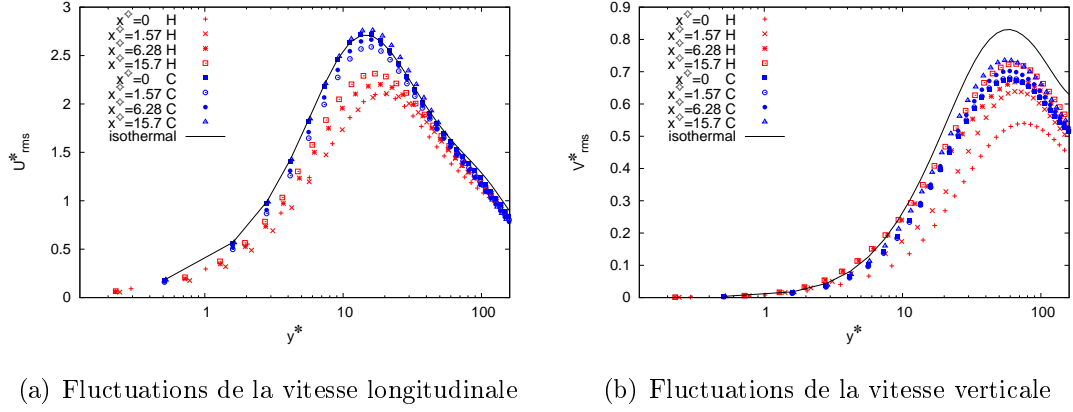


FIGURE 4.21 – Comparaison des profils de vitesse en adimensionnement semi-local

décale de  $y^* = 20$  vers  $y^* = 12$ . Au delà de  $y^* = 40$ , l'ensemble des profils chaud et froid ont le même comportement. Les fluctuations de la vitesse verticale (figure 4.21(b)) ont un autre comportement. Les fluctuations côté chaud comme côté froid ne suivent pas le comportement de l'isotherme. Le long du canal, l'intensité des fluctuations augmente côté chaud comme côté froid. Mais là, où le côté froid gagne 10% en traversant le canal, le côté chaud gagne 36%. De plus, contrairement aux fluctuations longitudinales, les fluctuations de la vitesse verticale présentent un profil quasi-similaire côtés froid et chaud en sortie du canal. Comme pour les fluctuations longitudinales, le pic de fluctuations se décale vers la proche paroi en avançant dans le canal ( $y^* = 60$  vers  $y^* = 40$ ) des deux côtés du canal.

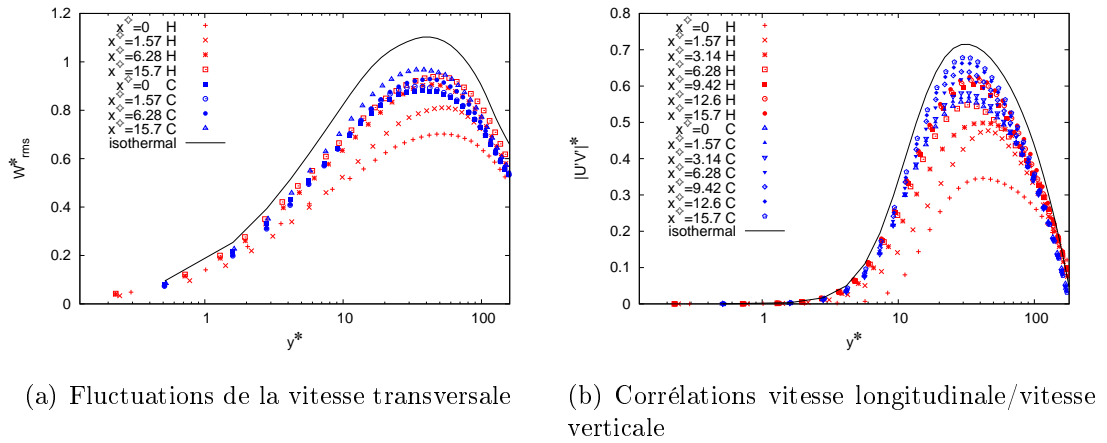


FIGURE 4.22 – Comparaison des profils de vitesse en adimensionnement semi-local

La figure 4.22(a) représente les fluctuations de la vitesse transversale. Nous observons sur cette figure un comportement similaire aux fluctuations de vitesse verticale, à savoir une augmentation d'intensité à mesure que l'écoulement progresse dans le canal (avec un gain supérieur côté chaud), un comportement

différent du comportement isotherme et un décalage du pic de fluctuations vers la proche paroi. L'accélération du fluide notée précédemment peut provoquer l'augmentation des fluctuations. Si on s'intéresse aux corrélations de vitesse longitudinale/verticale (figure 4.22(b)), on voit, que là aussi, l'intensité augmente le long du canal. Entre l'entrée et la sortie, la corrélation augmente de 20% côté froid alors qu'elle double côté chaud avec une croissance très rapide à l'entrée du canal. Contrairement aux fluctuations de vitesse, la corrélation des vitesse longitudinale et verticale n'est pas égale côté chaud et côté froid en sortie de canal. La forte progression des corrélations de vitesse longitudinale-verticale est associée à une augmentation de la production de turbulence par le cisaillement en proche paroi.

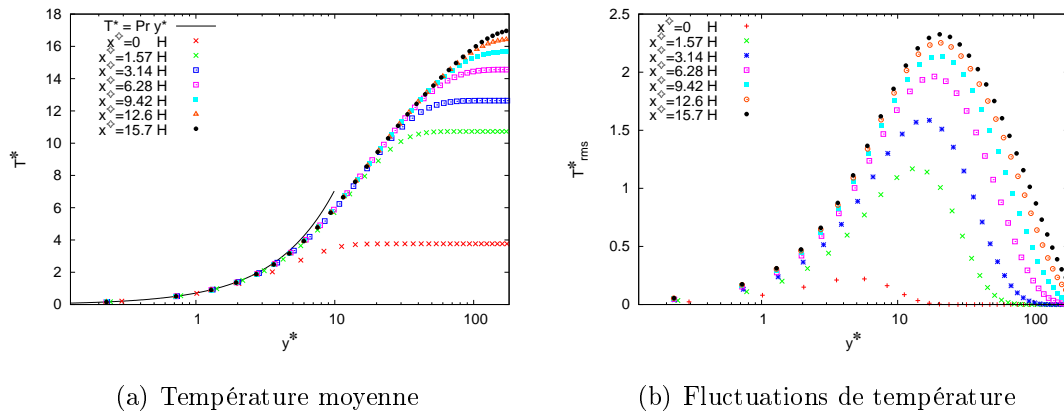


FIGURE 4.23 – Comparaison des profils de température en adimensionnement semi-local

La température moyenne est représentée figure 4.23(a) en fonction de l'écart à la température chaude, et uniquement pour le côté chaud (là encore, la couche limite thermique n'a pas suffisamment progressé pour qu'il existe des variations de température côté froid). En très proche paroi, la température suit la loi linéaire  $T^* = Pr y^*$ . Lorsque l'écoulement progresse le long du canal, nous voyons se réduire la zone plate qui délimite la couche limite thermique. Nous observons que l'ensemble des profils suit un comportement similaire ; les différents profils ne décrochent du profil de sortie qu'une fois proches de l'épaisseur de la couche limite thermique. Les fluctuations de température représentées figure 4.17(a) augmentent fortement lors de la progression dans le canal. Entre les profils d'entrée et de sortie, elles sont multipliées par 10, avec entre  $\frac{x}{h} = 0$  et  $\frac{x}{h} = 1.57$  un facteur 5. A mesure de la progression dans le canal, et à l'inverse des fluctuations de vitesse, le pic de fluctuations de température tend à s'éloigner de la paroi.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons amorcé la transition des études en canal plan bi-périodique vers un panel de configurations plus représentatives des récepteurs

solaires. L'établissement d'une couche limite thermique dans un canal turbulent a été étudié. Nous avons tout d'abord observé l'importance de la longueur du canal nécessaire à l'établissement. A la sortie du domaine de simulation, la couche limite thermique n'a atteint que la moitié de la hauteur du canal. Les profils de vitesse sont fortement modifiés par les changements des propriétés du fluide. Sous l'effet de la dilatation, une forte vitesse verticale se crée à l'entrée du canal. De plus, le débit se conservant le long du canal, le fluide accélère pour compenser la baisse de masse volumique. Bien qu'ayant des grandeurs adimensionnelles identiques, les profils en sortie du canal sont très différents de la SND de la littérature. L'effet de l'établissement de la couche limite thermique est donc plus important que l'effet du gradient thermique seul. Dans le canal, la vitesse verticale moyenne est créée par la dilatation du fluide. En utilisant l'adimensionnement de Van Driest, nous avons vu que la vitesse longitudinale moyenne est impactée par l'établissement de la thermique. Enfin, nous avons vu que l'analogie entre la vitesse verticale créée par la dilatation et la vitesse d'injection équivalente à une effusion poreuse proposée par Toutant *et al.* [62] pour un canal plan bi-périodique n'est plus valable dans le cas du développement de la couche limite thermique.

Pour poursuivre ces études, il sera nécessaire de finir l'implémentation dans Trio\_U d'un module pour les domaines couplés utilisant les améliorations (ordre des schémas et algorithme de résolution) développées pour le canal plan bi-périodique et présentées au chapitre 2. Dans le cadre de ce travail de thèse, la température est imposée directement à la paroi, les propriétés du fluide subissent alors un créneau au changement de domaine. Une autre approche serait d'imposer un flux de chaleur à une paroi d'épaisseur non nulle. Les propriétés du fluide varieraient alors de manière moins brutale. Il serait alors possible d'étudier le couplage fluide structure afin notamment d'évaluer les risques de fatigue thermique.



# Chapitre 5

## Analyse spectrale

Dans le chapitre 3, nous avons étudié, dans l'espace physique, les phénomènes présents dans des canaux plans bi-périodiques. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'énergie cinétique turbulente et aux différents termes qui représentent son évolution. Nous étudions ces différentes grandeurs dans l'espace spectral, c'est à dire en fonction de la taille des structures turbulentes qui leur sont associées. Pour réaliser cette étude, nous utiliserons un post-traitement spécifiquement développé et présenté au chapitre 2.

Nous commençons par présenter les résultats issus de chaque simulation étudiée au chapitre 3. En nous attardant sur la simulation numérique directe isotherme à  $Re_\tau = 180$ , nous validons le procédé de post-traitement développé pour réaliser cette étude. Ci-dessous, nous expliquons plus en détail ce choix de validation. Après cette validation, nous présentons les différents spectres obtenus : d'abord au travers des trois mécanismes globaux (production, transfert et dissipation), puis, de manière détaillée, les différents termes qui composent les trois mécanismes globaux. Enfin, nous comparons les différents résultats obtenus pour identifier et séparer les effets liés au nombre de Reynolds et ceux au ratio de température.

### 5.1 Simulation isotherme à $Re_\tau = 180$

#### 5.1.1 Validation du post-traitement.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, notre simulation numérique directe présente dans l'espace physique des statistiques identiques à celles de la simulation de Moser *et al.* [59]. En appliquant notre post-traitement aux données issues de cette simulation et en comparant les résultats obtenus à la littérature, nous pourrions supposer que l'ensemble des différences aura pour unique source le procédé de post-traitement. A notre connaissance, il n'existe dans la littérature qu'une unique analyse spectrale d'une simulation équivalente : l'analyse de Bolotnov *et al.* [45] qui étudie les termes d'évolution de l'énergie cinétique turbulente d'un canal plan isotherme à  $Re_\tau = 180$  à partir des données obtenues en SND avec une méthode pseudo-spectrale. On n'omettra pas de citer Domaradzki *et al.* [72] qui représentent

pour deux distances à la paroi ( $y^+ = 210$  et  $y^+ = 17$ ) les 3 principales contributions au terme de transfert triadique dans le plan. Les données de Domaradzki *et al.* sont obtenues à partir d'une simulation des grandes échelles d'un canal plan isotherme à  $Re_\tau = 210$ . Par ailleurs, les travaux de Moser *et al.* auxquels notre simulation isotherme se compare contiennent des données accessibles sur les spectres d'énergie cinétique turbulente. Nous comparerons donc les spectres de notre simulation à ceux des travaux de Moser *et al.* et Bolotnov *et al.*

Pour obtenir le tracé de nos figures, nous avons calculé les moyennes sur  $0.983s$  ce qui correspond à 12.3 temps caractéristiques ( $t_c = \frac{t}{u_\tau} = 0.0798s$ ). Bien qu'important, ce temps est à la fois insuffisant et suffisant. Insuffisant, puisque nous devons utiliser un filtrage des signaux (voir partie 2.3.4). Et suffisant, puisque les signaux filtrés n'évoluent quasiment plus si on compare le même terme entre deux instants pour lesquels le temps de moyenne a doublé. Par exemple, les figures 5.1(a) et 5.1(b) représentent le terme de transfert par la pression dans le plan respectivement pour un temps de moyenne de 6 temps caractéristiques et 12.3 temps caractéristiques. Nous pouvons voir que les amplitudes sont conservées, les différentes zones sont similaires et bien délimitées entre elles.

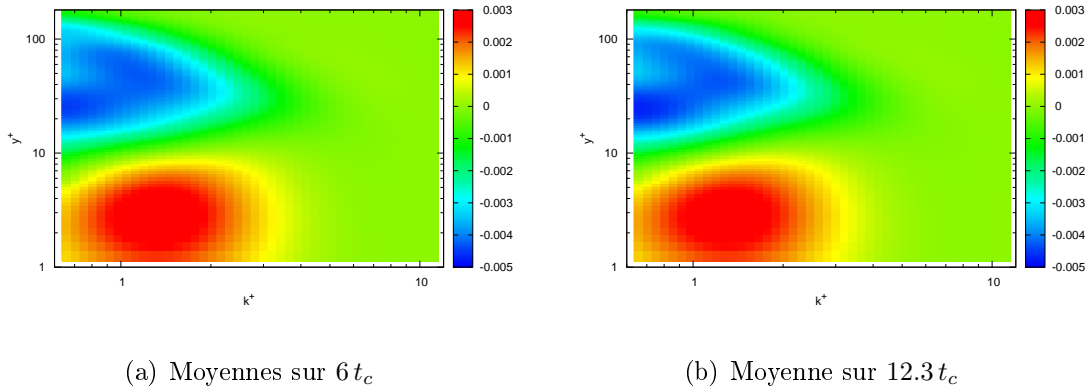


FIGURE 5.1 – Termes de transfert dans le plan pour différents temps de moyenne ( $Re_\tau = 180$  et isotherme)

### 5.1.1.1 Comparaison à Moser *et al.*

Les données de la simulation numérique de Moser *et al.* [59] contiennent notamment des spectres d'énergie cinétique turbulente unidirectionnels calculés dans la direction longitudinale et dans la direction transversale. Nous avons donc utilisé notre post-traitement pour obtenir des spectres unidirectionnels équivalents à ceux de Moser *et al.* Les figures 5.2 et 5.3 comparent les spectres unidirectionnels respectivement dans la direction longitudinale et transversale. Les données de Moser *et al.* comportent peu de points que ce soit pour les longueurs d'ondes ou les plans. Ainsi, il n'est

pas facile d'interpréter visuellement des surfaces entières ; nous avons donc tracé des isocontours d'énergie cinétique turbulente pour faciliter la lecture.

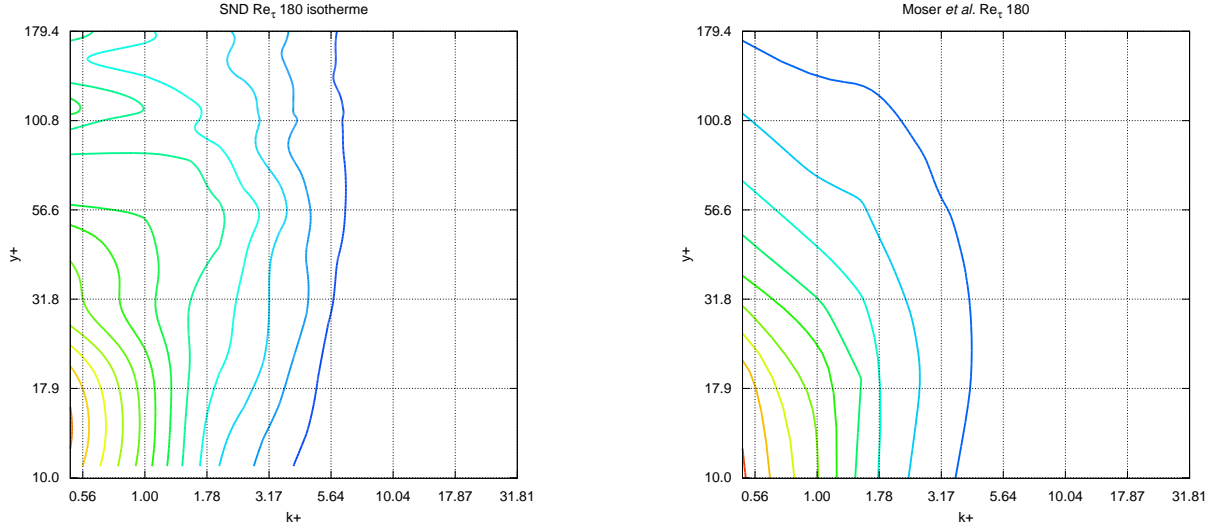


FIGURE 5.2 – Comparaison des transformées de Fourier 1D dans la direction X de l'énergie cinétique turbulente

Nous observons figure 5.2 que l'énergie cinétique turbulente varie selon la distance à la paroi et selon la longueur d'onde. Pour les deux SND, la zone la plus énergétique est située en proche paroi aux grandes échelles (petits vecteurs d'ondes, les isocontours correspondant sont rouge et orange). En allant vers le centre du canal ou vers les petites échelles, l'énergie diminue (contours bleu). Pour  $y^+ > 30$ , les deux SND ont un comportement légèrement différent, la décroissance de l'énergie est plus rapide dans la simulation de Moser *et al.*

Les spectres calculés dans la direction transversale sont représentés sur la figure 5.3. La longueur de simulation  $Lz$  étant plus grande dans notre simulation, les spectres de Moser commencent à  $k^+ = 1.5$  lorsque les nôtres commencent à  $k^+ = 1$ . On voit sur cette figure l'intérêt d'un grand domaine de simulation. Pour réaliser une étude spectrale des très basses fréquences de l'écoulement, il est nécessaire d'avoir un grand domaine. Contrairement aux spectres longitudinaux, l'énergie cinétique turbulente passe par un maximum identifiable selon la taille des structures et la distance à la paroi. Les maxima d'énergie sont situés autour de  $y^+ = 18$  et  $k^+ = 5.6$ . En s'éloignant de la paroi, ce maximum se décale vers des plus grandes échelles. L'énergie décroît rapidement lorsque l'on s'éloigne de la paroi, aux petites échelles et aux grandes échelles de l'écoulement. Dans notre SND, l'énergie cinétique turbulente décroît plus vite lorsque l'on s'éloigne de la paroi que pour la SND de Moser *et al.*

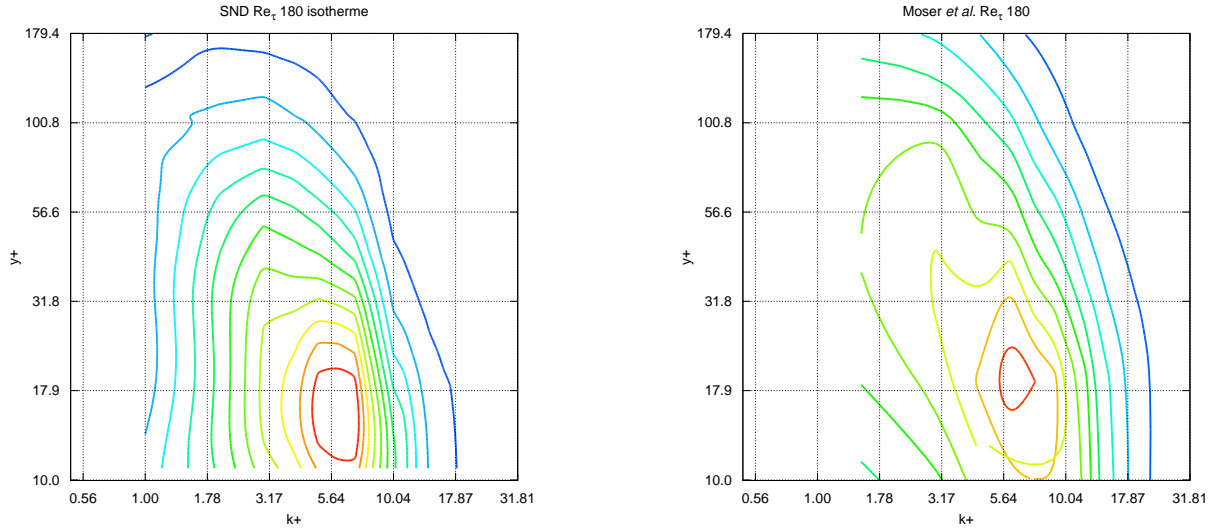


FIGURE 5.3 – Comparaison des transformées de Fourier 1D dans la direction Z de l'énergie cinétique turbulente

Globalement, les spectres unidirectionnels de l'énergie cinétique turbulente sont semblables à ceux de Moser et al. De petites différences entre les simulations se situent au centre du canal mais les tendances restent similaires. Ces différences peuvent être dues au post-traitement, à la précision de notre méthode ou à la taille du domaine.

### 5.1.1.2 Comparaison à Bolotnov et al.

Comme indiqué dans le chapitre 2, la décomposition des termes de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente (équations (2.34)) permet des comparaisons avec les résultats de Bolotnov *et al.* (puisque, en isotherme, ces termes sont équivalents). Nous comparons la production turbulente (équation (2.34a)), le transfert triadique dans le plan (équation (2.34b)) et le transfert triadique inter-plan (équation (2.34c)). L'adimensionnement utilisé par Bolotnov *et al.* (pour la longueur d'onde  $\frac{U_\tau}{\nu}$  et  $\frac{U_\tau^4}{\nu}$  pour la norme) est différent de celui utilisé par Moser *et al.* Dans cette publication, les figures représentent les termes de transferts multipliés par  $k^+$  et utilisent une échelle logarithmique de base  $Re_\tau$ . Les données issues de nos calculs sont représentées figures 5.4(a), 5.5(a) et 5.6(a) en utilisant les mêmes traitements que Bolotnov *et al.* Les figures 5.4(b), 5.5(b) et 5.6(b) sont extraites de la publication de Bolotnov *et al.* Les échelles de couleurs de Bolotnov sont identiques à celles de nos figures.

Le premier jeu de figures compare la production turbulente. Nous observons que le maximum de production se situe aux mêmes échelles ( $0.056 < k^+ < 1$ ) et à la même distance de la paroi ( $10 < y^+ < 17$ ). La production diminue rapidement en



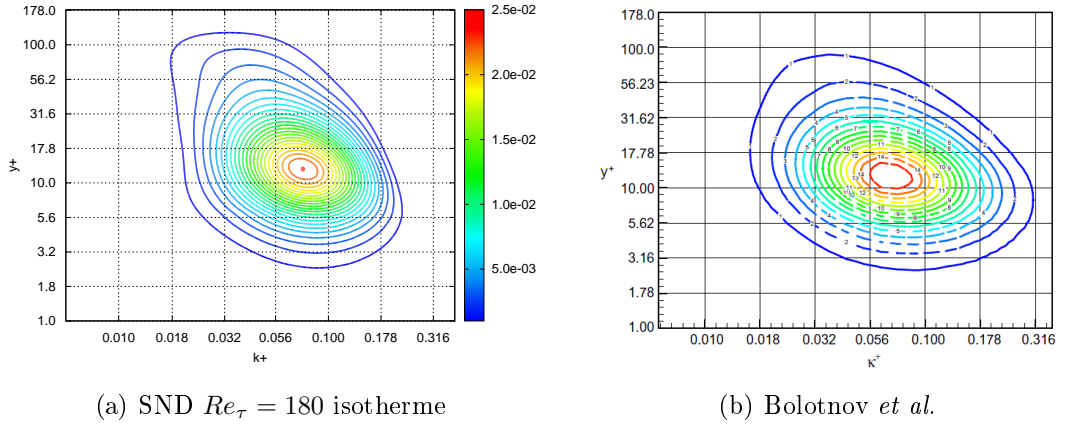


FIGURE 5.4 – Comparaison des spectres bidirectionnels de production turbulentes

s'éloignant de cette zone. Les limites des zones de production sont similaires dans les deux simulations ( $3 < y^+ < 60$ ,  $0.018 < k^+ < 0.2$ ). Globalement, les deux productions turbulentes sont similaires tant par la forme de leurs isocontours que par les localisations respectives des zones.

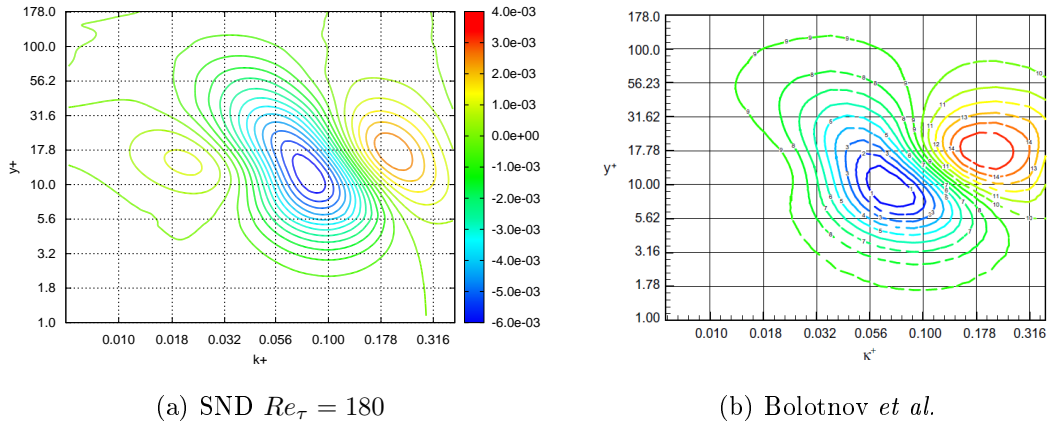


FIGURE 5.5 – Comparaison des spectres bidirectionnels de transfert triadique dans le plan

Le transfert triadique dans le plan est comparé sur les figures 5.5(a) et 5.5(b). Nous observons qu'il est composé de deux principales zones : une négative dont le centre des isocontours se situe vers  $k^+ = 0.08$  et  $y^+ = 12$  ; ainsi qu'une zone positive dont le centre est situé vers  $y^+ = 18$  et  $k^+ = 0.178$ . Ces deux zones se retrouvent dans les deux simulations. Bien que globalement semblables, leurs formes sont légèrement différentes. Le terme de Bolotnov *et al.* présente des isocontours plus larges. De plus, dans notre SND, une zone positive de faible norme existe aux grandes échelles,

alors qu'elle ne se retrouve pas directement sur les figures de Bolotnov *et al.* La forme des isocontours qui passent par  $y^+ = 10$  et  $k^+ = 0.02$  indique que la zone positive qui existe à ces coordonnées pour notre simulation correspond à une zone de très rapide retour à zero dans la simulation de Bolotnov. Pour notre simulation, le retour à zero est situé à  $y^+ = 10$  et  $k^+ = 0.04$

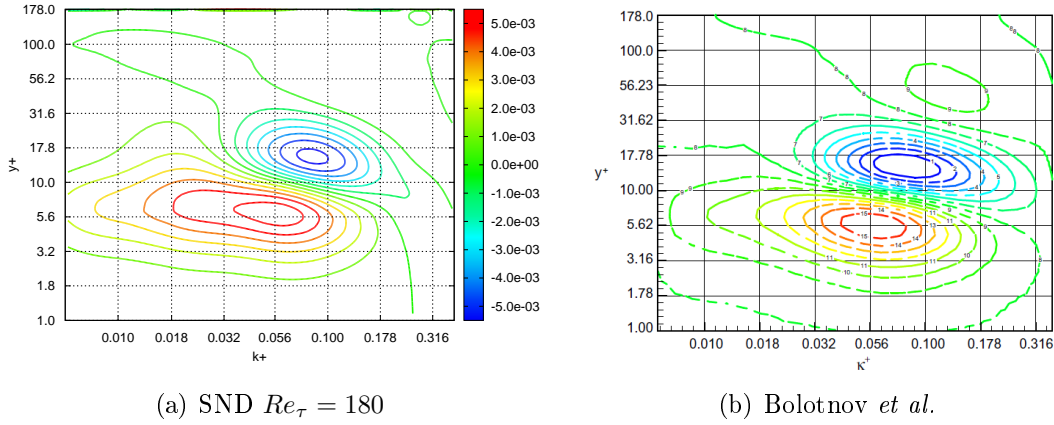


FIGURE 5.6 – Comparaison des spectres bidirectionnels de transfert triadique inter-plan

Enfin, notre simulation et celle de Bolotnov *et al.* présentent un transfert triadique inter-plan (figure 5.6) semblable. Comme pour le transfert triadique dans le plan, les isocontours de notre SND sont légèrement différents. La gamme de fréquence associée à la zone positive de notre SND est plus importante que celle de Bolotnov *et al.* A contrario, la zone négative est plus restreinte en fréquence que celle de Bolotnov. La distance à la paroi où l'on trouve ces deux zones est identique entre les deux simulations.

Nous venons de voir sur ces 3 grandeurs, que les résultats sont globalement semblables à ceux de Bolotnov *et al.* Nous pouvons dire que les outils développés pour réaliser l'étude spectrale de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente fonctionnent et donnent des résultats cohérents avec la littérature. Compte tenu de la nécessité de filtrer nos signaux et des légers écarts observés, nous ne pourrions faire de conclusions que sur des changements importants de comportement entre les différentes simulations.

### 5.1.2 Spectres

Avant de décrire le comportement des différents termes de transferts, nous nous intéressons à l'énergie cinétique turbulente puis aux mécanismes globaux de production, transfert et dissipation introduit au chapitre 2. Dans l'ensemble des figures suivantes, les zones positives correspondent à un accroissement de l'énergie cinétique

turbulente alors que les zones négatives correspondent à une perte d'énergie cinétique turbulente. Un terme de transfert possède à la fois une zone négative qui va donner l'énergie et une zone positive qui va recevoir l'énergie.

### 5.1.2.1 Mécanismes fondamentaux

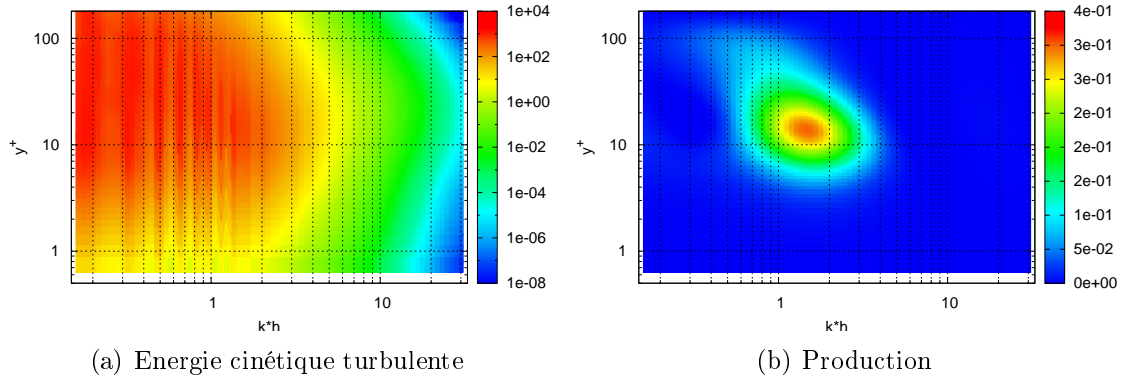


FIGURE 5.7 – Spectres des mécanismes globaux de transfert SND isotherme  $Re_\tau = 180$

La figure 5.7(a) représente le spectre d'énergie cinétique turbulente adimensionnée par  $\nu u_\tau$ . L'énergie cinétique turbulente décroît très rapidement aux petites échelles. Les échelles les moins énergétiques sont situées au centre du canal et en proche paroi pour  $kh > 20$ . On observe un surplus d'énergie dans la zone de proche paroi  $y^+ = 11$  et ce pour toutes les échelles de la turbulence. Puisque l'énergie cinétique moyenne représentée dans l'espace physique peut être obtenue en intégrant sur l'ensemble des fréquences la figure 5.7(a). Nous pouvons dire que la répartition, selon la distance à la paroi, de l'énergie cinétique turbulente est cohérente avec le comportement des fluctuations de vitesse vu au chapitre 3 (figure 3.5(b)) dont la somme est maximale entre  $y^+ = 10$  et  $y^+ = 40$ .

Le premier mécanisme fondamental est la production d'énergie cinétique turbulente (figure 5.7(b)). Nous observons que la production d'énergie cinétique turbulente est très localisée dans les fréquences comme dans sa distance à la paroi. Elle est logiquement positionnée près du maximum d'énergie cinétique turbulente et se situe aux grandes échelles de l'écoulement. A mesure que l'on s'éloigne de la paroi, le maximum de la production se déplace légèrement vers de plus grandes échelles tout en devenant de norme plus faible.

Le transfert d'énergie représenté figure 5.8(a), montre que dans notre simulation, le transfert se fait principalement des échelles médianes vers les grandes échelles. La zone où l'énergie cinétique est prise correspond à la zone où l'énergie cinétique est produite (figure 5.7(b)). L'énergie cinétique turbulente est reçue dans la zone de proche paroi ( $y^+ = 8$ ) pour de très grandes échelles ( $kh < 0.5$ ). Ce transfert

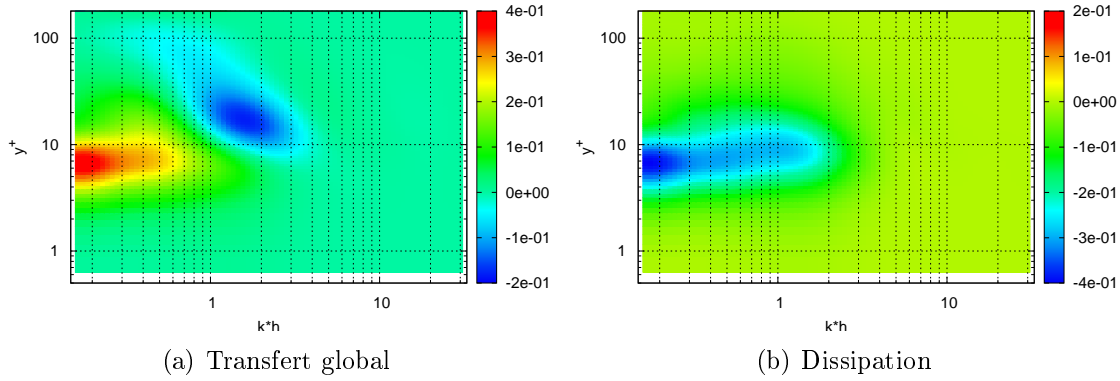


FIGURE 5.8 – Spectres des mécanismes globaux de transfert SND isotherme  $Re_\tau = 180$

se faisant avec un rapport entre fréquences émettrices et fréquences réceptrices supérieur à 2, le transfert est dit non-local [73].

Enfin, la dissipation (figure 5.8(b)) est très importante en proche paroi dans la zone où l'énergie cinétique est transférée.

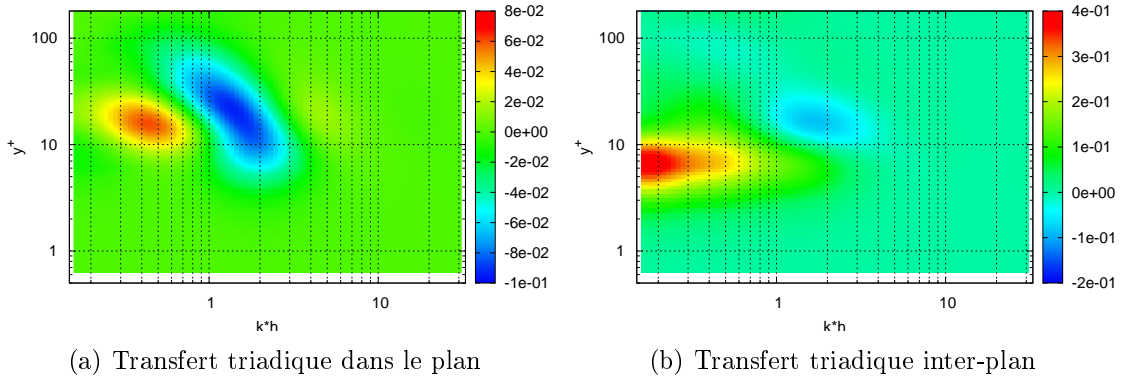
Nous pouvons résumer les mécanismes globaux comme :

- production en proche paroi à des échelles de l'ordre de  $h$  ;
- transfert aux grandes échelles ;
- dissipation aux grandes échelles en proche paroi.

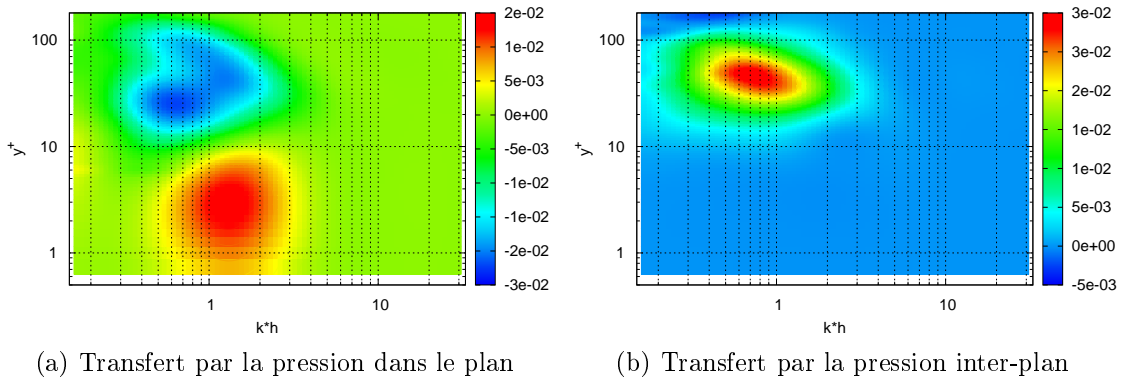
### 5.1.2.2 Décomposition du terme de transfert

Le détail du mécanisme de transfert de l'énergie est présenté dans les figures suivantes. On notera que le transfert du au gradient de température n'est pas représenté car de norme négligeable ( $\approx 10^{-11}$ ). Le terme de transfert triadique dans le plan (figure 5.9(a)) possède 3 zones non nulles situées à la même hauteur dans le canal (autour de  $y^+ = 20$ ). Deux zones positives, une pour  $kh < 0.7$  de forte norme et une pour  $kh > 3$  de faible norme, entourent une zone négative de forte norme. L'énergie est transférée de manière non locale depuis les échelles correspondant aux échelles de la production d'énergie cinétique turbulente vers de plus grandes et plus petites échelles. Comme pour la production, on réalise ici que la taille de structures qui interviennent dans ce terme augmente avec la distance à la paroi. On peut supposer ici que la partie de l'énergie qui est transférée vers les plus petites échelles correspond aux modes de transferts connus dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope. La norme de ce terme de transfert est comparable à celle de la partie négative du transfert global, la norme de la partie positive est elle inférieure à celle du transfert global.

Comme son nom le présage, le transfert triadique inter-plan transfère (figure 5.9(b)) l'énergie d'un plan vers un autre plan. On identifie une zone négative


 FIGURE 5.9 – Spectres SND isotherme  $Re_\tau = 180$ 

où de l'énergie cinétique turbulente est prise et une zone positive ( $kh < 1$  et  $y^+ = 7$ ) où l'énergie est transférée. Comme pour les termes précédents, la taille des structures qui interviennent dans les échanges d'énergie augmente vers le centre du canal. Pour le transfert inter-plan, ce phénomène est suffisamment fort pour qu'une partie du transfert soit local (c.a.d implique les mêmes échelles de turbulence). La norme de la zone positive étant beaucoup plus importante en proche paroi ce terme est globalement non local. La norme de la zone positive est du même ordre que celle du transfert global alors que la zone négative est de norme plus faible.


 FIGURE 5.10 – Spectres SND isotherme  $Re_\tau = 180$ 

Le terme de transfert dans le plan par la pression (figure 5.10(a)) transfère l'énergie des grandes échelles depuis le centre du canal vers la proche paroi. Ce transfert est local et de norme inférieure à celle des termes de transfert triadique. Contrairement aux termes triadiques, la position dans le canal n'est pas corrélée avec la taille des structures qui échangent de l'énergie.

La figure 5.10(b) représente le terme de transfert inter-plan par la pression. Ce terme est non nul hors de la zone de proche paroi pour de grandes échelles ( $kh < 3$ ). Il possède une zone négative au centre du canal et une zone positive dont le maximum est localisé en  $kh = 0.7$  et  $y^+ = 45$ . Ce terme est le seul à transférer de l'énergie depuis le centre du canal. De plus, comme pour le terme de transfert dans le plan par la pression, ce terme de transfert est local et sa norme est très inférieure à celle du transfert global.

Nous avons constaté que dans un canal plan isotherme, le transfert d'énergie cinétique turbulente se fait de manière non locale au travers des termes triadiques et de manière locale au travers de la pression. La taille des structures impliquées dans les transferts d'énergie triadiques augmente vers le centre du canal.

## 5.2 Simulation anisotherme à $Re_\tau = 180$

Pour notre simulation anisotherme à  $Re_\tau = 180$ , le taille de la première maille est plus grande et permet au calcul d'avancer plus vite (augmentation du pas de temps pouvant être utilisé pendant le calcul). Il en résulte un temps physique plus important que pour la simulation isotherme. Les moyennes sont calculées sur  $5.657 s$  soit  $49.5 t_c$  côté chaud. De la même manière que les profils dans l'espace physique, nous adimensionnons les spectres par les grandeurs  $u^\tau$  et  $\nu$  locales. Les figures 5.11(a) à 5.19(b) représentent les différents termes avec les côtés froid et chaud positionnés respectivement à gauche et à droite. Sur ces figures, la zone blanche qui apparait est relative aux différences de nombre de Reynolds turbulents des deux côtés.

### 5.2.1 Mécanismes fondamentaux

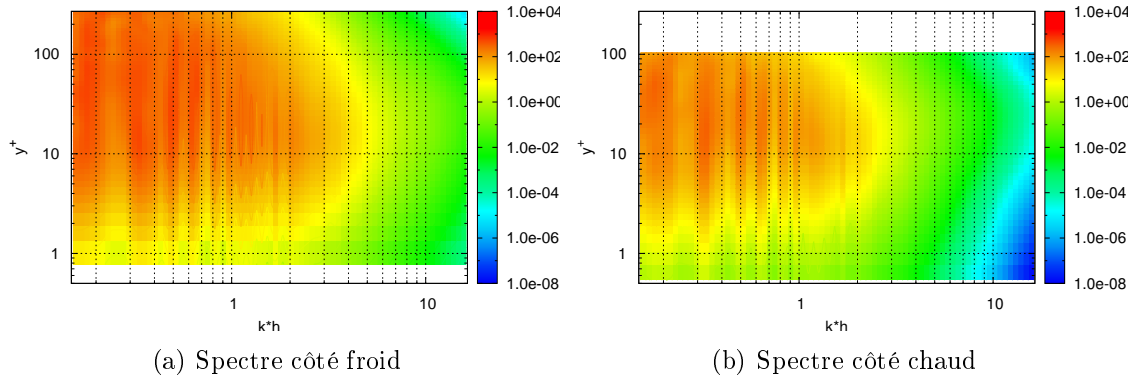
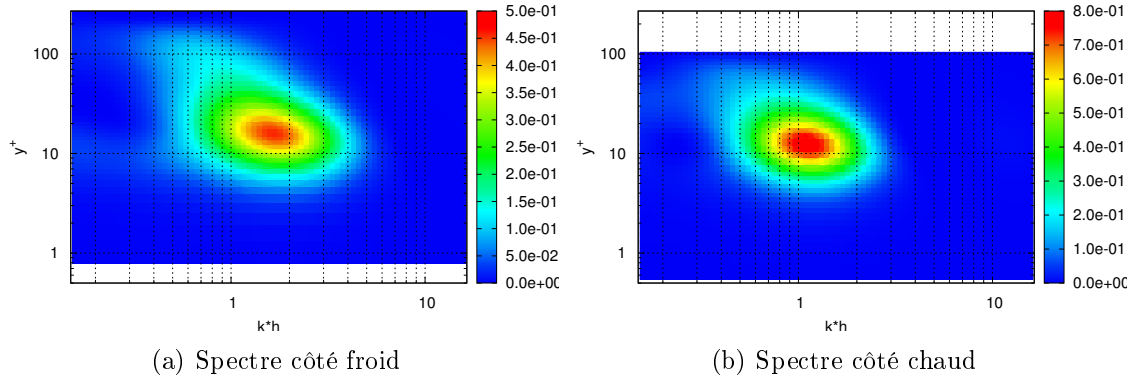


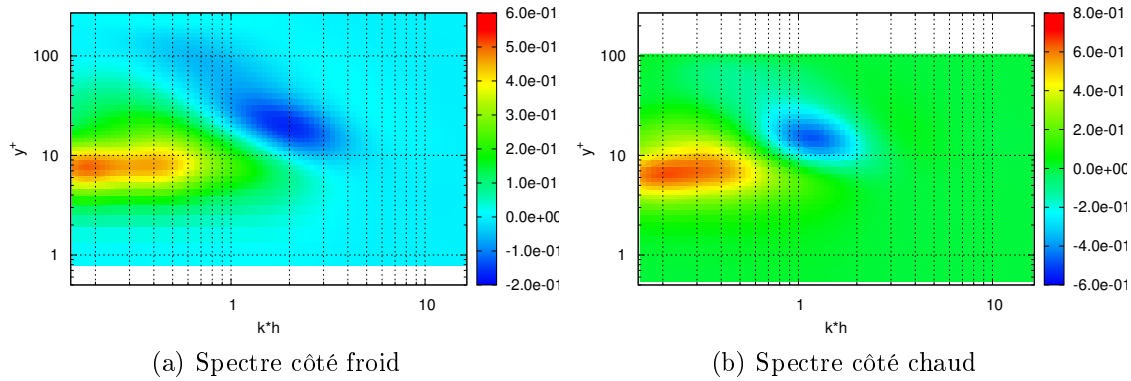
FIGURE 5.11 – Energie cinétique turbulente  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$

L'énergie cinétique turbulente côté froid (figure 5.11(a)) est forte pour les petites longueurs d'onde et décroît rapidement à partir de  $kh = 7$ . Nous observons ici que l'on ne capture pas la totalité de la décroissance de l'énergie, ce qui est cohérent avec le fait que notre SND est sous-résolue. Du côté chaud (figure 5.11(b)), il y a globalement moins d'énergie cinétique turbulente. Les deux côtés sont de mêmes normes mais la zone contenant le plus d'énergie (zone orange) est plus restreinte. La décroissance de l'énergie intervient à de plus grandes échelles que du côté froid ( $kh = 3$ ). La décroissance de l'énergie s'amorce plus loin de la paroi du côté chaud. Le fait que l'énergie cinétique turbulente soit encore très importante en proche paroi indique qu'il est nécessaire de très bien capturer cette zone.

La production turbulente côté froid représentée figure 5.12(a) est située autour de  $y^+ = 15$  (son maximum). Elle s'étend vers le centre canal jusqu'à  $y^+ = 200$  et vers la proche paroi jusqu'à  $y^+ = 7$ . L'énergie est produite sur une large gamme de fréquence de  $kh = 0,5$  jusqu'à  $kh = 5$ . On observe ici que, vers le centre canal, seules les structures de plus grandes tailles participent à la production de l'énergie

FIGURE 5.12 – Production turbulente  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$ 

cinétique turbulente. Du côté chaud (figure 5.12(b)), la production turbulente est peu différente. Les structures participantes sont de tailles similaires au côté froid. L'intensité de la production côté chaud est plus importante que du côté froid (d'environ un facteur 1.5). Ceci peut sembler contradictoire avec les résultats déjà étudiés puisque les figures 3.11(a), 5.11(a) et 5.11(b) indiquent toutes que l'énergie cinétique turbulente est plus importante côté froid que côté chaud. Nous pouvons en déduire qu'il doit exister un ou des phénomènes qui "évacuent" l'énergie cinétique turbulente excédentaire.

FIGURE 5.13 – Transfert total  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$ 

Le transfert total côté froid (figure 5.13(a)) est très similaire au côté chaud (figure 5.13(b)). Nous y observons un transfert d'énergie du centre du canal vers la proche paroi. Côté chaud, le transfert est principalement non local avec un puits localisé à  $y^+ = 15$  et  $kh = 1.5$  qui transfère l'énergie vers  $y^+ = 8$  et  $kh = 0.1..0.5$ . Du côté froid, le maximum du transfert se situe aux mêmes coordonnées que du côté chaud



mais le transfert est plus local (presque toutes les fréquences dans la zone de puits existent dans la zone réceptrice). On notera que du côté chaud, le puits d'énergie cinétique turbulente à une amplitude trois fois plus importante que du côté froid. La zone réceptrice est elle aussi de norme plus importante, le transfert est donc plus important côté chaud que côté froid ce qui permet "d'évacuer" l'énergie excédentaire.

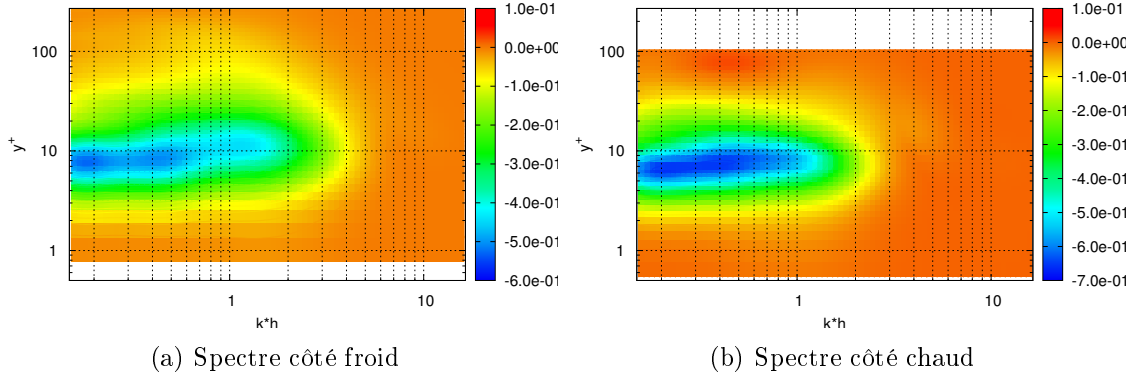


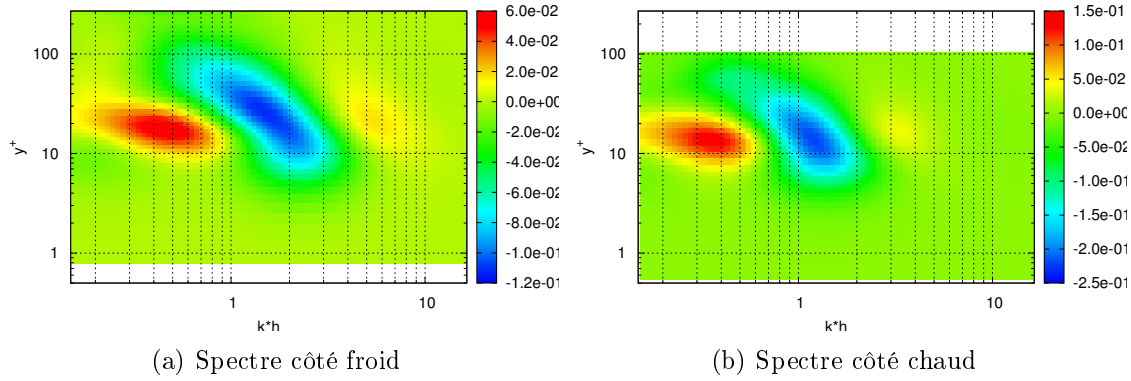
FIGURE 5.14 – Dissipation  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$

La dissipation (figure 5.14(a) côté froid et figure 5.14(b) côté chaud) est centrée autour de  $y^+ = 10$ . Elle est globalement plus intense côté chaud que côté froid, ce qui est cohérent avec les comportements des deux autres mécanismes. On observe que côté chaud la dissipation s'étend moins vers les petites échelles que côté froid ( $kh = 3$  côté chaud contre  $kh = 5$  côté froid). On remarque qu'il existe une zone légèrement positive à  $y^+ = 80$  et  $kh = 0,5$  côté chaud. Cette zone légèrement positive peut provenir de la diffusion visqueuse (défini comme  $\nu \frac{\partial^2 \widehat{E_c}}{\partial y^2}$ ). Cette diffusion incluse dans notre terme de dissipation, change plusieurs fois de signe et peut devenir prépondérante dans les zones de faible norme comme le centre canal.

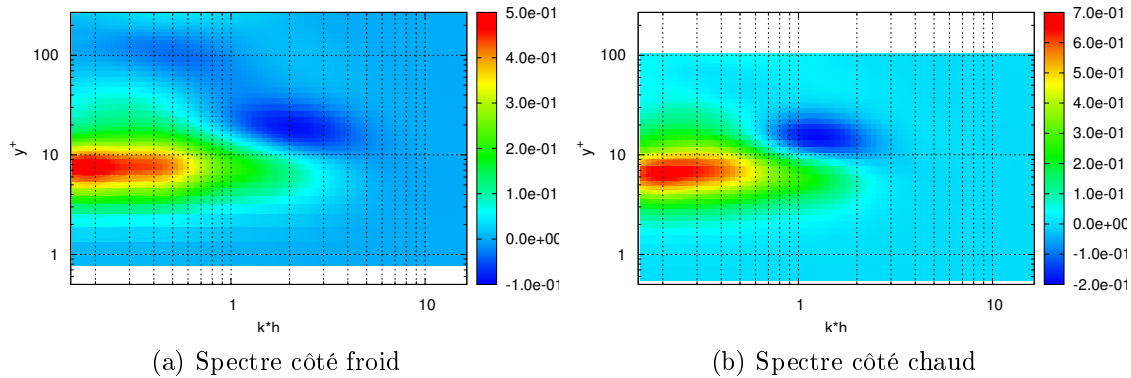
Pour résumer, l'énergie cinétique turbulente est plus importante et occupe une gamme de fréquence plus large côté froid que côté chaud. La production d'énergie cinétique turbulente est plus importante côté chaud que côté froid. L'énergie produite est transférée en proche paroi. Du côté froid, ce transfert se fait principalement, d'un plan vers un autre plan pour un même vecteur d'onde. Alors que, du côté chaud, le transfert se fait principalement entre deux vecteurs contenus dans un même plan. En proche paroi, l'énergie est dissipée.

### 5.2.2 Décomposition du terme de transfert

Le terme de transfert triadique dans le plan côté froid est représenté figure 5.15(a) ; la norme de sa partie négative compte pour moitié de la partie négative du transfert total et pour un quart de la partie positive. Il est composé de 3 zones : une zone


 FIGURE 5.15 – Transfert triadique dans le plan  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$ 

négative centrale et deux zones positives positionnées de part et d'autre de la zone négative. La zone positive va de  $y^+ = 5$  à  $y^+ = 150$ ; la taille des structures associées à cette zone augmente en s'éloignant de la paroi. Les zones positives sont localisées à une même distance de la paroi (autour de  $y^+ = 20$ ). L'intensité de la zone basse fréquence est beaucoup plus importante que celle de la zone haute fréquence (environ 3 fois). Nous observons que le transfert est principalement non local lorsqu'il va vers les petites structures et local vers les grandes échelles. Du côté chaud, ce terme est assez similaire. La différence la plus importante avec le côté froid est que la zone négative ne s'entend plus vers le centre du canal, il en résulte que désormais le transfert est quasi-entièrement non-local que se soit vers les petites ou les grandes échelles. Du côté chaud, ce terme représente un tiers du terme total de transfert.


 FIGURE 5.16 – Transfert triadique inter-plan  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$ 

Le transfert triadique inter-plan du côté froid (figure 5.16(a)) est semblable au

terme de transfert total côté froid. La norme de la partie positive est identique au transfert global alors que celle du côté froid est moitié moins importante. Le côté chaud (5.16(b)) est lui aussi similaire au terme de transfert total. La partie négative représente  $\frac{4}{5}$  du transfert total, alors que la partie positive représente 90% du transfert total.

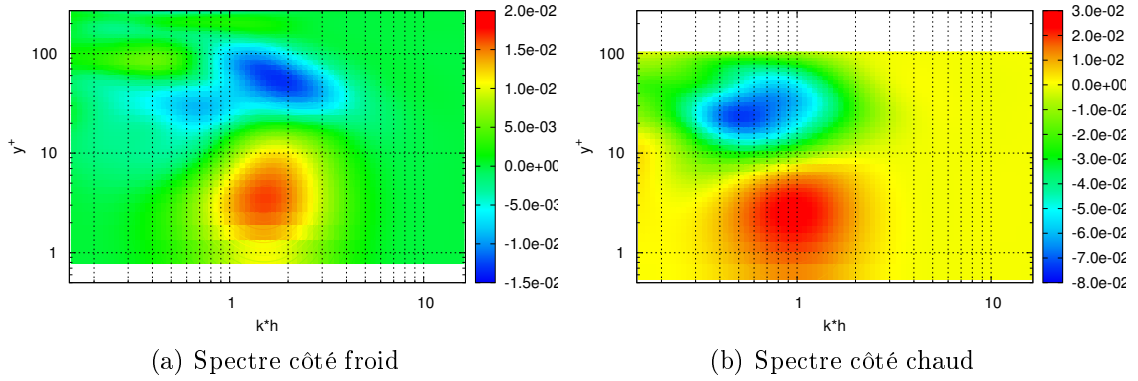


FIGURE 5.17 – Transfert par la pression dans le plan  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$

La figure 5.17(a)) représente le terme de transfert par la pression dans le plan côté froid. Le transfert d'énergie lié à ce terme se situe autour d'une fréquence  $kh = 2$  et correspond à un transfert de  $50 < y^+ < 100$  vers la très proche paroi  $1 < y^+ < 10$ . Du côté chaud (figure 5.17(b)), le terme est beaucoup plus intense l'extremum positif étant multiplié par 1,5 et le négatif par 4,5. De plus, le transfert se fait à légèrement plus haute échelle (autour de  $kh = 1$ ).

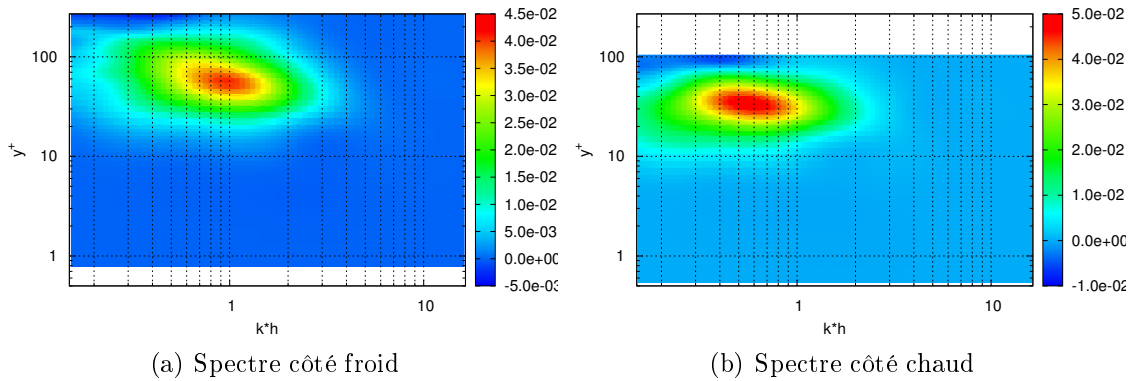


FIGURE 5.18 – Transfert par la pression dans le plan  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$

Le terme de transfert par la pression inter plan côté froid (figure 5.18(a)) et

côté chaud (figure 5.18(a)) sont relativement similaires. Les amplitudes des zones positives sont identiques, la norme de la zone négative est légèrement inférieure côté chaud. La position des zones négatives est identiques et celle des zones positives décalée : la zone positive du côté froid est centrée sur  $y^+ = 50$ ,  $kh = 1$  alors que celle du côté chaud est centrée sur  $y^+ = 35$  et  $kh = 0,5$ .

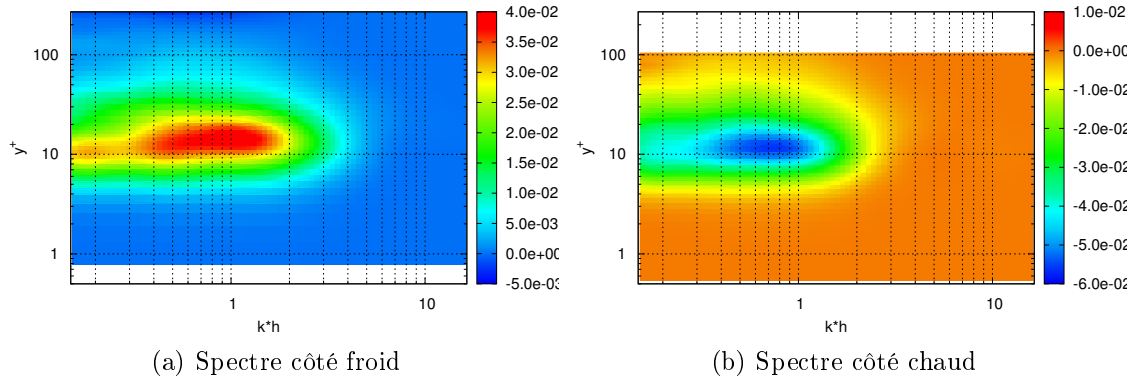


FIGURE 5.19 – Transfert par effets thermiques  $Re_\tau = 180$   $T_r = 2$

Le terme de transfert thermique (figures 5.19(a) et 5.19(b)) est le terme qui se compose de tous les termes habituellement nuls en écoulement incompressible. La norme de ce terme est comparable à celles des termes de transfert par la pression. Ce terme est positif du côté froid et négatif du côté chaud. Il s'étend de  $y^+ = 5$  à  $y^+ = 100$  avec un maximum autour de  $y^+ = 15$ . Les fréquences associées à ce terme sont faibles (grandes structures turbulentes) et vont jusqu'à  $kh = 3$ . C'est le seul terme dont le comportement change de signe en fonction du côté du canal. Il correspond donc à un transfert d'énergie du côté chaud vers le côté froid. Dans l'étude de Serra et al. [13], il a été réalisé des simulations isothermes dont les nombre de Reynolds turbulent correspondent aux valeurs sur chacune des parois d'un canal plan anisotherme. Il a ainsi été observé que de chaque côté d'un canal anisotherme l'énergie cinétique turbulente diffère de celle d'un canal plan de niveau de turbulence identique. Cette variation dépend de l'importance du niveau de turbulence, il est probable que cette variation soit tout ou partie due au terme de transfert thermique.

De manière globale, les termes du côté chaud ont des amplitudes plus importantes que côté froid. Les fréquences associées aux termes de transfert sont plus petites. Les transferts sont principalement non locaux du côté chaud, alors que la composante de transfert local (entre les plans) est plus importante côté froid. Enfin, le terme supplémentaire par rapport à l'isotherme indique que de l'énergie cinétique turbulente est transférée du côté chaud vers le côté froid.

### 5.3 Simulation isotherme à $Re_\tau = 395$

Pour notre simulation isotherme à  $Re_\tau = 395$ , l'importante taille du domaine ( $8\pi h, 4\pi h$ ) a limité le temps physique disponible. En effet, sur la machine JADE, les "jobs" impliquant de très nombreux processeurs sont très peu priorisés ; ceci a donc réduit le temps de calcul par rapport aux autres simulations en espaçant d'avantage les sessions de calculs. Les moyennes sont calculées sur 1,118 s soit  $29,96 t_c$ . Le fait d'avoir un domaine plus grand augmente sensiblement le nombre de fréquences accessibles rendant d'autant plus efficace le filtrage mis en place. Des contraintes techniques, liées au fort parallélisme nécessaire pour les simulations à haut nombre de Reynolds, nous ont obligé à limiter le nombre de plans de sortie des données. Il en résulte que les surfaces obtenues pour les deux simulations à haut nombre de Reynolds de frottement ont une résolution inférieure aux précédentes. Pour autant, elles ne sont pas moins représentatives de la physique.

#### 5.3.1 Mécanismes fondamentaux

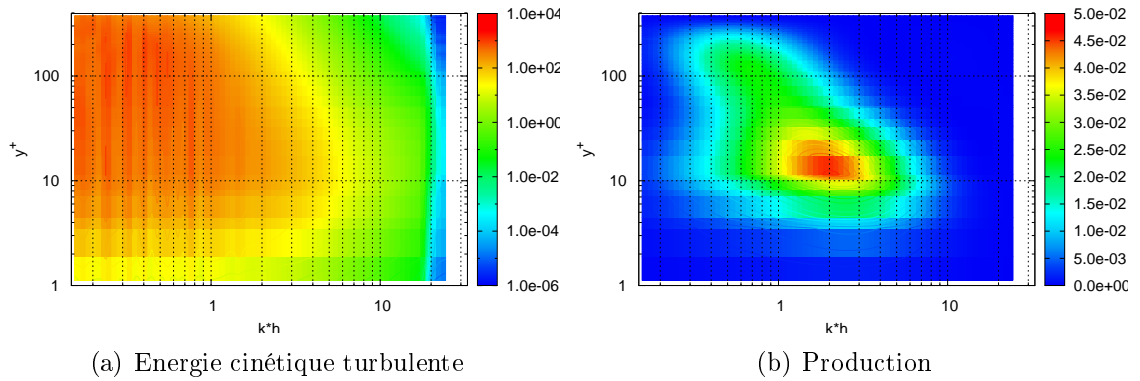


FIGURE 5.20 – Spectres des mécanismes globaux de transfert SND isotherme  $Re_\tau = 395$

L'énergie cinétique turbulente (figure 5.20(a)) décroît très rapidement à partir de  $kh = 10$ . Les zones les moins énergétiques sont les très petites échelles  $kh > 20$ . La décroissance, physiquement très rapide dans cette zone, est amplifiée par la coupure fréquentielle du filtrage SGE. Dans la zone  $y^+ = 10$  à  $y^+ = 30$ , la zone de forte énergie cinétique turbulente subsiste à plus petites échelles ( $kh = 6$ ). Lorsqu'on s'éloigne de la paroi, la zone hautement énergétique s'arrête à plus basse fréquence, pour un minimum de  $kh = 2$  au centre du canal.

Nous observons que la production d'énergie cinétique turbulente (figure 5.20(b)) s'étend dans tout le canal et sur une large gamme de fréquences. Son maximum est localisé à  $y^+ = 15$  et  $kh = 2$ . Autour de ce maximum, l'énergie est produite sur

une large gamme d'échelles ( $kh = 0,5$  à  $kh = 8$ ) et sur de nombreux plans  $y^+ = 5$  à  $y^+ = 50$ . Au delà de  $y^+ = 50$ , la gamme de fréquences se restreint et plus l'on s'éloigne du maximum, plus grandes sont les échelles impliquées dans la production (à  $y^+ = 50$  la gamme est  $0,5 < kh < 2$  et à  $y^+ = 180$  la gamme est  $0,3 < kh < 1$ ). La production s'arrête à  $y^+ = 200$  et  $kh = 0,3$ .

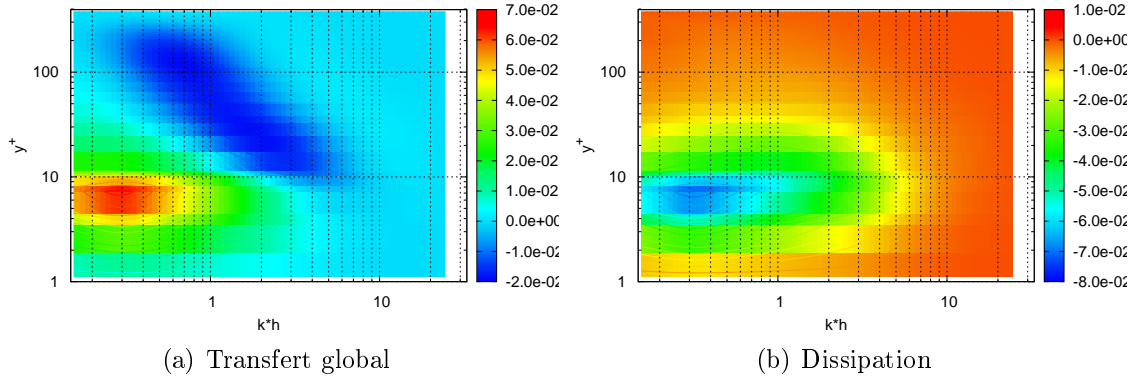


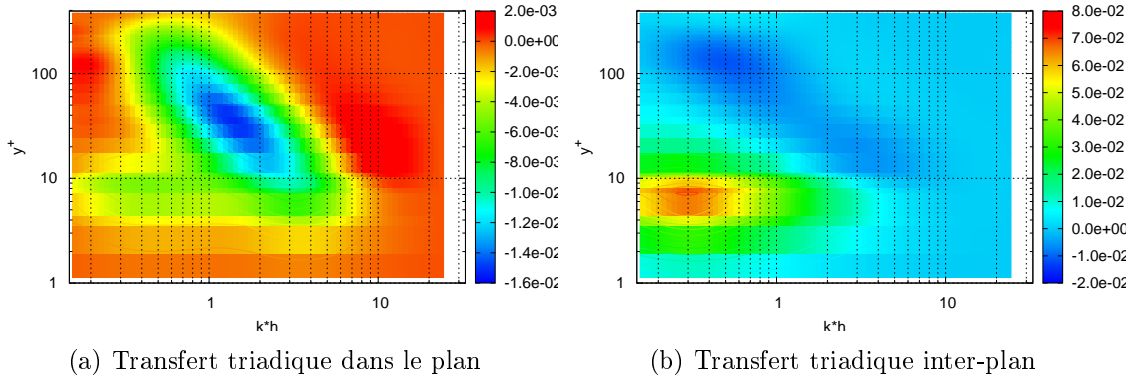
FIGURE 5.21 – Spectres des mécanismes globaux de transfert SND isotherme  $Re_\tau = 395$

Le transfert d'énergie, représenté figure 5.21(a), montre que le transfert se fait principalement des échelles médianes vers les grandes échelles. L'énergie cinétique est déplacée de la zone où l'énergie cinétique est produite (figure 5.20(b)) vers la proche paroi ( $y^+ = 8$ ) pour de très grandes échelles ( $kh < 0,1$ ). Ce transfert est à la fois local et non local. La zone négative au delà de  $kh = 2$  n'a pas de fréquences réceptrices équivalentes. L'énergie associée à ces fréquences est donc transférée de manière non-locale. Les autres fréquences transfèrent leur énergie de manière locale.

Comme pour les autres simulations, la dissipation (figure 5.21(b)) est concentrée sur la proche paroi dans la zone où l'énergie cinétique est transférée.

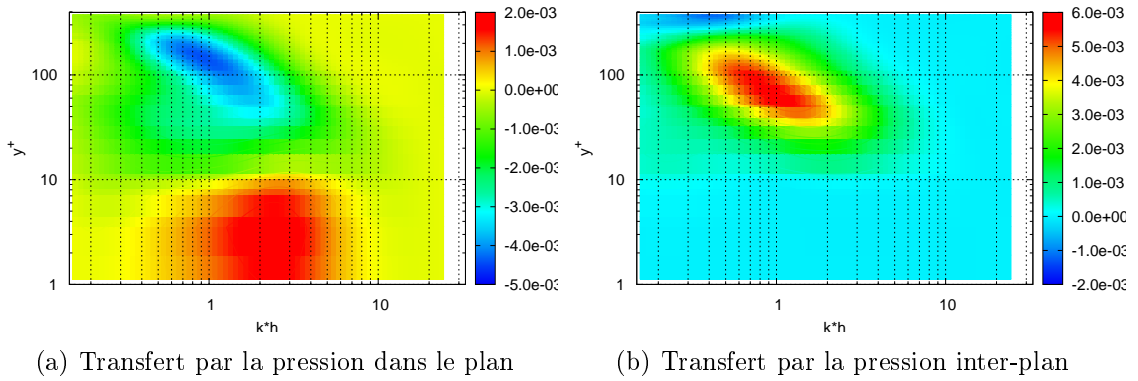
### 5.3.2 Décomposition du terme de transfert

Le transfert thermique n'est pas représenté car de norme négligeable ( $\approx 10^{-5}$ ). Le terme de transfert triadique dans le plan (figure 5.22(a)) possède 2 zones très différentes centrées autour de  $y^+ = 20$ . La zone positive ( $5 < kh < 20$ ,  $10 < y^+ < 60$ ) est de faible norme par rapport au terme de transfert total (figure 3.12(b)). La zone négative est très étendue, elle va de  $y^+ = 4$  à  $y^+ = 300$ . Visuellement, elle est divisée en deux parties : une partie rectangulaire localisée autour de  $y^+ = 6$  à très basse fréquence  $kh < 1$  et une ovale qui s'étend à la fois dans les fréquences et les plans. Comme c'est le cas pour d'autres termes, la taille des structures qui sont associées à la partie ovale, augmente avec la distance à la paroi ; les fréquences vont de  $0,3 < kh < 1$  pour  $y^+ = 300$  à  $2 < kh < 8$  pour  $y^+ = 5$ . On observe ici un transfert non local de l'énergie des basses fréquences vers les hautes fréquences, ce


 FIGURE 5.22 – Spectres SND isotherme  $Re_\tau = 395$ 

qui ressemble au transfert d'énergie cinétique turbulente en turbulence homogène isotrope.

Le transfert triadique inter-plan (figure 5.22(b)) est semblable au terme de transfert total. En effet, sa norme correspond à 90% de la norme du transfert total. La partie de la zone qui correspond au transfert non-local de l'énergie ( $1 < kh < 10$ ) est de norme plus faible que dans le transfert total.


 FIGURE 5.23 – Spectres SND isotherme  $Re_\tau = 395$ 

Le figure 5.23(a) représente le terme de transfert dans le plan par la pression. Il transfère l'énergie depuis le centre du canal ( $30 < y+ < 300$ ) vers la proche paroi ( $y+ < 10$ ). Ce transfert est de norme similaire au transfert triadique dans le plan. Le transfert de ce terme est local. Comme pour les termes triadiques, la distance à la paroi est liée à la taille des structures qui échangent de l'énergie ( $1 < kh < 3$  pour  $y+ = 30$  et  $6 < kh < 1$  pour  $y+ = 300$ ).

Le terme de transfert inter-plan par la pression (figure 5.23(b)) possède une zone négative au centre du canal et une zone positive dont le maximum est localisé en  $kh = 0.7$  et  $y^+ = 45$  et qui s'étend jusqu'à  $y^+ = 10$ . Ces deux zones échangent de l'énergie entre grandes échelles depuis  $kh < 3$  pour la zone positive vers  $kh < 1$  pour la zone négative. Comme pour le terme de transfert par la pression dans le plan, le transfert par ce terme est local et sa norme est équivalente à celle du transfert triadique dans le plan.

Nous avons constaté que dans un canal plan isotherme à haut nombre de Reynolds, la production de l'énergie cinétique turbulente se fait sur une large gamme d'échelle et dans tout le volume. Le transfert d'énergie cinétique turbulente se fait de manière locale au travers du terme de transfert triadique inter-plan et des termes de transfert par la pression et de manière non-locale par le transfert triadique dans le plan. La taille des structures impliquées dans les transferts d'énergie augmente en s'éloignant de la paroi.



## 5.4 Simulation anisotherme à $Re_\tau = 395$

La simulation anisotherme à  $Re_\tau = 395$  présente une taille de première maille très petite ce qui divise d'autant les pas de temps et limite donc le temps physique de calcul disponible. Les moyennes sont calculées sur  $0.657 s$  soit  $16.73 t_c$  côté chaud. De la même manière que pour la simulation à faible nombre de Reynolds, nous adimensionnons les spectres par les grandeurs  $u_\tau$  et  $\nu$  locales. Sur les figures 5.24(a) à 5.32(b) les zones blanches sont liées aux différences de nombre de Reynolds turbulents des deux côtés du canal.

### 5.4.1 Mécanismes fondamentaux

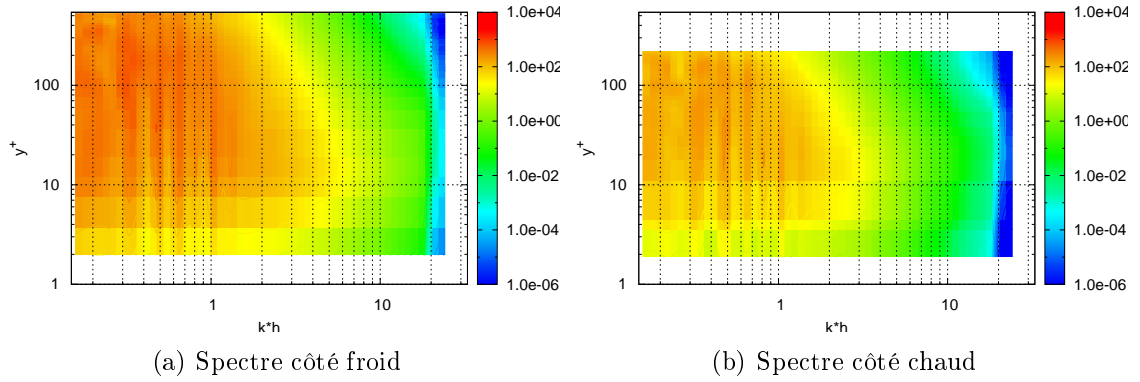
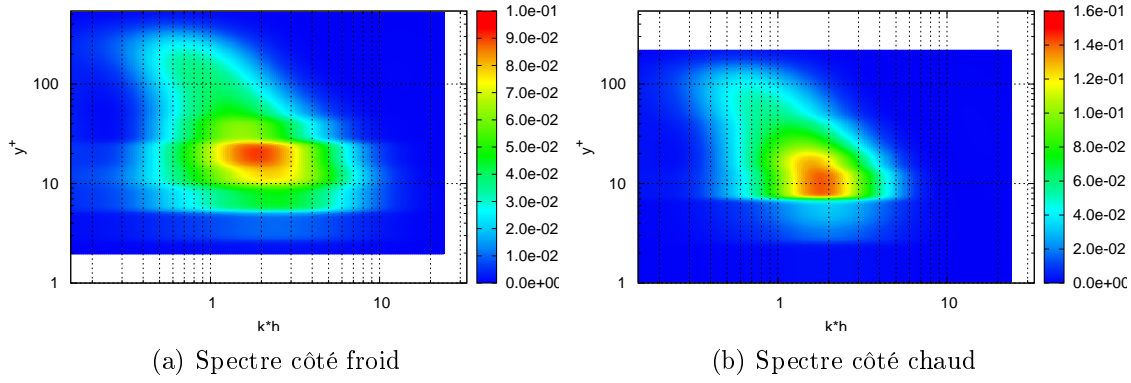


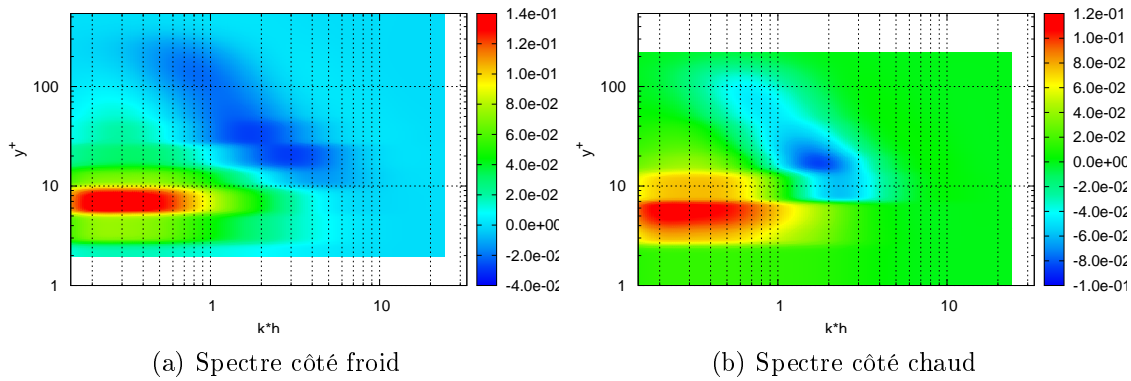
FIGURE 5.24 – Energie cinétique turbulente  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$

L'énergie cinétique turbulente côté froid (figure 5.24(a)) est de forte norme entre  $5 < y^+ < 300$  pour  $kh < 5$ . Vers le centre canal, la fréquence qui délimite cette zone se déplace vers  $kh = 2$ . Comme précédemment, nous voyons clairement, à partir de  $kh = 20$ , la coupure fréquentielle de la SGE. Du côté chaud (figure 5.24(b)), la zone la plus énergétique voit sa surface se réduire. La fréquence limitant cette zone passe à  $kh = 3$ . La décroissance de l'énergie en proche paroi semble plus rapide. Nous pouvons observer sur ces deux figures, que le niveau d'énergie avant la coupure fréquentielle est encore très important. Pour atteindre une SND, il faudrait donc énormément réduire la taille des mailles.

Compte tenu de cette information, l'utilisation de la SGE pour réaliser ces études semble indispensable. En quasi-SND, le coût numérique de la simulation serait multiplié au moins par  $4^3$  pour un même temps physique de simulation. Au facteur 4 dû au raffinement dans les directions  $x$  et  $z$ , il faut ajouter l'adaptation de la grille dans la direction  $y$  pour améliorer la capture de la couche visqueuse. De plus, pour fonctionner, le solveur multi-grilles impose des restrictions sur la taille des mailles au centre du canal. Ces changements donnent un facteur au minimum de 4 sur la grille et 4 sur le pas de temps.

FIGURE 5.25 – Production turbulente  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$ 

La figure 5.25(a) représente la production turbulente côté froid. Le maximum de la production se situe en  $y^+ = 15$  et  $kh = 2$ . Au centre du canal, la production se fait jusqu'à  $y^+ = 300$  et vers la proche paroi jusqu'à  $y^+ = 7$ . L'énergie est produite sur une large gamme de fréquences ( $0,5 < kh < 8$ ). Vers le centre canal, la production s'arrête autour de  $y^+ = 300$  et ce sont les structures de grandes tailles qui produisent l'énergie cinétique turbulente ( $0,5 < kh < 1$  pour  $y^+ = 200$ ). La figure 5.25(b) représentant le côté chaud, montre que le maximum de production turbulente se rapproche de la paroi ( $y^+ = 10$ ) et que la gamme de fréquences se restreint ( $0,6 < kh < 4$ ), tout en restant centrée autour de  $kh = 2$ . Comme du côté froid, en s'éloignant de la paroi, les structures intervenant dans la production se limitent aux grandes échelles ( $0,6 < kh < 1$  pour  $y^+ = 80$ ). L'intensité de la production côté chaud est plus importante que du côté froid (d'environ un facteur 1,5).

FIGURE 5.26 – Transfert total  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$

Le transfert total côté froid (figure 5.26(a)) représente un transfert d'énergie du centre du canal vers la proche paroi. Ce transfert est principalement local et implique une large gamme d'échelles ( $0,4 < kh < 10$ ). Comme précédemment, la partie négative du terme voit la taille des structures qui lui sont associées augmenter avec la distance à la paroi, alors que la partie positive est concentrée sur la proche et très proche paroi sur une gamme d'échelles fixe ( $kh < 1$ ). Du côté chaud (figure 5.26(b)), un comportement quasi-similaire est observé. Mais, le transfert, plus intense que du côté froid, voit sa composante non locale devenir majoritaire. L'essentiel des transferts se fait de  $1 < kh < 3$  vers  $kh < 1$ . De plus, la "largeur" de la gamme de fréquences pour lesquelles la norme du terme est négative et plus restreinte côté chaud que côté froid.

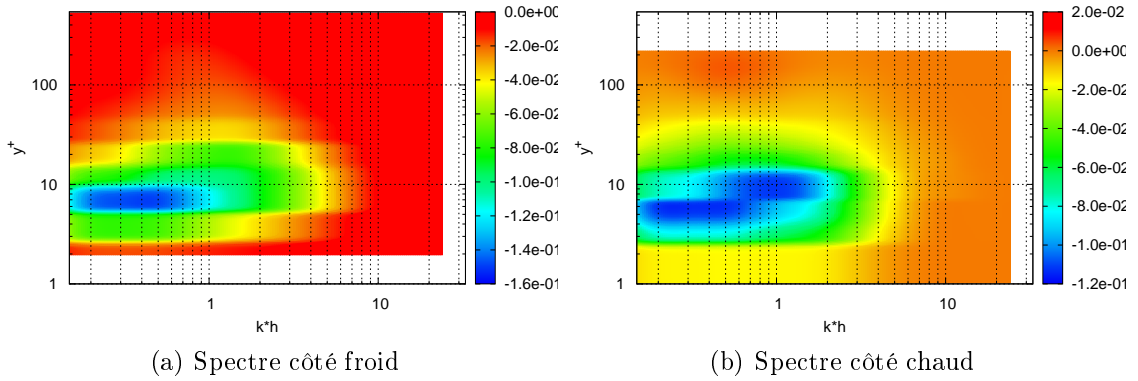
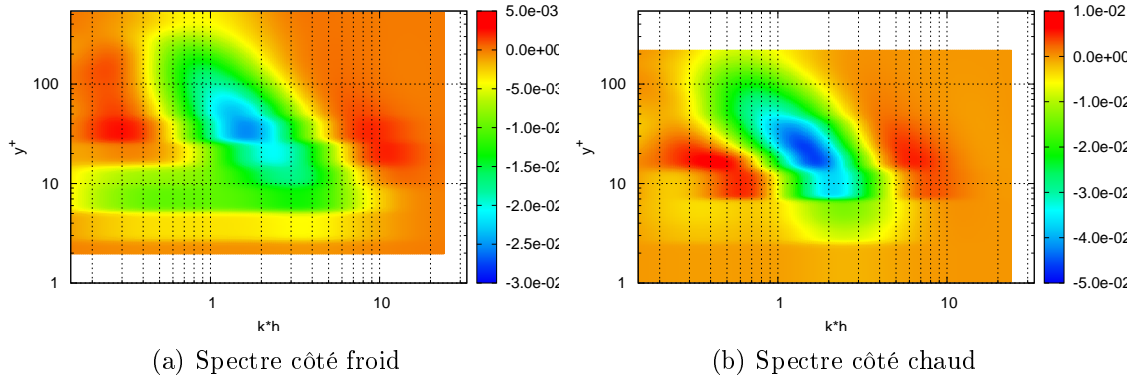


FIGURE 5.27 – Dissipation  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$

La dissipation côté froid (figure 5.27(a)) et côté chaud (figure 5.27(b)) est localisée dans les mêmes  $y^+$ . Elle est globalement aussi intense côté chaud que côté froid. On observe que côté chaud la dissipation s'étend moins vers les petites échelles que côté froid ( $kh = 4$  côté chaud contre  $kh = 5$  côté froid). On remarque qu'il existe (comme pour la simulation à plus faible nombre de Reynolds) une zone légèrement positive à  $y^+ = 150$  et  $kh = 0,5$  côté chaud. Comme précédemment, nous supposons que la diffusion visqueuse est à l'origine de ce phénomène.

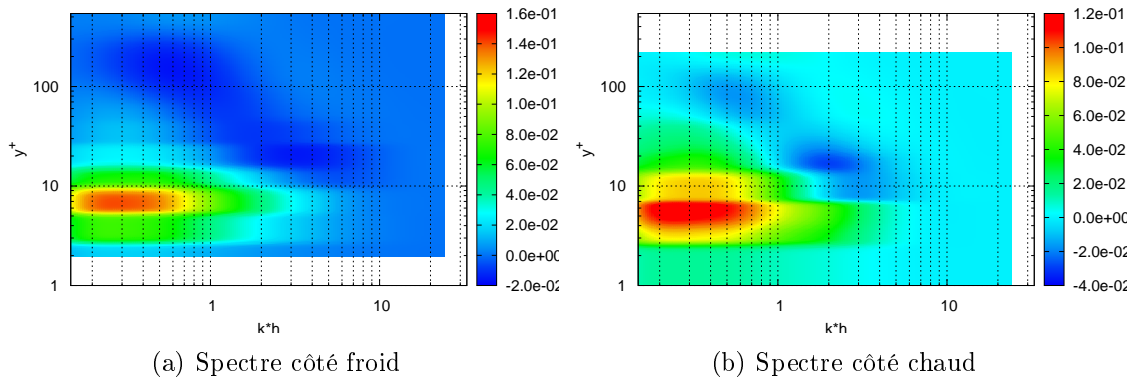
### 5.4.2 Décomposition du terme de transfert

Le terme de transfert triadique dans le plan côté froid (figure 5.28(a)) voit la norme de sa partie négative compter pour moitié de la partie négative du transfert total et pour un trentième de la partie positive. La zone négative occupe toutes les fréquences  $kh < 9$  en deçà de  $y^+ = 15$ . Au-delà de  $y^+ = 15$ , les tailles des structures de la zone négative commencent par se restreindre (en étant limitées par les zones négatives) avant d'augmenter avec la distance à la paroi. Il existe deux zones positives positionnées, sur l'axe des fréquences, de part et d'autre de la zone


 FIGURE 5.28 – Transfert triadique dans le plan  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$ 

négative (pour des  $y^+ > 15$ ). Les deux zones positives sont centrées sur  $y^+ = 30$ ,  $kh = 10$  et  $y^+ = 30$ ,  $kh = 0,3$ . Elles correspondent pour la zone basses fréquences à un transfert local et à un transfert non-local pour la partie hautes fréquences.

Du côté chaud (figure 5.28(b)), la zone négative gagne en norme et compte toujours pour moitié du terme de transfert total. La partie positive, qui voit sa norme doubler compte désormais pour un dixième du terme de transfert total. La zone négative de proche paroi et basses fréquences disparaît en cédant sa place à la zone positive. Les maxima des zones négative et positive sont localisés autour de  $y^+ = 15$  au lieu de  $y^+ = 30$ . La gamme de fréquence de la partie négative est plus restreinte que du côté froid surtout proche de la paroi ( $1 < kh < 5$  pour  $y^+ = 8$ ). De la même manière les zones positives s'étendent sur plus de fréquences. Le transfert a destination des bases fréquences et un transfert local alors qu'il est non local lorsque l'énergie va vers les hautes fréquences.


 FIGURE 5.29 – Transfert triadique inter-plan  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$

La figure 5.29(a) représente le transfert triadique inter-plan du côté froid. On se rend compte qu'ici aussi ce terme est la composante majoritaire du terme de transfert total. Il représente 50% de la partie négative et sa norme est plus importante que la partie positive du transfert total. Du côté chaud (figure 5.29(b)), on peut dresser le même constat, à la différence près que la partie locale du transfert est plus importante que dans le transfert total.

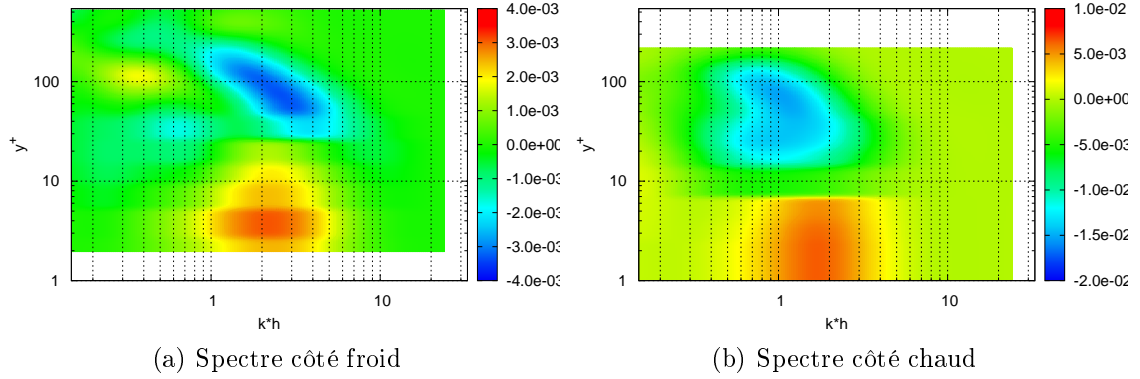
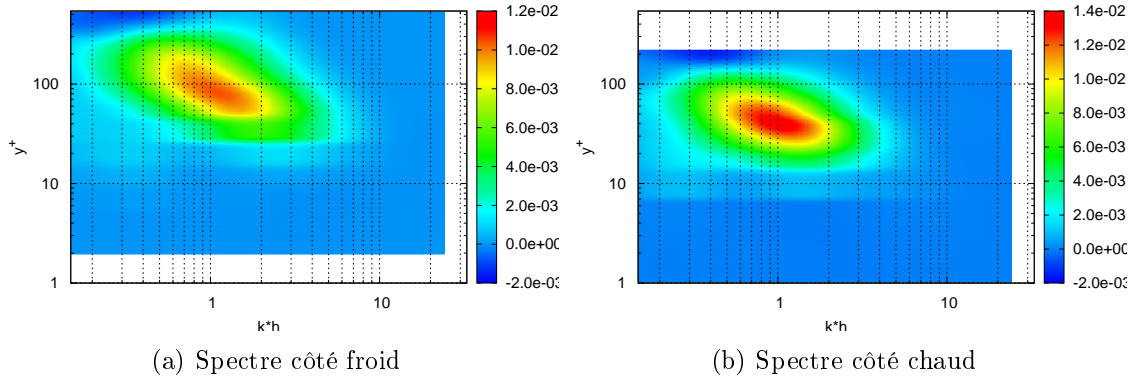
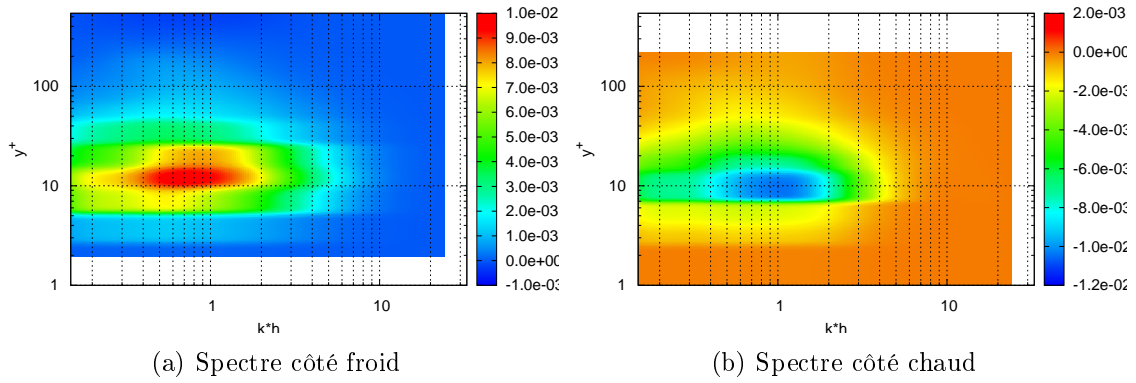


FIGURE 5.30 – Transfert par la pression dans le plan  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$

Le transfert par la pression dans le plan côté froid (figure 5.30(a)) est composé de deux principales parties : une zone positive de très proche paroi ( $y^+ < 25$  pour un maximum autour de  $y^+ = 3$ ) et d'une zone négative pour  $30 < y^+ < 200$ . Les fréquences associés aux deux zones sont similaires ( $0,8 < kh < 8$ ). La partie négative voit la taille des structures augmenter avec la distance à la paroi. Du côté chaud (figure 5.30(b)), l'intensité du terme est doublée pour la partie positive et quintuplée pour la partie négative. Les fréquences des zones positives et négatives sont plus faibles  $0,4 < kh < 4$ . La limite entre zone positive et zone négative est plus proche de la paroi ( $y^+ = 7$ ). Ce terme transfère l'énergie de manière locale.

Les termes de transfert par la pression inter-plan (figure 5.31(a) côté froid et figure 5.31(b) côté chaud) sont composés de deux zones : une zone négative qui occupe le centre du canal et une zone positive qui occupe le reste du canal (jusqu'à  $y^+ = 25$  côté froid et  $y^+ = 4$  côté chaud). Les amplitudes des zones sont identiques entre les ratios de température. La zone positive côté chaud est globalement plus intense que côté froid. Ce terme transfère de l'énergie de manière locale depuis le centre du canal vers le reste du domaine.

Enfin, le terme de transfert thermique (figures 5.32(a) et 5.32(b)) est de norme comparable aux termes de termes de transfert triadique. Ce terme est positif du côté froid et négatif du côté chaud. Il s'étend de  $y^+ = 5$  à  $y^+ = 50$  avec un maximum autour de  $y^+ = 10$ . Les fréquences associées à ce terme sont faibles (grandes structures turbulentes) et vont jusqu'à  $kh = 5$ . Comme pour la simulation


 FIGURE 5.31 – Transfert par la pression inter-plans  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$ 

 FIGURE 5.32 – Transfert par effets thermiques  $Re_\tau = 395$   $T_r = 2$ 

à faible nombre de Reynolds, ce terme transfère l'énergie du côté chaud vers le côté froid.

## 5.5 Comparaison des spectres

Pour comparer les différents spectres, nous séparerons les effets liés au nombre de Reynolds des effets du gradient thermique. Bien que certaines informations peuvent être répétitives, compte tenu de la grande quantité d'information, il semble bon de séparer les différentes étapes d'étude. Pour faciliter les comparaisons nous utiliserons les figures 5.33 à 5.41 pour les deux parties de l'analyse, une lecture horizontale permettra d'y voir les variations dues au changement de nombre de Reynolds alors qu'une lecture verticale donnera accès à l'information thermique.

### 5.5.1 Effet du nombre de Reynolds (simulations isothermes et non isothermes)

#### Energie cinétique turbulente (figure 5.33)

Sur la figures 5.33, nous observons que l'augmentation du nombre de Reynolds provoque un décalage du pic de turbulence de  $y^+ = 20$  vers  $y^+ = 10$ . De plus, on se rend compte que l'augmentation du nombre de Reynolds ne crée pas d'accumulation d'énergie mais remplit d'avantage l'espace des fréquences.

#### Production turbulente (figure 5.34)

Lorsque le nombre de Reynolds turbulent augmente, l'intensité de la production turbulente n'augmente proportionnellement pas. Au contraire, la production se répartit dans le canal. Elle affecte plus de plans en progressant un peu en proche paroi et beaucoup dans la partie médiane du canal. Cette répartition se fait aussi dans le type de structures, la gamme de fréquences s'agrandit en isotherme et du côté froid des canaux. Du côté chaud, l'agrandissement de la gamme de fréquences est faible. Sur les figures à  $Re_\tau = 180$ , nous observons que les structures qui produisent de l'énergie tendent à être plus grandes lorsque l'on s'éloigne de la paroi. Ce comportement est très marqué dans les canaux à  $Re_\tau = 395$ , et même dominant pour  $y^+ > 40$ .

#### Transfert total (figure 5.35)

Le mécanisme de transfert total est similaire dans toutes les simulations ; de l'énergie est prise aux échelles impactées par la production turbulente et est transférée en proche paroi ( $y^+ = 8$ ). La différence se fait au niveau du type de transfert et de son intensité. En effet, à haut nombre de Reynolds, le transfert est moins énergétique mais est réparti dans le volume et occupe plus de surface. Du fait de cette répartition différente, le transfert devient plus local alors que le transfert à bas nombre de Reynolds est plutôt non-local.

#### Dissipation (figure 5.36)

La dissipation se trouve comprise entre  $y^+ = 5$  et  $y^+ = 50$  avec un maximum autour de  $y^+ = 7$ . La dissipation occupe une gamme spectrale sensiblement identique pour les deux nombres de Reynolds simulés. Le nombre de Reynolds influe surtout sur l'intensité de la dissipation ; elle est plus faible à haut nombre de Reynolds qu'à bas nombre de Reynolds.

**Transfert triadique dans le plan (figure 5.37)**

Le transfert triadique dans le plan voit son aspect beaucoup évoluer avec le nombre de Reynolds. Les 3 zones de transfert d'énergie très localisées à faible nombre de Reynolds, occupent quasiment tous les plans et toutes les fréquences à haut nombre de Reynolds. De norme inférieure, les termes à haut nombre de Reynolds conservent des "coeurs" de zones plus énergétiques qui correspondent assez fidèlement aux zones à bas nombre de Reynolds. Ici comme pour le transfert total, le transfert semble basculer d'un transfert non-local dans un même plan vers un transfert plus local entre plan.

**Transfert triadique inter-plan (figure 5.38)**

Le terme de transfert triadique inter-plan majoritaire à bas nombre de Reynolds l'est toujours à haut nombre de Reynolds mais dans une moindre mesure surtout pour la partie négative. On réalise assez facilement sur cette figure que le transfert triadique inter-plan comme le transfert triadique dans le plan s'étend autour de la zone à bas nombre de Reynolds lorsque le nombre de Reynolds augmente en suivant la logique de progression de la taille des structures que nous avons vu pour le transfert total et la production turbulente. Nous arrivons ici à la même conclusion que pour l'autre terme de transfert triadique, lorsque le nombre de Reynolds augmente le transfert devient "plus" local.

**Transfert par la pression dans le plan (figure 5.39)**

Le terme de transfert par la pression dans le plan transfère de l'énergie de la partie médiane du canal vers la proche paroi et ceux dans des fréquences de l'ordre de grandeur de la demi hauteur du canal. Bien que l'amplitude de la partie positive diminue de norme lorsque le nombre de Reynolds augmente, la partie négative de ce terme tend à devenir proportionnellement plus importante. De plus lors de l'augmentation du nombre de Reynolds, la taille des structures des zones négatives varie en fonction de la distance à la paroi.

**Transfert par la pression inter-plan (figure 5.40)**

Le terme de transfert par la pression inter-plan transfère l'énergie du centre du canal vers une zone médiane entre milieu du canal et proche paroi. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, la taille des structures de la zone positive se met à varier avec la distance à la paroi. L'intensité de ce terme diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente.

**Transfert thermique (figure 5.41)**

Le terme de transfert thermique n'est bien sûr représenté que pour les simulations anisothermes. L'augmentation du nombre de Reynolds modifie l'intensité du terme. Lorsque le nombre de Reynolds augmente l'intensité du terme diminue, mais comme pour les autres termes de transfert, son importance relative augmente. A bas nombre de Reynolds, sa norme correspond à celle d'un terme de transfert par la pression alors qu'à haut nombre de Reynolds, elle correspond au terme de transfert triadique inter-plan.



De manière globale, l'augmentation du nombre de Reynolds se résume par :

- Une production d'énergie cinétique turbulente plus homogène dans le canal et plus diversifiée en taille de structures.
- La gammes des structures porteuses d'énergie augmente et la répartition de l'énergie entre ces structures s'homogénéise.
- Une spécialisation des tailles de structures intervenant dans les échanges d'énergie en fonction du terme et de la distance à la paroi.
- Une diminution des normes des termes de transferts mais la répartition du transfert d'énergie est plus équilibrée entre les différents termes.

Nous noterons que, pour l'ensemble des termes que nous avons vu, les fréquences intervenant dans les échanges d'énergie sont toutes éloignées des fréquences de coupures choisies pour nos SGE. Ainsi bien que la SGE ait un impact sur le contenu fréquentiel des écoulements, notre choix de fréquence de coupure nous permet *a priori* d'étudier les termes de transfert de l'énergie sans dénaturer leurs comportements.

Dans leur étude de l'équation de l'énergie cinétique turbulente en SND, Saikrishnan *et al.* [74] montrent des termes dans l'espace physique que les amplitudes des termes de transferts varient peu entre  $Re_\tau = 180$  et  $Re_\tau = 300$ . Leur représentation s'intéressant à l'intégrale des termes de transfert ceci correspond bien à notre comportement puisqu'une diminution des amplitudes des termes avec une augmentation de la gamme d'échelles conduit à une légère augmentation de la valeur de l'intégrale. Pour des nombres de Reynolds plus élevés ( $Re_\tau = 590$  et  $Re_\tau = 965$ ), les auteurs indiquent que les termes de transfert dans l'espace physique sont identiques dans la partie intérieure de la région logarithmique. De plus, pour  $Re_\tau = 590$ , entre  $y^+ = 6$  et  $y^+ = 37$ , les auteurs indiquent que le transfert d'énergie résulte d'une compétition entre un transfert dans le sens de la cascade et dans le sens inverse (backscatter). Cette compétition est globalement favorable au sens direct pour le terme de transfert triadique dans le plan et au sens inverse pour le terme de transfert interplan. On retrouve ici le comportement que nous observons dans nos simulations. Les auteurs ne font pas référence à ces transferts pour les nombres de Reynolds inférieurs. On pourra trouver différentes études sur la cascade inverse en proche paroi [52, 75, 76]. Ces travaux s'intéressent aux causes du backscatter et étudient notamment l'anisotropie de l'écoulement, l'anisotropie des transferts d'énergie et les modifications des structures turbulente.

### 5.5.2 Effet du gradient de Température

#### Énergie cinétique turbulente (figure 5.33)

Lors de l'ajout d'un gradient de température à bas nombre de Reynolds, l'énergie cinétique turbulente du côté froid se répartit sur une plus large gamme de fréquences alors que du côté chaud l'effet inverse se produit. A haut nombre de Reynolds, le côté froid est peu sensible à la contrainte imposée par le gradient de température alors que du côté chaud, la gamme de fréquences et la norme de l'énergie cinétique turbulente diminuent, ces deux changements sont principalement dus au changement

de viscosité du fluide.

**Production turbulente (figure 5.34)**

La production d'énergie cinétique turbulente voit sa norme augmenter des côtés chaud et froid lorsqu'on applique le gradient thermique. Du côté chaud, la production se concentre autour du maximum de la production en isotherme. Du côté froid, à bas nombre de Reynolds, la production s'étend vers de plus petites échelles et son maximum de production se déplace dans le même temps. A haut nombre de Reynolds, comme pour l'énergie cinétique turbulente, l'effet du gradient de température se fait peu sentir.

**Transfert total (figure 5.35)**

En s'intéressant aux transferts d'énergie global soumis aux gradients de température, on se rend compte qu'à bas nombre de Reynolds, le transfert évolue dans le même sens que le nombre de Reynolds local. Ainsi, le transfert diminue légèrement du côté froid et devient moins non-local alors que du côté chaud, la norme du transfert augmente et son aspect non-local s'accroît. A haut nombre de Reynolds, le transfert suit une évolution identique pour le côté chaud alors que du côté froid, le caractère non-local reste dans les mêmes proportions pendant que l'amplitude augmente.

**Dissipation (figure 5.36)**

Du côté froid, seule l'amplitude de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente est affectée par le gradient de température et se traduit par une augmentation. Du côté chaud, l'amplitude de la dissipation augmente aussi ; elle progresse plus dans le cas à faible nombre de Reynolds que dans le cas à haut nombre de Reynolds. De plus du côté chaud, on voit apparaître une zone positive que nous avons attribuée à la diffusion visqueuse.

**Transfert triadique dans le plan (figure 5.37)**

Le transfert triadique dans le plan subit fortement l'effet du gradient de température. L'aspect non-local du terme diminue puisque les zones négative et positive ont des gammes d'échelles plus grandes et qui commencent à se recouper. De plus, la variation des échelles turbulentes en fonction de la distance à la paroi est plus forte que dans le cas isotherme. Du côté chaud, l'amplitude globale du terme augmente, les zones négatives se réduisent dans la direction  $y$  rendant le transfert plus local (très local dans le cas bas Reynolds et un peu moins local dans le cas haut Reynolds).

**Transfert triadique inter-plan (figure 5.38)**

Le transfert triadique inter-plan change de comportement, de la même manière que lorsque le nombre de Reynolds change. Du côté froid, l'amplitude globale du terme diminue, le transfert implique plus d'échelles et par ce biais devient moins local. Du côté chaud, l'amplitude du terme augmente et le transfert se "localise".

**Transfert par la pression dans le plan (figure 5.39)**

L'effet du gradient thermique sur le terme de transfert par la pression dans le plan est similaire à l'effet du nombre de Reynolds. Ainsi, l'amplitude diminue et la spécificité

des échelles augmente du côté froid quand l'amplitude augmente et la spécificité des échelles disparaît du côté chaud.

**Transfert par la pression inter-plan (figure 5.40)**

De la même manière que le terme de transfert par la pression dans le plan, le transfert par la pression inter-plan subit l'effet du changement de nombre de Reynolds. La taille des structures turbulentes intervenant dans le transfert réduit du côté froid, alors qu'elle tend à se concentrer du côté chaud. De plus, le gradient de température crée une augmentation de la norme du terme côté chaud et côté froid.

**Transfert thermique (figure 5.41)**

Le terme de transfert thermique, négligeable en isotherme devient positif du côté froid et négatif du côté chaud créant un transfert d'énergie du côté chaud vers le côté froid.

Nous pouvons résumer l'effet du gradient thermique selon plusieurs aspects. La modification de la viscosité provoque la redistribution de la quantité de mouvement et change les nombres de Reynolds locaux. Ceci provoque sur les termes de transfert le même effet qu'un changement classique de nombre de Reynolds. Le deuxième aspect est une augmentation de la production turbulente et de la dissipation plus forte que la diminution imposée par l'effet classique du nombre de Reynolds. Finalement, le gradient thermique crée un échange d'énergie entre le côté chaud et le côté froid qui correspond à environ 8% du terme de production côté chaud et 10% de la production côté froid.

**Diverses considérations**

Que ce soit sous l'effet de l'augmentation du nombre de Reynolds ou du gradient de température (côté froid), les termes impliquant des gradients de grandeurs stationnaires voient la taille de leurs structures associées être liée par la distance à la paroi. Dans les deux cas, ces gradients sont moins importants que pour la simulation isotherme à bas nombre de Reynolds. La diminution de ces gradients permet aux structures turbulentes de coalescer vers des structures de plus grandes tailles.

L'ensemble des observations faites dans cette partie peuvent être sujet à discussion. Les effets de Reynolds ou du gradient thermique ne sont constatés que sur 4 simulations et suppose donc une linéarité des comportements entre les simulations. Pour lever les doutes sur ce point, il sera nécessaire de réaliser d'autres simulations aux dimensions caractéristiques intermédiaires à celles déjà réalisées puis dans la mesure des capacités numériques augmenter le niveau de turbulence et le ratio de température au-delà de ceux utilisés ici.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord validé la capacité de notre post-traitement à capturer la physique de l'écoulement dans l'espace spectral en nous comparant à Moser *et al.* [59] et Bolotnov *et al.* [45]. Puis nous avons décrit en détail le comportement des différents termes spectraux de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente pour chacune de nos simulations. Enfin, nous avons comparé les différents résultats pour faire ressortir les effets liés au changement de nombre de Reynolds et ceux liés au gradient thermique. Lors de l'augmentation du nombre de Reynolds, la taille des structures participant aux transferts d'énergie cinétique turbulente augmente avec la distance à la paroi. L'application d'un fort gradient de température augmente l'intensité des transferts d'énergie cinétique turbulente et crée un transfert d'énergie du côté chaud vers le côté froid.

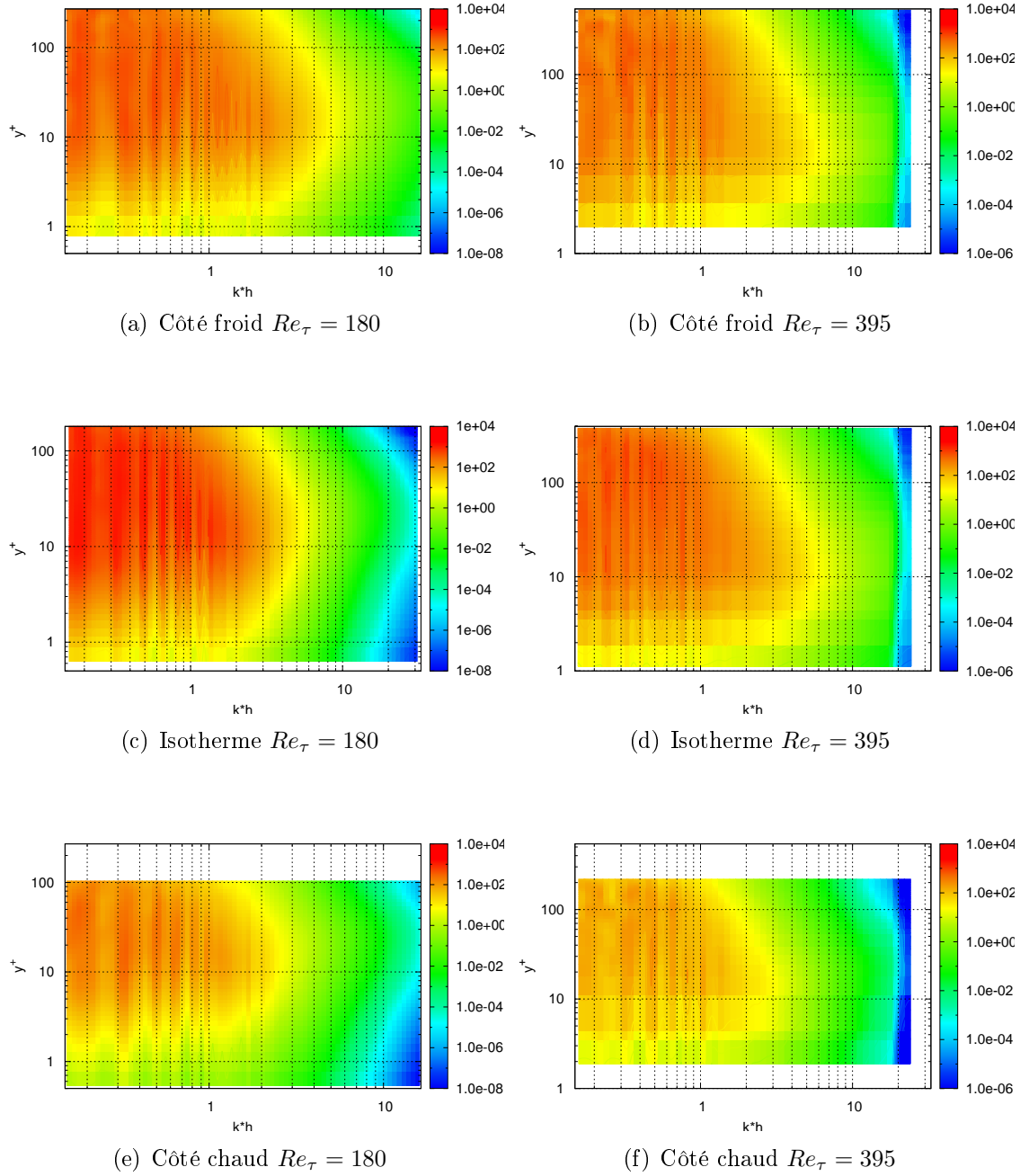


FIGURE 5.33 – Energie cinétique turbulente

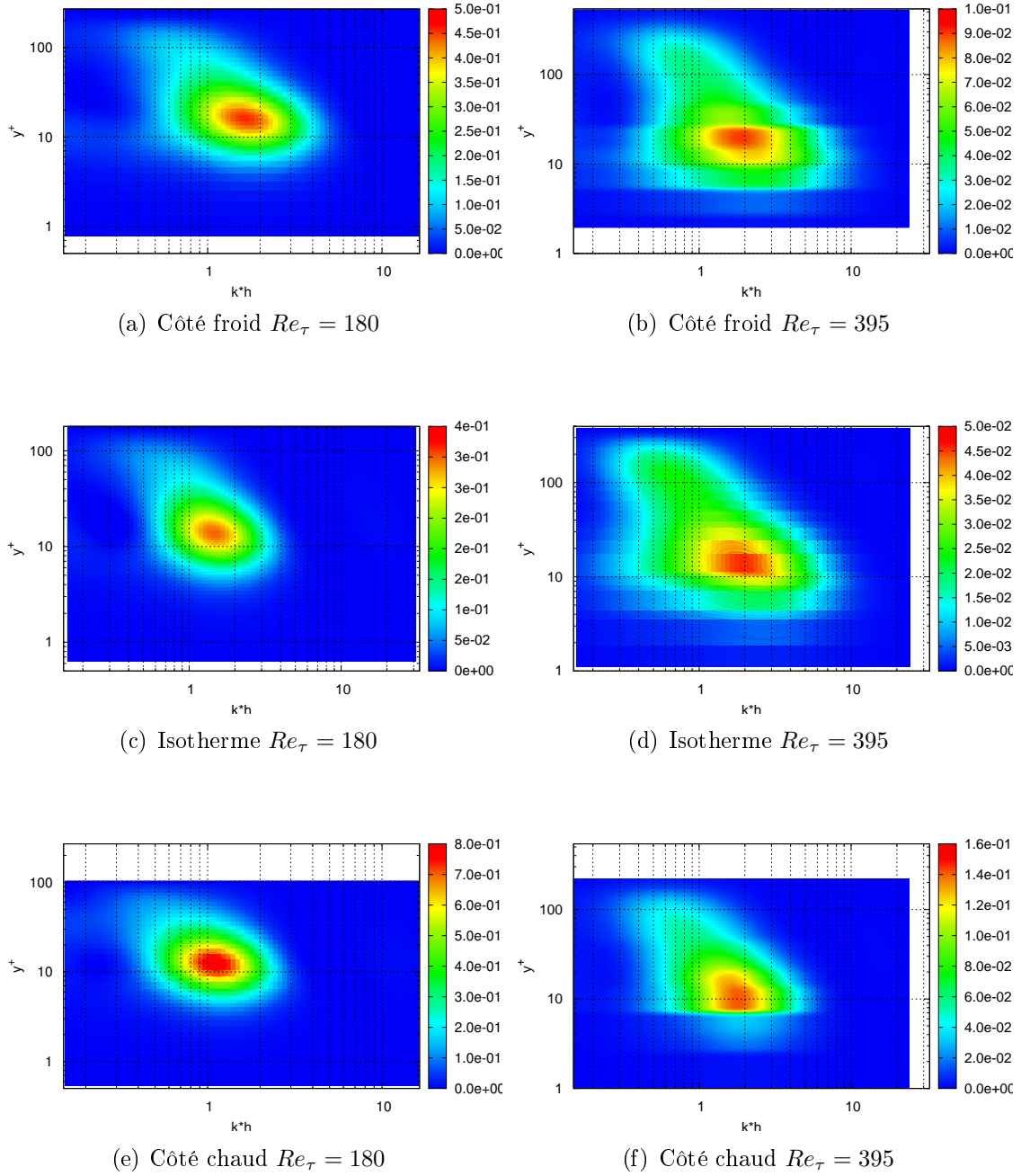


FIGURE 5.34 – Production turbulente

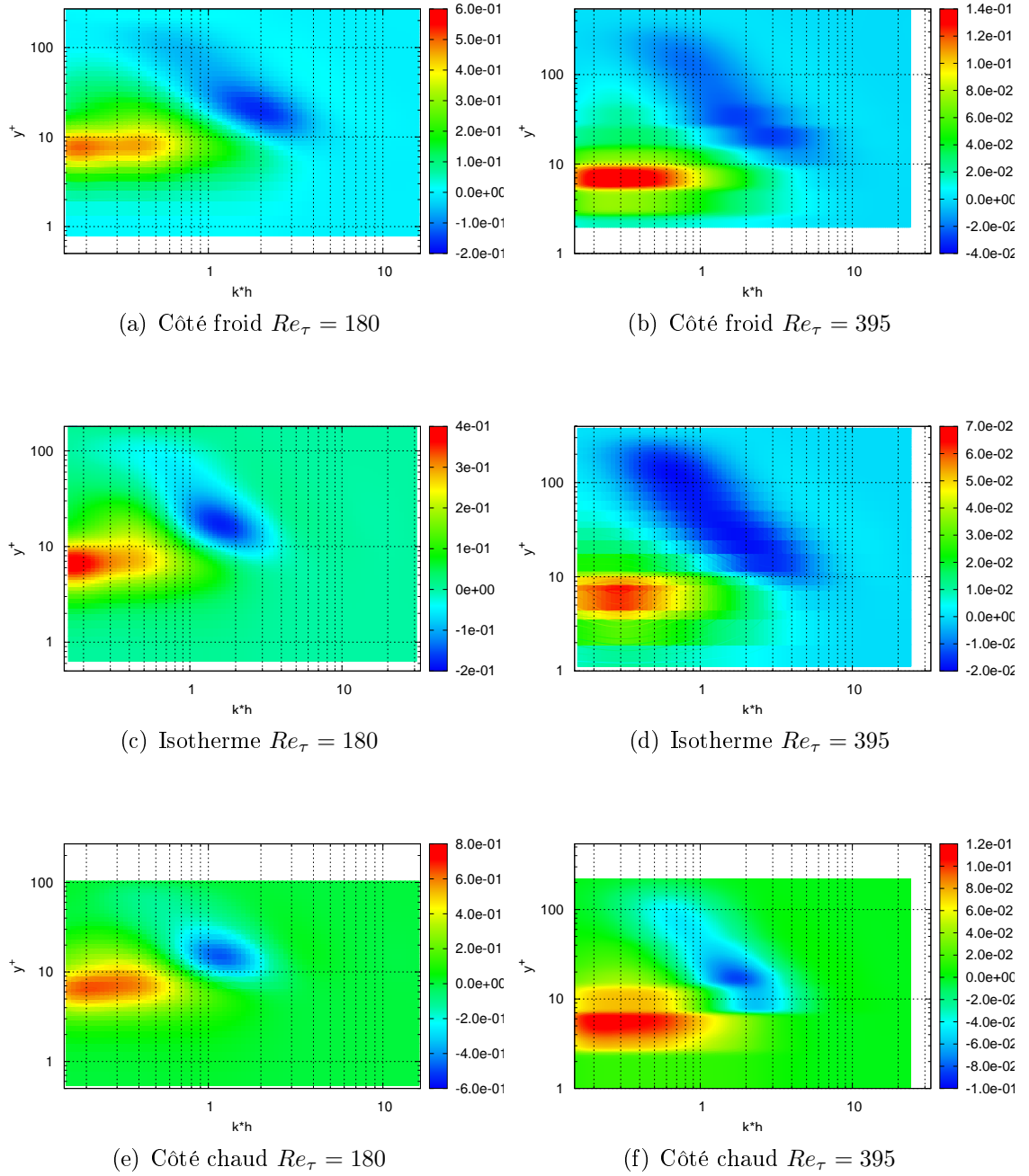


FIGURE 5.35 – Transfert total

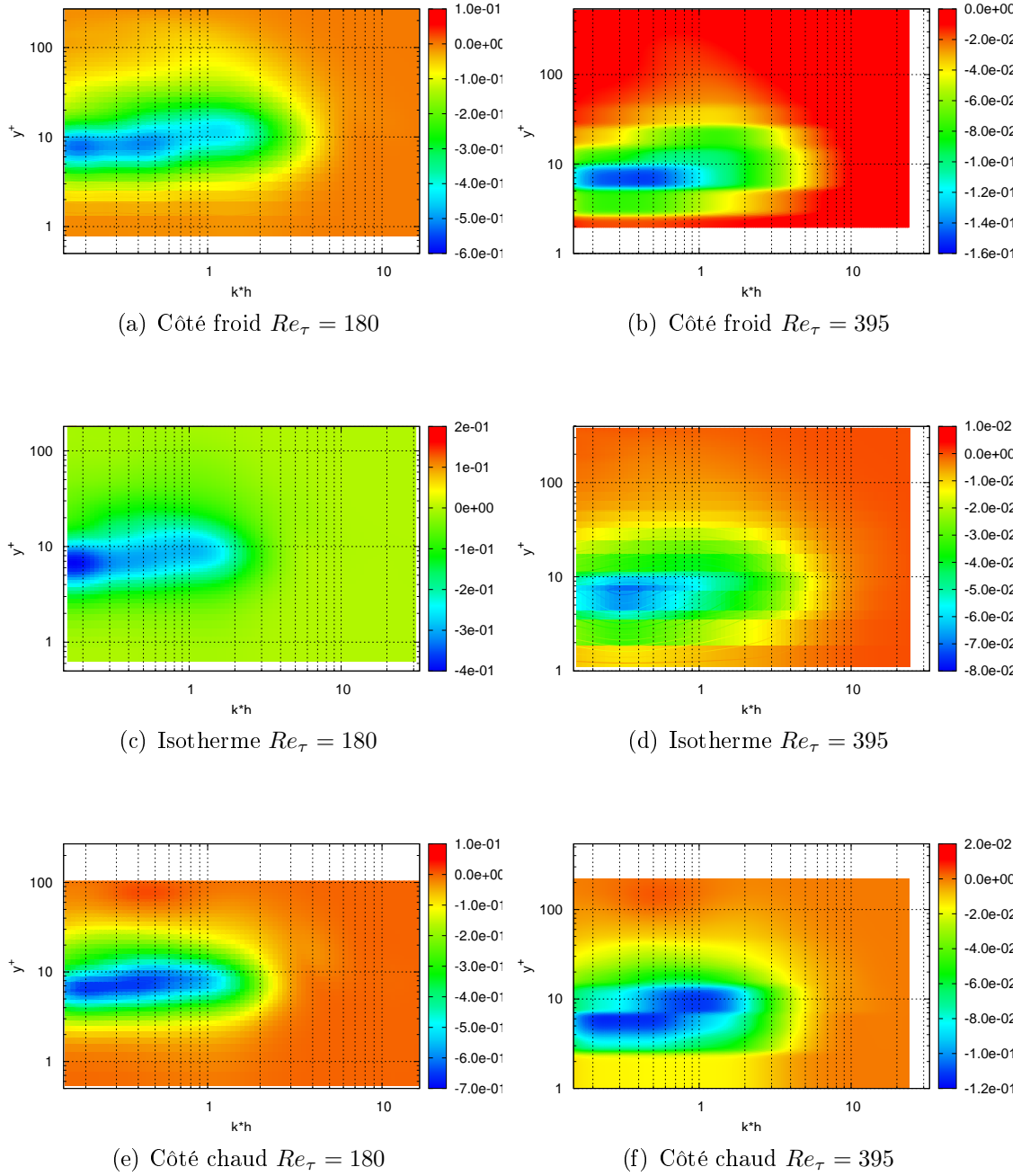


FIGURE 5.36 – Dissipation



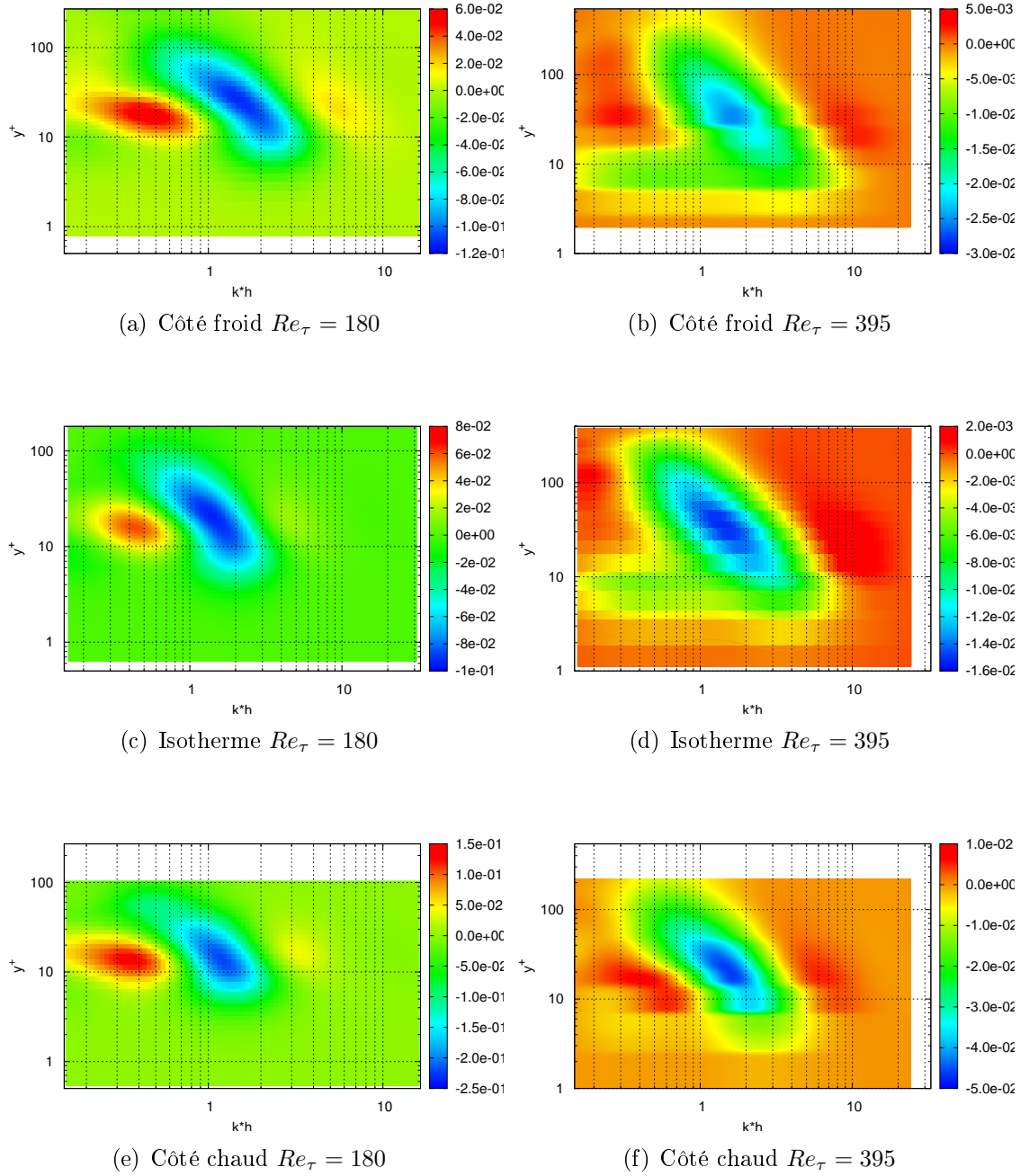


FIGURE 5.37 – Transfert triadique dans le plan

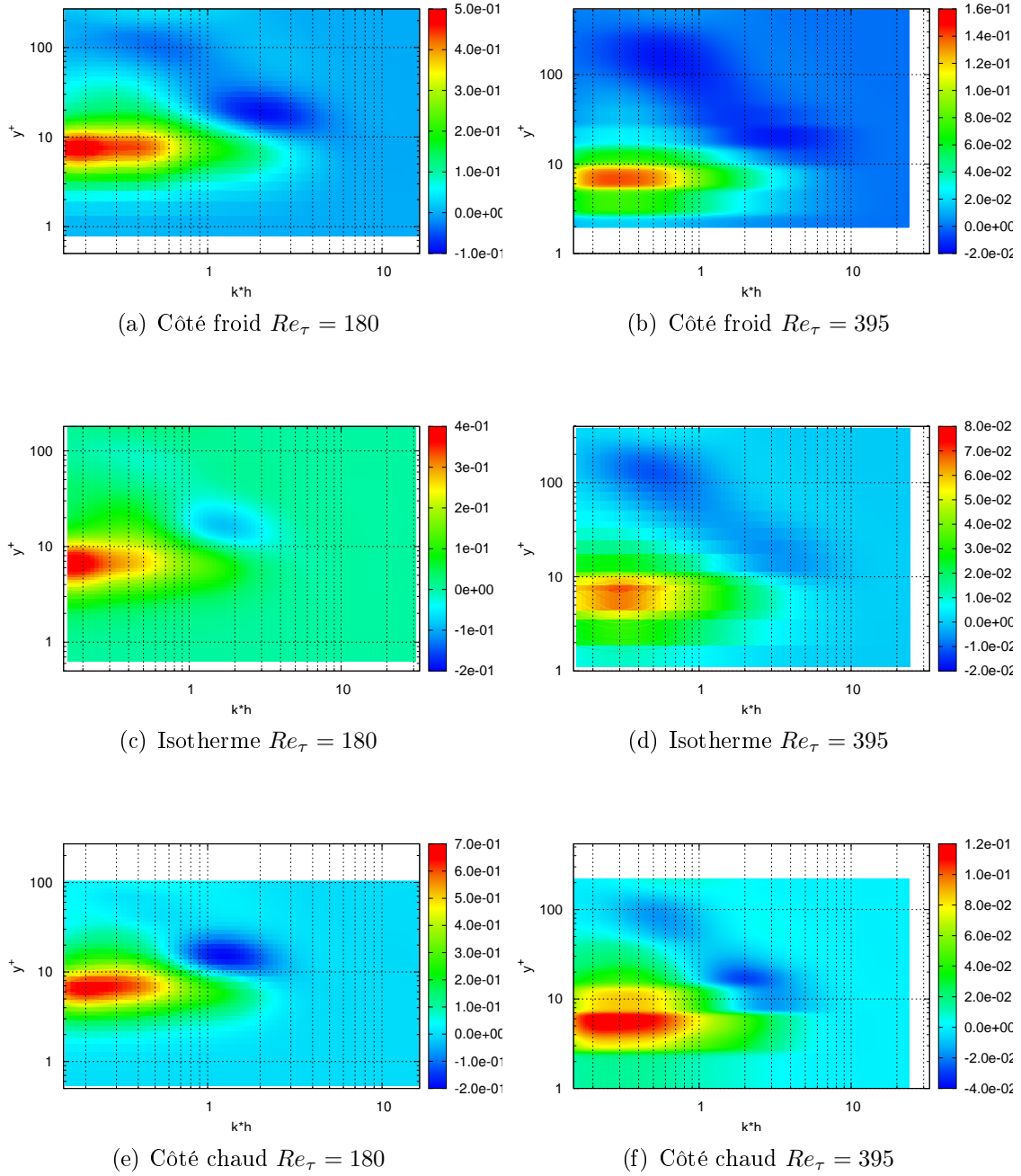


FIGURE 5.38 – Transfert triadique inter plan

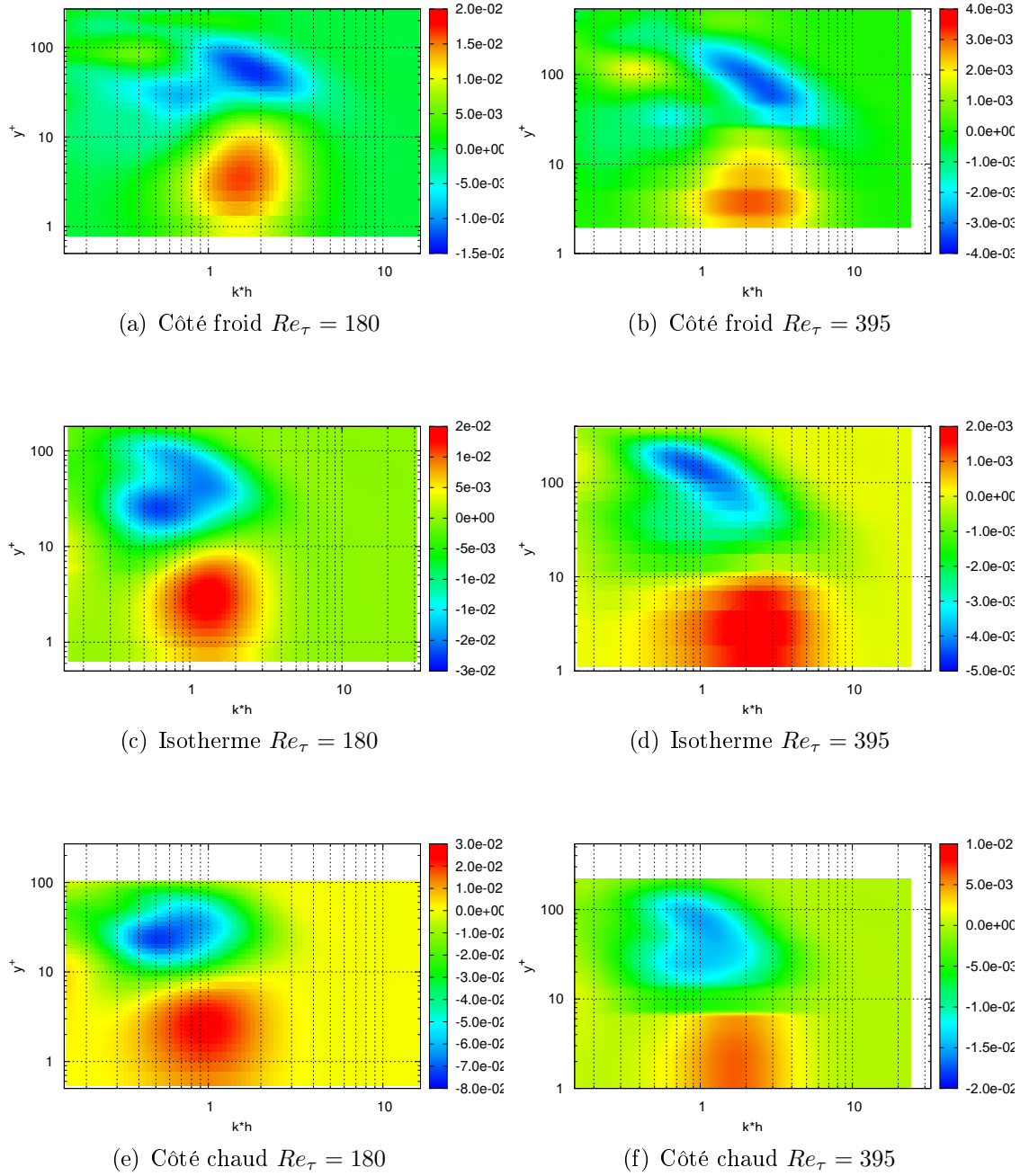


FIGURE 5.39 – Transfert par la pression dans le plan

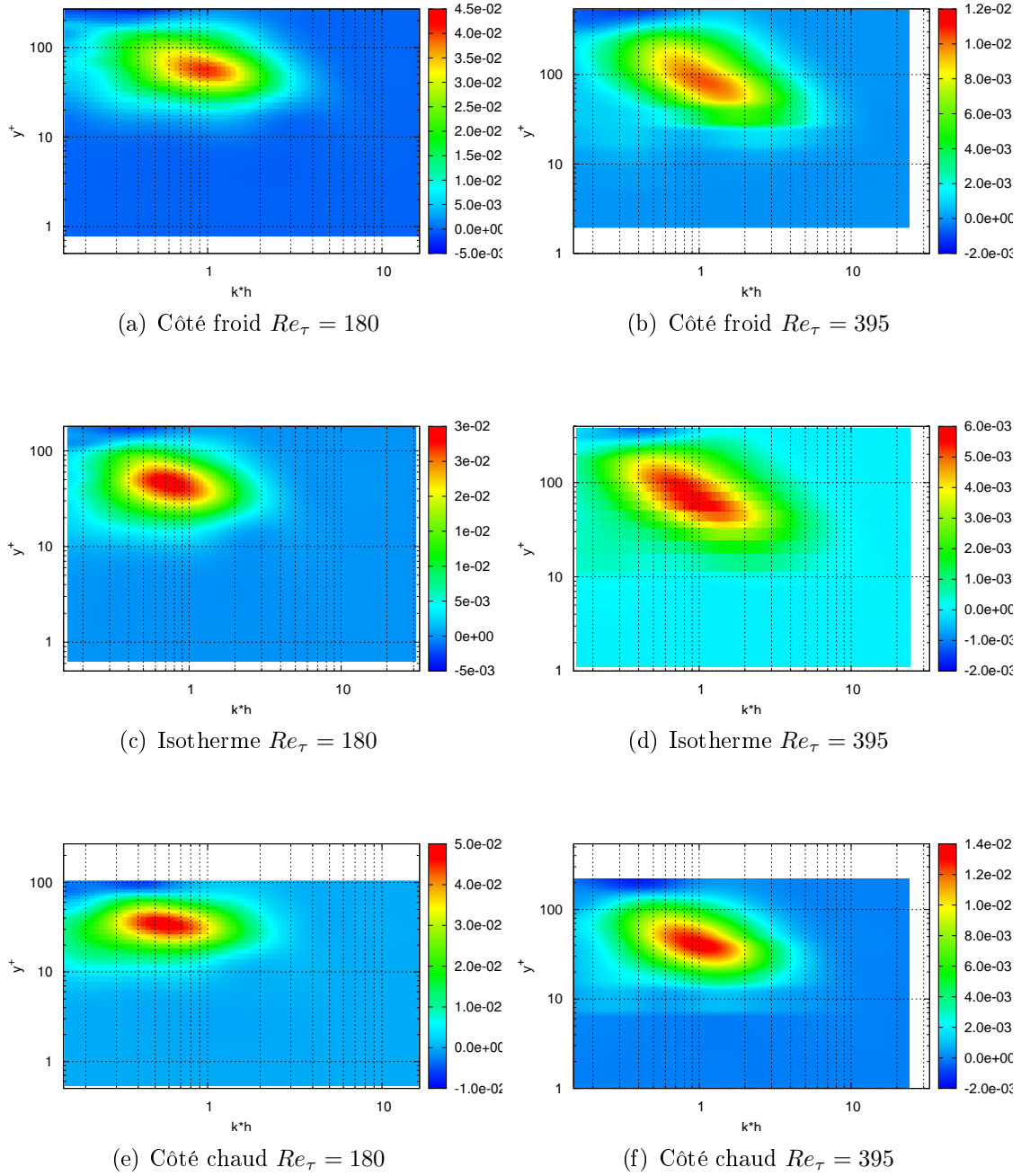


FIGURE 5.40 – Transfert par la pression inter plan

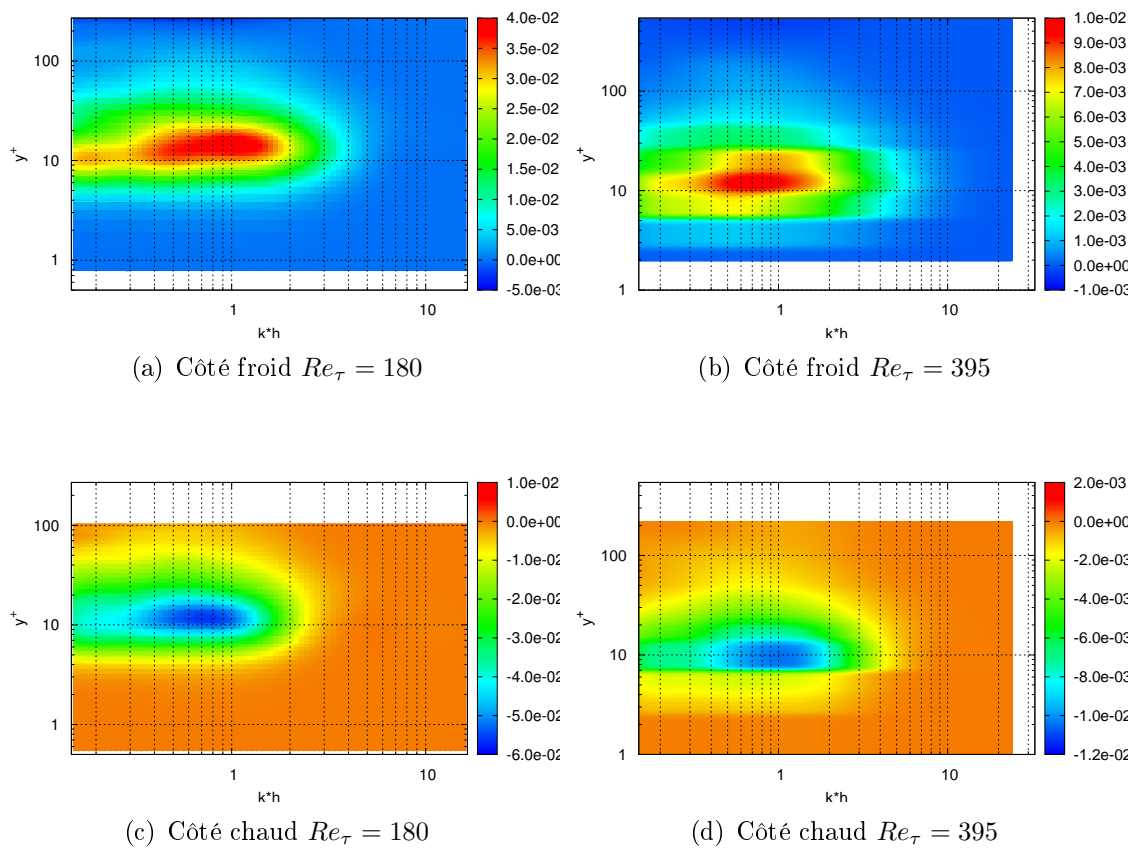


FIGURE 5.41 – Transfert thermique



# Conclusion et perspectives

Dans ce manuscrit, nous avons vu les différentes étapes qui ont permis l'étude d'écoulements représentatifs de récepteurs solaires. Nous avons tout d'abord introduit le système d'équations à bas nombre de Mach et montré l'intérêt d'utiliser cette approximation. Pour ce système, nous avons établi les équations filtrées de la simulation des grandes échelles en volumes finis. Puis, nous avons décrit le logiciel Trio\_U ainsi que les opérateurs numériques utilisés pour résoudre le système d'équations.

Dans un deuxième temps, nous avons décrit les améliorations apportées au code de simulations numériques pour la résolution des écoulements quasi-compressibles. Le nouvel algorithme de résolution des équations permet, indépendamment du maillage, la conservation de l'énergie au niveau local et global. L'intégration en temps, par un schéma Runge-Kutta d'ordre 3, préserve désormais le couplage des équations et génère une erreur inférieure d'un facteur 1400 par rapport à de précédentes études. L'utilisation d'un schéma centré d'ordre 4, pour la convection de la vitesse, permet une meilleure capture des instationnarités de vitesse. Par la suite, nous avons étudié l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente non-isotherme. Le processus permettant d'obtenir les spectres des termes de cette équation a été présenté.

Munis de ces nouveaux outils, nous avons réalisé 4 simulations numériques très précises. Une simulation numérique directe isotherme à  $Re_\tau = 180$ , nous a permis de valider nos développements en nous comparant à la littérature. La totalité de nos profils sont identiques à ceux de Kim *et al.* [61] ce qui confirme la capacité du code à simuler les écoulements turbulents. Une Simulation numérique directe sous-résolue à  $Re_\tau = 180$  et soumise à un ratio de température  $T_r = 2$  a été comparée à une simulation des grandes échelles. En passant d'une SND sous résolue à une SGE, les fluctuations de température diminuent et l'énergie cinétique turbulente augmente. Une Simulation des grandes échelles isotherme à  $Re_\tau = 395$  donne des résultats proches de ceux de Moser *et al.* [59]. Les fluctuations longitudinales sont légèrement sur-estimées alors que les fluctuations verticales et transversales sont légèrement sous-estimées. Enfin, une simulation des grandes échelles anisotherme ( $T_r = 2$ ) à  $Re_\tau = 395$  a été comparée à la SND de Toutant *et al.* [62] et aux SGE de Serra *et al.* [13–15]. Nous avons ainsi vu que notre SGE s'approche des résultats de Toutant *et al.* et permet d'en retrouver les principaux comportements, malgré la différence d'algorithmes de résolution. Par rapport à la simulation de Serra *et al.*, le maillage de notre simulation est beaucoup plus précis ; il en résulte logiquement que les

profils obtenus sont plus proches de la simulation de Toutant *et al.* que les profils de Serra *et al.* Dans notre SGE, les différentes grandeurs sont de moindres normes que dans la simulation de Serra *et al.*

Par la suite, nous avons étudié l'établissement d'une couche limite thermique dans un canal plan ouvert. L'utilisation d'un canal précurseur a permis de déterminer uniquement l'impact du gradient de température sur l'écoulement. Nous avons ainsi pu voir que l'écoulement subit de grosses modifications lorsque la couche limite thermique s'établit. La quantité de mouvement se redistribue dans le domaine créant une accélération au centre du canal. On observe que l'effet de l'établissement de la couche limite thermique est plus important que l'effet du gradient thermique seul puisque les profils obtenus ne sont plus comparables à ceux de Nicoud [7]. En extrapolant le profil de température, nous avons pu estimer qu'une longueur de  $120\pi h$  est nécessaire pour que le champ de température atteigne la paroi froide. Il est possible de faire une analogie entre la vitesse créée par effusion et la vitesse créée par dilatation du fluide en proche paroi ; alors que, dans un canal plan bi-périodique, l'adimensionnement de Van Driest permet de comparer ces deux vitesses, lors de l'établissement d'une couche limite thermique cet adimensionnement ne permet plus la comparaison des vitesses.

Dans le cas des simulations en canal plan bi-périodique, nous avons analysé les transferts d'énergie. Nous avons ainsi pu mettre en évidence plusieurs aspects de ces transferts d'énergie. L'énergie cinétique turbulente suit un schéma de production-transfert-dissipation qui implique plusieurs échelles et notamment les grandes échelles. Le transfert d'énergie cinétique turbulente se fait selon plusieurs mécanismes. Les termes de transfert par la pression et par effet thermique, transfèrent l'énergie d'un plan vers un autre plan avec un vecteur d'onde sensiblement identique. Les termes triadiques associent deux types de transferts. Le premier est un transfert dans un même plan entre deux vecteurs d'ondes dans le sens de la cascade d'énergie et dans le sens inverse. Le deuxième type est un transfert entre des plans différents et entre des vecteurs d'ondes différents. En comparant les différentes simulations, nous avons identifié différents effets liés au nombre de Reynolds et liés au gradient de température. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, nous remarquons que les échelles associées aux différents termes varient en fonction de la distance à la paroi. De plus, lorsque le nombre de Reynolds augmente, le transfert d'énergie se répartit entre les différentes échelles de turbulence et les différents termes. L'application du gradient thermique provoque plusieurs effets. Tout d'abord, le changement de viscosité locale modifie le comportement des termes de manière inverse de chaque côté du canal. Mais à ceci, s'ajoute une augmentation de l'intensité de tous les transferts et un décalage des mécanismes de transferts vers de plus grandes échelles du côté chaud et de plus petites échelles du côté froid. Finalement, un transfert d'énergie du côté chaud vers le côté froid du canal apparaît.

L'ensemble de ces points nous permet d'affirmer qu'il est possible de réaliser des études à la fois spatiale et spectrale par simulation des grandes échelles. On notera que l'analyse spectrale nous a permis de comprendre que le couplage entre gradient



thermique et dynamique se traduit par la modification des échelles de turbulences dans les transfert d'énergie.

D'un point de vue scientifique, il est possible de compléter et d'étendre cette étude de multiples manières. En premier lieu, on pourrait réaliser des simulations à d'autres nombres de Reynolds et ratios de température. L'information disponible sur les différents mécanismes serait plus riche ; ceci permettrait d'identifier d'éventuelles non-linéarités de comportement des mécanismes lors d'un changement de nombre de Reynolds ou de ratio de température. En fonction du ratio de température, pour un même nombre de Reynolds moyen, un écoulement peut avoir différents comportements. A très faible ratio de température (comme notre simulation à  $Re_\tau = 395$  et  $T_r = 1.01$ ), les écoulements sont identiques à des écoulement incompressibles. Avec un très fort ratio de température, par exemple  $T_r = 5$  pour  $Re_\tau = 180$ , l'écoulement est complètement relaminarisés du côté chaud alors qu'il est très turbulent du côté froid. Enfin pour un ratio médian, l'écoulement est turbulent des deux côtés du canal et subit fortement les effets de la dilatation. Les nombreuses simulations permettraient alors de trouver les paramètres et les mécanismes de la transition entre les différents régimes d'écoulements.

Dans un deuxième temps, de la même manière que nous avons étudié l'énergie cinétique turbulente, il faudrait nous intéresser à l'équation d'évolution des corrélations de température dans les espaces physique et spectral, ainsi qu'à l'équation d'évolution des corrélations vitesse-température. L'étude des transferts d'énergie de ces équations, nous permettrait une meilleure compréhension du couplage entre dynamique et thermique.

Par la suite, il faudra étendre les études spatiales et spectrales à des canaux plan ouvert tel que celui du chapitre 4. De telles études permettront de comprendre la modification des transferts d'énergie selon le niveau de pénétration de la couche limite thermique pour différents nombres de Reynolds et différents ratios de température. De la même manière, on pourra envisager de faire des études spectrales sur un cas de retour à l'équilibre thermique. Par exemple, un canal plan bi-périodique en état statistiquement stationnaire soumis à un ratio de température de  $T_r = 2$  verrait brutalement une de ses deux parois changer de température pour être égale à sa jumelle. Nous devons alors étudier avec une dimension de plus les spectres puisque qu'il varient désormais dans le temps. Ceci demandera de faire de multiples expériences numériques pour obtenir des statistiques sur ces transferts, rendant la réalisation de ces études d'autant plus coûteuse et difficile.

L'ensemble de ces travaux pourrait renseigner des modèles de type RANS. Une modification des lois de paroi en fonction du gradient de température permettrait à des modélisations RANS d'obtenir des résultats plus précis. Avec l'ensemble des simulations réalisées, il serait intéressant de travailler à une modélisation RANS prenant en compte des effets thermiques.

Enfin, des améliorations directes du procédé sont possibles. Nous avons vu dans le chapitre 5 que certaines tailles de structures sont spécifiques du terme d'énergie

cinétique turbulente du côté chaud vers le côté froid. Une modification de la géométrie pour empêcher la formation de structure de grandes tailles en proche paroi du côté froid pourrait permettre de retenir l'énergie cinétique turbulente du côté chaud. De la même manière, du côté chaud l'utilisation d'une géométrie adaptée peut favoriser les structures dont la taille correspond au maximum de production d'énergie cinétique turbulente et ainsi augmenter l'énergie cinétique turbulente en proche paroi. La modification de la géométrie interne du récepteur solaire est en cours d'expérimentation au laboratoire PROMES avec notamment les travaux de Colleoni *et al.* [77] sur des promoteurs de turbulence.

# Bibliographie

- [1] G. Plantard, V. Goetz, [Experimental and numerical studies of a solar photo-catalytic process in a dynamic mode applied to three catalyst media](#), Chemical Engineering and Processing : Process Intensification 62 (0) (2012) 129–136.
- [2] X. Daguene-Frick, A. Toutant, F. Bataille, G. Olalde, [Numerical investigation of a ceramic high-temperature pressurized-air solar receiver](#), Solar Energy 90 (0) (2013) 164–178.
- [3] B. Diop, [Développement d'un instrument de mesure basée sur la fluorescence par faisceau d'électrons pour la caractérisation d'écoulements hypersoniques de basses densités en aérodynamique de rentrée](#), Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique ParisTech (2011).
- [4] H. Kawamura, H. Abe, Y. Matsuo, [Dns of turbulent heat transfer in channel flow with respect to reynolds and prandtl number effects](#), International Journal of Heat and Fluid Flow 20 (1999) 196–207.
- [5] Y. Morinishi, S. Tamano, E. Nakamura, [New scaling of turbulence statistics for incompressible thermal channel flow with different total heat flux gradients](#), International Journal of Heat and Mass Transfer 50 (9-10) (2007) 1781–1789.
- [6] Y. Morinishi, S. Tamano, K. Nakabayashi, [A {DNS} algorithm using b-spline collocation method for compressible turbulent channel flow](#), Computers and Fluids 32 (5) (2003) 751–776.
- [7] F. C. Nicoud, [Numerical study of a channel flow with variable properties](#), Center for Turbulence Research Annual Research Briefs (1998) 289–309.
- [8] B. Lessani, M. V. Papalexandris, [Time-accurate calculation of variable density flows with strong temperature gradients and combustion](#), Journal of Computational Physics 212 (1) (2006) 218–246.
- [9] G. Brillant, F. Bataille, F. Ducros, [Large-eddy simulation of a turbulent boundary layer with blowing](#), Theoretical and Computational Fluid Dynamics 17 (5-6) (2004) 433–443.
- [10] G. Brillant, [Simulations des grandes échelles thermiques et expériences dans le cadre d'effusion anisotherme](#), Ph.D. thesis, INSA de Lyon (2004).
- [11] S. Husson, R. Knikker, F. Bataille, [Simulations des grandes échelles pour les configurations fortement anisothermes](#), in : SFT 2006, Défis thermique dans l'industrie nucléaire, Ile de Re, Vol. 1, Société Française de Thermique, Paris, 2006, pp. 283–288.
- [12] S. Husson, [Simulations des grandes échelles pour les écoulements turbulents anisothermes](#), Ph.D. thesis, INSA de Lyon (2007).

- [13] S. Serra, **Couplage écoulements pariétaux et transferts thermiques dans les récepteurs solaires à haute température**, Ph.D. thesis, Université de Perpignan Via Domitia (2009).
- [14] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, **Thermal large eddy simulation in a very simplified geometry of a solar receiver**, Heat Transfer Engineering 33 (6) (2012) 505–524.
- [15] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, Y. Zhou, **High-temperature gradient effect on a turbulent channel flow using thermal large-eddy simulation in physical and spectral spaces**, Journal of Turbulence (2012) N49
- [16] C.-D. Munz, S. Roller, R. Klein, K. Geratz, **The extension of incompressible flow solvers to the weakly compressible regime**, Computers and Fluids 32 (2) (2003) 173 – 196.
- [17] A. Majda, J. Sethian, **The derivation and numerical solution of the equations for zero mach number combustion**, Combustion Science and Technology 42 (3-4) (1985) 185–205.
- [18] R. G. dos Santos, M. Lecanu, S. Ducruix, O. Gicquel, E. Iacona, D. Veynante, **Coupled large eddy simulations of turbulent combustion and radiative heat transfer**, Combustion and Flame 152 (3) (2008) 387–400.
- [19] I. Teleaga, M. Seaid, **Simplified radiative models for low-mach number reactive flows**, Applied Mathematical Modelling 32 (6) (2008) 971–991.
- [20] F. Flemming, A. Sadiki, J. Janicka, **Investigation of combustion noise using a les/caa hybrid approach**, Proceedings of the Combustion Institute 31 (2) (2007) 3189–3196.
- [21] Y. J. Moon, **Sound of fluids at low mach numbers**, European Journal of Mechanics-B/Fluids 40 (0) (2013) 50–63.
- [22] S. Tang, N. Ko, **Basic sound generation mechanisms in inviscid vortex interactions at low mach number**, Journal of Sound and Vibration 262 (1) (2003) 87–115.
- [23] M. Howe, **Mechanism of sound generation by low mach number flow over a wall cavity**, Journal of Sound and Vibration 273 (1-2) (2004) 103–123.
- [24] A. B.-B. Dhia, J. Mercier, F. Millot, S. Pernet, **A low-mach number model for time-harmonic acoustics in arbitrary flows**, Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (6) (2010) 1868–1875.
- [25] F. Obermeier, **The influence of solid bodies on low mach number vortex sound**, Journal of Sound and Vibration 72 (1) (1980) 39–49.
- [26] S. Dellacherie, **Numerical resolution of a potential diphasic low mach number system**, Journal of Computational Physics 223 (1) (2007) 151–187.
- [27] A. Meister, **Asymptotic single and multiple scale expansions in the low mach number limit**, SIAM Journal on Applied Mathematics 60 (1) (1999) 256–271. [arXiv:http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0036139998343198](http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0036139998343198),
- [28] S. Paolucci, **On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations**, Tech. Rep. SAND82-8257, Sandia National Labs., Livermore, CA (USA) (1982).

- [29] F. M. White, [Viscous Fluid Flow](#), 3rd Ed., McGraw-Hill, New York,, 2005.
- [30] F. Aulery, A. Toutant, R. Monod, G. Brillant, F. Bataille, [Numerical simulations of sodium mixing in a t-junction](#), Applied Thermal Engineering 37 (0) (2012) 38–43.
- [31] J. Smagorinsky, [General circulation experiments with the primitive equations](#), Vol. 223, ., 1963.
- [32] P. Sagaut, [Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements incompressibles](#), Springer, Berlin, 282 p, 1998.
- [33] M. Lesieur, O. Métais, P. Comte, [Large-Eddy Simulations of Turbulence](#), Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [34] A. Leonard, [Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows](#), Advances in Geophysics 18A (1974) 237–248.
- [35] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W. Cabot, [A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model](#), Physics of Fluids A 3 (7) (1991) 1760–1765.
- [36] C. Meneveau, J. Katz, [Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation](#), Annual Reviews of Fluids Mechanics 32 (2000) 1–32.
- [37] F. Nicoud, F. Ducros, [Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor](#), Flow, Turbulence and Combustion 62 (3) (1999) 183–200.
- [38] E. Montreuil, [Simulations numériques pour l'aérothermique avec des modèles sous-maille](#), Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie (2000).
- [39] J. Ferziger, M. Peric, [Computational Methods for Fluid Dynamics](#), Springer, 1999.
- [40] B. Leonard, [A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation](#), Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 19 (1) (1979) 59–98.
- [41] M. R. Hestenes, E. Stiefel, [Methods of conjugate gradients for solving linear systems](#), Journal of Research of the National Bureau of Standards 49.
- [42] B. Franck, Equations différentielles ordinaires, Equations aux dérivées partielles, Analyse théorique et numérique, Université de Provence, 2010.
- [43] A. W. Cook, Y. Zhou, [Energy transfer in rayleigh-taylor instability](#), Phys. Rev. E 66 (2002) 026312.
- [44] S. Kida, S. Orszag, [Energy and spectral dynamics in decaying compressible turbulence](#), Journal of Scientific Computing 7 (1) (1992) 1–34.
- [45] I. A. Bolotnov, R. T. L. Jr., D. A. Drew, K. E. Jansen, A. A. Oberai, [Spectral analysis of turbulence based on the {DNS} of a channel flow](#), Computers and Fluids 39 (4) (2010) 640 – 655.
- [46] N. Jarrin, S. Benhamadouche, D. Laurence, R. Prosser, [A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations](#), International Journal of Heat and Fluid Flow 27 (4) (2006) 585–593.
- [47] S. Patil, D. Tafti, [Wall modeled large eddy simulations of complex high reynolds number flows with synthetic inlet turbulence](#), International Journal of Heat and Fluid Flow 33 (1) (2012) 9 – 21.

- [48] K. D. Housiadas, A. N. Beris, [An efficient fully implicit spectral scheme for {DNS} of turbulent viscoelastic channel flow](#), Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 122 (1-3) (2004) 243–262.
- [49] G. Brenn, H. Braeske, G. Zivkovic, F. Durst, [Experimental and numerical investigation of liquid channel flows with dispersed gas and solid particles](#), International Journal of Multiphase Flow 29 (2) (2003) 219 – 247.
- [50] J. K. Eaton, [Two-way coupled turbulence simulations of gas-particle flows using point-particle tracking](#), International Journal of Multiphase Flow 35 (9) (2009) 792 – 800.
- [51] H. Nasr, G. Ahmadi, [The effect of two-way coupling and inter-particle collisions on turbulence modulation in a vertical channel flow](#), International Journal of Heat and Fluid Flow 28 (6) (2007) 1507 – 1517.
- [52] A.-T. Le, G. N. Coleman, J. Kim, [Near-wall turbulence structures in three-dimensional boundary layers](#), International Journal of Heat and Fluid Flow 21 (5) (2000) 480 – 488.
- [53] L. Quan, E. Ferrero, F. Hu, [Relating statistical moments and entropy in the stable boundary layer](#), Physica A, Statistical Mechanics and its Applications 391 (1-2) (2012) 231 – 247.
- [54] M. Buffat, L. L. Penven, A. Cadiou, J. Montagnier, [{DNS} of bypass transition in entrance channel flow induced by boundary layer interaction](#), European Journal of Mechanics - B/Fluids (2013) –
- [55] S. Tardu, [Near wall turbulence control by local time periodical blowing](#), Experimental Thermal and Fluid Science 16 (1-2) (1998) 41 – 53.
- [56] M. Haddad, L. Labraga, L. Keirsbulck, [Effects of blowing through a porous strip in a turbulent channel flow](#), Experimental Thermal and Fluid Science 31 (8) (2007) 1021 – 1032.
- [57] D. Bespalko, A. Pollard, M. Uddin, [Analysis of the pressure fluctuations from an {LBM} simulation of turbulent channel flow](#), Computers and Fluids 54 (0) (2012) 143 – 146.
- [58] S. Gordeev, V. Heinzl, V. Slobodtchouk, [Features of convective heat transfer in heated helium channel flow](#), International Journal of Heat and Mass Transfer 48 (16) (2005) 3363 – 3380.
- [59] R. D. Moser, J. Kim, N. N. Mansour, [Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  \$Re\_\tau = 590\$](#) , Physics of Fluids 11 (4) (1999) 943–945.
- [60] A. V. Trofimova, A. E. Tejada-Martínez, K. E. Jansen, R. T. L. Jr., [Direct numerical simulation of turbulent channel flows using a stabilized finite element method](#), Computers & Fluids 38 (4) (2009) 924 – 938.
- [61] J. Kim, P. Moin, R. Moser, [Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number](#), Journal of Fluid Mechanics 177 (1987) 133–166.
- [62] A. Toutant, F. Bataille, [Turbulence statistics in a fully developed channel flow submitted to a high temperature gradient](#), International Journal of Thermal Sciences 74 (0) (2013) 104–118.

- [63] M. Sanchez, F. Aulery, A. Toutant, F. Bataille, Large eddy simulation of thermal boundary layer spatial development in a turbulent channel flow, *Journal of Fluids Engineering* in press.
- [64] G. Araya, L. Castillo, [{DNS} of turbulent thermal boundary layers up to  \$\{R\}e\_\tau = 2300\$](#) , *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55 (15-16) (2012) 4003 – 4019.
- [65] T. S. Lund, X. Wu, K. D. Squires, [Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations](#), *jcomp* 140 (2) (1998) 233–258.
- [66] G. Jiang, R. Yoshie, T. Shirasawa, X. Jin, [Inflow turbulence generation for large eddy simulation in non-isothermal boundary layers](#), *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 104-106 (0) (2012) 369 – 378.
- [67] H. Hattori, S. Yamada, M. Tanaka, T. Houra, Y. Nagano, [Dns, {LES} and {RANS} of turbulent heat transfer in boundary layer with suddenly changing wall thermal conditions](#), *International Journal of Heat and Fluid Flow* 41 (0) (2013) 34 – 44.
- [68] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, [Fundamentals of heat and mass transfer](#), fourth ed. Edition, Wiley, 1996.
- [69] E. R. Van Driest, [Turbulent boundary layer in compressible fluids](#), *Journal of Aero. Sciences* 18 (3) (1951) 145–160.
- [70] F. Nicoud, P. Bradshaw, [A velocity transformation for heat and mass transfer](#), *Physics of Fluids* 12 (1) (2000) 237–238.
- [71] R. L. Simpson, [Characteristics of turbulent boundary layers at low reynolds numbers with and without transpiration](#), *Journal of Fluid Mechanics* 42 (1970) 769–802.
- [72] J. A. Domaradzki, W. Liu, C. Hartel, L. Kleiser, [Energy transfer in numerically simulated wall-bounded turbulent flows](#), *Physics of Fluids* 6 (4) (1994) 1583–1599.
- [73] P. Chassaing, [Turbulence en mécanique des fluides](#), Cépaduès-éditions, 2000.
- [74] N. Saikrishnan, E. D. Angelis, E. K. Longmire, I. Marusic, C. M. Casciola, R. Piva, [Reynolds number effects on scale energy balance in wall turbulence](#), *Physics of Fluids* 24 (1) (2012) 015101.
- [75] U. Piomelli, Y. Yu, R. J. Adrian, [Subgrid-scale energy transfer and near-wall turbulence structure](#), *Physics of Fluids* 8 (1) (1996) 215–224.
- [76] A. Cimarelli, E. D. Angelis, [Anisotropic dynamics and sub-grid energy transfer in wall-turbulence](#), *Physics of Fluids* 24 (1) (2012) 015102.
- [77] A. Colleoni, A. Toutant, G. Olalde, J. M. Foucaut, [Optimization of winglet vortex generators combined with riblets for wall/fluid heat exchange enhancement](#), *Applied Thermal Engineering* 50 (1) (2013) 1092–1100.
- [78] M. D. Liberto, M. Ciofalo, [Unsteady turbulence in plane channel flow](#), *Computers and Fluids* 49 (1) (2011) 258 – 275.
- [79] R. C. Schmidt, A. R. Kerstein, S. Wunsch, V. Nilsen, [Near-wall {LES} closure based on one-dimensional turbulence modeling](#), *Journal of Computational Physics* 186 (1) (2003) 317 – 355.

- [80] P. Venugopal, R. D. Moser, F. M. Najjar, [Direct numerical simulation of turbulence in injection-driven plane channel flows](#), Physics of Fluids 20 (10) (2008) 105103.
- [81] I. Lakkis, A. F. Ghoniem, [Axisymmetric vortex method for low-mach number, diffusion-controlled combustion](#), Journal of Computational Physics 184 (2) (2003) 435 – 475.
- [82] S. Chen, Z. Liu, C. Zhang, Z. He, Z. Tian, B. Shi, C. Zheng, [A novel coupled lattice boltzmann model for low mach number combustion simulation](#), Applied Mathematics and Computation 193 (1) (2007) 266 – 284.
- [83] F. Nicoud, J. Baggett, [On the use of the optimal control theory for deriving wall models for les](#), Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs (1999) 329–341.
- [84] E. Montreuil, O. Labbé, P. Sagaut, [Assessment of non-fickian subgrid-scale models for passive scalar in a channel flow](#), International Journal for Numerical Methods in Fluids 49 (1) (2005) 75–98.
- [85] L. Wei, A. Pollard, [Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flows using the discontinuous galerkin method](#), Computers and Fluids 47 (1) (2011) 85–100.



## Annexe A

### Production scientifique

**Marc Sanchez****Frdric Aulery**

e-mail: frederic.aulery@promes.cnrs.fr

**Adrien Toutant**

Associate Professor

e-mail: adrien.toutant@univ-perp.fr

University of Perpignan Via Domitia,

PROMES CNRS UPR 8521,

Tecnosud-Rambla de la Thermodynamique,

Perpignan, 66100 France

**Francoise Bataille**

PROMES CNRS UPR 8521,

Department of Mathematics,

Florida State University,

Tallahassee, FL 32306

e-mail: francoise.bataille@me.com

# Large Eddy Simulations of Thermal Boundary Layer Spatial Development in a Turbulent Channel Flow

*This article presents Large Eddy Simulations of thermal boundary layer spatial development in a low-Mach number turbulent channel flow. A coupling between isothermal biperiodic channel and anisothermal open channel is done to obtain a fully developed turbulent inlet. The interaction between a high temperature gradient and a turbulent flow is studied during the thermal boundary layer development. Turbulence and temperature quantities are analyzed for both streamwise and wall-normal directions. The results show how the asymmetrical heating modifies the velocity of the flow. The correlation between turbulence and heat transfers is studied. The mean and the fluctuation profiles are found to be asymmetrical. They evolve along the channel and are perturbed by the thermal gradient. Fluctuation destruction and creation areas in the length of the channel are highlighted. [DOI: 10.1115/1.4024809]*

## 1 Introduction

Heat exchangers are important components of thermodynamical systems, such as pressured receptors in concentrated solar towers. They are submitted to high temperature gradients and turbulence phenomena. These physical conditions generate spatial development of thermal boundary layer in the case of bounded flow. To optimize heat transfers, we need to understand the impact of high temperature gradient on turbulent flows. These are the motivations of numerous studies.

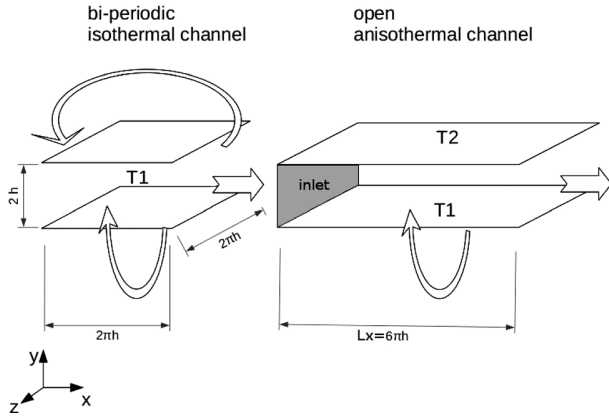
In most of studies concerning coupling between turbulence and high temperature gradient, biperiodic channel flows are simulated. Because of the periodicity, this case corresponds to an established flow and statistic quantities only depend on the vertical position in the channel. The Direct Numerical Simulations (DNS) of Moser et al. [1] correspond to an isothermal channel flow with a turbulent Reynolds number equal to 180. This study is a reference used to validate isothermal cases. The anisothermal configuration exhibits the impact of high temperature gradients on turbulent flows. For example, Nicoud's DNS [2,3] are performed for a Reynolds number of 180 with temperature ratios ( $T_2/T_1$ ) between the upper wall and the lower wall from 1.01 to 4. A low-Mach number assumption is used to account the dilatational effects without considering acoustic effects. Kawamura et al. [4,5] realized DNS of incompressible flows with different heat fluxes at the wall and with turbulent Reynolds numbers equal to 180 and 395. Lessani and Papalexandris [6,7] made LES with temperature ratios up to 9. These show that mean velocity, turbulent kinetic energy, mean temperature, and temperature fluctuations are modified by temperature gradient. Wang and Pletcher [8] proposed simulations with temperature ratios of 1.02 and 3. This study showed that the temperature ratio modifies the velocity fluctuations, the temperature distribution, and the velocity-temperature correlations. LES with low-Mach number assumption have been performed to validate thermal subgrid models and increase the understanding of the coupling between the velocity field and the temperature. For example, Aulery et al. [9] proposed a large eddy simulation to study the impact of different boundary conditions on the turbulent channel flow. Serra et al. [10] performed a study for turbulent Reynolds

numbers of 180 to 395 for temperature ratios of 1.01, 2, and 5, with variable viscosity and conductivity. They showed that, for a temperature ratio of 2, a constant Prandtl subgrid number can be used to perform LES. Serra et al. [11] realized a parametric study of turbulent kinetic energy spectra (Fourier transform of the turbulent kinetic energy). It was found that for anisothermal spectra, the spectra index is deviated because of thermal gradient. In a third paper [12], Serra et al. proposed a model that estimates the time scale of the triple decorrelation that takes into account the thermal gradient. This study considers that the high thermal gradient is an external agency like rotation and magnetic fields in the work of Zhou et al. [13,14]. Brillant et al. performed LES to study the impact of blowing on turbulent boundary layers [15–18]. Toutant and Bataille [19] realized a DNS for biperiodic channel flow for a temperature ratio of 2 and a turbulent Reynolds number of 395. That case was missing in the literature.

Other studies concerning boundary layers in the case of single heated plates geometries have been performed. Hattori et al. [20] made different DNS of an incompressible flow to study the stability of the turbulent boundary layer in time and in space, taking into account buoyancy effects thanks to the Boussinesq assumption. Li et al. [21] performed DNS for a momentum thickness Reynolds numbers of 830. Araya and Castillo [22] did more DNS with a momentum thickness Reynolds numbers of 2300. In these works, the temperature is considered as a passive scalar to understand its transport into turbulent flows. For Hattori et al. [20] and Araya and Castillo [22], the inlet flow conditions are based on the method of Lund et al. [23] for turbulent inflow data generation. In the Li et al. study [21], a fringe function is used to minimize upstream influence. In the fringe region, the outflow is forced to be laminar whereas at the inlet turbulence is generated by trip forcing.

More applied studies have been performed to understand the impact of exchanger geometry on turbulence thanks to simulation and experiments. For example, Hans et al. [24] studied the effect of multiple v-ribs roughness on thermal exchange of an artificially roughed solar heater duct. Wu and Tao [25] numerically and experimentally studied the impact on heat transfer of a plain plate and then on plates with  $\delta$ -wringlets with different configurations. Dagenet et al. [26] studied the aerodynamic behavior of a textured hot wall in an asymmetric heat exchanger with Stereoscopic Particle Image Velocimetry (S-PIV) technique. They compared different combinations of actuators and riblets. Colleoni et al. [27]

Contributed by the Fluids Engineering Division of ASME for publication in the JOURNAL OF FLUIDS ENGINEERING. Manuscript received November 21, 2012; final manuscript received June 11, 2013; published online xx xx, xxxx. Assoc. Editor: Ye Zhou.



**Fig. 1 Coupling between the bi-periodic isothermal channel and the open anisothermal channel**

studied the thermal performance enhancement of a thermal exchanger with asymmetrical heating. They used different  $\delta$ -wringlets vortex generators and riblets combinations to figure out the best thermal performance.

The present study proposes large eddy simulations of an open turbulent channel flow with high temperature gradients. We consider a turbulent flow with a turbulent Reynolds number  $Re_\tau = 180$ . The turbulent Reynolds number is defined as  $\frac{U_\tau h \rho_w}{\mu_w}$ , with  $U_\tau$  the friction velocity,  $\rho_w$  the density at the wall, and  $\mu_w$  the dynamic viscosity at the wall. The temperature ratio between the hot and the cold wall is  $T_2/T_1 = 2$ . We assume that gravity is negligible and that the low-Mach number of the flow allows for the elimination of wave stress contribution. We performed a coupling between an isothermal bi-periodic channel and an anisothermal open channel to achieve a fully developed turbulent inlet (see Fig. 1). As the anisothermal channel is open, we only have one periodicity direction (spanwise) and the statistics will depend on the wall distance, and also on the position in the length of the channel.

In the first part, we present the study configuration, with the solved equations, the numerical setup, and tools. In the second part, we show the turbulent statistical results in the cases of the isothermal bi-periodic channel for validation first. We continue with the results of an anisothermal open channel.

## 2 Study Configuration

**2.1 Equations.** We consider a turbulent air flow submitted to a high temperature gradient. Air is a light gas and the impact of gravity is negligible. The Reynolds number and the Mach number of this flow are approximately and respectively 5000 and 0.007. In these conditions, one gets dilatational effects that change the dynamic of the flow. According to Paolucci's method [28], a low-Mach number assumption is used to exclude acoustic wave stresses terms. This assumption is valid for a Mach number smaller than 0.3; the characteristics of the flow, as seen before, are consistent with it. This assumption results in splitting the pressure in two different terms:

- the thermodynamic pressure  $P_{\text{thermo}}$ , using ideal gases law, which represents the global pressure in the medium and it is constant in space.
- the dynamic pressure  $P_{\text{dyn}}$ . It is linked to the momentum equation and it can spatially vary.

The total pressure is  $P = P_{\text{thermo}} + P_{\text{dyn}}$ . We use the following system of equations:

the mass conservation equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

the momentum conservation equation

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P_{\text{dyn}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2)$$

the energy conservation equation

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P_{\text{thermo}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

the ideal gas law

$$P_{\text{thermo}} = \rho R T \quad (4)$$

the spatial invariance of thermodynamic pressure

$$\frac{\partial P_{\text{thermo}}}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

with  $x$  being the space coordinates using Einstein's summation convention,  $t$  the time,  $\rho$  the density,  $T$  the temperature,  $U$  the fluid velocity,  $P_{\text{dyn}}$  the dynamic pressure,  $P_{\text{thermo}}$  the thermodynamic pressure,  $\mu$  the dynamic viscosity,  $\lambda$  the thermal conductivity, and  $R$  the specific air constant.

Concerning fluid properties, we use Sutherland's equations to link viscosity and thermal conductivity to the temperature

$$\mu = 1.461 \cdot 10^{-6} \frac{T^{1.5}}{T + 111} \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{\mu C_p}{Pr} = \frac{1.468 \cdot 10^{-3}}{Pr} \frac{T^{1.5}}{T + 111} \quad (7)$$

with  $C_p$  specific heat at constant pressure equal to  $1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . These laws are typically used for air [29] and usable for temperature between 220 K and 1900 K.

**2.2 Turbulence Models.** We use Large Eddy Simulations (LES). It allows for the fine capture of flow behavior and it is not too expensive in terms of calculation power. To conserve the impact of the small scales on the larges scales, we add corrective terms to the equations of the model that are the subgrid scale tensor  $\tau_{ij}$  and the subgrid scale flux modeling  $\mathcal{F}_j$ . After using a spatial filtering  $\bar{(\cdot)}$  and a Favre  $\tilde{(\cdot)}$  one and adding the corrective terms, the system of equations becomes

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{P}_{\text{dyn}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] \quad (9)$$

$$\bar{\rho} C_p \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \bar{P}_{\text{thermo}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} C_p \mathcal{F}_j}{\partial x_j} \quad (10)$$

$$\bar{P}_{\text{thermo}} = \bar{\rho} R \tilde{T} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_{\text{thermo}}}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

with  $\tau_{ij}$  using the WALE model (Nicoud and Ducros [30]) recalled in the next paragraph

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\nu_{sg} \tilde{S}_{ij} \quad (13)$$

$\tilde{S}_{ij}$  is the filtered strain tensor

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (14)$$

and  $\mathcal{F}_j$  using constant Prandtl number  $\text{Pr} = 0.71$  (Serra [11]) is

$$\mathcal{F}_j = \kappa_{sg} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (15)$$

Subgrid scale Prandtl number is the subgrid scale viscosity-to-subgrid scale diffusivity ratio ( $\text{Pr}_{sg} = \nu_{sg}/\kappa_{sg}$ ).

The WALE model is a subgrid scale model (Wall Adapting Local Eddy-viscosity) proposed by Nicoud and Ducros [30]. It differs to Smagorinsky's LES model [31] in that it considers both the deformation tensor and the rotation tensor that allows it to be invariant to any coordinate translation or rotation. In the WALE model, subgrid scale viscosity  $\nu_{sg}$  is defined as

$$\nu_{sg} = (C_W \tilde{\Delta})^2 \frac{(s_{ij}^d)^{3/2}}{\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}^{5/2} + (s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (16)$$

with  $C_W$ , a constant, and  $s_{ij}^d = \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{kj} + \tilde{\Omega}_{ik} \tilde{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\tilde{S}_{mn} \tilde{S}_{mn} - \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{mn})$ , with  $\tilde{\Omega}_{ij}$  the filtered rotation vector

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (17)$$

Compared to Smagorinsky's static model, the WALE model allows the transient state simulation and the computed eddy-viscosity goes to zero at the vicinity to the wall.

**2.3 Numerical Settings.** To simulate the spatial development of a thermal boundary layer in a turbulent flow, we need a fully developed turbulent flow. This flow is generated by an isothermal and bi-periodic channel. The velocity field of this flow is used as inlet of a second channel, open and anisothermal. The development of the thermal boundary layer is simulated in the second channel (see Fig. 1).

These two channels have the same section, that is  $2h$  of height by  $2\pi h$  of depth, with  $h$  the half height of the channel ( $h = 0.015$  m). The length is  $2\pi h$  for the isothermal channel and  $6\pi h$  for anisothermal channel. For the isothermal channel the length  $L_x$  is chosen to ensure that turbulence fluctuations are uncorrelated at the half channel. For the anisothermal channel, the length  $L_x$  is chosen large enough to explore the thermal boundary layer development.

**2.3.1 Initial Conditions.** For both channels, we used a parabolic profile for the longitudinal component of velocity. The vertical component is a sinusoidal profile that disrupts the flow and initiates turbulence. The transversal component of velocity is zero. At the initial state, the fluid is at the temperature  $T_1 = 293$  K.

**2.3.2 Boundary Conditions.** Contrary to Lund et al. [23] who use a modified Spalart method, our boundary conditions provide a fully established turbulent inflow. As seen in Fig. 1, the isothermal channel is periodic in both the streamwise and spanwise directions. The anisothermal channel is periodic only in the spanwise direction. The inlet receives the velocity field from the isothermal channel; the outlet is an open boundary where the pressure is imposed and equal to zero. For both channels, the velocity at the walls is zero. Using this method allows for a focus on the

temperature gradient impact: the dynamic boundary layer is fully established at the entry of the open domain whereas the spatial development is, here, limited to the thermal field. However, with the low-Mach number assumption, the temperature will modify the flow along the open domain.

For the anisothermal channel, the temperature at the inlet and at the low wall ( $y = 0$ ) equals to  $T_1$ . The high wall ( $y = 2h$ ) temperature is  $T_2 = 586$  K. At the outlet, we impose a back-flow temperature equal to  $T_1$ .

**2.4 Mesh.** The mesh is regular in the streamwise ( $x$ ) and spanwise ( $z$ ) directions. In the wall-normal direction ( $y$ ), the mesh is refined at the vicinity of the walls in order to use a no-slip condition while limiting the number of cells in the center of the channels.

It is given by a hyperbolic tangent transformation

$$y_k = L_y \left\{ 1 + \frac{1}{a} \tanh \left[ \left( -1 + \frac{k-1}{N_y-1} \right) \tanh^{-1}(a) \right] \right\} \quad (18)$$

$$k \in [1, N_y]$$

where  $N_y$  is the number of nodes on the  $y$  axis and  $a$  is a constant depending on the mesh dilatation. For both channels, the mesh along the directions  $y$  and  $z$  axis is the same. The dimensionless cell sizes are  $\Delta_y^+ \approx 10$ ,  $\Delta_y^+ \approx 1$  at the wall to 11 at the center,  $\Delta_z^+ \approx 5$ . For the isothermal channel, we obtain a mesh of  $117 \times 67 \times 235$  nodes while for the anisothermal one gets a mesh of  $349 \times 67 \times 235$  nodes.

## 2.5 Numerical Tools

**2.5.1 Trio U.** The program used for the simulations is TRIO\_U. It is a CFD software developed by the French atomic energy agency (CEA) [32]. It is able to run Large Eddies Simulations using an accurate subgrid model. It has already been used for LES in bi-periodic channel cases with blowing [15] and high temperature gradients [9–12].

**2.5.2 Numerical Settings.** The time scheme used is a third order Runge–Kutta. It is compact, fast, and well adapted to the computation of time derivations. For dynamic convection, a second order centered scheme is used. The centered scheme is lightweight and stable. A quadratic upstream interpolation for convective kinematic (QUICK) scheme is used for thermal convection. It is a third order upstream scheme.

## 3 Statistics

To study turbulence, we will use Reynolds decomposition. Physical quantities are decomposed in mean (written  $\langle \rangle$ ) and fluctuation terms (written  $'$ ) such as

$$f = \langle f \rangle + f' \quad (19)$$

**3.1 Isothermal Channel.** In order to verify the validity of our simulations, we compare our isothermal results with the DNS results of Moser et al. [1]. The DNS dimensions are  $4\pi h \times 2h \times \frac{4}{3}\pi h$ , with  $h$  the half height. The mesh used is  $128 \times 129 \times 128$ . The turbulent Reynolds number  $\text{Re}_\tau$  is equal to 180.

The Reynolds average is realized by integrating in time and in the homogeneous directions. For our bi-periodic channel, the Reynolds average is calculated as

$$\langle f(y) \rangle = \frac{1}{N_y N_x N_z} \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} f(i, j, k, t) \quad (20)$$

To compare our isothermal channel with literature, we will use standard nondimensionalization

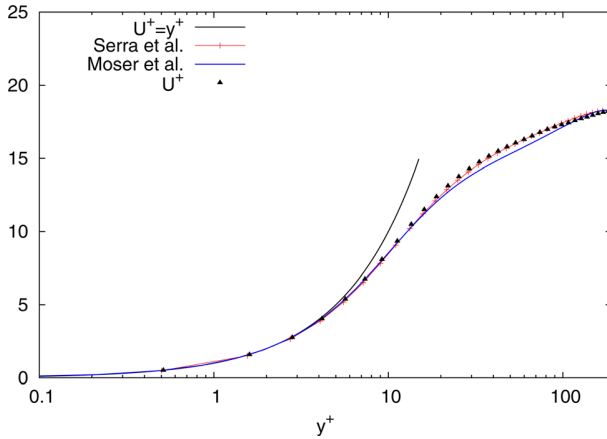


Fig. 2 Streamwise mean velocity

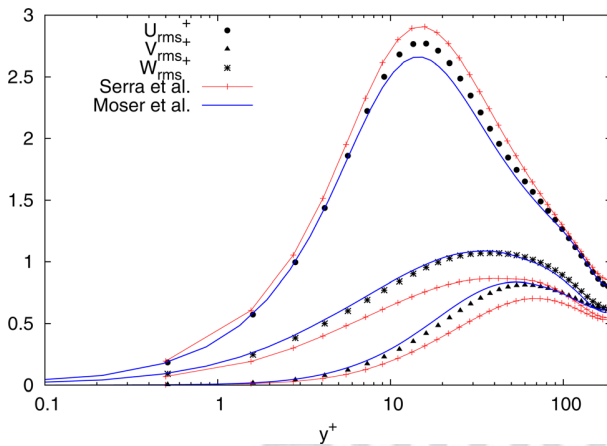


Fig. 3 Velocity fluctuations

$$y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu_\omega} \quad (21)$$

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\langle \mu_\omega \rangle}{\langle \rho_\omega \rangle} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \bigg|_\omega} \quad (22)$$

$$U^+ = \frac{\langle U \rangle}{U_\tau} \quad U_{rms}^+ = \frac{\langle U_{rms} \rangle}{U_\tau} \quad (23)$$

In Fig. 2, the streamwise mean velocity in the isothermal channel follows the law  $U^+ = y^+$  of the viscous sublayer.

Compared to Moser's results obtained by DNS, our simulations slightly overestimate the streamwise mean velocity in the center of the channel. Overall, we captured the essential of the velocity behavior.

Concerning velocity fluctuations, in Fig. 3, compared to Moser's DNS results, we slightly overestimate streamwise velocity fluctuations and underestimate slightly spanwise and wall-normal velocity fluctuations in the transition area.

To analyze the convergence of the computation, we compare our simulation to the results of Serra et al. [10]. Serra's computation was realized with the same software, the same models, and the same numerical schemes. The differences are due to differences in meshes. The mesh of the present study is thinner than Serra's that is made with  $33 \times 66 \times 39$  nodes. As shown by Chatelain [33], a

thinner mesh gives results in better agreement and the mesh convergence is almost obtained. In our simulations, the mesh refinement is set as a good tradeoff between accuracy and computational costs.

These results validate the simulation of the flow in the isothermal channel and allow for its use as the inlet condition of our anisothermal channel. The statistics are realized on approximately 25 diffusion times for the isothermal channel and 32 diffusion times for the anisothermal one after the flow reaches the fully developed state. The diffusion time is defined as  $h/U_{\tau m}$ , where  $U_{\tau m} = (U_{\tau 1} + U_{\tau 2})/2$  is the mean friction velocity. The value of the time unit is 0.0788 s for isothermal channel and 0.0627 s for the anisothermal one.

**3.2 Anisothermal Channel.** In the anisothermal channel, we get only one homogeneous direction. The Reynolds average is calculated as

$$\langle f \rangle(x, y) = \frac{1}{N_f N_z} \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_z} f(x, y, k, t) \quad (24)$$

**3.2.1 Wall-Normal Axis Depending Results.** With classical scaling, we directly compare the quantities without considering the mean variation of the fluid properties. Consequently, the differences with the isothermal flow are significant. To study the coupling between thermal gradient and turbulence and to discern the different effects, we use a semilocal scaling in addition to the classical one. It is defined below

$$y^* = \frac{yU_\tau^*}{\langle \nu \rangle(y)} \quad (25)$$

$$U_\tau^* = \sqrt{\frac{\langle \mu_\omega \rangle}{\langle \rho(y) \rangle} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \bigg|_\omega} \quad (26)$$

$$T_\tau^* = \frac{\langle \lambda_\omega \rangle}{\langle \rho(y) \rangle C_p U_\tau^*} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \bigg|_\omega \quad (27)$$

One defines the new following dimensionless physical quantities

$$U^* = \frac{\langle U \rangle}{U_\tau^*} \quad U_{rms}^* = \frac{\langle U_{rms} \rangle}{U_\tau^*}$$

$$V^* = \frac{\langle V \rangle}{U_\tau^*} \quad V_{rms}^* = \frac{\langle V_{rms} \rangle}{U_\tau^*}$$

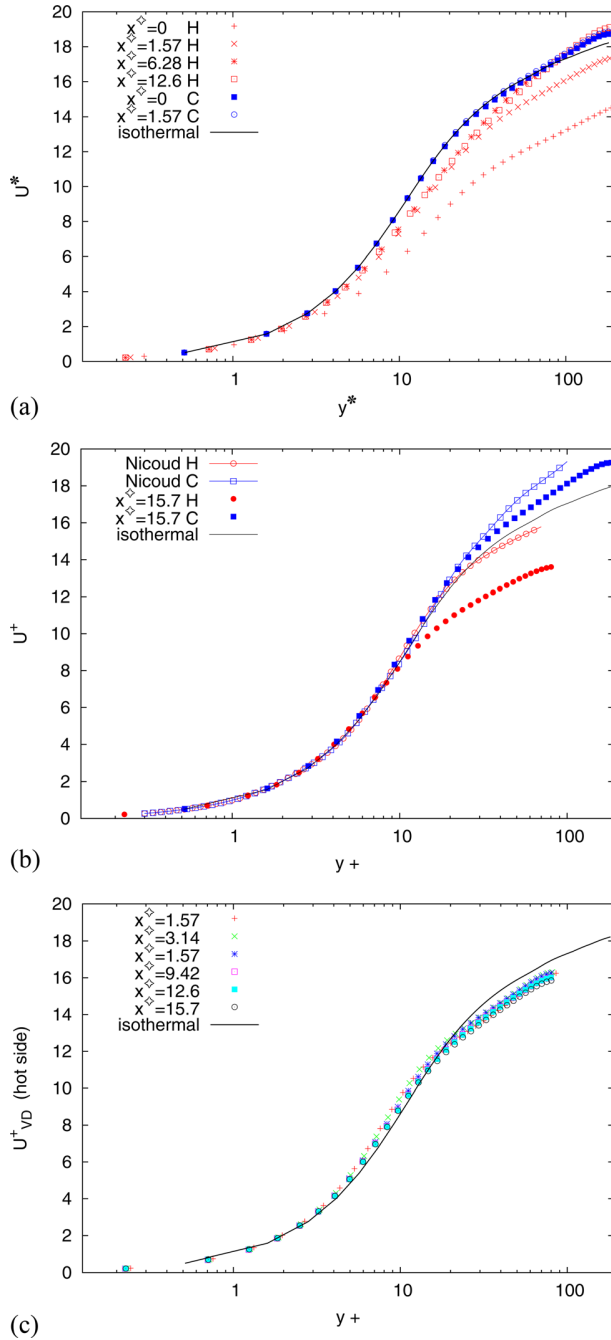
$$W_{rms}^* = \frac{\langle W_{rms} \rangle}{U_\tau^*} \quad (U'V')^* = \frac{\langle U'V' \rangle}{U_\tau^* U_\tau^*}$$

$$T^* = \frac{T_2 - \langle T \rangle}{T_\tau^*} \quad T_{rms}^* = \frac{\langle T_{rms} \rangle}{T_\tau^*}$$

$$(U'T')^* = \frac{\langle U'T' \rangle}{U_\tau^* T_\tau^*}$$

We keep classical scaling for isothermal plotting. Figures 4–11 are cross-sections, in the height, for different positions in the channel. The average of these quantities is done during 32 diffusion times. The cross-sections are realized separately for the cold side (from  $y=0$  to  $y=h$ , curves marked with "C") and the hot side (from  $y=h$  to  $y=2h$ , curves marked with "H"). We will use the notations " $x^\diamond$ " and " $y^\diamond$ " for " $x/h$ " and " $y/h$ ", respectively. The cross-section  $x^\diamond = 0$  is taken at a distance of two cells from the inlet. In the following figures, some of our results are compared to Nicoud's DNS results [2]. The simulation proposed by Nicoud is a direct numerical simulation of a biperiodic channel flow with  $Re_\tau = 180$  and  $T_2/T_1 = 2$ . Nicoud's results might be understood as an open channel with an infinite length. Consequently, Nicouds





**Fig. 4 Streamwise mean velocity with different scalings: (a) semilocal scaling, (b) classical scaling with Nicoud [2], and (c) Van Driest scaling (hot side)**

DNS correspond to the fully established configuration. It allows for the explanation of the limit of the development of the thermal boundary layer. We will compare these results with the  $x^{\diamond} = 15.7$  cross-section of the open channel simulation results, using a classical scaling.

Figure 4 represents streamwise mean velocity with a semilocal scaling (4(a)); classical scaling for the  $x^{\diamond} = 15.7$  cross-section with Nicoud's results (4(b)), and Van Driest [34] scaling for the hot side of the channel (4(c)). The Van Driest scaling for streamwise mean velocity  $U_{VD}^+$  is defined as

$$U_{VD}^+ = \frac{2}{Pr_t T_\tau / T_\omega} \left( 1 - \sqrt{Pr_t T_\tau / T_\omega U / U_\tau} \right) \quad (28)$$

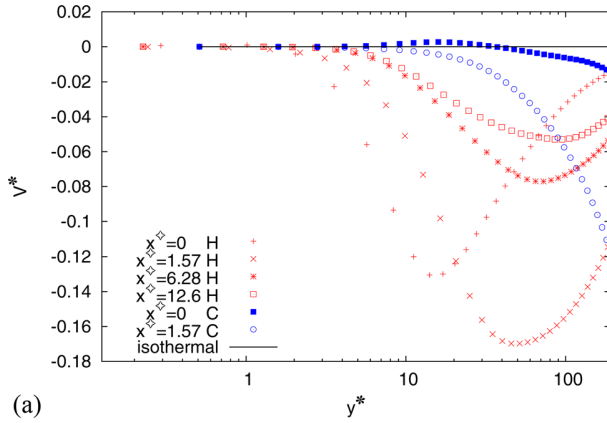
where  $Pr_t = 0.9$  is the turbulent Prandtl number and  $T_\omega$  the wall temperature. This scaling allows nondimensionalization by taking into account the dilatational effect. Nicoud and Bradshaw [35] underlined the fact that the Van Driest transformation is mathematically analogous to the Simpson transformation of the velocity profile for incompressible turbulent wall flows with uniform injection (Simpson [36]). We will note the velocity injection of the Simpson transformation  $V_{inj}$ . Identifying the two transformations, one finds that the equivalent transpiration velocity used in Van Driest scaling is

$$V_{inj} = Pr_t T_\tau / T_\omega U_\tau \quad V_{inj}^+ = \frac{V_{inj}}{U_\tau} = Pr_t T_\tau / T_\omega \quad (29)$$

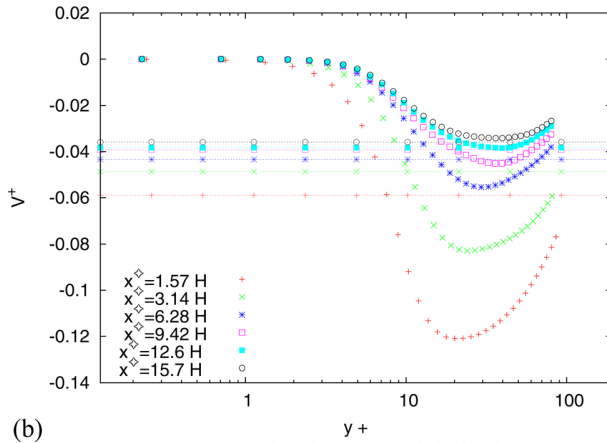
We see in Fig. 4(a) that, for the cold side ("C"), the streamwise mean velocity is not modified compared to the isothermal case, whereas at the hot side ("H"), the streamwise mean velocity is strongly modified by the temperature. The difference decreases when  $x$  increases along the channel. In Fig. 4(b), we see that, for the cold side, and above all for the hot side, the behavior of the streamwise velocity into the channel is far from the established case. The differences between Nicoud's bi-periodic DNS and our open simulation show that the cold side is closer to an established state than the hot side. The cold side and the hot side curves, for the classical scaling, are respectively located above and below the isothermal curve. The dissymetry of the open channel is bigger than the one of the bi-periodic channel. In Fig. 4(c), the temperature in the cold side and for  $x^{\diamond} = 0$  are not plotted because the impact of the temperature gradient in these parts of the channel is too low to use the Van Driest transformation. The Van Driest scaling shows that excluding the inlet, all the curves in the rest of the channel match. This could explain that the development seen on Fig. 4(a) may be essentially due to the wall-normal velocity created by the temperature gradient. However, contrary to the bi-periodic case, in the open channel, the Van Driest scaled curves do not collapse with the isothermal case.

Figure 5 represents, on the left (Fig. 5(a)), the wall-normal mean velocity with semilocal scaling, and, on the right (Fig. 5(b)), the classical scaled wall-normal mean velocity and the equivalent transpiration velocity [29]. In Fig. 5(b), while it is zero in the isothermal channel, one sees that the amplitude increases a lot at the inlet for the hot side. This evolution begins at  $y^* \approx 3$ . As  $x$  increases, minima are shifted to the larger  $y^*$ . On the cold side, the wall-normal velocity is zero for the near wall areas. Wall-normal velocity appears at the crossing of the center of the channel. Figure 5(b) shows that, whereas it is a good approximation for bi-periodic channels [19],  $V_{inj}^+$  is far from the values of  $V^+$ . Nevertheless, the behavior of the wall-normal velocity is unchanged. That can explain why, for the streamwise mean velocity, the anisothermal curves do not match the isothermal one. That is why the approximation is good enough to make the streamwise mean velocity curves match with each other when they are scaled by a Van Driest nondimensionalization (see Fig. 4(c)).

Figure 6 shows the semilocal scaled streamwise velocity fluctuations (Fig. 6(a)), and the classically scaled streamwise velocity fluctuations (Fig. 6(b)), compared to Nicoud's results. Figure 6(a) shows that, with semilocal scaling, the maxima in the cold side are higher than the ones in the hot side. The cold side curves follow the profile of the isothermal curve. They are centered around  $y^* = 12$  while, for the hot side, curves are shifted to lower  $y$  when  $x$  increases. Hot side maxima gets closer to cold side maxima. In Fig. 6(b), we see that, near to the wall, the behavior is the same for Nicoud's DNS results than for our simulation. As seen for streamwise mean velocity, the differences between the maxima show that the cold side is closer to an established state than the hot side. The development of the thermal boundary layer makes the cold side of the channel is slightly impacted. It is expected that, at the end of a longer channel, the influence of the hot wall on the cold wall will be more visible.

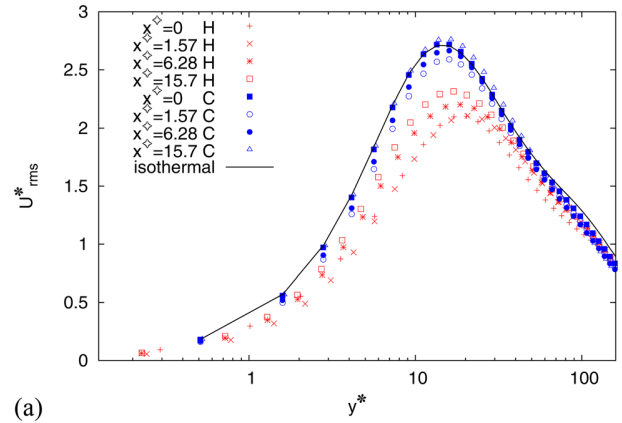


(a)

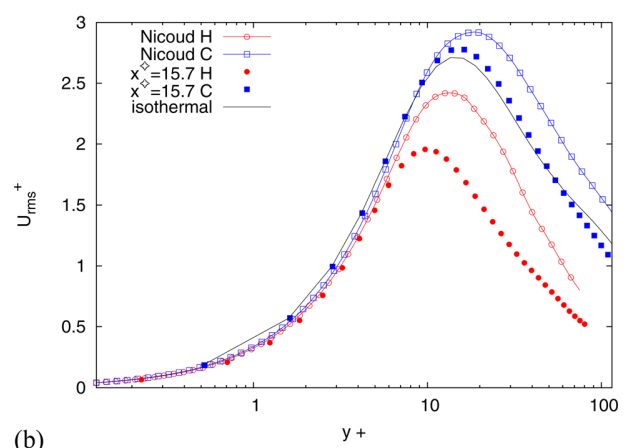


(b)

**Fig. 5 Wall-normal mean velocity with different scalings: (a) semilocal scaling, (b) classical scaling, and equivalent transpiration velocity (lines) plotted at the hot side**



(a)



(b)

**Fig. 6 Streamwise velocity fluctuations with different scalings: (a) semilocal scaling, (b) classical scaling**

Figure 7 represents the semilocal scaled wall-normal velocity fluctuations (Fig. 7(a)) and spanwise velocity fluctuations (Fig. 7(b)). Wall-normal and spanwise velocity fluctuation peaks are more important on the cold side than on the hot side of the channel. Isothermal curve maximum is higher than the other maxima in both cases. For the cold side, maxima are centered around  $y^* = 60$  for wall-normal velocity fluctuations and around  $y^* = 40$  for spanwise velocity fluctuations. For the hot side, at the inlet, the maxima are located on  $y^* = 80$  for wall-normal velocity fluctuations and  $y^* = 60$  for spanwise velocity fluctuations. The maxima are slightly shifted to lower  $y$  when  $x$  increases.

Figure 8 shows the correlation between the streamwise and the wall-normal velocity. We see that, in absolute value, the intensity of the peak increases while  $x$  increases. However, in the cold side, the peaks are centered around  $y^* = 30$ . For the hot side, peaks are located to  $y^* = 40$  at the inlet. The maxima are shifted to lower  $y^*$  when  $x$  increases. The correlation between streamwise and wall-normal velocity is much larger than in the isothermal channel.

For temperature quantities, we plot only the hot side of the channel (i.e. from  $y = h$  to  $y = 2h$ ). Due to the establishment of the thermal boundary layer, the temperature gradient at the cold wall is very low and the friction temperature  $T_\tau^*$  cannot be calculated properly.

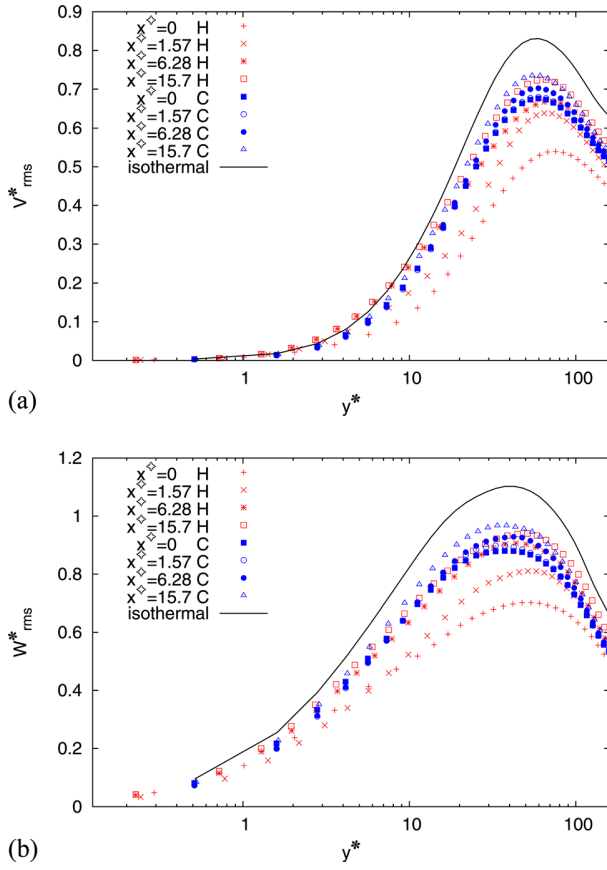
In Fig. 9, the following are plotted: the semilocal scaled mean temperature (Fig. 9(a)) and the classically scaled mean temperature compared with Nicoud's results (Fig. 9(b)). In Fig. 10, the semilocal scaled temperature fluctuations (Fig. 10(a)) and the classically scaled mean temperature compared with Nicoud's results (Fig. 10(b)). We see in Fig. 9(a) that the near wall linear law,  $T^* = \text{Pr}y^*$ , is followed by the temperature. The development

of the thermal boundary layer is characterized by the narrowing of the isothermal plateaus. The main part of this asymptoticlike development is done before  $x^\diamond = 6.28$  and, for the  $x^\diamond = 15.7$  cross-section, it reaches the half height of the channel. In Fig. 9(b), at the center of the channel, the mean temperature given by our simulation is far below the hot side temperature given by Nicoud's DNS.

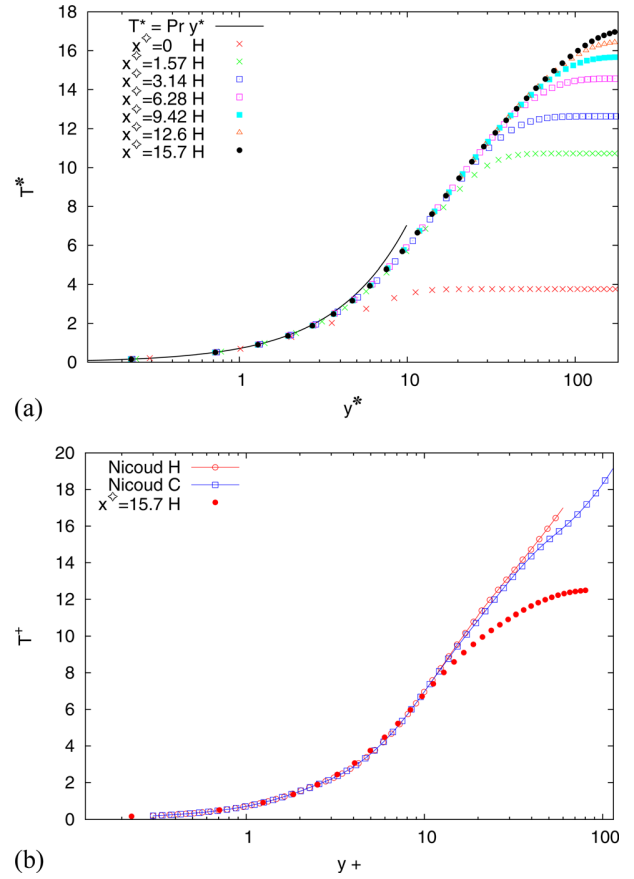
We see in Fig. 10(a) that the temperature fluctuation maxima increase when  $x$  increases. They are shifted to the increasing  $y^*$  when  $x$  increases, and seem to be joining the position  $y^* = 20$ . Just as is the case for mean temperature, the major progression is done before  $x^\diamond = 6.28$ . Temperature fluctuations decrease after  $y^+ = 10$ . The comparison to Nicoud's DNS results in Fig. 10(b) show that, at  $x^\diamond = 15.7$ , the temperature fluctuations maximum is 30% less important than for Nicoud's biperiodic channel.

Figure 11 represents the correlation between streamwise velocity and temperature. This quantity shows how temperature fluctuations are linked to streamwise velocity fluctuations. Excluding the inlet, the peaks position is around  $y^* = 15$  and the constant is compared to the thermal boundary layer development. We observe a sharp increase when  $x$  increases, like for temperature fluctuations. This behavior shows that thermal gradient has a high impact on the streamwise velocity.

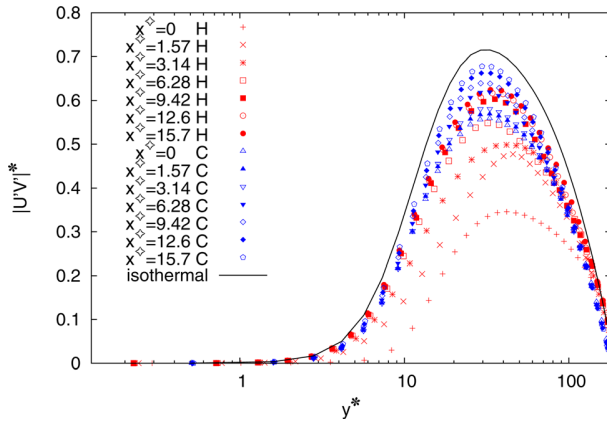
**3.2.2 Streamwise Axis Depending Results.** Figures 12–16 are cross-sections in the length for different positions in the height of the channel. We used an inlet-depending scaling to nondimensionalize the values. This scaling method shows the transformation undergone by the flow, following the streamwise axis, during the crossing of the channel.



**Fig. 7 Semilocal scaled wall-normal velocity fluctuations and spanwise velocity fluctuations, (a) semilocal scaled wall-normal velocity, (b) spanwise velocity fluctuations**



**Fig. 9 Mean temperature with different scalings, (a) mean temperature with semilocal scaling, (b) mean temperature with classical scaling**



**Fig. 8 Semilocal scaled correlation between streamwise and wall-normal velocities**

$$x^\diamond = \frac{x}{h} \quad y^\diamond = \frac{y}{h} \quad (30)$$

$$U^\diamond = \frac{\langle U \rangle}{\langle U_0 \rangle} \quad U_{rms}^\diamond = \frac{\langle U_{rms} \rangle}{\langle U_{rms0} \rangle} \quad V^\diamond = \frac{\langle V \rangle}{\langle V_0 \rangle} \quad (31)$$

$$T_{rms}^\diamond = \frac{\langle T_{rms} \rangle}{T_2 - T_1} \quad T^\diamond = \frac{\langle T \rangle}{T_1} \quad (32)$$

Figure 12 shows how the streamwise mean velocity is modified by the thermal boundary layer. Changes appear for the near hot

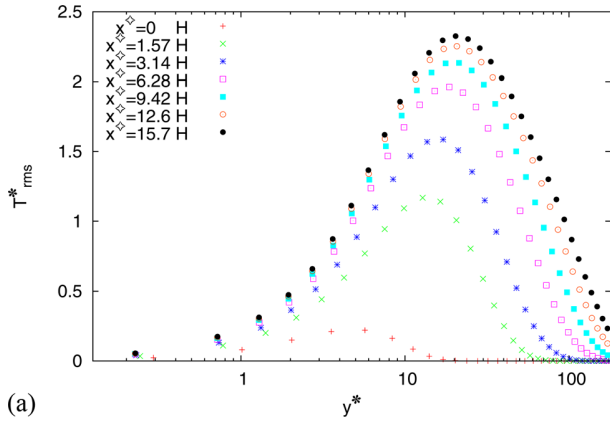
wall area. In this part of the channel, streamwise mean velocity decreases quickly. After  $x^\diamond = 6$ , it increases again slightly. Excluding the near hot wall area, for the all height, we observe an increase of the velocity from the inlet to the outlet after  $x^\diamond = 1$ . Near to the hot wall, the high viscosity makes the streamwise mean velocity decrease. In the rest of the channel, the dilatational effects make the wall-normal velocity increase.

In Fig. 13, the streamwise velocity fluctuations in the viscous sublayer decrease significantly for  $x^\diamond < 2$ . The decreasing is greater in the hot side. For  $x^\diamond > 2$ , it increases slightly, which is similar to the streamwise mean velocity. Near to the hot wall, fluctuations do not change a lot. For the area located in the viscous sublayer of the hot side, the decrease happens for  $x^\diamond < 2$ . An increase appears after this point.

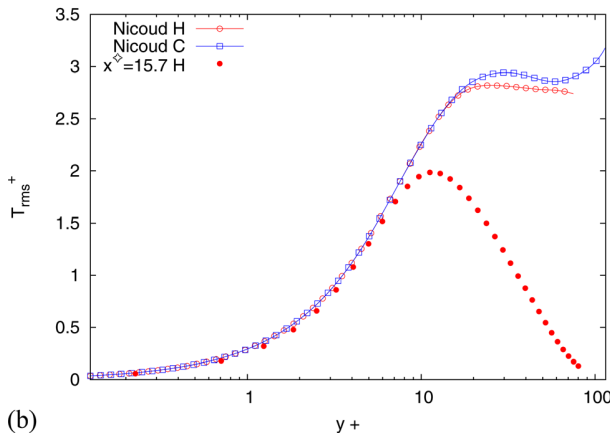
The part of the channel corresponding to  $x^\diamond < 2$  can be considered as a streamwise fluctuation velocity destruction zone: the viscosity increases a lot because of the heated wall with a consequent diminution of the velocity and its fluctuations. The rest of the channel ( $x^\diamond > 2$ ) can be considered as a streamwise velocity fluctuation creation zone: the impact of the temperature gradient on the flow, characterized by the thermal boundary layer development, makes the flow accelerate to the outlet of the channel and the streamwise velocity fluctuations increase.

Figure 14 shows the wall-normal mean velocity. At half the height of the channel, this velocity increases a lot for  $x^\diamond < 1$ . After  $x^\diamond = 2$ , it decreases to return to a value nearer its one at the inlet of the channel. Maxima are shifted to the increasing  $x^\diamond$  when crossing the half-height of the channel. A distinctive curve is for  $y^\diamond = 2$ . It corresponds to the boundary cells. The important viscosity makes the normal velocity decreases slightly before  $x^\diamond = 2$





(a)



(b)

Fig. 10 Temperature fluctuations with different scalings: (a) temperature fluctuations with semilocal scaling, (b) temperature fluctuations with classical scaling

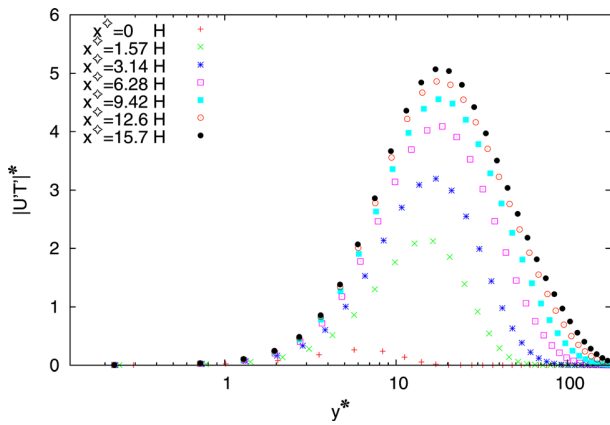


Fig. 11 Correlation between streamwise velocity and temperature

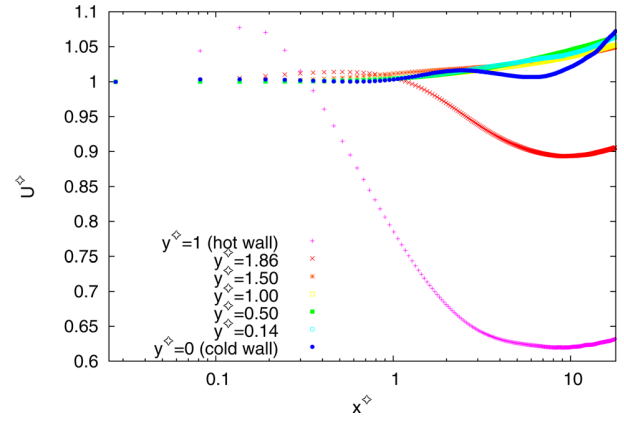


Fig. 12 Streamwise mean velocity

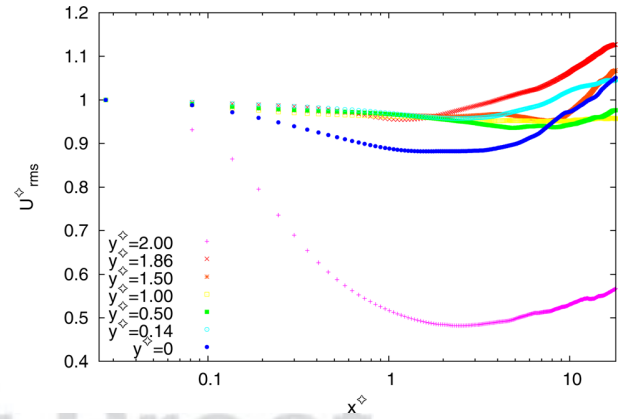


Fig. 13 Streamwise velocity fluctuations

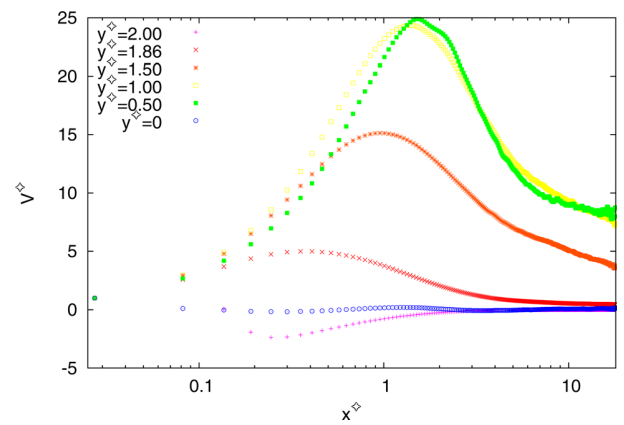


Fig. 14 Wall-normal mean velocity

and increases, for  $x^\diamond > 2$ , up to its initial value, thanks to the fluid mixing.

In Figs. 15 and 16, the values are presented for the part of the channel where thermal boundary layer is present ( $y^\diamond > 1$ ). The cold side of the channel is too far from the hot wall to make the temperature change significantly. Figure 15 shows the mean temperature along the channel. Obviously the fluid is more heated near to the hot wall. Figure 16 presents how temperature fluctuations increase through the channel. A distinctive behavior is visible for  $y^\diamond = 1.96$ , the temperature fluctuations increase for

$x^\diamond < 0.2$  and, after  $x^\diamond = 0.2$ , they decrease down to a constant value getting back to the inlet values.

Figure 17 shows the temperature averaged in time and in the two directions  $y$  and  $z$ . This quantity characterizes the part of thermal energy collected. At the end of the channel, the mean temperature increased by 18%.

$$\text{Nu} = 2h \frac{\left\langle \frac{dT}{dy} \right\rangle_w}{T_2 - T_1} \quad (33)$$

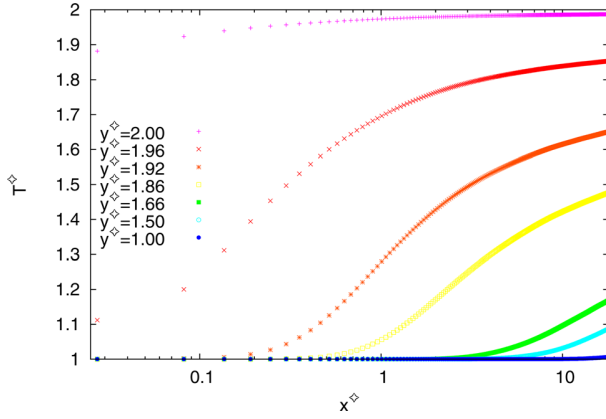


Fig. 15 Mean temperature

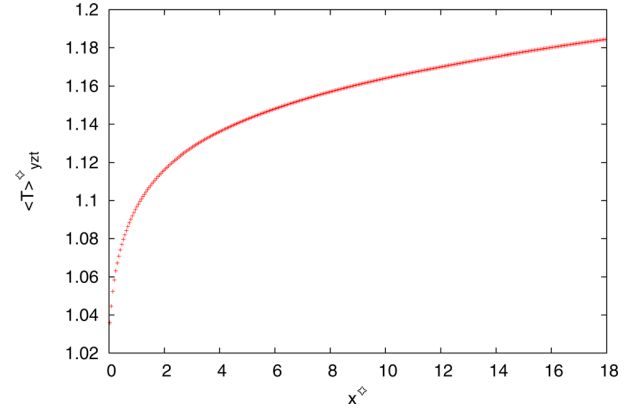


Fig. 17 y, z, and t averaged temperature

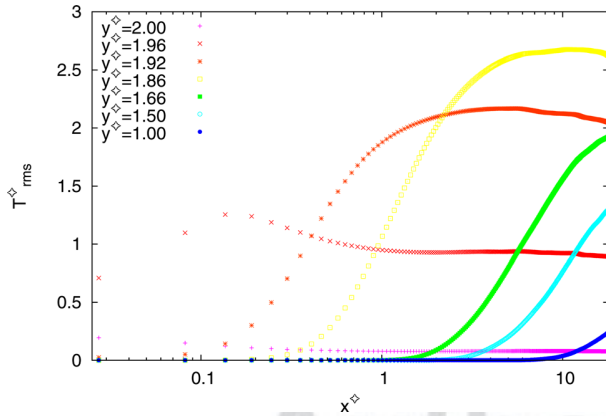


Fig. 16 Temperature fluctuations

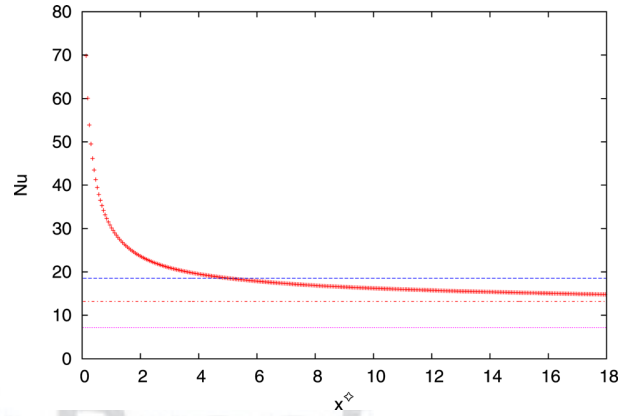


Fig. 18 Mean Nusselt's number given by simulation (points) and Colburn correlation (lines)

The Nusselt number for the anisothermal channel is plotted in Fig. 18. It decreases when  $x$  increases, down to a constant behavior. We can calculate a Nusselt number using the Colburn correlation [37]

$$\overline{Nu}_X = 0.023 Re_X^{0.8} Pr^{0.33} \quad (34)$$

where  $Re_X = (2\langle U \rangle_{xyz} h \rho_X / \mu_X)$ ,  $\rho_X$  and  $\mu_X$  are, respectively, the density and the dynamic viscosity for air at the cold wall ( $X=1$ ) and at the hot wall ( $X=2$ ),  $\langle U \rangle_{xyz}$  is the streamwise velocity averaged in time and in the three space directions.  $Re_m$  is the mean between the Reynolds number at the hot wall and at the cold wall:  $Re_m = (Re_1 + Re_2)/2$ .

Colburn correlation gives  $\overline{Nu}_1 = 18.6$  for the cold wall,  $\overline{Nu}_2 = 7.16$  for the hot wall, and  $\overline{Nu}_m = 13.2$ . One sees that this value is a good approximation to the mean behavior obtained by the simulation. However, for local exchanges, the correlation is unable to predict the behavior due to the establishment of the thermal boundary layer.

**3.2.3 Surfaces.** Figures 19–24 draw two input functions. It visualizes the spatial effect on flow of the thermal boundary layer development.

Figure 19 illustrates the temperature behavior into the channel. The isocontour in red corresponds to the thermal boundary layer. At the outlet of the channel, the thermal boundary layer almost reaches the half height.

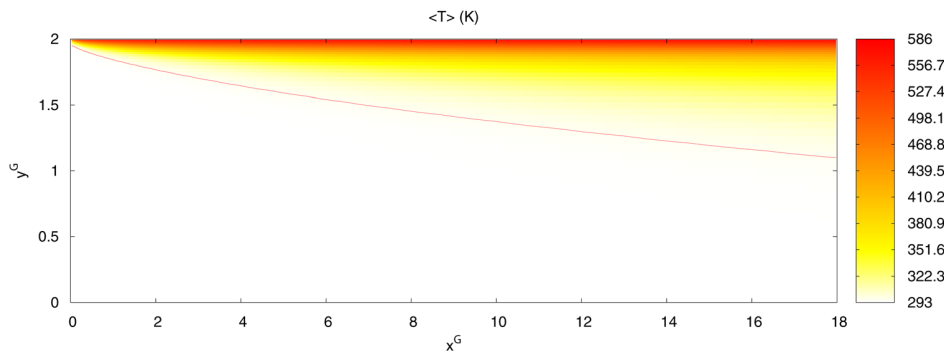


Fig. 19 Temperature and thermal boundary layer

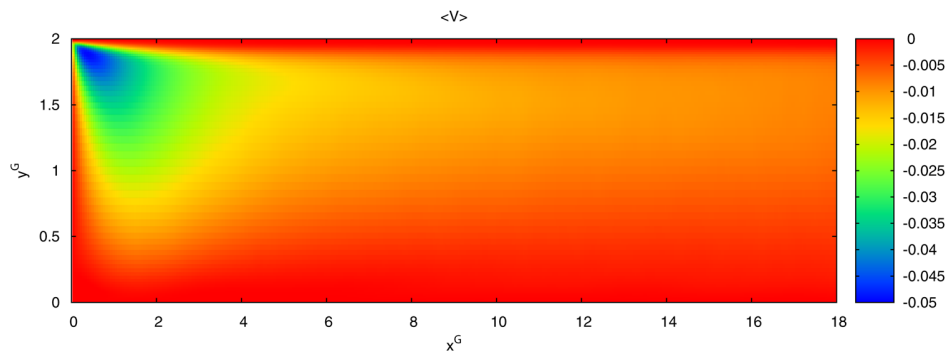


Fig. 20 Wall-normal mean velocity

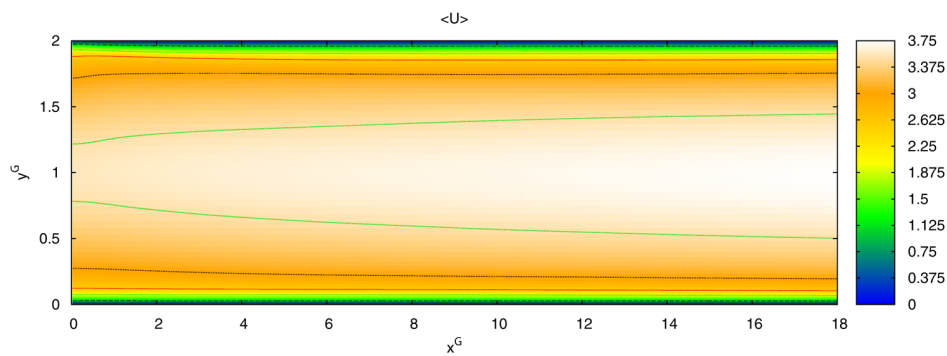


Fig. 21 Spanwise velocity

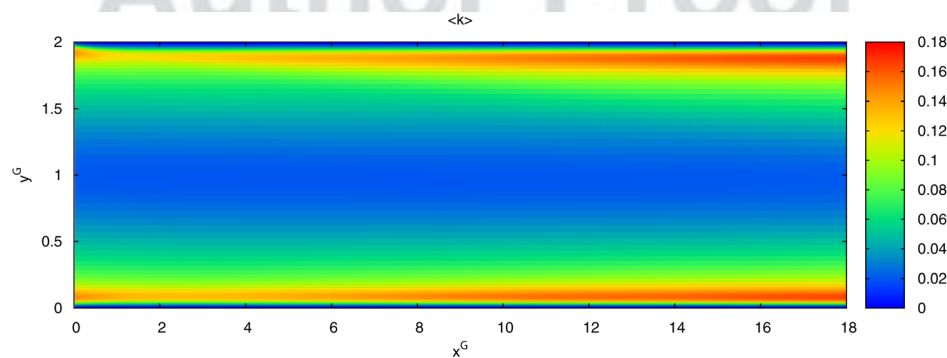


Fig. 22 Turbulent kinetic energy

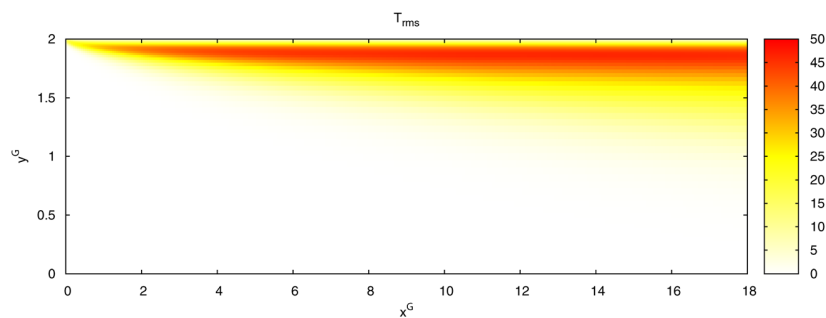


Fig. 23 Root mean squared temperature

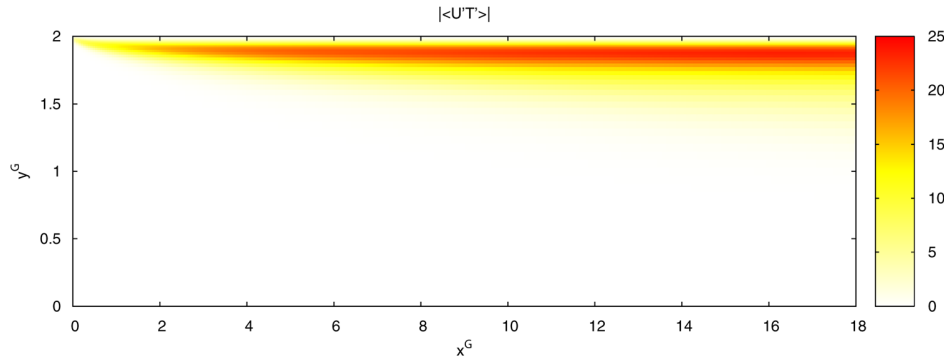


Fig. 24 Correlation between streamwise velocity and temperature

Figure 20 shows that the flow arriving at the inlet of the anisothermal channel is modified by the hot wall. Indeed, the hot side, generating dilatational and viscous effects, constrains the flow to go towards the cold wall. A temperature increase makes density decreases. The streamwise mass flow decreases too. Air is ejected in the wall-normal direction. The near cold wall area, where wall-normal velocity is zero, constrains the flow to return towards the center of the channel. This results in a narrowing of the flow section at the inlet of the channel.

This narrowing generates an acceleration visible on Fig. 21 in the center of the channel, following a Venturi-like effect. One sees in Fig. 22 that the main part of dynamic turbulence is located in two areas just next to the viscous sublayers. The height of these areas and the turbulent kinetic energy increase with  $x$ .

Figure 23 shows that root mean squared temperature is most present in an area below the wall. Root mean squared temperature increases from inlet to outlet of the channel. This area broadens when we progress into the channel.

The correlation streamwise velocity–temperature is plotted in Fig. 24. As seen before, the area where correlation is the most important is just below hot wall viscous sublayer. It has an asymptotic-like behavior.

#### 4 Conclusion

LES of thermal boundary layers spatial development are done to understand phenomena between turbulence and heat transfer into heat exchangers. In this study, a turbulent flow with turbulent Reynolds number  $Re_\tau \approx 180$  is generated in an isothermal biperiodic channel. Then, it is injected as inlet condition into an anisothermal opened channel with temperature ratio  $(T_2/T_1) = 2$ . Penetration of thermal boundary layer into height of the anisothermal opened channel is observed. Hot wall impact on channel flow in both cold and hot side of the channel is shown.

Important differences have been seen between the biperiodic anisothermal channel and open anisothermal channel. The evolution of the temperature and turbulence quantities has been shown for the streamwise and heightwise axis. The mean and the fluctuation profiles are found to be asymmetrical and perturbed by the thermal gradient. A fluctuation destruction and creation areas in the length of the channel have been found. The correlation between streamwise velocity and temperature has been demonstrated. The location of the correlation area has been highlighted.

#### Acknowledgment

This research has been possible thanks to CINES France, and to Trio-U team (CEA) France.

This work was granted access to the HPC resources of CINES under the allocation 2012-c2012025099 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

#### Nomenclature

$c$	= sonic velocity ( $\text{m s}^{-1}$ )	542
$C_p$	= specific heat at constant pressure ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )	543
$C_W$	= WALE model constant	544
$D_m$	= mass flow rate ( $\text{kg s}^{-1}$ )	545
$h$	= channel half-height (m)	546
$h_{th}$	= heat transfer coefficient ( $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ )	547
$k$	= turbulent kinetic energy = $\langle u_i \rangle \langle u_i \rangle / 2$ , in ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )	548
$P$	= pressure (Pa)	549
$P_{\text{dyn}}$	= dynamic pressure (Pa)	550
$P_{\text{thermo}}$	= thermodynamical pressure (Pa)	551
$R$	= air specific constant ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )	552
$S_{ij}$	= strain tensor ( $\text{s}^{-1}$ )	553
$T$	= temperature (K)	554
$T'$	= temperature fluctuations (K)	555
$T_\tau$	= friction temperature (K)	556
$t$	= time (s)	557
$U, V, W$	= velocity in $x$ -, $y$ -, $z$ -, directions, respectively ( $\text{m s}^{-1}$ )	558
$U', V', T'$	= turbulent fluctuation in $x$ -, $y$ -, $z$ -, directions, respectively ( $\text{m s}^{-1}$ )	559
$U_i$	= velocity in $x_i$ directions ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	560
$U_\tau$	= friction velocity ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	561
$x, y, z$	= Cartesian coordinate in streamwise, wall-normal, and spanwise direction, respectively (m)	562
$x_i$	= Cartesian coordinate in $i$ -directions (m)	563
$\mathcal{F}$	= subgrid heat flux ( $\text{K m s}^{-1}$ )	564
$\lambda$	= thermal conductivity ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ )	565
$\mu$	= dynamic viscosity ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ )	566
$\nu$	= kinematic viscosity ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )	567
$\nu_{sg}$	= subgrid viscosity ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )	568
$\rho$	= density ( $\text{kg m}^{-3}$ )	569
$\tau_\omega$	= wall shear stress (Pa)	570
$\tau_{ij}$	= subgrid shear stress ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )	571
$\Omega_{ij}$	= rotation tensor ( $\text{s}^{-1}$ )	572
$y^+$	= nondimensional Cartesian coordinate in wall-normal direction	573
$Ma$	= Mach number	574
$Pr$	= Prandtl number	575
$Re$	= Reynolds number	576
$Re_\tau$	= turbulent Reynolds number	577
$_1$	= low wall relative index	578
$_2$	= high wall relative index	579
$_{rms}$	= root mean squared quantity relative index	580
$_{sg}$	= subgrid quantity relative index	581
$_{\omega}$	= wall quantity relative index	582
$_{+}$	= friction term nondimensioned quantity relative exponent	583
$*$	= semilocal nondimensioned quantity relative exponent	584
$\sim$	= Favre's average operator	585
$-$	= spatial average operator	586

## References

- [1] Moser, R. D., Kim, J., and Mansour, N. N., 1999, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow Up to  $Re_\tau = 590$ ," *Phys. Fluids*, **11**(4), pp. 943–945.
- [2] Nicoud, F., 1998, "DNS of Channel Flow With Variable Properties," Center for Turbulent Research Annual Research Briefs, pp. 289–309.
- [3] Nicoud, F., 1999, "Conservative High-Order Finite-Difference Schemes for Low-Mach Number Flows," *J. Comput. Phys.*, **158**, pp. 71–97.
- [4] Kawamura, H., Abe, H., and Matsuo, Y., 1999, "DNS of Turbulent Heat Transfer in Channel Flow With Respect to Reynolds and Prandtl Number Effects," *Int. J. Heat Fluid Flow*, **20**(3), pp. 196–207.
- [5] Kawamura, H., Abe, H., and Shingai, K., 2000, "DNS of Turbulence and Heat Transport in a Channel Flow With Different Reynolds and Prandtl Numbers and Boundary Conditions," *Proceedings of the 3rd International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Y. Nagano, K. Hanjalic, and T. Tsuji, eds., Aichi Shuppan, Tokyo, pp. 15–32.
- [6] Lessani, B., and Papalexandris, M. V., 2006, "Time-Accurate Calculation of Variable Density Flows With Strong Temperature Gradients and Combustion," *J. Comput. Phys.*, **212**, pp. 218–246.
- [7] Lessani, B., and Papalexandris, M. V., 2007, "Numerical Study of Turbulent Channel Flow With Strong Temperature Gradients," *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, **18**, pp. 545–556.
- [8] Wang, W., and Pletcher, R., 1996, "On the Large Eddy Simulation of a Turbulent Channel Flow With Significant Heat Transfer," *Phys. Fluids*, **8**(12), pp. 3354–3366.
- [9] Aulery, F., Baux, Y., Toutant, A., and Bataille, F., 2011, "Thermal Boundary Condition Influence on Biperiodic Channel Flow With High Thermal Gradient," *Mach. Dyn. Res.*, **35**(1), pp. 19–28.
- [10] Serra, S., Toutant, A., and Bataille, F., 2012, "Thermal Large Eddy Simulation in a Very Simplified Geometry of a Solar Receiver," *Heat Transfer Eng.*, **33**(6), pp. 505–524.
- [11] Serra, S., Toutant, A., and Bataille, F., 2012, "High Temperature Gradient Effect on a Turbulent Channel Flow Using Thermal Large-Eddy Simulation in Physical and Spectral Spaces," *J. Turbul.* (accepted).
- [12] Serra, S., Toutant, A., Bataille, F., and Zhou, Y., 2012, "Turbulent Kinetic Energy Spectrum in Very Anisothermal Flows," *Phys. Lett. A*, **376**(45), pp. 3177–3184.
- [13] Zhou, Y., 2010, "Renormalization Group Theory for Fluid and Plasma Turbulence," *Phys. Rep.*, **488**(1), pp. 1–49.
- [14] Zhou, Y., and Oughton, S., 2011, "Nonlocality and the Critical Reynolds Numbers of the Minimum State Magnetohydrodynamic Turbulence," *Phys. Plasmas*, **18**(7), p. 072304.
- [15] Brilliant, G., Bataille, F., and Ducros, F., 2004, "Large-Eddy Simulation of a Turbulent Boundary Layer With Blowing," *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **17**(5–6), pp. 433–443.
- [16] Brilliant, G., Husson, S., and Bataille, F., 2005, "Large Eddy Simulations of Heat and Mass Transfers in Case of Non Isothermal Blowing," *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, Vol. 6, W. Rodi and M. Mulas, eds., ERCOFTAC, London, pp. 751–760.
- [17] Brilliant, G., Husson, S., Bataille, F., and Ducros, F., 2008, "Study of the Blowing Impact on a Hot Turbulent Boundary Layer Using Thermal Large Eddy Simulation," *Int. J. Heat Fluid Flow*, **29**(6), pp. 1670–1678.
- [18] Brilliant, G., Husson, S., and Bataille, F., 2008, "Experimental Study of the Blowing Impact on a Hot Turbulent Boundary Layer," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **51**(7–8), pp. 1996–2005.
- [19] Toutant, A., and Bataille, F., 2012, "Turbulence Statistics in a Fully Developed Channel Flow Submitted to a High Temperature Gradient," *Int. J. Therm. Sci.* (submitted).
- [20] Hattori, H., Hara, T., and Nagano, Y., 2007, "Direct Numerical Simulation of Stable and Unstable Turbulent Thermal Boundary Layers," *Int. J. Heat Fluid Flow*, **28**, pp. 1261–1271.
- [21] Li, Q., Schlatter, P., Brandt, L., and Henningson, D. S., 2009, "DNS of a Spatially Developing Turbulent Boundary Layer With Passive Scalar Transport," *Int. J. Heat Fluid Flow*, **30**(5), pp. 916–929.
- [22] Araya, G., and Castillo, L., 2012, "DNS of Turbulent Thermal Boundary Layers Up to  $Re_\theta = 2300$ ," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **55**, pp. 4003–4019.
- [23] Lund, T. S., Wu, X., and Squires, K. D., 1998, "Generation of Turbulent Inflow Data for Spatially-Developing Boundary Layer Simulations," *J. Comput. Phys.*, **140**(2), pp. 233–258.
- [24] Hans, V. S., Saini, R. P., and Saini, J. S., 2010, "Heat Transfer and Friction Factor Correlations for a Solar Air Heater Duct Roughened Artificially With Multiple V-Ribs," *Solar Energy*, **84**(6), pp. 898–911.
- [25] Wu, J. M., and Tao, W. Q., 2012, "Effect of Longitudinal Vortex Generator on Heat Transfer in Rectangular Channels," *Appl. Therm. Eng.*, **37**(0), pp. 67–72.
- [26] Daguene-Frick, X., Foucaut, J.-M., Coudert, S., Toutant, A., and Olalde, G., 2012, "Experimental Analysis of the Turbulent Flow Behavior of a Textured Surface Proposed for Asymmetric Heat Exchangers," *Flow, Turbul. Combust.*, **89**, pp. 149–169.
- [27] Colleoni, A., Toutant, A., Olalde, G., and Foucaut, J.-M., 2013, "Optimization of Winglet Vortex Generators Combined With Riblets for Wall/Fluid Heat Exchange Enhancement," *Appl. Therm. Eng.*, **50**(1), pp. 1092–1100.
- [28] Paolucci, S., 1982, "On the Filtering of Sound from the Navier-Stokes Equations," Tech. Rep. SAND82-8257.
- [29] White, F. M., 1991, *Viscous Fluid Flow*, 2nd ed., McGraw Hill, New York.
- [30] Nicoud, F., and Ducros, F., 1999, "Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor," *Flow, Turbul. Combust.*, **62**, pp. 183–200.
- [31] Smagorinsky, J., 1963, "General Circulation Experiments With Primitive Equations," *Mon. Weather Rev.*, **93**, pp. 99–165.
- [32] CEA, 2012, "Trio U Website Project," <http://www-trio-u.cea.fr>
- [33] Châtelain, A., Ducros, F., and Métais, O., 2004, "LES of Turbulent Heat Transfer: Proper Convection Numerical Schemes for Temperature Transport," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **44**(9), pp. 1017–1044.
- [34] Van Driest, E. R., 1951, "Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids," *J. Aerosp. Sci.*, **18**(3), pp. 145–160.
- [35] Nicoud, F., and Bradshaw, P., 2000, "A Velocity Transformation for Heat and Mass Transfer," *Phys. Fluids*, **12**(1), p. 237238.
- [36] Simpson, R. L., 1970, "Characteristics of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Numbers With and Without Transpiration," *J. Fluid Mech.*, **42**, pp. 769–802.
- [37] Incropera, F. P., and DeWitt, D. P., 1996, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 4th ed., Wiley, New York.



# Analyse spectrale de l'équation de l'énergie cinétique turbulente en écoulement pariétal fortement anisotherme

Frédéric AULERY<sup>1</sup>, Adrien TOUTANT<sup>1\*</sup>, Françoise BATAILLE<sup>2</sup>, Ye ZHOU<sup>3</sup>

<sup>1</sup>PROMES CNRS, Rambla de la thermodynamique, Tecnosud, 66100 Perpignan, France  
Université de Perpignan Via Domitia, 52 avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan Cedex 9, France

<sup>2</sup> Florida State University Department of Mathematics 1017 Academic Way Tallahassee, USA

<sup>3</sup> Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, Livermore, California 94551, USA

\*(Auteur correspondant : adrien.toutant@univ-perp.fr)

**Résumé** - Les écoulements pariétaux soumis à de forts gradients thermiques voient leur dynamique se modifier. Les études des statistiques physiques de ces écoulements ont montré que les modifications de l'écoulement ne peuvent pas seulement s'expliquer par la modification locale des propriétés du fluide. La réalisation de simulations des grandes échelles de canaux plans anisothermes, à un nombre de Reynolds turbulent de 395, permet d'étudier les phénomènes liés aux couplages entre la partie dynamique et la partie thermique de ces écoulements. Les spectres des différentes contributions à l'équation de l'énergie cinétique turbulente sont tracés. Les interactions entre l'écoulement et la thermique sont analysés.

## Nomenclature

$T$	température $K$
$U$	vitesse, $m.s^{-1}$
$V$	$V = \sqrt{\rho}U$ , $kg^{1/2}.m^{-1/2}.s^{-1}$
$b$	$b = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ , $kg^{-1/2}.m^{3/2}$
$k$	vecteur d'onde $m^{-1}$
$Re$	nombre de Reynolds
$Re_\tau$	nombre de Reynolds de frottement
$\Re$	partie réelle
SGE	Simulation des Grandes Échelles
SND	Simulation Numérique Directe

<i>Symboles grecs</i>	
$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\mu$	viscosité dynamique, $Pa.s$
<i>Indices et exposants</i>	
$c$	chaud
$f$	froid
$+$	adimensionné
$*$	complexe conjugué
$'$	valeur fluctuante
$\bar{\cdot}$	valeur moyenne
$rms$	root mean square
$i, j$	composante

## 1. Introduction

Dans de nombreux procédés utilisant des échangeurs de chaleur, les conditions physiques sont telles que les gradients thermiques impactent très fortement la dynamique des écoulements. Les modélisations de type RANS actuelles ne tiennent que partiellement compte de ces effets sur les écoulements [1, 2]. L'amélioration des modélisations numériques passe par une étude des phénomènes fins liés au couplage thermique/dynamique de ces écoulements. Pour réaliser ces études, des simulations numériques directes (SND) ou simulations des grandes échelles (SGE), sont utilisées. Nicoud *et al.* [3] pour de bas nombres de Reynolds et Serra *et al.* [4] pour une turbulence plus intense, ont montré l'influence de la température qui change la dynamique de l'écoulement, en faisant notamment augmenter ou diminuer le niveau de turbulence en proche paroi, au delà des effets liés aux variations locales du nombre de Reynolds.

Pour aller plus loin dans la compréhension des changements dus aux gradients de température, il est intéressant d'étudier les statistiques de la turbulence dans l'espace spectral. Ces études per-



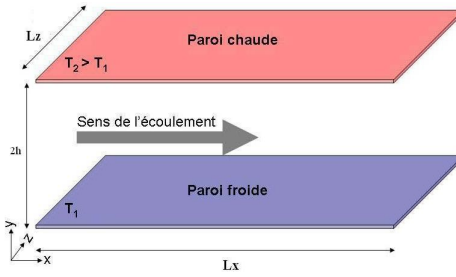


Figure 1 Canal plan bipériodique anisotherme

mettent de comprendre comment les mécanismes de la turbulence d'un canal plan sont modifiés par le gradient de température. Les mécanismes d'un canal plan isotherme ont été décrit dans l'étude de Bolotnov *et al.* [5] pour un nombre de Reynolds turbulent de 180. A notre connaissance, il n'existe que cette étude spectrale pour un canal plan isotherme et aucune étude n'existe en canal anisotherme ou à plus fort nombre de Reynolds. Notre article se propose d'étudier les différentes contributions aux variations de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral en canal plan isotherme et anisotherme pour un nombre de Reynolds turbulent de 395. Pour cela, nous présentons les SGE réalisées avec le logiciel Trio\_U en les comparant dans l'espace physique aux SND de la littérature. Nous explicitons ensuite dans le domaine spectral les différentes contributions à l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Enfin, nous comparons ces différentes contributions avec et sans gradient de température.

## 2. Simulations réalisées

### 2.1. Configuration

Nous utilisons une géométrie de type canal plan bipériodique anisotherme (figure 1). Elle a le double avantage de permettre une simulation fine et de se concentrer sur les effets liés au gradient thermique. Les parois sont à température constantes respectivement  $T_f = 293K$  pour la paroi froide et  $T_c = 1.01T_f$  (quasi-isotherme) ou  $T_c = 2T_f$  (anisotherme). Le nombre de Reynolds turbulent moyen est  $Re_\tau = 395$ . Une force est ajoutée dans la direction longitudinale pour jouer le rôle de moteur de l'écoulement et maintenir un débit constant. La périodicité du canal rend les directions longitudinale  $ox$  et transversale  $oz$  homogènes et facilite la convergence des statistiques.

Pour réaliser nos simulations numériques, nous utilisons le code Trio\_U. C'est un code de mécanique des fluides ouvert et modulaire développé par le CEA Grenoble où sont utilisés les volumes finis et les éléments finis [6]. Ce code massivement parallèle est particulièrement adapté aux supercalculateurs tels que la machine JADE du CINES que nous utilisons pour notre étude. Il permet, entre autres, la réalisation de simulations numériques directes [7] et de simulations des grandes échelles [8]. Les méthodes de résolution des équations sont spécifiquement adaptées aux écoulements turbulents très anisothermes. Nous utilisons l'approximation de bas nombre de Mach [9], avec un algorithme de résolution qui décrit précisément le couplage entre la partie thermique et la partie dynamique des écoulements. Le schéma en temps est un schéma Runge-Kutta d'ordre 3. Les opérateurs de convection sont : un schéma centré d'ordre 4 pour l'équation de conservation de quantité de mouvement et un schéma QUICK d'ordre 3 [10] pour la conservation de l'énergie. Les modèles de turbulence utilisés sont : un modèle WALE [11] pour la partie dynamique et un modèle à Prandtl turbulent constant pour la conservation de l'énergie. L'ensemble de ces méthodes a été validé lors de précédentes études [12].



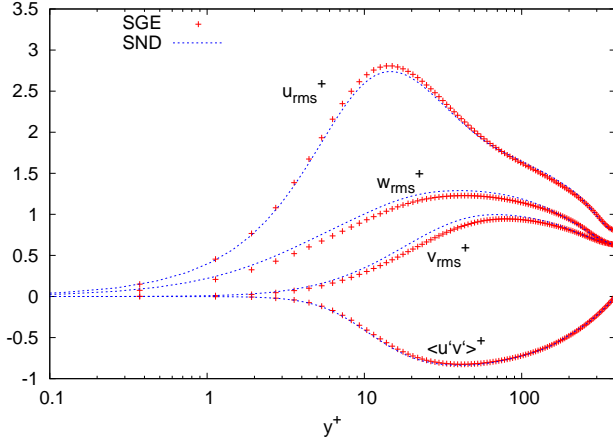


Figure 2 Comparaison des fluctuations de vitesses adimensionnées avec la SND de Moser *et al.* [13]

## 2.2. Simulations quasi-isothermes

La simulation SGE d'un canal plan quasi-isotherme (le rapport entre la température chaude et froide étant de 1.01) fournit une référence pour l'étude des statistiques de l'écoulement en canal plan fortement anisotherme. Le maillage utilisé comporte 896x200x448 mailles soit environ 80 millions de mailles avec un pas constant dans les directions  $ox$  et  $oz$  ( $\Delta x^+ = \Delta z^+ = 11$ ) et un raffinement de proche paroi utilisant une loi de type tangente hyperbolique ( $\Delta y^+ = 0.75$  à  $\Delta y^+ = 7.5$ ). Sur la figure 2, les profils de notre simulation sont comparés à ceux de la simulation numérique directe de Moser *et al.* [13]. Les fluctuations de vitesses provenant de notre simulation sont représentées par des points, ceux de la SND par des lignes. Les comportements des fluctuations sont en accord même si les amplitudes sont légèrement sous-estimées dans le cas des fluctuations des vitesses normales ou transversales à la paroi et légèrement surestimées dans le cas de la fluctuation de vitesse longitudinale. Par ailleurs, nous observons que la corrélation de vitesse  $\overline{u'v'}$  est parfaitement capturée ; cette grandeur étant liée directement à la production turbulente, ceci indique que les mécanismes de production sont bien décrits.

## 2.3. Simulation anisotherme

Les résultats suivants proviennent d'un canal plan anisotherme soumis à un ratio de température de deux pour un nombre de Reynolds turbulent de 395. Elle comporte 448x200x224 mailles soit environ 20 millions de mailles ( $\Delta x^+ = \Delta z^+ = 14$ ,  $\Delta y^+ = 1$  à  $\Delta y^+ = 7.5$ ). Pour valider les résultats de notre simulation, nous les comparons à la simulation numérique directe de Toutant *et al.* [7]. Les figures 3, 4 et 5 représentent les fluctuations de vitesse et de température ; le côté froid est en bleu et le côté chaud en rouge. Les résultats provenant de la simulation de Toutant *et al.* sont en trait plein, ceux de notre simulation sont représentés par des symboles. Nous observons ici aussi que les profils de la simulation numérique directe sont correctement suivis ; en particulier pour les fluctuations de vitesse en proche paroi. Pour les corrélations  $\overline{u'v'}$ , les écarts évoluent en sens inverse entre côté chaud et côté froid, les profils sont sous-estimés du côté chaud et surestimés du côté froid. Les amplitudes des écarts par rapport à la simulation numérique directe sont plus importantes côté froid, ce qui s'explique par la différence du niveau de turbulence local entre côté chaud et côté froid ( $Re_{\tau_c} = 542$  et  $Re_{\tau_f} = 220$ ) et donc un besoin de raffinement supplémentaire. Les profils de fluctuations de températures sont très bien capturés.

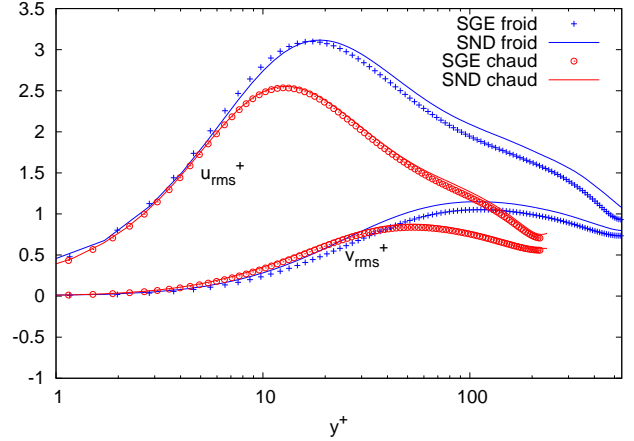


Figure 3 Fluctuations de vitesses longitudinale et normale adimensionnées ( $Re_{\tau} = 395$  et  $T_r = 2$ )

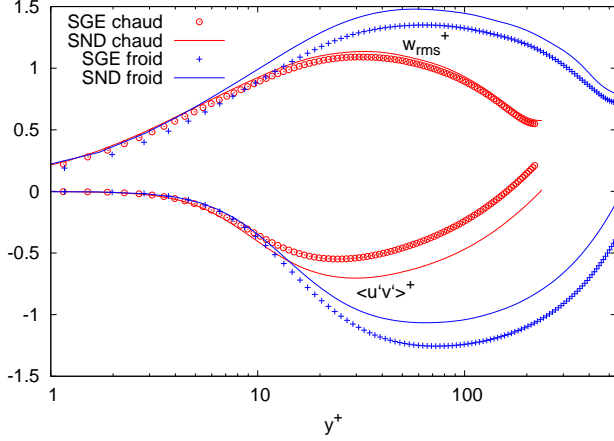


Figure 4 *Fluctuations de vitesses transversales et corrélations  $\overline{u'v'}$  adimensionnées*

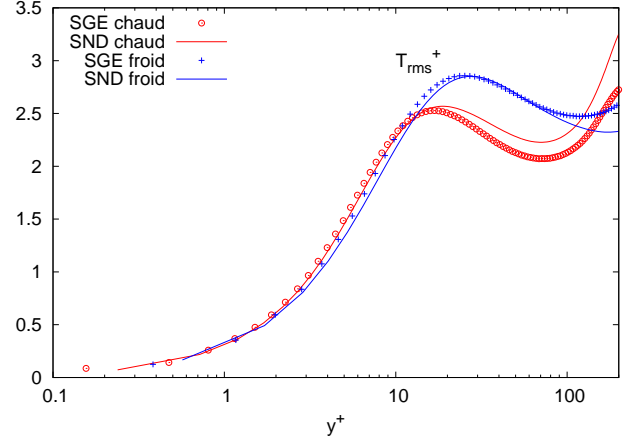


Figure 5 *Fluctuations de températures adimensionnées*

### 3. Equations

#### 3.1. Changements de variables

Afin d'étudier l'évolution des grandeurs de nos écoulements, nous utilisons un changement de variable adapté à l'étude d'écoulements soumis à de fortes variations de masse volumique [14, 15]. L'équation de conservation de la quantité de mouvement utilisant l'hypothèse de bas nombre de Mach est :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \quad (1)$$

où  $P_{dyn}$  est la pression dynamique introduite par l'approximation de bas nombre de Mach pour rendre compte des effets dynamiques. On introduit le changement de variables  $V_i = \rho^{\frac{1}{2}} U_i$  et  $b = \rho^{-\frac{1}{2}}$ . Ainsi nous obtenons après calcul :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i U_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2} V_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = b \left[ -\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2)$$

#### 3.2. Équation dans l'espace spectral

Pour détailler les différentes contributions de l'équation de l'énergie cinétique turbulente, nous l'étudions dans l'espace spectral en utilisant une transformée de Fourier bidimensionnelle  $F_k^y$ . Elle sera notée  $F_k^y[g(x, y, z)]$  ou  $\widehat{g}$ . L'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial t} = 2\Re \left( -\widehat{v_x'^*} \widehat{u_y'} \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial y} - \frac{\widehat{v_i'^*}}{2} \left( \widehat{V_i} \frac{\partial \widehat{u_j'}}{\partial x_j} + \widehat{v_i'} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial y} - \widehat{v_i'} \frac{\partial \widehat{u_j'}}{\partial x_j} \right) - \widehat{v_i'^*} F_k^y \left[ \frac{\partial v_i' u_j'}{\partial x_j} \right] - \widehat{v_i'^*} b \frac{\partial \overline{P_{dyn}}}{\partial x_i} \right) \\ + 2Re \left( \widehat{v_i'^*} F_k^y \left[ b \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \widehat{v_i'^*} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - b \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (3)$$

#### 3.3. Décomposition des termes

L'équation (3) nous donne la variation de l'énergie cinétique turbulente pour chaque plan  $xoz$  et chaque vecteur d'onde  $\underline{k}$  capturé par notre simulation. L'équation est explicitée comme

suit :

$$\frac{\partial E_c(k, y)}{\partial t} = \Pi(k, y) + \sum_n T_n(k, y) + D(k, y)$$

où  $k = |\underline{k}|$ ,  $D$  est la dissipation,  $\Pi$  est la production turbulente et les  $T_n$  sont les différents termes de transfert de l'énergie cinétique turbulente.

$$D = \int_k 2\Re \left( \widehat{v_i'^*} F_k^y \left[ b \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - b \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \right) d\underline{k} \quad (4)$$

Les différents termes de transfert sont décomposés pour mettre en évidence les transferts qui ont lieu dans un plan  $xoz$ , les transferts entre les plans  $xoz$  ainsi que les termes de transfert liés à l'existence d'un gradient thermique. Les différents termes sont :

Production turbulente

Transfert triadique dans le plan

$$\Pi = \int_k -2\Re \left[ \widehat{v_x'^*} \widehat{u_y'} \frac{\partial \widehat{V_x}}{\partial y} \right] d\underline{k} \quad T_{in} = \int_k -2Re \left[ \sum_i \sum_{j=x,z} \widehat{v_i'^*} \frac{\partial \widehat{v_j' u_j'}}{\partial x_j} \right] d\underline{k}$$

Transfert triadique non standard

Transfert triadique interplan

$$T_{ns} = \int_k -2\Re \left[ \sum_i \widehat{v_i'^*} \overline{U_x} \frac{\partial \widehat{v_i'}}{\partial x} \right] d\underline{k} \quad T_{it} = \int_k -2\Re \left[ \sum_i \widehat{v_i'^*} \frac{\partial \widehat{v_i' u_y'}}{\partial y} \right] d\underline{k}$$

Transfert thermique

$$\Gamma = \int_k -2\Re \left[ \sum_i \left[ \widehat{v_i'^*} \overline{U_y} \frac{\partial \widehat{v_i'}}{\partial y} + \frac{1}{2} \widehat{v_i'^*} \widehat{v_i'} \frac{\partial \overline{U_y}}{\partial y} - \sum_j \frac{1}{2} \widehat{v_i'^*} \left( \widehat{v_i'} \frac{\partial \widehat{u_j'}}{\partial x_j} \right) + \sum_j \widehat{v_i'^*} \overline{V_i} \frac{\partial \widehat{u_j'}}{\partial x_j} \right] \right] d\underline{k}$$

Transfert par la pression dans le plan

Transfert par la pression interplan

$$\Phi_{in} = \int_k -2\Re \left[ \sum_{i=1,3} \widehat{v_i'^*} \left( \widehat{b \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i}} \right) \right] d\underline{k} \quad \Phi_{it} = \int_k -2Re \left[ \widehat{v_y'^*} \left( \widehat{b \frac{\partial P_{dyn}}{\partial y}} \right) \right] d\underline{k}$$

## 4. Spectres

Compte tenu de la quantité de données obtenue, nous ne pouvons pas montrer de manière exhaustive l'ensemble des résultats. Dans cet article, nous présentons l'énergie cinétique turbulente (figures 6 et 7), les termes de Production  $\Pi$  (figures 8 et 9), de transfert par la pression dans le plan  $\Phi_{in}$  (figures 10 et 11) ainsi que de transfert par effets thermiques  $\Gamma$  (figures 12 et 13) pour les cas quasi-isotherme et anisotherme. Ces termes présentent les variations de normes, ainsi que les évolutions, les plus importantes lors du passage du cas quasi-isotherme au cas anisotherme. Les données sont représentées sous la forme de plan où l'axe des abscisses est la norme du vecteur d'onde, l'axe des ordonnées représente la position dans la hauteur du canal (0 étant la paroi froide et 2 la paroi chaude) et l'échelle de couleur les amplitudes. Les figures 8 à 13 sont adimensionnées par le maximum du terme de production du canal quasi-isotherme.

Sur les figures 6 et 7, nous observons qu'il existe, dans le canal, 3 principales zones : une zone centrale comprise entre  $y/h = 0.5$  et  $y/h = 1.5$  et les deux zones de proche paroi. La zone centrale contient moins d'énergie cinétique et l'on observe que la décroissance de l'énergie commence pour des vecteurs d'ondes plus faibles que dans les zones de proche paroi. Dans le cas anisotherme, à l'approche de la paroi chaude les hautes fréquences contiennent moins d'énergie et la décroissance de l'énergie est plus rapide. Ceci rend compte de l'augmentation

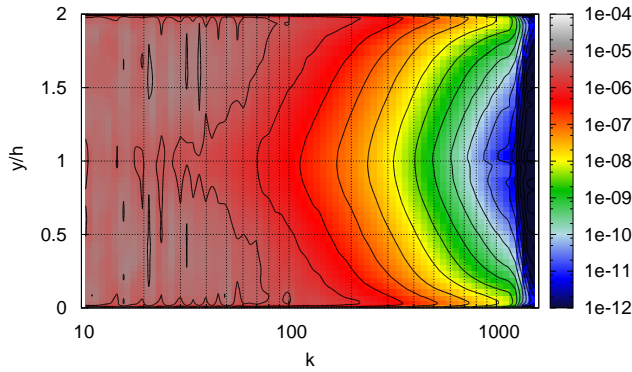


Figure 6 Spectre d'énergie cinétique turbulente en canal quasi-isotherme

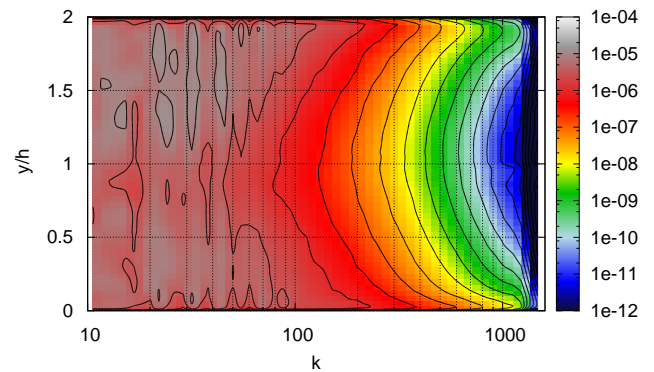


Figure 7 Spectre d'énergie cinétique turbulente en canal anisotherme

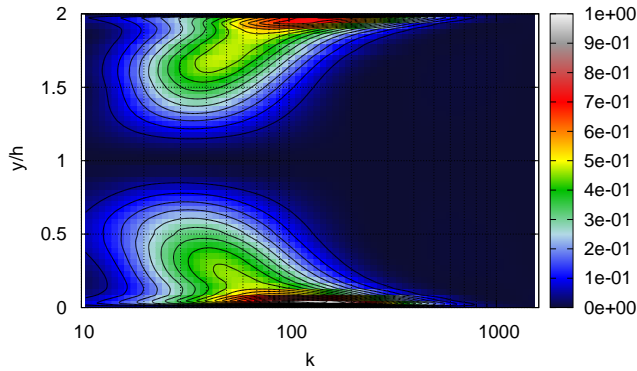


Figure 8 Production turbulente par cisaillement en canal quasi-isotherme

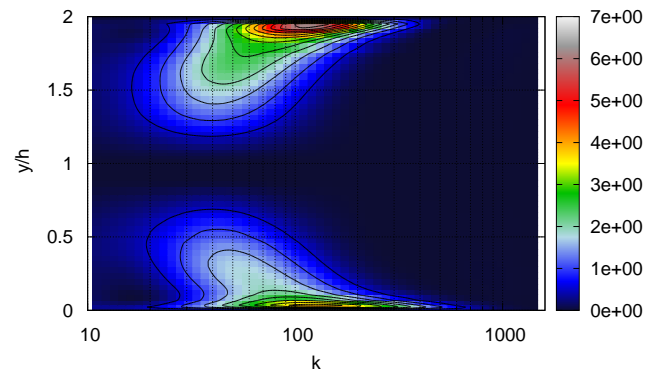


Figure 9 Production turbulente par cisaillement en canal anisotherme

locale de la viscosité qui augmente la dissipation lorsque le ratio de température augmente. La production turbulente (figures 8 et 9) possède un maxima dans la zone correspondante aux pics des corrélations de vitesses longitudinale et normale. Le maximum de production se fait pour un vecteur d'onde compris entre  $k = 100m^{-1}$  et  $k = 200m^{-1}$ . A mesure que l'on se déplace vers le centre du canal l'amplitude du terme diminue et le maxima se déplace vers des structures de plus grandes tailles (vecteurs d'ondes plus petits). Pour la simulation avec un fort gradient thermique, nous voyons que la valeur de la production turbulente est multipliée par 6 et que le maximum local se trouve du côté chaud. Ce résultat peut sembler contre intuitif car le niveau de turbulence local est plus faible côté chaud que côté froid mais cet accroissement de la production turbulente du côté chaud est compensé par l'augmentation simultanée de la dissipation et des transferts. Le terme de transfert par la pression dans le plan est celui qui subit la plus grande modification de comportement en présence de gradient thermique (figures 10 et 11). Entre simulation isotherme et anisotherme, l'amplitude est multipliée par un facteur 10. Cet accroissement n'a lieu que du côté chaud. Enfin, les figures 12 et 13 montrent que le gradient de température crée un puit d'énergie en proche paroi côté chaud et une source d'énergie en proche paroi côté froid. L'énergie prise du côté chaud est ainsi donnée au côté froid. Ce terme est quasi-nul dans la simulation quasi-isotherme alors qu'il est du même ordre de grandeur que le terme de transfert par la pression dans le plan du cas anisotherme. Le ratio de température impacte donc directement la quantité d'énergie transférée. Ce résultat est en cohérence avec les résultats de Serra *et al.*[4]. Dans le cas d'un canal plan anisotherme fortement turbulent, le côté froid possède un niveau de turbulence supérieur à celui d'un écoulement en canal plan

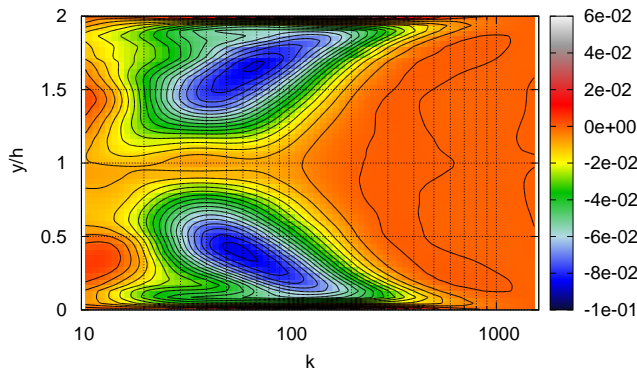


Figure 10 *Transfert d'énergie par la pression dans le plan en canal quasi-isotherme*

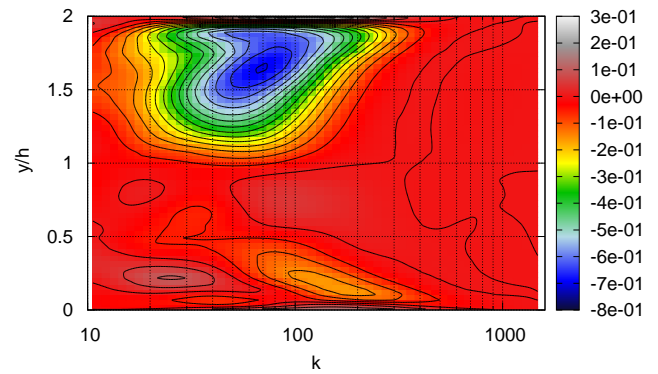


Figure 11 *Transfert d'énergie par la pression dans le plan en canal anisotherme*

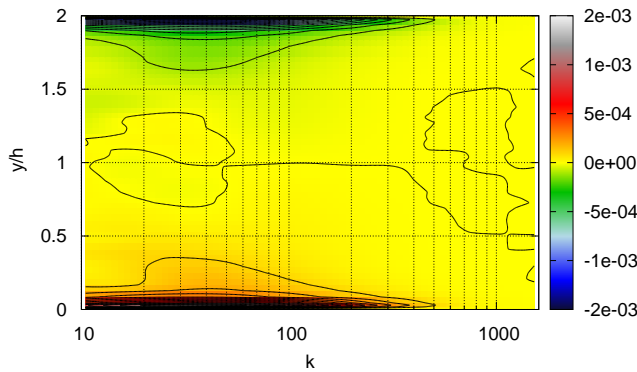


Figure 12 *Transfert d'énergie par effet de la température en canal quasi-isotherme*

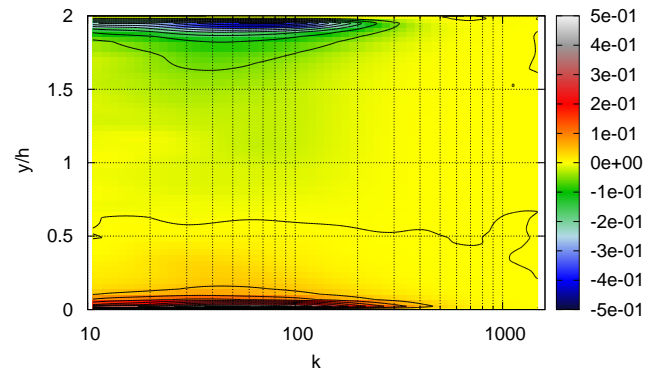


Figure 13 *Transfert d'énergie par effet de la température en canal anisotherme*

isotherme à nombre de Reynolds turbulent équivalent. Du côté chaud, l'effet inverse se produit et le niveau de turbulence est inférieur à celui d'un écoulement de même nombre de Reynolds.

## 5. Conclusion

Après avoir présenté les simulations d'un canal plan quasi-isotherme puis d'un canal plan anisotherme fortement turbulent, nous avons vérifié leur capacité à décrire correctement la physique des écoulements en canaux plans anisothermes. Nous avons ensuite explicité l'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral pour des écoulements quasi-compressibles. Par la suite, nous avons décomposé cette équation en différents termes que nous avons tracés puis comparés. L'étude des différentes contributions de l'équation de l'énergie cinétique turbulente a mis en exergue la présence de phénomènes particuliers dont une surproduction de turbulence côté chaud. L'existence d'un transfert d'énergie cinétique turbulente entre côté chaud et côté froid lié au gradient de température a été montré.

## Références

- [ 1 ] X. Daguenet-Frick, A. Toutant, F. Bataille, G. Olalde, Numerical investigation of a ceramic high-temperature pressurized-air solar receiver, Solar energy (2012) accepted.
- [ 2 ] A. Colleoni, Intensification des transferts de chaleur en régime turbulent pour le

développement d'un récepteur solaire surfacique à haute température en céramique, Ph.D. thesis, Université de Perpignan via domitia (2012).

- [ 3] F. C. Nicoud, Numerical study of a channel flow with variable properties, Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs (1998) 289–309.
- [ 4] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, Y. Zhou, High-temperature gradient effect on a turbulent channel flow using thermal large-eddy simulation in physical and spectral spaces, Journal of Turbulence (2012) 3177–3184.
- [ 5] I. A. Bolotnov, R. T. Lahey Jr., D. A. Drew, K. E. Jansen, A. A. Oberai, Spectral analysis of turbulence based on the DNS of a channel flow, Computers and Fluids 39 (2009) 640–655.
- [ 6] C. Calvin, P. Emonot, The trio-unitaire project : A parallel cfd 3-dimensional code, in : Scientific Computing in Object-Oriented Parallel Environments, Vol. 1343, pp. 169–176.
- [ 7] A. Toutant, F. Bataille, Simulation numérique directe d'un écoulement turbulent en canal soumis à un fort gradient de température, in : Congrès société française de thermique, Perpignan, 2011.
- [ 8] G. Brillant, S. Husson, F. Bataille, Study of the blowing impact on a hot turbulent boundary layer using thermal large eddy simulation 29 (6) (2008) 1670–1678.
- [ 9] S. Paolucci, On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations, Tech. Rep. SAND82-8257, SANDIA National Labs., Livermore, CA (USA) (1982).
- [ 10] A. Châtelain, F. Ducros, O. Métais, Les of turbulent heat transfer : proper convection numerical schemes for temperature transport, International Journal for Numerical Methods in Fluids 44 (9) (2004) 1017–1044.
- [ 11] F. Nicoud, F. Ducros, Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor, Flow, Turbulence and Combustion 62 (1999) 183–200.
- [ 12] F. Aulery, A. Toutant, F. Bataille, Validation de méthodes numériques pour la simulation d'écoulements fortement anisothermes, in : Congrès Société française de thermique, Bordeaux, 2012.
- [ 13] R. D. Moser, J. Kim, N. N. Mansour, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ , Physics of Fluids 11 (4) (1999) 943–945.
- [ 14] A. W. Cook, Y. Zhou, Energy transfer in Rayleigh-Taylor instability, Phys. Rev. E 66 (2002) 026312.
- [ 15] S. Kida, S. A. Orszag, Energy and spectral dynamics in decaying compressible turbulence, Journal of Scientific Computing 7 (1992) 1–34.

## Remerciements

Ces travaux ont bénéficié d'un accès aux moyens de calcul du CINES au travers de l'allocation de ressources 2012-c20132a5099 attribuée par GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif). Nous remercions l'équipe Trio\_U du CEA Grenoble pour la mise à disposition et le développement du code de calcul Trio\_U.









## Numerical simulations of sodium mixing in a T-junction

F. Aulery<sup>a</sup>, A. Toutant<sup>a,\*</sup>, R. Monod<sup>b</sup>, G. Brillant<sup>b</sup>, F. Bataille<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire PROMES, UPR CNRS 8521, Rambla de la thermodynamique, Technosud, 66100 Perpignan, France

<sup>b</sup> Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, BP 3, 13115 Saint-Paul-Lez-Durance Cedex, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 28 January 2011

Accepted 24 December 2011

Available online 2 January 2012

#### Keywords:

Thermal fatigue

T-junction

Reynolds Averaged Navier Stokes

Large Eddy Simulation

### ABSTRACT

Thermal fatigue is a major problem for liquid metal fast reactors due to the high temperature differences of the coolant in the circuits and because liquid metals efficiently transmit thermal fluctuations to walls. Detailed thermal hydraulic investigations have been carried out to quantify the amplitudes and frequencies of the temperature fluctuations in the secondary sodium circuit of the Phenix pool type fast reactor. Computational fluid dynamics calculations have been performed using either Reynolds Averaged Navier Stokes equations or Large Eddy Simulations. The characteristics of the mixing jet are well reproduced by the simulations and the high thermal fluctuation zones fit the thermal crack locations observed in the T-junction. Simulations with conjugate heat transfers, which allow inter- changing heat at the wall between fluid and solid, lead to noticeable heat transfers in the pipe wall and to high surface heat flux at fluid/solid interface.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Sodium has some favorable properties for thermal power reactors such as a high capacity of heat transport and a large margin between its melting point (371 K) and boiling point (1155 K) at ambient pressure. Nevertheless, sodium is a flammable substance. Indeed, at the working temperature of sodium power plant systems, sodium burns when it comes in contact with oxygen in the air. Sodium burning produces a large amount of high-density, opaque, white smoke composed of sodium oxides ( $\text{Na}_2\text{O}$  and  $\text{Na}_2\text{O}_2$ ) that react with the humidity in ambient air to produce caustic sodium hydroxide ( $\text{NaOH}$ ) and then, interacting with carbon dioxide, into the carbonate ( $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ). Sodium spray fires may lead to great damage to the surrounding structures as it was observed in the Almeria solar plant in 1986 [1]. Several accidental sodium fires (pool and spray fires) occurred at various plants throughout the world. They generally started by sodium leaking from circuits or vessels. That is why it is crucial, from the safety standpoint, to avoid any leakage of sodium in power plants.

A survey of sodium leak events in reactors indicates leaks ranging from a few grams to about 2 tonnes [2]. One of the causes of sodium leak incidents is flow induced vibrations as experienced in the Monju reactor in December 1995 [3,4] and thermal fatigue failure as it was witnessed in the Superphenix reactor in April 1990

[5,6]. Thermal fatigue can be generated when two flow streams at different temperatures are mixed in a fluid domain, leading to an arbitrary change of temperature field of the fluid with respect to time. Because of the high heat transfer coefficient associated with liquid metal coolants such as sodium, the temperature fluctuations are transmitted to the adjoining structures with a fairly low attenuation. This eventually leads to high cycle fatigue and crack initiation in the structures. In liquid metal cooled fast reactors, thermal striping potential exists in the upper plenum as a result of the mixing of sodium jets from fuel subassemblies (SA), breeder SA and control SA [7–9] and in T-junctions in primary (for loop type reactors), secondary and auxiliary circuits. Note that thermal striping is also a safety issue for pressurized water reactors [10,11].

To minimize risks of sodium leaks induced by thermal fatigue or induced vibrations, detailed thermal–hydraulic analysis should be carried out for the steady state and the transient state [12,13]. Different methods are available for such CFD (Computational Fluid Dynamics) calculations. Some mixing flows in a T-junction were calculated using RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) [14,15], using LES (Large Eddy Simulations) [16–19], and using DNS (Direct Numerical Simulations) [20,21]. In this study, the commercial code Fluent is used to simulate the configuration of a mixing flow.

Defects were detected during a campaign of inspections on the secondary circuits of the Phenix reactor. In fact, through-wall cracks involving a main pipe of the secondary circuit were revealed. The cracks of about 100 mm in length were observed on a circumferential weld which was 160 mm behind the centerline of a branch pipe. Metallurgical observations clearly indicate that the defects

\* Corresponding author. Tel.: +33 0 4 68 68 27 09.

E-mail address: [Adrien.Toutant@univ-perp.fr](mailto:Adrien.Toutant@univ-perp.fr) (A. Toutant).

were induced by high thermal fatigue owing to the mixing of the two flows coming from the main (cold) pipe and the branch (hot) pipe. After cutting of the pipe, two spots were noticed. The first plume around the branch inlet in the direction of the sodium flow was attributed to a constant wetting of hot sodium. The second spot was black and surrounded the first plume. This spot was attributed to an oxidation of the pipe in a region of mixing of hot and cold sodium. Actually, the cracks appeared in a weld crossing the black spot at almost symmetrical locations on both sides of the T-junction symmetry plane. No crack was observed in the parent metal.

In this work, the RANS and LES approaches are considered for the simulation of the sodium flow in the T-junction configuration of the Phenix reactor. In this configuration, an elbow was located upstream to the mixing tee. The elbow generates biased velocity distribution in the pipe, further, flow separation and secondary flow. The biased velocity distribution as the inlet condition of mixing tee affect the mixing behavior [22,24]. Firstly, the configuration of the T-junction and the numerical conditions are described. Then, RANS results are reported. An emphasis is put on the meshing process with either a coarse or a fine mesh along with an optional meshing of the wall submitted to thermal fatigue (the solid mesh starts 10 cm underneath hot injection and covers the entire duct circumference). Our simulations are compared to experimental and numerical studies from the literature. Lastly, the results of the LES simulations are discussed in detail with a focus on the wall temperature fluctuations past the branch hot pipe and the evaluation of the thermal fatigue areas.

## 2. Geometrical and numerical setup

### 2.1. Phenix T-junction characteristics

The reactor demonstration prototype Phenix is a pool-type liquid-metal fast reactor cooled by liquid sodium. The main pipe in the T-junction area consists of a horizontal straight part, an elbow, and a vertical straight part where the branch pipe is connected (see Fig. 1). In the straight part, the main pipe has a thickness of 7 mm and an inner diameter of 494 mm. The elbow has an angle of 90°, a radius of 762 mm and a thickness of 9.35 mm. Lastly, the branch pipe has an inner diameter of 68 mm and a thickness of 2.5 mm. During normal operation, sodium at  $T_m = 613$  K flows into the main pipe of the secondary circuit of Phenix. The branch pipe, which comes from the hydrogen sensor (safety device for the

detection of steam generator leaks), is connected to the main pipe thanks to a T-junction and discharges sodium at  $T_b = 703$  K. The two convergent flows have therefore a temperature difference of  $\Delta T = 90$  K. The mass flow rate is  $Q_m = 800$  kg/s ( $Re_m \approx 6.10^6$ ) kg/s ( $Re_m \approx 6.10^6$ ) in the main pipe and  $Q_b = 7$  kg/s in the branch pipe ( $Re_b \approx 5.10^5$ ).

### 2.2. Numerical methodology

The usual strategy applied to thermal fatigue prediction involves CFD simulations to determine the temperature fluctuations in the legs of the junction. In this work, both RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) and LES (Large Eddy Simulation) methodologies have been considered. RANS models lead to valuable simulations in relative short times for standard cases, and can be used as an initial condition for LES calculations. Application of LES methods allows partially resolving flow scales at larger but acceptable computational costs. For the current simulations we used the commercial CFD package FLUENT with a second order implicit iterative time-advancement scheme. For convective terms, a second order upwind scheme was used and a standard SIMPLE algorithm for coupling pressure and velocity. The RANS computations are carried-out with a Reynolds Stress Model (RSM) turbulence treatment. The RSM closes the Reynolds Averaged Navier–Stokes equations by solving transport equations for the Reynolds stresses, together with an equation for the dissipation rate. Consequently, seven additional transport equations are required in 3D flows. The use of the RSM is essential when the flow features of interest are the result of anisotropy in the Reynolds stresses as is the case in our configuration. Concerning the LES simulations, the Wall-Adapting Local Eddy-viscosity (WALE) model [25] was used for the modeling of the subgrid scale viscosity and a constant turbulent Prandtl number ( $Pr_t = 0.85$ ) for the modeling of the subgrid scale conductivity [26–32], low variations of the turbulent Prandtl number ( $Pr_t = 1$  and  $Pr_t = 0.78$  have been tested) have negligible effects on the computed profiles. Furthermore, LES calculations have been performed with a bounded central differencing for the convective terms in the momentum equation.

The boundary conditions of the simulations are standard convective pressure for the outflow and an adiabatic (zero-heat flux) for the outer wall conditions for the solid. For the lateral surface of the duct, the zero-heat flux represents the insulation of the pipes. The other boundaries that correspond to internal solid surfaces are located in isothermal areas. A posteriori, we check with numerical results that the assumed isothermal areas are really isothermal. Consequently, it is not required to mesh the entire solid duct. For the RANS simulations, the initial condition was set as a constant velocity and the inlet velocity profiles for the main and the branch ducts were calculated using single pipe configurations. The fully developed velocity profiles were written as boundary condition files to be used as the inlet velocity-boundary conditions. A well-developed state of a RANS simulation was set as a start point for the LES calculations. A suitable turbulent inflow condition is crucial for the accuracy of calculations [33–36]. Therefore, the vortex method available in Fluent was applied to generate a turbulent time-dependent inlet condition. This approach adds a perturbation on a specified mean velocity profile via a fluctuating vorticity field. The fluctuating field is calculated using the 2D evolution equation of the vorticity. An adapted vortex size is computed with local turbulent kinetic energy and dissipation rate. This method is, in particular, validated for pipe flow [37].

The T-junction geometry was constructed with a length of the main pipe downstream to the bend equal to about ten diameters  $D_m$ . The RANS calculations were carried out on three different meshes:

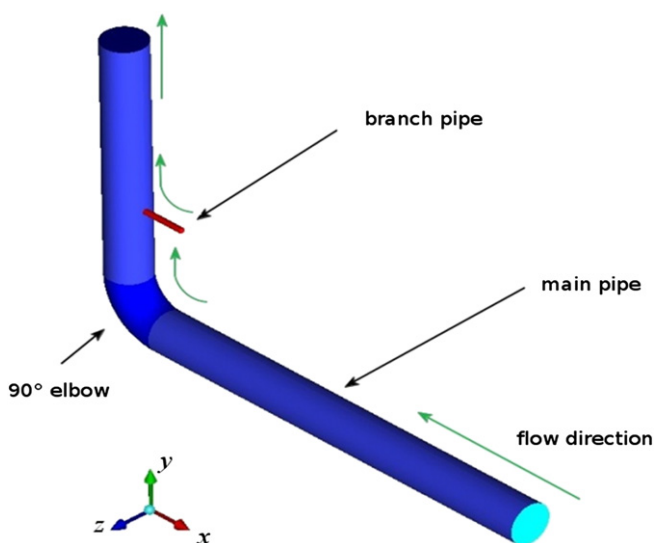


Fig. 1. Schematic of the T-junction in the secondary circuit of Phenix.

- **RSM calc-1:** a wall law is applied with a mesh of 0.5 million cells.
- **RSM calc-2:** a no-slip condition is considered and the mesh is refined to about 3.5 million cells.
- **RSM calc-3:** the simulation is performed with conjugate heat transfers, which allows interchanging heat at the wall between fluid and solid; a no-slip condition is considered and the mesh has nearly 4.8 million cells.

The increase in the number of cells from case RSM calc-2 to case RSM calc-3 is due to the cells in the solid but also due to additional cells in the fluid near wall region to avoid cell discontinuities at the fluid–solid interface. For the RSM calc-3 mesh, the main duct wall is meshed using seven cells in the duct thickness of 7 mm. To save some computational costs, we made the choice to calculate the conjugate heat transfers only for the area of interest, that extends from the branch pipe to about seventeen diameter  $D_b$  downstream from the branch pipe location. The LES simulation has been performed on the mesh constructed for the RSM calc-3 case ( $y^+ = 2$ ). Therefore, we avoided the use of a wall law as recommended in [38] and a no-slip condition was applied.

### 3. RANS simulations

To ensure realistic simulations, the inflow must be chosen carefully. Three kinds of inlet conditions have been compared: a constant velocity inflow at the entrance surface with a short and a long pipe and a velocity profile from a previous simulation of a well developed flow in a pipe having the same specifications. We notice that the inlet with an input velocity profile gives the same profile as the long pipe while the velocity profile calculated with the short pipe was not fully satisfactory. The long pipe inlet is more representative of the real case but is more expensive than the profile inlet. Furthermore, our results of the simulation of the flow in a 90° elbow (without the branch pipe) agree very well with the previous study of El-Gammal et al. [39]. Therefore, the inflow condition has been chosen to be the velocity profile for the subsequent RANS simulations as it has a great physical content and a reduced computational cost.

The behavior of the turbulent mixing of the branch jet and the main flow can be estimated by calculating the ratio  $M_R$  of the main and branch momentums as follows:

$$M_R = \frac{\rho_m U_m^2 D_m D_b}{\rho_b U_b^2 \pi \left(\frac{D_b}{2}\right)^2} \quad (1)$$

where  $\rho_m$  and  $\rho_b$  are the fluid densities for the main flow and branch flow,  $U_m$  and  $U_b$  are the mean velocity of the main and branch flow,  $D_m$  and  $D_b$  are the main and branch pipe diameters. Four kinds of jet behaviors are observed as the ratio  $M_R$  increases: wall jet (low branch flow rate, the jet does not separate from the wall), re-attached jet (the branch jet turns to the center axis of the main pipe and then turns again to the main pipe wall), turn jet (comparable main and branch flow rates, the branch jet turns to the center axis of the main pipe) and impinging jet (high branch flow rate, the branch jet touches the opposite wall of the main pipe). The upstream geometry from the T-junction has a strong effect on the branch jet behavior. Indeed, the main flow characteristics are drastically modified if an elbow is located upstream of the mixing area as it is the case in the studied configuration. Actually, we can observe in Fig. 2 that, crossing the elbow, the main flow is accelerated along the intrados and pushed against the extrados at the elbow exit. This accelerated flow is still observed until the level of the branch junction. Moreover, the bend geometry induces a shear

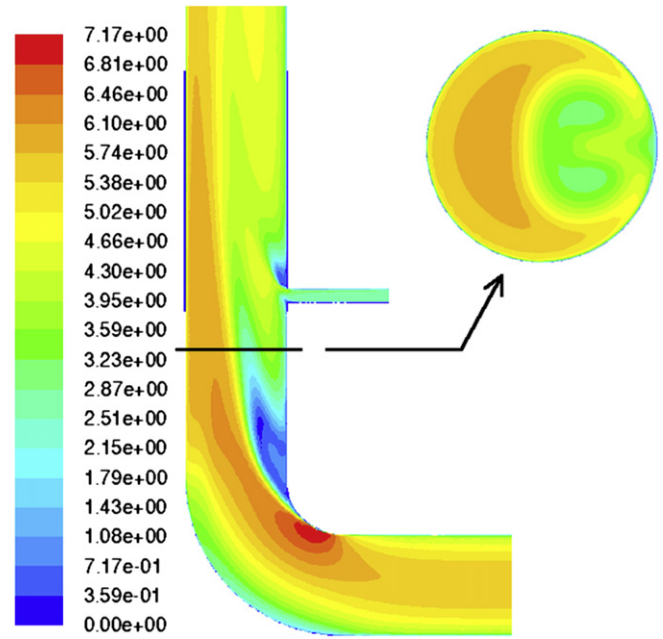


Fig. 2. Mean velocity (m/s) in the T-junction in RANS simulation.

layer and the development of counter rotating vortices. The velocity of the main flow is then reduced in front of the branch injection pipe and amplified in the opposite wall. Therefore, with a bend, a higher injection mass flow rate is required to observe an impinging jet. The mass flow rate ratio  $M_R$  is equal to 42 in the configuration of the T-junction. In our RANS simulations with RSM, we succeed in calculating a re-attached jet as expected from the jet classification from [23].

The temperature profiles calculated in cases RSM calc-1, RSM calc-2 and RSM calc-3 along the main pipe wall beyond the branch pipe are plotted in Fig. 3. We also report in this figure the experimental profile and the results from two previous studies using RANS methodology. The temperature profile calculated on a coarse grid with a wall law (RSM calc-1 case) has an overall well estimated shape. Nevertheless, we note an overestimation of the mean temperature in comparison with the experimental data between  $y/D_b = 1$  and  $y/D_b = 3$  that can reach 20 K. The calculated temperature in this area agrees much more with the experimental

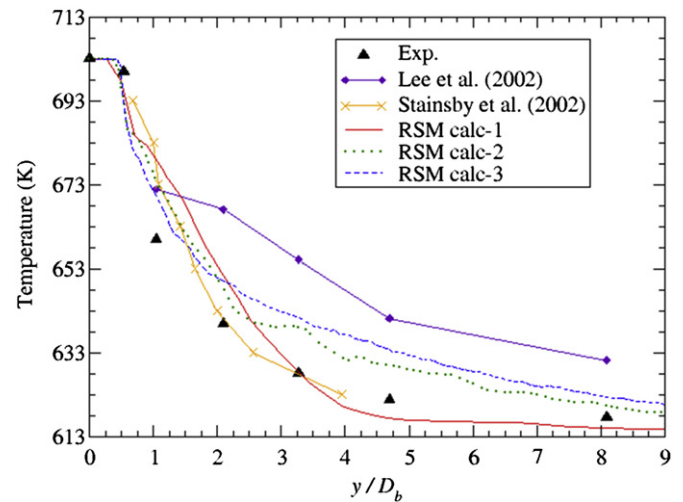


Fig. 3. Mean temperature from RANS calculations along the main pipe wall beyond the branch pipe.

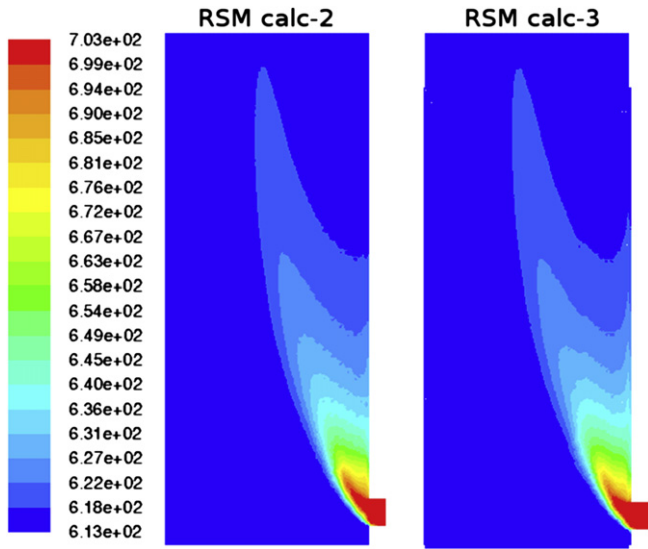


Fig. 4. Contours of temperature (K) beyond the hot branch pipe in simulation RSM calc-2 (no wall heat conduction) and RSM calc-3 (conjugate heat transfers).

data by considering a finer grid and a no-slip condition at wall boundaries (see cases RSM calc-2 and RSM calc-3 in Fig. 3). However, the opposite behavior is observed for  $y/D_b > 3$ , where the temperature is overestimated by around 10 K for both RSM calc-2 and RSM calc-3 calculations. Note that the profile calculated in RSM calc-3 is smoother than in RSM calc-2 owing to a slightly finer grid resolution. Although RSM calc-3 has a finer mesh than RSM calc-2, its prediction for mean temperature is not better for  $y/D_b > 1.5$ . This can be due to the inadequacy between the RSM model of Fluent and the complex couplings between dynamic and temperature and also between fluid and solid. Despite this, our calculated profiles are closer to the experimental measurements than the previous RANS study of Lee et al. [40]. This may be ascribed to the use of a k-RNG turbulent model in their work, that supposed isotropic turbulence, and the very coarse mesh that was possible at that time. The temperature profile calculated by Stainsby and Martin [41] is in better agreement with experiments than ours, but

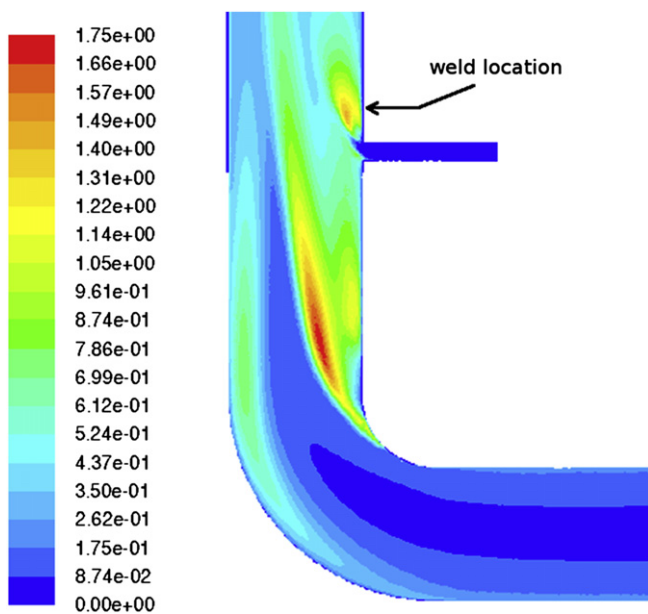


Fig. 5. Turbulent kinetic energy ( $\text{m}^2/\text{s}^2$ ) in simulation RSM calc-3.5 Turbulent kinetic energy ( $\text{m}^2/\text{s}^2$ ) in simulation RSM calc-3.

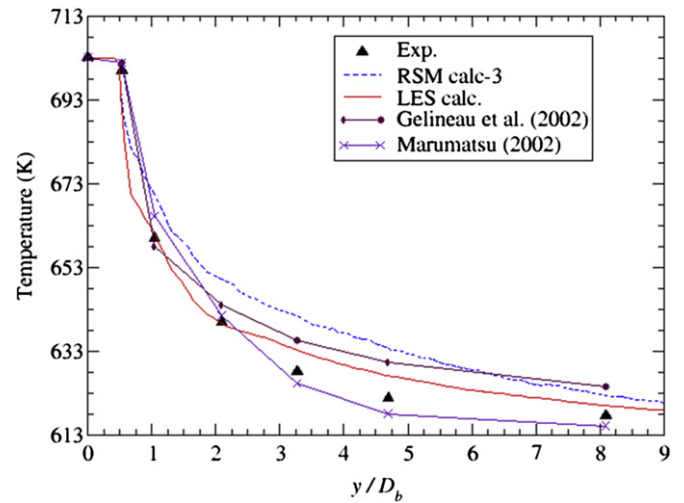


Fig. 6. Mean temperature from LES calculations along the main pipe wall beyond the branch pipe.

their simulation is atypical since they calculated a turn jet while a re-attached jet is expected.

The contours of the temperature calculated in case RSM calc-3 are plotted in Fig. 4. Considering a criteria of  $\Delta T > 5$  K (i.e.  $(T - T_m/T_b - T_m) \geq 5\%$ ), the mixing area extends up to  $y/D_b \approx 16$  in the center of the pipe and up to  $y/D_b \approx 10$  near the main pipe wall adjoining the branch pipe. No temperature modifications are noticed in the half part of the main pipe opposite the injection pipe. The temperature of the flow in the center of the pipe is almost the same with (RSM calc-3) and without (RSM calc-2) conjugate heat transfers. However, in the near wall area, the temperature contours are modified (see light blue contours in Fig. 4). In fact, RSM calc-3 leads to higher temperatures behind the branch pipe owing to the heat conduction in the solid wall. This observation points out the necessity to consider conjugate heat transfers to precisely evaluate the risk of thermal striping in pipe walls.

We plotted the turbulent kinetic energy in Fig. 5. Two high intensity areas can be noticed. The first one corresponds to the shear layer at the bend exit, but no temperature fluctuations are expected in this isothermal domain. The second one is related to the turbulent mixing of the branch hot jet and main cold flow. This

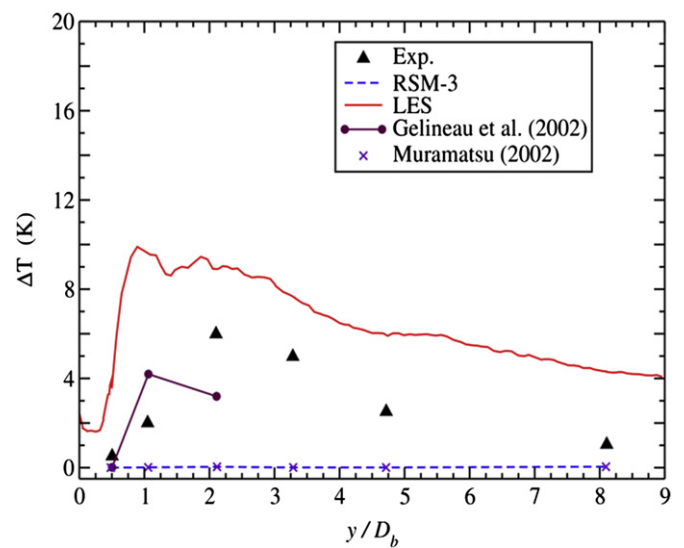


Fig. 7. Peak to peak temperature difference at outer skin wall surface of the main pipe.



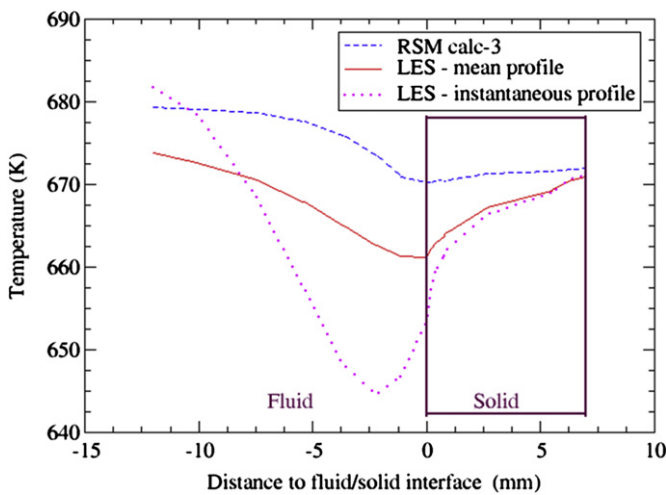


Fig. 8. Temperature profiles across the fluid/solid interface.

spot of high turbulent energy directly faces the weld position and is hence consistent with the thermal fatigue cracks observed in the T-junction.

#### 4. LES results and discussion

The parametric study on the mesh presented above with the RANS modeling gives valuable information to define the optimal mesh for the LES calculations. Our LES calculation, which has been performed with the conjugate heat transfers on the same mesh as the RSM calc-3, leads to a re-attached type jet. The turbulent inlet condition using the vortex method is found to be efficient and lets the turbulence correctly expand in the straight pipe as in the bend. The mean temperature profile at wall behind the branch pipe is plotted in Fig. 6 and compared with profiles from experiment, RSM calc-3 simulation and past numerical studies using pseudo DNS (i.e. DNS using a “coarse” grid without any subgrid scale model). We note that the temperature profile from the LES simulations fit the experimental in a much better way than our most accurate RANS calculation (RSM calc-3). Furthermore, the agreement with the experimental profile is better (especially just behind the branch inlet) in our LES simulation than in previous pseudo-DNS studies [42,43], probably owing to the finer resolution of our mesh. The LES calculation does not completely match experimental profile,

particularly for  $5 > y/D_b > 2$ . We thought that a finer mesh in this area should improve the capture of the coupling between the velocity and the temperature. In addition, the peak to peak temperature difference (difference between the maximum and minimum of the time temperature signal at one location) at outer skin wall surface of the main pipe is quite well estimated by our LES calculation (see Fig. 7). Note that no temperature difference is calculated in the outer skin of the main pipe for both our RANS RSM calc-3 simulation and the pseudo-DNS study of Muramatsu [42].

Temperature profiles in function of the distance to the fluid/solid interface are shown at 10 cm above the hot injection duct revolution axis in Fig. 8. The temperature difference between the inner and outer walls is much smaller in the RSM calc-3 than in LES simulations ( $\sim 2$  K and  $\sim 7$  K respectively through the 7 mm thick main pipe wall). Instantaneously, the temperature difference can even reach 20 K in the wall thickness, which corresponds to a large temperature gradient of nearly  $2.10^4$  K/m. A frequency analysis of the temperature signal points out a broad energy content in the low frequencies domain ranging from 0.5 to 10 Hz. Moreover, some frequency peaks can be noticed within with frequency range but these remarkable frequencies spatially evolve within the mixing zone. In the high temperature fluctuations part of the flow, two peaks are observed at  $\sim 1$  Hz and  $\sim 7.5$  Hz and can definitely lead to thermal fatigue.

The mean temperature field at fluid/solid interface is plotted in Fig. 9(a). A hot spot can be noticed just above the branch pipe which corresponds to the white spot observed experimentally after the cut of the pipe and ascribed at that time to a constant wetting of hot sodium [44]. The shape of the temperature fluctuations contours, plotted in Fig. 9, is considerably different from that of the mean temperature. Actually, an area of high intensity temperature fluctuation surrounds the mean hot spot. The high fluctuation zone fits the black plume of the experimental analysis which was ascribed to an oxidation of the pipe in air that is caused by a wall submitted to thermal constraints. Furthermore, the location of the highest temperature variance at the level of the weld just past the branch injection corresponds to the cracks revealed in the Phenix secondary circuit. We observe that the mean surface heat flux just behind the branch pipe goes from fluid to solid wall (blue area in Fig. 9(c)) with quite high values of about  $19,000$  W/m<sup>2</sup>. This is consistent with the hot sodium plume, seen in Fig. 9(a), that heats the wall. Then, circumferential heat transfers occur inside the main pipe wall and lead to heat flux from pipe wall to fluid on both sides of the meridian line of the T-junction (red zones in Fig. 9(c)). The high surface heat flux areas correspond to the temperature fluctuation maximum and participate in the thermal stress of the main

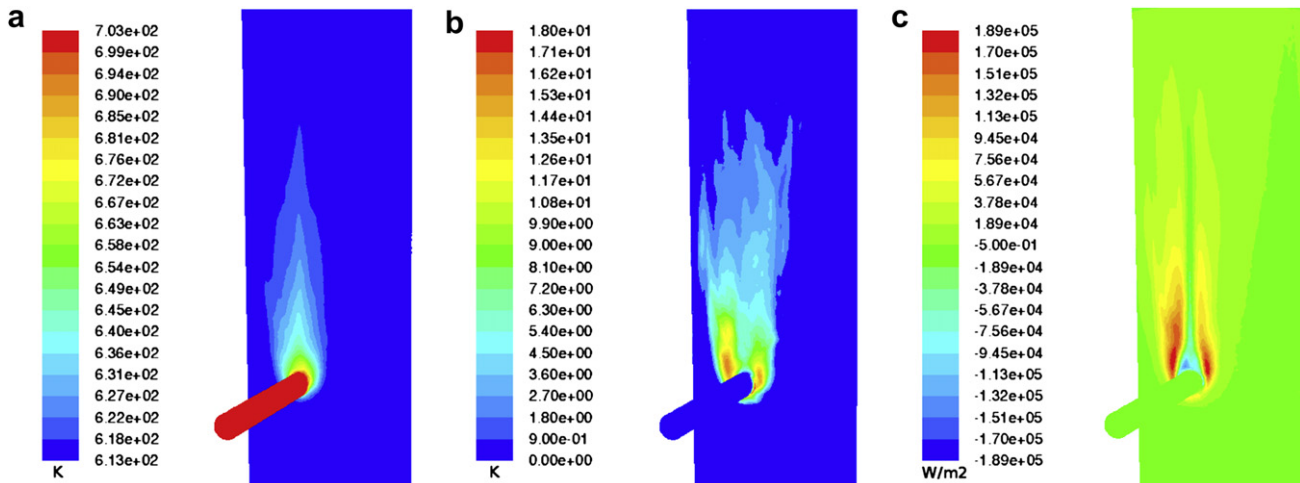


Fig. 9. Contours of (a) mean temperature, (b) temperature RMS and (c) mean surface heat flux at fluid/solid interface.

pipe. These observations illustrate the necessity of performing conjugate heat transfer simulations to accurately estimate the thermal constraints in a mixing zone.

## 5. Conclusions

The evaluation of the thermal striping risk for mixing areas with two fluids at different temperatures requires accurate thermal–hydraulic simulations. Both RANS and LES calculations have been performed on the configuration of a T-junction of the Phenix reactor in which thermal fatigue was incurred.

The analysis of the hot injection confirms the re-attached jet type in this configuration, i.e. the branch pipe jet does not reach the center axis of the main pipe and flows along the lower surface of the main pipe. A zone of constant wetting of hot sodium surrounded by a high thermal fluctuation plume has been calculated; which is consistent with the white and black spots experimentally observed. Moreover, the location of the thermal fatigue cracks of the T-junction is correctly estimated by our simulations.

Regarding the meshing for the pipe wall and conjugate heat transfer calculations, noticeable differences have been observed on the temperature field in the RANS simulations. Moreover, high surface heat flux and circumferential heat transfers in the main pipe wall have been calculated in our LES simulation. Therefore, conjugate heat transfer calculations are recommended in order to get an accurate estimation of the thermal heat transfers and then the fatigue zones in a T-junction.

## References

- [1] V.P. Luster, K.F. Freudenstein, Feedback from practical experience with large sodium fire accidents, in: Technical Committee Meeting on Evaluation of Radioactive Materials Release and Sodium Fires in Fast Reactors, O-aria, Ibaraki, Japan, 1996.
- [2] J. Guidez, L. Martin, S.C. Chetal, P. Chellapandi, B. Raj, Lessons learned from sodium-cooled fast reactor operation and their ramifications for future reactors with respect to enhanced safety and reliability, *Nucl. Technol.* 164 (2) (2008) 207–220.
- [3] K. Ogura, M. Morishita, A. Yamaguchi, in: Cause of Flow-Induced Vibration of Thermocouple Well, vol. 363, ASME PVP, San Diego, USA, 1998, pp. 109–117.
- [4] M. Kondo, Y. Anoda, Water flow simulation test on flow-induced oscillation of thermowell in prototype fast breeder reactor monju: flow-induced vibration of bluff bodies, *JSME Int. J. Ser. B. Fluids Therm. Eng.* 44 (4) (2001) 688–694.
- [5] O. Gelineau, M. Sperandio, in: Thermal Fluctuation Problems Encountered in LMFBRs, Specialistic Meeting on Correlation Between Material Properties and Thermohydraulics Conditions in LMFBRs, Aix-en-Provence, France, 1994, pp. 28–46 IAEA–IWGFR/90.
- [6] J.B. Ricard, M. Sperandio, Fracture mechanics applied to superphenix reactor components, *Int. J. Press. Vessels Piping* 65 (3) (1996) 295–301.
- [7] K. Velusamy, K. Natesan, P. Selvaraj, P. Chellap, S.C. Chetal, T. Sundararajan, S. Suyambazhahan, in: CFD Studies in the Prediction of Thermal Striping in an LMFBR, CFD4NRS, Garching, Germany, 2006, pp. 253–264.
- [8] N. Kimura, H. Miyakoshi, H. Kamide, Experimental investigation on transfer characteristics of temperature fluctuation from liquid sodium to wall in parallel triple-jet, *Int. J. Heat Mass Transfer* 50 (9–10) (2007) 2024–2036.
- [9] P. Chellapandi, S.C. Chetal, B. Raj, Thermal striping limits for components of sodium cooled fast spectrum reactors, *Nucl. Eng. Design* 239 (12) (2009) 2754–2765.
- [10] S. Chapuliot, C. Gourdin, T. Payen, J.P. Magnaud, A. Monavon, Hydro-thermal-mechanical analysis of thermal fatigue in a mixing tee, *Nucl. Eng. Design* 235 (5) (2005) 575–596.
- [11] J.I. Lee, L. Hu, P. Saha, M.S. Kazimi, Numerical analysis of thermal striping induced high cycle thermal fatigue in a mixing tee, *Nucl. Eng. Design* 239 (5) (2009) 833–839.
- [12] G. Grötzbach, M. Wörner, Direct numerical and large eddy simulations in nuclear applications, *Int. J. Heat Fluid Flow* 20 (3) (1999) 222–240.
- [13] J.-p. Simoneau, J. Champigny, O. Gelineau, Applications of large eddy simulations in nuclear field, *Nucl. Eng. Design* 240 (2) (2010) 429–439.
- [14] T. Frank, C. Lifante, H.-M. Prasser, F. Menter, Simulation of turbulent and thermal mixing in T-junctions using urans and scale-resolving turbulence models in ANSYS CFX, *Nucl. Eng. Design* 240 (9) (2010) 2313–2328.
- [15] E. Merzari, H. Ninokata, E. Baglietto, in: Large Eddy Simulation of the Flow in a T-junction (2009), p. 9463 ICAPP 2009, Tokyo, Japan.
- [16] J.-P. Simoneau, H. Noe, B. Menant, in: Large Eddy Simulation of Sodium Flow in a Tee Junction-Comparison of Temperature Fluctuations with Experiments, 5th International Conference on Nuclear Engineering, Nice, France, 1997 ICONES–2145.
- [17] P. Coste, P. Quemere, P. Roubin, P. Emonot, M. Tanaka, H. Kamide, in: Large Eddy Simulation of a Mixing-T Experiment, Proceedings of ICAPP '06, Reno, U.S.A., 2006, pp. 1626–1635.
- [18] W.Y. Zhu, T. Lu, P.X. Jiang, Z.J. Guo, K.S. Wang, Large eddy simulation of hot and cold fluids mixing in a T-junction for predicting, *Thermal Fluctuations* 30 (11) (2009) 1379–1392.
- [19] M. Tanaka, H. Ohshima, H. Monji, Numerical simulation of thermal striping phenomena in a T-junction piping system using large eddy simulation, *J. Power Ener. Sys.* 3 (1) (2009) 237–248.
- [20] N. Fukushima, K. Fukagata, N. Kasagi, H. Noguchi, K. Tanimoto, Numerical and Experimental Study on Turbulent Thermal Mixing in a T-junction Flow, The 6th ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference, Hawaii, USA, 2003, TED–AJ03–582.
- [21] I. Tiselj, R. Bergant, B. Mavko, I. Bajsic, G. Hetsroni, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall, *J. Heat Transfer* 123 (5) (2001) 849–857.
- [22] M. Igarashi, N. Tanaka, M. Kimura, H. Kamide, Study on Fluid Temperature Fluctuation and Transfer to Wall in a Mixing Tee, 11th ICONE, Tokyo, Japan, 2003, 36299.
- [23] S.M. Hosseini, K. Yuki, H. Hashizume, Classification of turbulent jets in a T-junction area with a 90-deg bend upstream, *Int. J. Heat Mass Transfer* 51 (9–10) (2008) 2444–2454.
- [24] N. Kimura, H. Ogawa, H. Kamide, Experimental study on fluid mixing phenomena in T-pipe junction with upstream elbow, *Nucl. Eng. Design* 240 (10) (2010) 3055–3066.
- [25] F. Nicoud, F. Ducros, Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor, *Flow Turb. Comb.* 62 (1999) 183–200.
- [26] G. Brillant, S. Husson, F. Bataille, Subgrid-scale diffusivity: wall behaviour and dynamic methods, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* 73 (3) (2006) 360–367.
- [27] G. Brillant, S. Husson, F. Bataille, Study of the blowing impact on a hot turbulent boundary layer using thermal large eddy simulation, *Int. J. Heat Fluid Flow* 29 (6) (2008) 1670–1678.
- [28] F. Bataille, R. Rubinstein, M.Y. Hussaini, Eddy viscosity and diffusivity modeling, *Phys. Let. A* 346 (2005) 168–173.
- [29] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, Effect of a High Temperature Gradient on a Turbulent Flow-Study of Kinetic-Energy and Temperature Spectra, 6 Int. Conf. Comp. Heat Mass Trans., (ICCHMT09), Guangzhou, China, 2009.
- [30] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, Physical Mechanisms of High and Transverse Temperature Gradient Effects on Solar Receiver Performances, 6 Int. Symp. Turb., Heat Mass Trans. (THMT09), Rome, Italy, 2009.
- [31] S. Serra, A. Toutant, F. Bataille, Thermal large eddy simulation in a very simplified geometry of a solar receiver, *Heat Transfer Engineering* 33 (6) (2012) 505–524.
- [32] M. Pham, F. Plourde, S. Kim, S. Balachandar, Large-eddy simulation of a pure thermal plume under rotating conditions, *Phys. Fluids* 18 (1) (2006).
- [33] T.S. Lund, X. Wu, K.D. Squires, Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations, *J. Comp. Phys.* 140 (2) (1998) 233–258.
- [34] M. Klein, A. Sadiki, J. Janicka, A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations, *J. Comp. Phys.* 186 (2) (2003) 652–665.
- [35] G. Brillant, F. Bataille, F. Ducros, Large-eddy simulation of a turbulent boundary layer with blowing, *Theoret. Comp. Fluid Dyn.* 17 (5–6) (2004) 433–443.
- [36] N. Jarrin, S. Benhamadouche, D. Laurence, R. Prosser, A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations, *Int. J. Heat Fluid Flow* 27 (4) (2006) 585–593.
- [37] F. Mathey, D. Cokljat, J.P. Bertoglio, E. Sergent, Assessment of the vortex method for large eddy simulation inlet conditions, *Prog. Computational Fluid Dyn.* 6 (1–3) (2006) 58–67.
- [38] S.T. Jayaraju, E.M.J. Komen, E. Baglietto, Suitability of wall-functions in large eddy simulation for thermal fatigue in a T-junction, *Nucl. Eng. Design* 240 (10) (2010) 2544–2554.
- [39] M. El-Gammal, H. Mazhar, J.S. Cotton, C. Shefski, J. Pietralik, C.Y. Ching, The hydrodynamic effects of single-phase flow on flow accelerated corrosion in a 90-degree elbow, *Nucl. Eng. Design* 240 (6) (2010) 1589–1598.
- [40] H.-Y. Lee, J.-B. Kim, B. Yoo, Validation of Fast Reactor Thermomechanical and Thermohydraulic Codes., Vol. TecDoc1318, IAEA, 2002, Ch. Recent activities related to thermo-mechanical fatigue, creep and fracture mechanics in Korea nuclear fields, pp. 145–152.
- [41] R. Stainsby, D. Martin, Validation of Fast Reactor Thermomechanical and Thermohydraulic Codes, Vol. TecDoc1318, IAEA, 2002, Ch. Thermal striping benchmark exercise: thermal hydraulic analysis of the PHENIX fast reactor secondary pipework T-junction, pp. 206–226.
- [42] T. Muramatsu, Validation of Fast Reactor Thermomechanical and Thermohydraulic Codes., Vol. TecDoc1318, IAEA, 2002, Ch. Thermohydraulics computer code system and computational results on thermal striping phenomena at a Tee junction of LMFBR secondary circuit with the system, pp. 117–144.
- [43] O. Gelineau, M. Sperandio, J. P. Simoneau, J. M. Hamy, P. H. L. Roubin, Validation of Fast Reactor Thermomechanical and Thermohydraulic Codes., Vol. TecDoc1318, IAEA, 2002, Ch. Thermomechanical and thermohydraulic analyses of a T junction using experimental data, pp. 31–62.
- [44] O. Gelineau, J.-P. Simoneau, M. Sperandio, J. Guinovart, in: Review of Predictive Methods Applied to Thermal Striping. Problems and Recommendations, vol. 15, Trans. SMiRT, Seoul, Korea, 1999 p. F06/3.

# Annexe B

## Utilisation du solveur multi-grilles

Dans cette annexe, nous décrivons la démarche à appliquer pour utiliser correctement le solveur multi-grilles intégré à Trio\_U dans le cas d'un canal plan. Dans cette partie, par convention avec les paramètres du solveur, les directions  $x$  et  $y$  seront respectivement les directions longitudinale et transversale (directions périodiques) alors que la direction  $z$  est la direction perpendiculaire aux paroi.

### B.1 Rappel sur la méthode

Un solveur multi-grilles a pour objectif de réduire le temps résolution du calcul de la pression. Pour ceci, la solution du problème de Poisson est calculée sur des grilles de plus en plus précises, en utilisant comme condition initiale le résultat du niveau de grille précédent.

Le processus de calcul est récursif et est composé de multiples étapes :

**Calcul du résidu :** La première étape est le calcul du résidu sur niveau le plus fin.

**Lissage de la pression :** Le champ de pression issue d'un niveau de grille est lissé pour l'adapter à une nouvelle grille. Il est fait  $N_{ps}$  itérations du lisseur lors du passage vers une grille plus grossier et  $N_s$  itération lors du passage vers une grille plus fine.

**Moyenne du résidu :** Le résidu calculé sur la grille la plus fine est moyenné pour être adapté à la nouvelle grille.

**Solveur itératif grossier :** Au niveau le plus grossier, on utilise un solveur itératif pour résoudre le problème de Poisson.

**Correction de la pression :** On corrige la pression du niveau le plus grossier et lui ajoutant l'incrément de pression obtenu par le solveur précédemment utilisé.

**Solveur Jacobi :** On réalise une itération d'un solveur Jacobi pour calculer un nouveau incrément de pression.

Le schéma B.1 indique l'ordonnancement des différentes étapes dans la méthode.

Dans le cas particulier  $N_{ps} = N_s$ , le schéma multi-grilles global obtenu est un opérateur linéaire symétrique ce qui présente l'intérêt de pouvoir utiliser le résultat obtenu comme pré-conditionnement d'une méthode de résolution itérative du problème de Poisson.

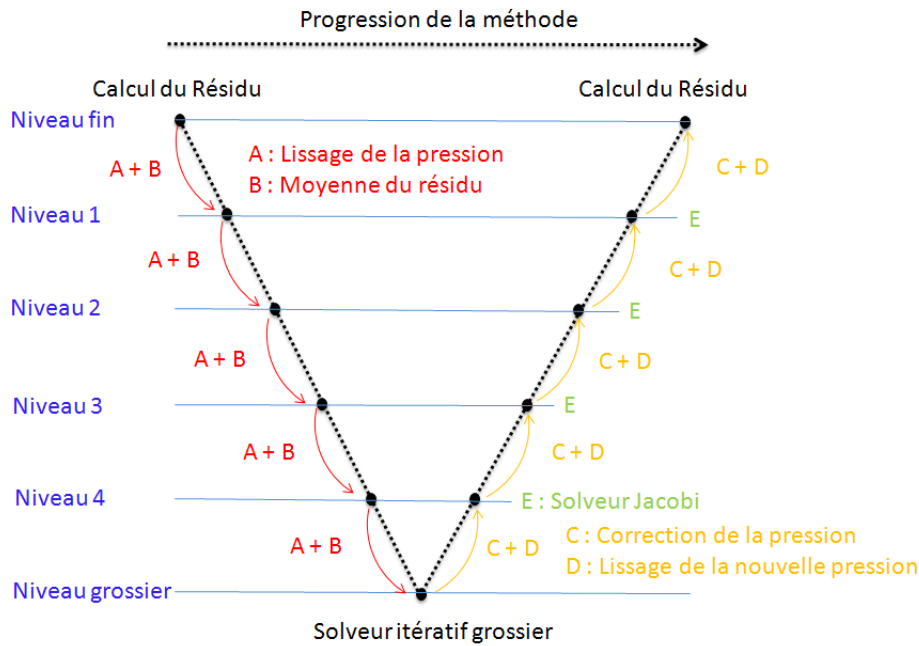


FIGURE B.1 – Schéma de fonctionnement du solveur multigrille

## B.2 Définition des niveaux de maillages

### B.2.1 Niveau 0

Le solveur multi-grilles part du maillage le plus fin ( $N_0$ ), ce maillage est composé de  $N_x \times N_y \times N_z$  mailles et est découpé sur  $P_x \times P_y \times P_z$  processeurs. Il est régulier dans les directions  $x$  et  $y$  ( $\Delta x = cte$  et  $\Delta y = cte$ ) et suit une croissance en tangente hyperbolique dans la direction  $z$ . Dans les canaux plans, de nombreuses structures turbulentes sont allongées, le maillage est donc plus fin dans la direction  $y$  que dans la direction  $x$ , il est généralement choisi  $\Delta y \simeq \frac{\Delta x}{2}$ .

### B.2.2 Agglomérations

Le solveur multi-grilles fonctionne par réduction du nombre de mailles entre deux niveaux. Il est nécessaire qu'entre deux niveaux le nombre de mailles soit réduit au maximum, tout en gardant une bonne correspondance des coordonnées des sommets entre les niveaux. Pour faire ceci, 3 types d'agglomérations sont disponibles :

Isotropes :

- ces agglomérations divisent par huit le nombre de mailles ;
- les mailles sont agglomérées par deux dans les 3 directions ;
- les facteurs d'aspect doivent être inférieurs à 2 ( $\frac{\Delta x}{\Delta y} < 2$ ,  $\frac{\Delta x}{\Delta z} < 2$  et  $\frac{\Delta y}{\Delta z} < 2$ ) ;
- elles sont à privilégier ;

Bi-directionnelles :

- ces agglomérations divisent par 4 le nombre de mailles ;
- les mailles sont agglomérées par deux dans 2 directions dont une doit être  $z$  ;
- les facteurs d'aspect doivent être inférieurs à 2 entre les directions choisies ;



- elles sont à utiliser pour rattraper de fortes disparités de maillage entre les directions  $x$  et  $y$  ;

Anisotropes :

- seules certaines mailles sont agglomérées (par deux ou trois) ;
- elles n’affectent les mailles que dans la direction perpendiculaire aux parois ;
- elles sont à utiliser pour réduire la disparité de maillage entre les directions de périodicité et la direction normale aux parois.

Comme indiqué précédemment, les agglomérations qui réduisent le plus le maillage sont les agglomérations isotropes. Ainsi pour faciliter leur utilisation, il est utile qu’un niveau de maillage (que nous appellerons  $N_k$ ) soit régulier dans la direction  $z$  ( $\Delta z_k = cte$ ). En canal plan, le paramètre  $\Delta z_k$  le plus intéressant est  $\Delta z_k \simeq \Delta y$ .

Dans notre cas, on utilisera d’abord des agglomérations anisotropes pour passer de la grille  $N_0$  à la grille  $N_k$  qui est régulière dans les 3 directions ( $\Delta z_k \simeq \Delta y \simeq \frac{\Delta x}{2}$ ). Ensuite, une agglomération bi-directionnelle sera faite pour avoir  $\Delta z_k \simeq \Delta y \simeq \Delta x$ . Enfin,  $N_{iso}$  agglomérations isotropes seront faites jusqu’à qu’il y ait entre 4000 et 12000 mailles par processeur au niveau le plus grossier ( $N_F$ ).

Nous voyons ici une des difficultés dans l’élaboration de ces maillages, le nombre de mailles nécessaire dans le niveau  $N_k$  doit être un multiple de  $2^M$  où  $M$  est le nombre d’agglomérations isotropes plus un pour l’agglomération bi-directionnelle ( $M = 1 + N_{iso}$ ).

### B.2.3 Niveaux 1 à $k$

Pour réaliser les niveaux de maillage 1 à  $k$ , nous devons prendre en compte de multiples critères. Pour simplifier le raisonnement, nous nous intéresserons ici uniquement à la position des points dans la directions  $z$  entre  $z = 0$  et  $z = h$  soit le demi-canal. Le maillage complet sera lui construit par symétrie et nous considérons un découpage dans la direction  $z$  par un nombre  $P_z$  étant une puissance de 2.

#### Parallélisme

Le maillage  $N_0$  est découpé en  $P_z$  parties, dans lesquelles les mailles sont réparties équitablement. Sur les autres niveaux de maillages, chaque processeur traite les zones géométriques qui lui ont été affectées au niveau  $N_0$ . Ainsi, il est nécessaire que chaque niveau de maillage possède une face à chacune des faces de coordonnées  $Z_i$   $i \in [1, \frac{P_z}{2}]$  où le domaine  $N_0$  est initialement découpé.

On arrive là sur un des points les plus contraignants lors de la création de l’ensemble des grilles. Plus le découpage dans la direction  $z$  sera important, plus il existera de points fixes et donc de contraintes pour l’élaboration des différents niveaux. Dans l’absolu, la probabilité que les points de découpage dans le niveau  $N_0$  correspondent à des points dans le niveau  $N_k$  est quasi nulle dès  $P_z > 4$ .

Les figures B.2(a) et B.2(b) illustrent les deux situations. La figure B.2(a) montre un ensemble de grilles inadapté, les points fixes (représentés par des droites) ne passent pas par un point dans chaque niveau. A contrario, la figure B.2(b) montre un ensemble où chaque point fixe possède un point correspondant sur l’ensemble des niveaux. On remarquera qu’entre deux points fixes le nombre de points est identiques

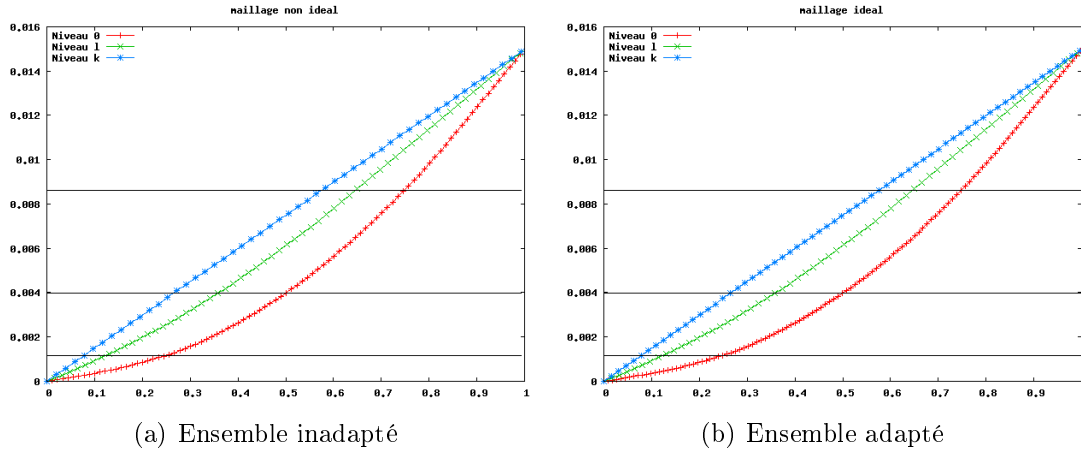


FIGURE B.2 – Représentation des faces des différents niveaux de maillage, les droites représentent les points fixes par lesquels chaque niveau doit passer. *Sur l'axe des abscisses est représenté le numéro de la maille divisé par le nombre de mailles dans le demi-canal. L'axe des ordonnées représente la position sur  $z$  des faces supérieures des mailles.*

au niveau 0 et croissant aux niveaux  $l$  et  $k$ .

Par la suite, nous traiterons un cas idéal ; dans ce cas, il y a correspondance des faces de découpage entre le niveau le plus fin est le niveau régulier. Il sera alors nécessaire de construire les niveaux intermédiaires pour qu'ils respectent passent par les points fixes.

### Nombre de niveaux

Pour définir le nombre  $k$  de niveaux nécessaires, pour passer du maillage  $N_0$  au maillage régulier, on s'intéresse à la taille de la première maille  $\Delta_0$ . La première maille étant la maille la plus petite, cette maille sera agglomérée à chaque niveau. Il faut ainsi un nombre de niveau  $k$  tel que  $\Delta z_k = 2^k \Delta_0$  soit :

$$k = \frac{\ln(\Delta z_k) - \ln(\Delta_0)}{\ln 2} \quad (\text{B.1})$$

On arrondira  $k$  pour respecter au mieux cette égalité.

### Nombre de mailles par processeur

Sur les niveaux 1 à  $k - 1$ , il faut que le nombre de mailles entre  $Z_i$  et  $Z_{i+1}$  soit croissant pour reproduire le comportement du niveau  $k$ . Pour choisir le nombre de points, il n'existe pas de règle stricte, mais un critère peut être déterminé en considérant une croissance géométrique du nombre de maille entre le niveau  $k$  et le niveau 0. Ainsi pour le processeur  $i$  et niveau  $l$ , le nombre de mailles  $N_l^i$  est tel quel  $N_l^i = q^{k-l} N_k^i$  avec  $q = \left( \frac{N_k^i}{N_z/P_z} \right)^{\frac{1}{k}}$ . Le nombre de mailles n'étant jamais entier, on arrondira le nombre de mailles en favorisant les transitions entre les niveaux fins.

### Points fixes

En canal plan, pour qu'un maillage soit en synergie avec la physique, il faut que la taille des mailles soit croissante à mesure que l'on s'éloigne de la paroi, et ceux jusqu'à atteindre la taille  $\Delta z_k$  à partir de laquelle le maillage devient régulier.

De nombreuses techniques sont possibles pour résoudre ce problème, nous expliquons ici la technique que nous avons utilisé dans le cas d'un maillage à 8 points fixes pour lequel on ne peut trouver de polynômes simples qui satisfassent les critères.

Pour chaque zone  $i$  (comprise entre deux points fixes  $Z_{i+1}$  et  $Z_i$ ), du niveau  $l$  contenant  $N_l^i$  mailles, on définit la suite des tailles de mailles  $\Delta_k^i = A_i k^2 + B_i k + \Delta_i$  où  $\Delta_i$  est la taille de la dernière maille du segment  $i - 1$  ou  $2^l \Delta_0$  pour  $i = 0$  (ce qui impose la continuité et donc la dérivabilité de la suite aux points  $Z_i$ ). Cette suite est telle que sa somme est égale à la distance entre deux points fixes.

$$\sum_{k=1}^{N_l^i} \Delta_k^i = Z_{i+1} - Z_i = L_i \quad (\text{B.2})$$

En appelant  $\Delta_F$  la dernière maille du segment, on peut résoudre ce système pour trouver les coefficients A et B.

$$A = \frac{6}{(N_l^i - 1)(N_l^i - 2)} \left( \frac{\Delta_a + \Delta_F}{2} - \frac{L_i}{N_l^i} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$B = \frac{\Delta_F - \Delta_a}{N_l^i - 1} + \frac{6L_i}{N_l^i(N_l^i - 2)} - 3 \frac{\Delta_a + \Delta_F}{N_l^i - 2} \quad (\text{B.4})$$

Il reste à fixer la taille  $\Delta_F$  tel que la suite soit croissante. La suite étant un polynôme d'ordre 2, il faut que l'extremum du polynôme soit situé en  $i < 0$  si  $A > 0$  ou  $i > N_l^i$  si  $A < 0$ . Par une boucle itérative (recherche par incrément), on trouve la plus petite taille  $\Delta_F$  telle que le critère soit satisfait.

Il est désormais possible de créer l'ensemble des maillages  $N_0$  à  $N_k$ . Les niveaux obtenus par agglomérations isotropes ou bi-directionnelle sont générés automatiquement par Trio\_U.

### Non concordance des maillages

Dans le cas où les maillages ne concordent pas (figure B.2(a)), il est préférable de faire un travail itératif entre le niveau 0 et le niveau  $k$ .

On repèrera les points du niveau  $k$  les plus proches des coordonnées  $Z_i$  qui satisfont les critères de divisibilité par  $M$ . Puis, on construira le niveau  $0'$  avec une tangente hyperbolique en utilisant un nombre de mailles  $N_z'$  tel qu'il améliore la concordances des coordonnées  $Z_i'$  et  $Z_i$  proches du centre du canal. Une fois le nouveau nombre  $N_z'$  défini, on construira un niveau  $0''$  avec la même technique que pour un niveau  $l < k$  mais en imposant entre chaque point fixe, un nombre de point  $\frac{N_z'}{P_z}$ . Une fois cette étape finie, on comparera le comportement de la tangente hyperbolique  $0'$  et du niveau  $0''$ , si leur écart est trop important (ou s'il est impossible de trouver l'ensemble des tailles  $\Delta_F^i$  tel que la taille de maille soit toujours croissante) on recommencera l'itération en prenant pour niveau 0 le niveau  $0'$ .

Le processus itératif tend à augmenter légèrement le nombre de mailles dans le domaine (+5 à +10%), mais est compensé par le gain en parallélisation.

## B.3 Paramètre du solveur multigrille

Nous allons maintenant voir les différents paramètres du solveur multi-grilles. Ci-dessous, nous avons un extrait d'un jeu de données, les instructions sont commentées directement dans l'extrait pour aider la lecture. Lorsque c'est nécessaire, les instructions sont spécifiquement détaillées à part.

### **Coarsen\_Operator\_**

Les *Coarsen\_Operator\_* sont aux nombres de 2, et définissent le type d'agglomération utilisée entre deux niveaux.

1. Les *Coarsen\_Operator\_K* correspondent aux agglomérations anisotropes, en paramètres on doit leur passer la règle de construction du maillage dans la direction  $z$ . Ici il est indiqué d'aller lire les coordonnées dans le fichier *coord\_k\_levelX.txt*.
2. Les *Coarsen\_Operator\_Uniform* permettent de faire des agglomérations isotropes ou bi-directionnelles. Si aucun paramètre n'est passé les agglomérations sont isotropes. Sinon, pour chaque direction, on indique le nombre de mailles qui doivent être agglomérées ici on demande de faire des blocs en agglomérant par deux dans les directions  $y$  et  $z$  *coarsen\_i 1 coarsen\_j 2 coarsen\_k 2*.

### **Ghost\_size**

Le paramètre *Ghost\_size* définit le nombre de mailles de joint connues par chaque processeur. Un grand *Ghost\_size*, permet de réduire les communications entre processeur car il retarde d'autant la nécessité de mettre à jour les éléments de joints utilisé par les schéma numériques. Un trop grand *Ghost\_size* peut avoir des effets négatifs sur les performances si la taille des tableaux du niveau le plus grossier devient trop importante pour que les tableaux soit stockés de manière optimale dans la mémoire cash. Il y a donc un compromis à trouver qui dépend de chaque calculateur (pour exemple, il est de 6 sur la machine JADE du CINES et de 4 sur SUPERMUCS).

### **smooth\_steps**

Les paramètres de *smooth\_steps* indiquent le nombre d'itérations du lisseur jacobi qui seront faites sur chaque grille. Le premier paramètre indique le nombre de grilles qui nécessite plus d'une itération et les paramètres suivant indique pour chaque grille le nombre d'itérations de lissage à faire.

Le nombre d'itérations est calculé selon deux critères, il faut que le nombre d'itérations plus l'itération jacobi pour le calcul du résidu soit un multiple du nombre de mailles indiqué en *ghost\_size*. Plus le nombre de mailles agglomérées est grand entre deux niveaux, plus il faut d'itérations de *smooth\_steps*. On trouvera donc logiquement plus d'itérations aux niveaux isotropes.

**Relax\_Jacobi**

Les coefficients de relaxation à utiliser pour chaque niveau sont indiqués ici. Plus les facteurs de formes changent entre deux niveaux, plus ces facteurs doivent être importants. A l'inverse du *smooth\_steps*, les niveaux isotropes auront donc un facteur plus petit. Le paramètre de relaxation optimal ( $\simeq 0.65$ ) dépend du nombre de dimensions de déraffinement (une seule direction donnera une relaxation de  $\geq 0.7$ ).

**nb\_full\_mg\_steps**

Ce paramètre controle la structure des itérations internes. En effet, une méthode multi-grilles n'est jamais une méthode directe, elle passe plusieurs fois par les niveaux grossiers et fins avant d'atteindre le résultat final (on dit que la méthode fait des itérations en **W**, le haut du **W** étant le niveau  $N_0$  et le bas le niveau  $N_F$ ). Les paramètres de *nb\_full\_mg\_steps* contrôlent ce comportement, le premier indique le nombre d'itération à l'itération **W** globale (le nombre de **W** dans le **W** global), les autres indiquent le nombre de remontées internes. Le réglage de ce paramètre est très sensible aux autres paramètres et doit être choisi en dernier. Le réglage de ce paramètre se fait de manière itérative en cherchant la meilleure performance.

**solver\_precision**

Le paramètre *solver\_precision* indique la précision numérique (simple ou double précision) que l'on désire utiliser. On peut choisir un solveur *float* qui est très rapide mais uniquement si le résidu est déjà très faible (écoulement transitoires). A l'opposé, un solveur *double* est très précis mais beaucoup plus couteux en mémoire et en puissance de calcul, le temps de calcul est multiplié par un facteur 2 minimum. Enfin, le solveur *mixed* calcule le second membre en double precision et utilise un liseur simple précision. Suivant les cas testés, le solveur *mixed* peut aller de 1,5 à 3 fois plus vite que le solveur *double* avec une précision finale similaire. Dans les itérations **W**, les itérations internes sont faites en simple précision et les extrémités en double précision.

---

```

1 multigrid_solver { # Appel au solveur #
2   coarsen_operators 5 # Nombre de niveaux additionnels #
3   Coarsen_Operator_K { file_z_coord coord_k_level1.txt }
4   # Agglomeration anisotrope niveau 1 #
5   Coarsen_Operator_K { file_z_coord coord_k_level2.txt }
6   # Agglomeration anisotrope niveau 2 #
7   Coarsen_Operator_K { file_z_coord coord_k_level3.txt }
8   # Agglomeration anisotrope niveau 3 regulier #
9   Coarsen_Operator_Uniform { coarsen_i 1 coarsen_j 2 coarsen_k 2 }
10  # Agglomeration bi-directionnelles (y,z) niveau 4 #
11  Coarsen_Operator_Uniform { }
12  # Agglomeration isotrope niveau 5 #
13  ghost_size 4 # Nombre de mailles de joints connues #
14  pre_smooth_steps 5 3 3 3 7 7 # Nombre d'iterations avant solveur #
15  smooth_steps 5 3 3 3 7 7 # Nombre d'iterations apres solveur #
16  relax_jacobi 5 0.72 0.72 0.72 0.68 0.65 # coefficient de relaxation ←
    du lisseur inter-grilles #
17  solveur_grossier GCP { seuil 0.5e-6 precond ssor { omega 1.5 } } # ←
    reglage du solveur pour le niveau le plus grossier #
18  seuil 2.5e-6 # Residu final #

```

```
19  nb_full_mg_steps 2 4 1 # Structure des iterations internes #  
20  solver_precision mixed # precision de la methode #  
21 }
```

---