

Remerciements

Je souhaite, tout d'abord, remercier les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Merci à Georges Berthoud d'avoir assumé la tâche de Président du jury et d'avoir lu très attentivement ce mémoire de thèse. Merci à Michel Lance et Daniel Lhuillier pour les nombreuses remarques sur la forme et sur le fond. Je suis extrêmement touché de constater que les échanges d'idées perdurent au-delà de la soutenance de thèse. Merci à Jean-Claude Latché pour son implication dans un sujet plus physique que numérique. Merci à Jérôme Laviéville pour avoir assuré la difficile tâche de représenter le monde de l'industrie.

Ce travail a été préparé au CEA Grenoble dans le laboratoire de modélisation et d'application à l'échelle locale. Je tiens à remercier Frédéric Ducros pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire. Sa grande expérience de la simulation numérique, son sens de l'analyse et sa bonne humeur m'ont beaucoup apporté.

Cette thèse n'aurait jamais pu se dérouler sans l'impulsion de mon directeur de thèse Olivier Lebaigue. Sa vivacité d'esprit, son sens physique et son expérience des écoulements polyphasiques m'ont été d'une grande aide. Merci à lui d'avoir proposé ce sujet de thèse complexe et non balisé. Je lui suis particulièrement reconnaissant d'avoir su encadrer ma thèse sans jamais l'orienter directement. J'ai pu suivre le chemin naturel de mes réflexions en évitant de nombreuses impasses grâce à ses suggestions avisées. Son plaisir des écoulements diphasiques d'origine champenoise et son contact facile m'ont permis de passer des moments forts agréables. Il m'a aussi donné l'occasion d'appréhender de façon pratique quelques aspects de la mécanique comme l'importance de l'angle de talus dans le processus d'optimisation du remplissage d'une coupelle de flan.

Je tiens aussi à remercier Adrien Toutant pour m'avoir accordé beaucoup de temps et pour les très nombreuses réponses qu'il m'a apportées. Il a su me laisser m'approprier son chef-d'oeuvre : le modèle ISS.

Je souhaite également remercier Benoît Mathieu pour le temps qu'il m'a consacré. Ses facultés de compréhension physique des écoulements et son sens de la logique informatique m'ont évités bien des écueils.

L'implémentation du modèle ISS a été réalisée conjointement avec Clarisse Fournier dans le cadre de son post-doc. Sa rigueur et sa joie de vivre m'ont énormément apportés durant cette courte période de ma thèse.

Je remercie Christophe Morel pour son aide dans la découverte des modèles moyennées. Il a su utiliser sa connaissance des nombreux modèles et de leur interprétation physique pour me faire découvrir le vaste monde de la modélisation moyennée. Grand bouliste à ses heures, il était l'interlocuteur idéal en ce qui concerne la modélisation des écoulements dispersés.

Cette thèse a été préparée parallèlement à celle de mon co-bureau Florian Vaïana. Nous nous sommes rencontrés le premier jour de nos thèses et nous ne sommes plus vraiment quittés depuis. Ce très dynamique stéphanois a réalisé une thèse sur le couplage de modèles neutronique et thermohydraulique. Nous avons élaborés ensemble des farces informatiques et je tiens à m'excuser auprès des victimes à moitié consentantes... L'esprit de camaraderie qui s'est installé au fur et à mesure de l'avancée nos travaux respectifs (et des difficultés qui l'accompagnent) restera pour moi une composante essentielle de cette thèse.

J'ai eu la chance de réaliser ce travail dans un laboratoire vivant et dynamique. Je souhaite donc remercier les permanents, thésards et stagiaires qui ont rendu cette période de ma vie riche et agréable. J'ai pu partager avec certains les bienfaits (ou les méfaits) des écoulements diphasiques dispersés en pinte ou en girafe.

Thomas Fortin pour ses conseils en mathématiques et pour son sens de l'organisation d'activités sportives et culturelles. Philippe Emonot pour sa vision des modèles moyennés et ses discours engagés. Didier Jamet pour son sens physique aigu et ses nombreuses histoires de randonnées en montagne. Gauthier Fauchet qui a largement participé à la réalisation du calcul IIA de cette thèse et pour sa bonne humeur. Fabien Perdu pour son engagement écologique, pour ses bons conseils en informatique et pour ses cours d'escalade. Patrick Quéméré pour son esprit critique et sa recherche perpétuelle de la perfection. Valérie Barthel, Emile Garré, Olivier Cioni, Nicolas Tauveron, Simone Vandroux, Ulrich Bieder, Marc Elmo, Pierre Ledac, Cyril Malod, Vincent Blind. Mais aussi les anciens et les nouveaux thésards et post-docs Eli, Benoit, Aliénor, Guillaume, Didier, Béatrice, JB, Nicolas.

Je souhaite aussi remercier mes proches pour leur implication dans ce travail. En particulier, je suis très reconnaissant à Lucie de m'avoir apporté son soutien. J'ai été particulièrement touché par son intérêt pour un sujet qui n'est pas simple à appréhender. Elle a aussi participé à la relecture de ce document. Ses conseils ont permis de réduire les fautes de frappe et d'alléger les tournures de phrases.

Merci aussi à tous ceux que je n'ai pas cité, par soucis de concision, et qui ont rendu ces trois années agréables et enrichissantes.

Nomenclature

Les scalaires sont notés simplement alors que les vecteurs et tenseurs sont notés en **gras**.

Lettres Grecques

α	-	taux de présence volumique de la phase gazeuse (taux de vide)
δ	m	épaisseur de la zone de transition
δ_σ	m^{-1}	fonction de Dirac associée à la position de l'interface
δ_{ij}	-	symbole de Kronecker
Δ_x	m	pas du maillage des SND
$\overline{\Delta}_x$	m	pas du maillage équivalent après un filtrage volumique
Δ_t	s	pas de temps
ϵ	-	petit paramètre
ε	$m^2.s^{-3}$	taux de dissipation visqueuse par unité de masse
η	m	échelle de Kolmogorov
κ	m^{-1}	courbure moyenne
μ	Pa.s	viscosité dynamique
ν	$m^2.s^{-1}$	viscosité cinématique
(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	m	coordonnées associées à l'interface
ρ	$kg.m^{-3}$	masse volumique
σ	$N.m^{-1}$	tension de surface
τ	(?)	tenseur sous-maille (l'unité dépend du tenseur)
χ	-	fonction indicatrice de phase

Lettres latines

a_i	m^{-1}	moyenne de δ_σ Aire Interfaciale Volumique
A_i	m^{-1}	moyenne composite de δ_σ (AIV)
d_e	m	diamètre équivalent d'une bulle (d_{30})
\mathbf{D}	s^{-1}	tenseur du taux de déformation
e_c	$m^2.s^{-2}$	densité massique d'énergie cinétique
\mathbf{g}	$m.s^{-2}$	gravité
g	$m.s^{-2}$	norme du vecteur gravité
G	m^{-3}	noyau de convolution
h	-	fonction de Heaviside

Nomenclature

H	m^{-2}	courbure de Gauss
\mathbf{I}	-	tenseur identité
J	m.s^{-1}	vitesse superficielle
k	m^{-1}	nombre d'onde
L	m	longueur
\mathbf{n}_k	-	normale unitaire sortante de la phase k
p	Pa	pression
\mathbf{P}	-	projecteur dans le plan tangent à l'interface
r	m	longueur caractéristique d'un filtre spatial
R_b	m	rayon de courbure d'une bulle
\mathbf{S}	Pa	tenseur des contraintes visqueuses
t	s	temps
\mathbf{u}	m.s^{-1}	vecteur vitesse
\mathbf{U}	m.s^{-1}	vecteur vitesse de l'écoulement non perturbé
\mathbf{v}	m.s^{-1}	vecteur vitesse d'une bulle par rapport à la phase continue
\mathbf{V}	m.s^{-1}	vecteur vitesse d'une bulle
V	m^3	volume
u	m.s^{-1}	composante de vitesse suivant la direction x
v	m.s^{-1}	composante de vitesse suivant la direction y
w	m.s^{-1}	composante de vitesse suivant la direction z
(x, y, z)	m	coordonnées dans la base canonique fixe

Opérateurs

T	transposée
\star	produit de convolution
\otimes	produit tensoriel
\cdot	contraction simple
$:$	contraction double
$\nabla \cdot$	divergence
$\nabla_s \cdot$	divergence surfacique
∇	gradient
∇_s	gradient surfacique
Δ	laplacien
Δ_s	laplacien surfacique
$\langle \quad \rangle$	moyenne statistique
$\bar{\quad}$	moyenne volumique
$\bar{\quad}_s$	moyenne surfacique
$\bar{\quad}_\sigma$	moyenne surfacique restreinte à l'interface
$\hat{\quad}$	transformée de Fourier
\cdot_i	dérivée partielle par rapport à la composante i
$[\phi] = \phi_l - \phi_g$	saut de la grandeur ϕ
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle par rapport au temps
$\frac{D}{Dt}$	dérivée particulaire

Nombres adimensionnels

$E\ddot{o} = \frac{gd_e^2(\rho_l - \rho_g)}{\sigma}$	nombre d' <i>Eötvös</i>
$Mo = \frac{g\mu_l^4}{\rho_l\sigma^3}$	nombre de Morton
$Oh = \frac{\mu_l}{\sqrt{\sigma\rho_l L}}$	nombre de Ohnesorge
$Re = \frac{\rho_l \ \mathbf{v}\ L}{\mu_l}$	nombre de Reynolds
$We = \frac{\rho_l \mathbf{v}^2 d_e}{\sigma}$	nombre de Weber

Indices courants

σ	grandeur relative à l'interface
k	grandeur relative à la phase k
g	grandeur relative à la phase gazeuse
l	grandeur relative à la phase liquide
b	grandeur relative à la bulle
n	composante suivant la direction normale à l'interface
t	composante suivant une direction tangente à l'interface

Abréviations

CSF	<i>Continuous Surface Force model</i>
DAR	Développements Asymptotiques Raccordés
ISS	<i>Interface and Subgrid Scales</i>
MILES	<i>Monotone Integrated Large Eddy Simulation</i>
QUICK	<i>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics</i>
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>
REP	Réacteur à Eau Pressurisée
SGE	Simulation des Grandes Échelles (LES pour <i>Large Eddy Simulation</i> en anglais)
SND	Simulation Numérique Directe (DNS pour <i>Direct Numerical Simulation</i> en anglais)
WALE	<i>Wall Adapting Local Eddy-viscosity</i>
THI	Turbulence Homogène Isotrope

Table des matières

Remerciements	iv
Nomenclature	vii
Table des matières	xii
Introduction	1
I Physique des colonnes à bulles	7
1 Ascension d'une bulle isolée dans un milieu infini	9
1.1 Différents régimes d'écoulement	9
1.1.1 Carte de Clift, Grace et Weber	10
1.2 Les différentes forces qui agissent sur une bulle	11
1.3 Vitesse terminale	13
1.4 Temps caractéristique de mise en mouvement	14
1.5 Problème de définition de la vitesse des interfaces	14
1.6 Conclusions	15
2 Écoulements verticaux	17
2.1 Configurations d'écoulement	17
2.1.1 Prédiction de la configuration d'écoulement	17
2.2 Cas des écoulements à bulles	19
2.2.1 Répartition du taux de vide dans une colonne	19
2.2.2 Effets inter-bulles	22
2.2.3 Pseudo-turbulence	25
2.3 Conclusions	26
II Modélisation physique et outils numériques	27
3 Présentation des deux formalismes pour décrire un écoulement diphasique	29
3.1 Modélisation physique des interfaces	29
3.2 Position du problème	30
3.3 Formalisme à deux fluides	32
3.4 Formalisme monofluide	33
3.5 Conclusions	35

4	Simulation numérique directe	37
4.1	Différentes méthodes de traitement des interfaces	37
4.1.1	Méthodes à maillage adaptatif	37
4.1.2	Méthodes eulériennes	38
4.1.3	Méthodes à maillage mobile	40
4.2	La méthode Front-Tracking discontinue de Trio_U	41
4.2.1	L’algorithme général de la méthode	41
4.2.2	Gestion du maillage de surface	46
4.3	Parallélisme	47
4.3.1	Domaine eulérien	47
4.3.2	Domaine lagrangien	47
4.4	Améliorations apportées	48
4.4.1	Injection et destruction de bulles dans la colonne	48
4.4.2	Remaillage semi-global	49
4.4.3	Terme source répulsif	49
4.4.4	Méthode de repérage des composantes connexes	51
4.4.5	Déplacement des marqueurs dans le repère lié à une composante connexe	51
4.5	Conclusions	53
5	Simulation des grandes échelles et modèle ISS	55
5.1	Rappels concernant la SGE monophasique	55
5.1.1	Filtrage	56
5.1.2	Modèles monophasiques	56
5.2	Quelques méthodes de SGE diphasique	62
5.2.1	Méthodes lagrangiennes	63
5.2.2	Méthodes eulériennes	63
5.3	Modèle ISS	63
5.3.1	Équations monofluides filtrées	64
5.3.2	Développements asymptotiques raccordés	66
5.3.3	Limitations	80
5.4	Travail de validation du modèle ISS	80
5.4.1	Introduction	80
5.4.2	Turbulence homogène isotrope monophasique	81
5.4.3	Bulle de Taylor	86
5.4.4	Bulle ascendante 2D	93
5.4.5	Bulle ascendante 3D dans une THI	99
5.5	Conclusions	109
6	Approche moyennée	111
6.1	Opérateur de moyenne	111
6.1.1	Quelques opérateurs classiques	111
6.1.2	Moyenne aux interfaces	112
6.2	Les équations moyennées	113
6.2.1	Modèle à deux fluides	113
6.2.2	Signification physique des variables moyennes	114
6.2.3	Problème de fermeture	115
6.3	Prise en compte de la géométrie des interfaces	116
6.4	Conclusions	117

III	De la SND (ISS) vers le moyenné (RANS)	119
7	Travail préliminaire aux mesures	121
7.1	Différentes vitesses microscopiques des interfaces	121
7.1.1	Calcul de la vitesse du centre de gravité d'une interface	121
7.1.2	Mise en évidence de l'influence du choix de la vitesse microscopique de l'interface sur le bilan de densité d'aire interfaciale	124
7.2	Opération de prise de moyenne	126
7.2.1	Méthode de filtrage	126
7.2.2	Calcul des grandeurs moyennes	127
7.3	Études préliminaires sur des cas simplifiés	131
7.3.1	Montée d'un bulle unique	131
7.3.2	Coalescence de deux bulles	135
7.4	Conclusions	138
8	Présentation des simulations de colonnes à bulles	141
8.1	Ascension d'une bulle unique	141
8.1.1	Effets du filtrage implicite	141
8.1.2	Étude de convergence en maillage	142
8.1.3	Calcul des coefficients de traînée	143
8.1.4	Choix des constantes du modèle ISS	144
8.2	Configurations étudiées	146
8.2.1	Configuration d'écoulement	146
8.2.2	Choix de l'essaim de bulles	148
8.3	Effets du passage des bulles sur le liquide	153
8.4	Conclusions	155
9	Exploitation des résultats	157
9.1	Équation de bilan de masse	157
9.1.1	Colonne <i>I</i>	157
9.1.2	Colonne <i>II</i>	159
9.2	Bilan de quantité de mouvement	159
9.2.1	Problématique de la pression unique	160
9.2.2	Influence de la pression	162
9.2.3	Échanges de quantité de mouvement aux interfaces	163
9.3	Équation de bilan d'aire interfaciale volumique	169
9.3.1	Avec la vitesse matérielle des interfaces	169
9.3.2	Influence de la vitesse microscopique	169
9.3.3	Avec la vitesse modifiée	172
9.3.4	Flux décorrélé	173
9.4	Conclusions	174
	Conclusions et perspectives	177
	Annexe	181
A	Modèle d'estimation d'erreur	183
A.1	Estimation de l'ordre de convergence	183
A.2	Accélération de la convergence	183

Bibliographie

189

Introduction

Dans l'imaginaire collectif, une bulle symbolise la fragilité et une certaine forme de beauté. De mon point de vue, on pourrait la comparer aux insectes sociaux. Individuellement, ils sont petits, fragiles et nous fascinent par leur diversité. Quand ils s'envolent, ils nous ramènent à notre pesanteur et nous donnent l'image d'une certaine quiétude. Pourtant, une fois en groupe, en essaim, ils représentent une force quasi dévastatrice. Ils peuvent même devenir inquiétants et menaçants, nous donnant envie de les dompter, de les maîtriser.

Contexte

Notre mode de vie moderne est conditionné par notre capacité à trouver des sources d'énergie. Celles-ci sont principalement d'origine fossile (pétrole, charbon, gaz). Néanmoins, nos activités et notre consommation influencent directement les ressources et l'environnement. Un enjeu stratégique pour les différentes nations et pour les grands industriels est de trouver une source d'énergie fiable, sûre, économique et peu polluante.

Il existe peu de moyens alternatifs aux énergies fossiles, qui sont fortement émettrices de gaz à effets de serre. Les centrales hydroélectriques sont très performantes et permettent une distribution continue et adaptée à la consommation. Néanmoins, cette source d'énergie ne couvre que quelques pourcents des besoins français et la majorité des sites d'implantation disponibles sont déjà équipés. Beaucoup souhaiteraient que la part des autres énergies renouvelables (éoliens, solaire) augmente. Du fait de l'aspect intermittent de celles-ci, les progrès en matière de stockage d'électricité conditionneront le développement de ces modes alternatifs.

Aujourd'hui, la grande majorité de l'électricité produite en France est issue de l'industrie nucléaire. Cette voie présente l'avantage d'émettre peu de gaz à effet de serre. De plus, les politiques de retraitement des déchets limitent la quantité de matériaux pour lesquels un stockage de longue durée est nécessaire. La problématique principale associée à cette ressource reste le danger d'incident ou d'accident dans les installations. Cette thématique de la sûreté des centrales est au cœur des débats en ce qui concerne l'implantation de nouveaux sites.

Une centrale nucléaire est un dispositif qui convertit une petite partie de l'énergie d'interaction disponible à l'intérieur du noyau d'un atome (on l'appelle énergie nucléaire) en électricité. Une représentation schématique d'un tel système est donnée à la figure 1. Ce dernier appartient à la famille des **R**éacteurs à **E**au **P**ressurisée (REP) et peut être décomposé en trois sous-ensembles importants :

- le réacteur, qui utilise l'énergie de fission nucléaire afin produire de la chaleur,
- les boucles hydrauliques, qui assurent le transport et la conversion de l'énergie thermique en énergie mécanique. Cette partie du système assure, en plus, la sécurité de l'installation,
- l'alternateur, qui transforme l'énergie mécanique en énergie électrique.

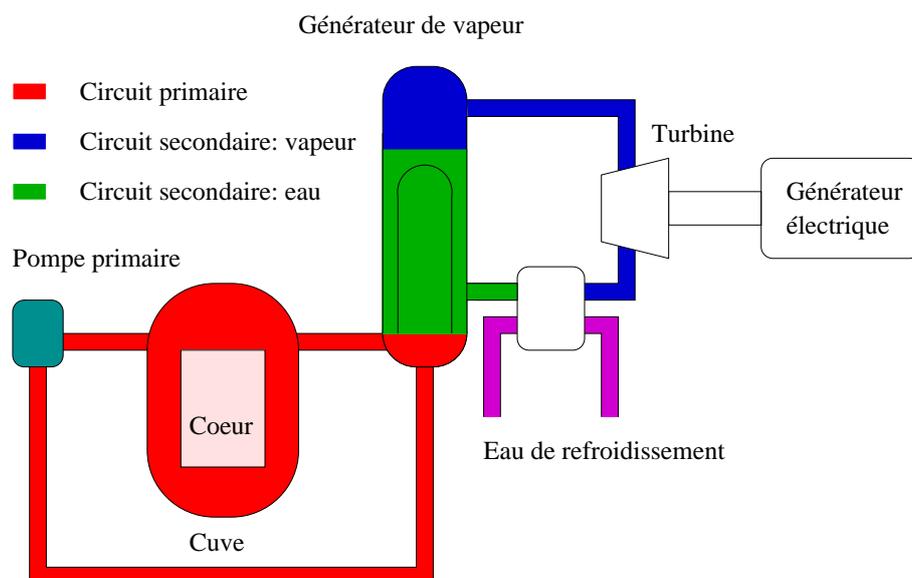


FIGURE 1 – Représentation schématique d'un réacteur à eau pressurisée

Comme nous pouvons le constater sur la figure 1, le dispositif hydraulique est au centre de l'installation nucléaire et a deux principales fonctions :

- en situation normale, il est le siège du cycle thermodynamique diphasique qui assure la conversion d'énergie thermique en énergie mécanique. Afin de disposer d'un rendement optimum, il est donc important d'avoir une connaissance et une compréhension fine des phénomènes physiques diphasiques qui interviennent dans ce cycle.
- en situation incidentelle ou accidentelle, le système thermohydraulique a pour vocation de protéger le cœur du réacteur d'une surchauffe, qui pourrait conduire à une dégradation voire à une fusion du cœur. Certains accidents se caractérisent par la présence d'écoulements diphasiques dans le circuit primaire.

Ainsi, les études des écoulements monophasiques et polyphasiques ont pour objectifs d'optimiser les dispositifs et d'assurer la sécurité des installations. Pour cela, il faut disposer de modèles physiques qui permettent de représenter les écoulements et de les analyser.

Les écoulements de fluides newtoniens sont régis par les équations de Navier-Stokes. Celles-ci sont connues depuis le milieu du XIX^e siècle. Néanmoins, leur résolution analytique n'a été, pour l'instant, réalisée que dans certains cas simples. Les écoulements polyphasiques sont encore plus complexes à traiter puisque les équations de Navier-Stokes ne sont valables que dans les phases. Ainsi, les domaines de résolution de ces équations phasiques sont variables en temps et il faut tenir compte des échanges (matière, quantité de mouvement, énergie) aux interfaces. La résolution analytique des écoulements polyphasiques complexes n'est donc pas accessible à l'heure actuelle.

Afin de répondre aux besoins d'ingénierie, des méthodes de résolution numériques ont été mises au point. Cela a été rendu possible grâce aux avancées technologiques importantes des moyens informatiques. Ces méthodes sont basées sur une formulation discrète des équations de Navier-Stokes. Cependant, la résolution directe de ces équations reste extrêmement coûteuse d'un point de vue numérique puisqu'il est nécessaire de décrire l'ensemble des échelles de l'écoulement.

Ainsi, l'effort numérique à fournir dépend principalement du rapport entre les plus grandes et les plus petites échelles de l'écoulement considéré. On parle ici de **Simulation Numérique Directe** (SND). Ce type d'approche est très précis puisque l'effort de modélisation est presque nul. Cependant le coût numérique important de telles simulations limite généralement leur utilisation à des cas très académiques.

Afin d'illustrer notre propos, intéressons nous maintenant à l'écoulement à l'intérieur d'une cuve de REP. Les dimensions caractéristiques de celle-ci sont environ de 13 m de hauteur pour 5 m de diamètre, soit un volume total de 255 m^3 . On considère ici que les plus petites structures de l'écoulement sont situées dans les sous-canaux du cœur dont le diamètre hydraulique est typiquement de 12 mm. L'écoulement du fluide dans ces derniers correspond à une pression d'environ 15 MPa et à une vitesse de $3,5 \text{ m.s}^{-1}$ dans les conditions normales de fonctionnement du réacteur. On en déduit que l'échelle caractéristique des plus petites structures de l'écoulement est d'environ $1 \mu\text{m}$. Le nombre de degrés de liberté nécessaires à la résolution de ce problème est donc environ de $2,5 \cdot 10^{20}$. Afin de donner un ordre de grandeur des moyens actuels, les simulations les plus importantes qui ont été réalisées dans le cadre de ce travail à l'aide des supercalculateurs du CEA se rapportent à $10^7 - 10^8$ degrés de liberté. Le rapport entre les moyens de calculs nécessaires et ceux qui sont actuellement disponibles est donc de 10^{13} . Ces ordres de grandeurs permettent de mettre en lumière les difficultés associées à la modélisation numérique. Ainsi, les équations qui régissent les écoulements sont connues, mais leur résolution directe ne sera pas possible avant au mieux plusieurs dizaines d'années.

La réduction du nombre de degrés de liberté des problèmes est donc un enjeu important pour la réalisation d'études associées à la mécanique des fluides. Celle-ci conduit alors à une augmentation de l'effort de modélisation qui se traduit le plus souvent par une perte de précision et par une perte d'universalité des modèles. De façon classique, on distingue ainsi différentes approches qui correspondent, en fait, à différents compromis entre résolution et modélisation.

Les méthodes statistiques ou **Reynolds Averaged Navier-Stokes** (RANS) visent, ainsi, à ne calculer que la partie moyenne des champs associés aux grandeurs physiques de l'écoulement. De cette façon, les équations utilisées dans ces méthodes ne portent que sur les grandeurs moyennes. Comme ni la turbulence ni les interfaces ne sont explicitement calculées, les effets associés font l'objet d'une modélisation. Le traitement des interfaces est assez complexe et dépend principalement de la nature de l'écoulement. Ainsi, les écoulements à bulles ne sont pas traités de la même façon que les écoulements stratifiés. On retrouve ici le problème de non universalité des modèles puisqu'il convient de distinguer le type d'écoulement avant d'utiliser le modèle approprié. Ce type d'approche permet de traiter des cas très turbulents pour lesquels la gamme d'échelles mise en jeu est très large. Cependant, le manque de précision et de prédictivité des modèles mènent à un effort important de validation.

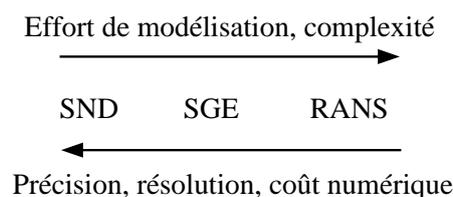


FIGURE 2 – Diagramme présentant les différents compromis résolution/modélisation

L'approche intermédiaire entre la SND et le RANS s'appelle la **Simulation aux Grandes Échelles** (SGE). Celle-ci consiste à résoudre les plus grandes échelles de l'écoulement et à modéliser l'effet des plus petites. L'échelle de coupure qui permet de distinguer ces deux dernières est alors choisie de telle sorte que les structures modélisées soient relativement isotropes et peu énergétiques. Ainsi, la modélisation est plus aisée et consiste généralement, en ce qui concerne la turbulence, à supposer que les petites échelles ont un effet dissipatif analogue à celui de la diffusion visqueuse. La SGE permet ainsi de traiter des problèmes physiques fortement instationnaires comme la météorologie, les effets de fatigue thermique ou les systèmes de mélange. Néanmoins, celle-ci reste encore assez coûteuse.

La prise en compte des écoulements diphasiques pose alors le problème du choix de la largeur de coupure vis-à-vis de l'échelle caractéristique des interfaces. Quand cela est possible¹, l'échelle de coupure est choisie de sorte à être beaucoup plus grande, ou plus petite, que les dimensions caractéristiques des interfaces.

Dans le cas des écoulements dispersés, il est possible d'utiliser une échelle de coupure plus grande que les dimensions caractéristiques des particules. Dans ces conditions, la phase dispersée peut être modélisée par un ensemble de particules ponctuelles ou par un champ continu. L'approche qui est utilisée dans ce travail consiste, au contraire, à supposer que la largeur de coupure est plus petite que la courbure des interfaces. Celles-ci sont donc assez bien résolues et les échelles sous-maille correspondent principalement aux échelles de la turbulence. Ce genre d'approche est donc très bien adapté aux situations pour lesquelles l'échelle de Kolmogorov est plus petite que le rayon de courbure des inclusions. Ceci est par exemple le cas pour les écoulements stratifiés ou les écoulements à bulles fortement turbulents comme ceux que l'on trouve dans un sous-canal de REP.

Pour résumer, les différentes approches sont présentées schématiquement sur la figure 2.

Démarche

Nous venons de présenter l'importance de la modélisation des écoulements dans les centrales nucléaires ainsi que les difficultés associées. De façon classique, les études de sûreté et les études de dimensionnement sont réalisées avec des codes systèmes (CATHARE, RELAP5) ou des codes à l'échelle des composants (NEPTUNE) basés sur une modélisation moyennée (RANS). La fiabilité et la validité des modèles est donc indispensable pour la sécurité des installations. De plus, les enjeux économiques associés sont importants puisque les marges représentent un surcoût non négligeable lors de la construction des centrales nucléaires.

Les modèles sont classiquement validés et corrélés grâce à des résultats d'études expérimentales. Cette démarche présente l'avantage de fournir des informations fiables, précises et pertinentes vis-à-vis des écoulements à modéliser. Néanmoins, les informations ainsi obtenues sont souvent partielles. En effet, le nombre de grandeurs mesurées est généralement assez restreint et les champs associés ne sont qu'en partie disponibles.

De façon complémentaire, l'objectif de ce travail est de démontrer les potentialités des méthodes de SND diphasiques à renseigner les modèles moyennés. La démarche originale que nous proposons consiste à réaliser des simulations fines dans lesquelles les champs des deux phases sont suffisamment résolus. À partir des résultats de celles-ci, il est alors possible de construire les variables moyennes qui interviennent dans les modèles moyennés. Les champs ainsi obtenus présentent l'avantage d'être complets (en espace et en temps), ce qui permet d'avoir accès aux différentes dérivées des grandeurs. Notre approche conduit donc, non pas à valider un terme en

1. Cela n'est, par exemple, pas le cas des écoulements stratifiés avec arrachement de gouttelettes.

particulier ou une corrélation (pour cela, les études expérimentales nous semblent plus adaptées), mais à tester le système d'équations de façon globale. De cette manière, on est alors en mesure de vérifier certaines hypothèses de modélisation, et d'identifier les termes qui sont mal pris en compte par les modèles. Cette démarche conduit à une identification plus facile des sources d'erreurs.

Ce travail est, pour l'instant, limité au cas des écoulements dispersés à bulles. Or, le coût associé à l'approche de SND rend, pour l'instant, impossible la résolution de simulations mettant en œuvre un essaim de bulles suffisamment important. Il a donc été décidé de construire un modèle intermédiaire équivalent de la SGE pour les écoulements polyphasiques. Celui-ci nous permet alors de réaliser nos études de façon plus confortable. Le choix qui a été fait consiste à utiliser un filtre dont la largeur de coupure est plus petite que les dimensions caractéristiques des inclusions. De cette manière, les champs sont suffisamment résolus pour être directement exploités. Les études numériques que nous avons réalisées sont donc proches d'être de type SND. Néanmoins une réduction du nombre de degrés de liberté d'un facteur 3 dans chaque direction de l'espace mène à une diminution de l'effort numérique à produire d'un facteur $3^4 = 81$ (3 dimensions d'espace et 1 dimension de temps).

Ce type de démarche repose sur l'idée que les moyens informatiques ne vont faire que croître et qu'il sera possible de réaliser des simulations fines de plus en plus complexes. Pour l'instant, elle est cependant limitée à des configurations faiblement turbulentes dans des domaines de taille encore réduite.

Présentation du mémoire

Avant de commencer notre travail numérique, il nous a semblé pertinent de rappeler, dans une première partie, la phénoménologie des écoulements qui nous intéressent : les écoulements à bulles. Dans un premier temps, nous allons ainsi nous intéresser au cas de l'ascension d'une bulle isolée. Celui-ci nous permettra de présenter les différentes configurations d'écoulement ainsi que les différentes forces qui agissent sur une particule en mouvement. Dans une seconde étape, nous allons évoquer des écoulements diphasiques en conduite. Pour cela, nous commencerons par présenter les différents régimes d'écoulement puis nous nous intéresserons plus spécifiquement aux cas dispersés à bulles.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à la présentation des outils physiques et numériques à notre disposition pour modéliser les écoulements diphasiques. Le chapitre 3 est ainsi consacré à la présentation des équations microscopiques qui régissent les mouvements des fluides. En particulier, nous évoquerons les deux façons de combiner et d'utiliser les équations phasiques (qui ne sont définies que de part et d'autre des interfaces). Les trois chapitres suivants sont dédiés aux trois types de modélisations diphasiques généralement utilisés. Ainsi, au chapitre 4 sont présentés les modèles de type SND et leurs principaux défauts. Nous verrons que ceux-ci sont, le plus souvent, liés aux problèmes de conservation de la masse et de prise en compte des forces de tension de surface.

Dans le chapitre 5, nous nous intéresserons aux modèles de type SGE. Ainsi, après avoir exposé le formalisme SGE dans les cas monophasiques et quelques méthodes diphasiques de la littérature, nous présenterons le développement théorique qui permet de construire le modèle **Interface and Subgrid Scales (ISS)**. Celui-ci se subdivise en deux étapes ; la première consiste à construire, par simple filtrage, un modèle de SGE diphasique avec une interface étalée et à le fermer. Dans une deuxième étape, il s'agit alors de former un modèle discontinu qui puisse

être utilisé avec notre méthode de SND diphasique, grâce à la méthode des **D**éveloppements **A**symptotiques **R**accordés (DAR).

Le chapitre 6 est dédié à la modélisation de type moyennée. Il s'agit dans un premier temps de présenter les développements formels qui conduisent à l'écriture des équations moyennées. Puis, nous présenterons les lois de fermeture qui sont classiquement employées. En particulier, nous nous intéresserons aux cas des écoulements dispersés pour lesquels il est nécessaire de donner une description de la population de particules.

La troisième et dernière partie est, quant à elle, consacrée à l'utilisation de simulations de type ISS afin de renseigner les modèles moyennés. Ainsi, le début du chapitre 7 est consacré à présenter la méthodologie de mesure mise en œuvre. Deux tests sont ensuite présentés afin d'illustrer les difficultés liées à notre démarche. Enfin, deux études sur l'ascension de bulles isolées permettront d'optimiser le modèle ISS dans nos configurations particulières.

Les différents cas de colonnes à bulles étudiés sont présentés au chapitre 8. On s'attachera à présenter les conditions des simulations (propriétés physiques, régimes d'écoulement, conditions aux limites) et à exposer la phénoménologie des écoulements.

Le dernier chapitre est dédié à la présentation des résultats et à leur exploitation. En particulier, nous nous intéresserons aux équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'aire interfaciale volumique. Nous montrerons que l'une des difficultés de ce travail réside dans la définition des grandeurs à mesurer. Ainsi, comme notre démarche implique que toutes les grandeurs moyennes peuvent être construites à partir de grandeurs microscopiques, nous verrons que certaines hypothèses doivent être traduites au niveau local. Les résultats présentés porteront principalement sur la modélisation des gradients de pression et des forces de traînée ainsi que sur la vitesse des interfaces.

Première partie

Physique des colonnes à bulles

Chapitre 1

Ascension d'une bulle isolée dans un milieu infini

AVANT d'étudier numériquement les écoulements diphasiques, il convient de s'intéresser aux différents phénomènes physiques qui entrent en jeu. Nous allons commencer par présenter les diverses configurations d'écoulement que peut adopter une bulle en ascension dans un fluide stagnant. Ensuite, nous listerons l'ensemble des forces qu'une inclusion¹ est susceptible de subir dans un écoulement. Puis nous présenterons deux grandeurs spécifiques de celle-ci : la vitesse terminale et le temps caractéristique de mise en mouvement. Il nous semble important de rappeler au lecteur que ce chapitre ne préfigure pas l'utilisation d'un modèle particulière mais a simplement pour objectif de présenter la phénoménologie des écoulements car la compréhension de celle-ci est un préalable à l'interprétation de nos résultats.

1.1 Différents régimes d'écoulement

Le problème d'une bulle ascendante dans un milieu infini peut être décrit grâce à 8 quantités dimensionnelles : les masses volumiques ρ_l et ρ_g , les viscosités dynamiques, μ_l et μ_g , la gravité g , la tension de surface σ , et les variables de temps et d'espace. Ces quantités font apparaître 3 unités (kg,m,s). D'après le théorème de Vashy-Buchingham, 5 grandeurs adimensionnelles sont nécessaires pour décrire complètement le problème. Généralement sont choisies

$$\frac{\rho_l}{\rho_g}, \frac{\mu_l}{\mu_g}, T = \frac{t\mu_l}{\rho_l d_e^2} \quad (1.1)$$

où $d_e = \sqrt[3]{6V/\pi}$ (V est le volume de la bulle)
et deux nombres sans dimension parmi les 4 suivants

$$Morton = \frac{g\mu_l^4}{\rho_l \sigma^3}, \quad Eötvös = \frac{gd_e^2(\rho_l - \rho_g)}{\sigma} \quad (1.2)$$

ou

$$Reynolds_{bulle} = \frac{\rho_l d_e \|\mathbf{v}\|}{\mu_l}, \quad Weber = \frac{\rho_l \mathbf{v}^2 d_e}{\sigma} \quad (1.3)$$

où \mathbf{v} est la vitesse de la bulle par rapport à la phase continue. On rappelle ci-dessous la signification de ces nombres :

1. Une bulle peut être considérée comme une entité à part entière. Dans la suite de ce document nous parlerons indifféremment d'inclusion ou de bulle afin d'alléger notre propos. Il n'y a pas d'ambiguïté, ici, car nous ne nous traiterons pas d'autre type de inclusions.

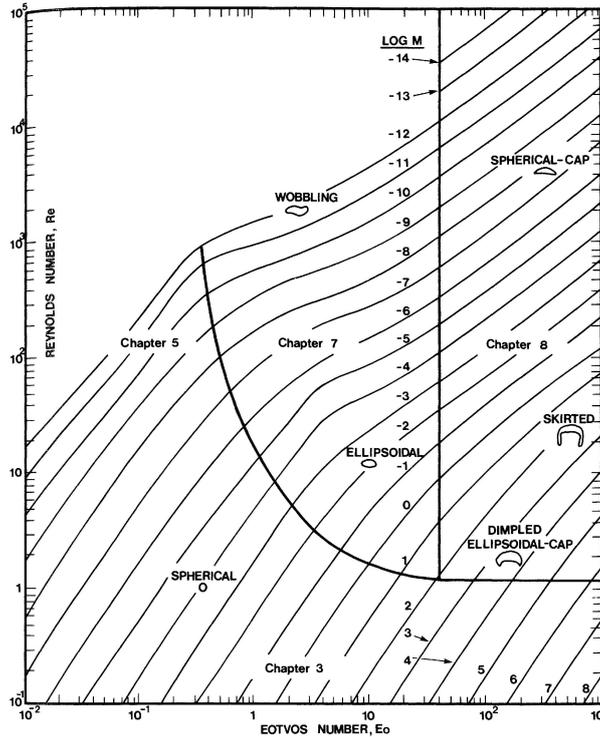


FIGURE 1.1 – Forme des bulles en mouvement au sein d'un liquide, Clift *et al.* [1]

- Le nombre de Morton (noté Mo) représente le rapport du produit des forces de viscosité à la puissance deux et des forces de gravité sur les forces de tension de surface à la puissance trois.
- Le nombre d'Eötvös (noté Eo) représente le rapport des forces de gravité sur les forces de tension superficielle.
- Le nombre de Weber (noté We) représente le rapport des forces d'inertie sur les forces de tension superficielle (il existe généralement une valeur de We appelée Weber critique au-delà de laquelle une bulle se fragmente).
- Le nombre de Reynolds de bulle (noté Re_b) représente le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité.

1.1.1 Carte de Clift, Grace et Weber

Suivant les conditions d'ascension d'une bulle dans un liquide au repos, l'interface prend des formes différentes décrites ci-dessous. Grâce aux nombres qui viennent d'être présentés, il est alors possible de prédire les formes prises par ces bulles en utilisant la carte d'écoulement présentée à la figure 1.1, issue de Clift *et al.* [1].

Forme sphérique : lorsque la valeur de Re_b est modérée, les effets d'inertie ne sont pas suffisamment importants pour déformer la bulle qui reste globalement sphérique à cause des forces de tension de surface. Ainsi, une bulle d'air en ascension dans de l'eau claire reste sphérique jusqu'à un diamètre de 1 mm ce qui correspond à une valeur du nombre de Reynolds d'environ 250 et à une vitesse terminale d'ascension de 15 cm.s^{-1} . Le nombre de Weber est alors de l'ordre de grandeur de l'unité ($We = 0,87$). Pour les faibles valeurs du nombre d'Eötvös, l'inclusion garde une forme sphérique même pour de très fortes valeurs du nombre de Reynolds de bulle. À

l'opposé, quand le nombre d'Eötvös est supérieur 10, la forme de la bulle n'est plus sphérique dès que la valeur du nombre de Reynolds dépasse l'unité.

Il existe plusieurs régimes d'écoulement pour une bulle de forme sphérique. Pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire et on observe le régime de Stokes dans lequel les effets d'inertie sont négligeables. À l'opposé, pour les fortes valeurs du nombre de Reynolds de bulle, les effets visqueux sont négligeables dans une grande partie de l'écoulement et sont limités à une zone proche de l'interface appelée couche limite. Il est intéressant de noter que pour une bulle non contaminée (en surfactant), l'écoulement n'est jamais décollé car le fluide a une vitesse non nulle à l'interface.

Forme ellipsoïdale : quand la valeur de Re_b augmente, les effets d'inertie ont tendance à induire une faible déformation symétrique de part et d'autre de la bulle. La bulle prend la forme d'un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe (aussi appelée forme oblate) qui est dirigé suivant la vitesse d'ascension. L'ascension rectiligne est encore observée dans ce régime.

Puis, de l'effet du détachement tourbillonnaire derrière une bulle ellipsoïdale résulte la modification très nette de sa trajectoire. La trajectoire se déstabilise par un mouvement plan sous forme de zigzag qui bifurque ensuite vers un mouvement hélicoïdal.

La forme des inclusions reste stationnaire et plusieurs auteurs ont montré que ce mouvement particulier est lié au sillage de la bulle. Ainsi Lune et Perkins [2], Brücker [3], Vries *et al.* [4], Ellingsen et Risso [5] ont réalisé des observations expérimentales du sillage de telles bulles. Mougin et Magnaudet [6], [7] ont également réalisé un travail basé sur un modèle numérique de bulle ellipsoïdale indéformable.

Ces études ont montré que le sillage est constitué de deux vortex contra-rotatifs alignés avec la trajectoire de la bulle. Quand l'inclusion suit un mouvement plan en forme de zigzag, ces deux vortex ne persistent pas au cours du temps mais s'interrompent à chaque "virage". Au contraire, dans le cas où la bulle présente un mouvement hélicoïdal, les deux vortex sont stables dans le temps.

Enfin, quand la valeur de Re_b est plus importante, les bulles gardent un mouvement en zigzag mais n'ont plus une forme stationnaire.

Forme de calotte sphérique : À partir d'un volume suffisamment important, une bulle en ascension dans un liquide au repos prend la forme d'une calotte sphérique. La partie frontale a la forme d'une calotte de sphère et l'arrière est presque plat. L'ascension de la bulle présente un mouvement sous forme rectiligne avec une vitesse constante, indépendante de sa taille.

1.2 Les différentes forces qui agissent sur une bulle

Dans cette section, nous allons lister les principales forces que subit une inclusion de gaz isolée. Celles-ci sont à l'origine du mouvement d'une bulle et permettent d'expliquer certains phénomènes physiques qui apparaissent dans une colonne à bulles.

Force de traînée : La force de traînée hydrodynamique est due aux frottements visqueux et s'oppose au mouvement relatif entre la bulle et la phase liquide. Elle s'écrit classiquement

$$\mathbf{F}_d = -C_D \rho_l \frac{\pi d_e^2}{8} |\mathbf{v}| \mathbf{v} \quad (1.4)$$

où C_D est un nombre sans dimension appelé coefficient de traînée. Ce dernier est donné par des corrélations qui dépendent du régime d'écoulement.

Force de masse ajoutée : Quand une bulle se déplace, elle entraîne avec elle une petite quantité de liquide, ce qui augmente virtuellement sa masse. Il en résulte une force, dite de masse ajoutée, qui s'oppose à l'accélération de la bulle. Cette force est d'autant plus grande que la différence de masse volumique est importante. Elle s'écrit

$$\mathbf{F}_m = C_M \rho_l \frac{\pi d_e^3}{6} \left(\frac{D\mathbf{U}}{Dt} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \quad (1.6)$$

où C_M est le coefficient de masse ajoutée qui ne dépend que de la forme de la bulle. \mathbf{U} et \mathbf{V} sont respectivement la vitesse du liquide et la vitesse de la bulle dans le repère d'étude. La valeur de C_M dépend uniquement de la forme de l'inclusion. Dans le cas particulier d'une bulle sphérique, on a $C_M \approx 0,5$.

Force de Tchen : Cette force est une contribution supplémentaire à la force de masse ajoutée. Elle représente la force que subirait un volume de fluide fictif de mêmes forme et volume que l'inclusion en l'absence de celle-ci. Elle s'écrit :

$$\mathbf{F}_{Tchen} = \rho_l \frac{\pi d_e^3}{6} \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \quad (1.7)$$

Force d'histoire (aussi appelée force de "Basset") : Elle est due aux effets instationnaires et traduit un retard entre la force visqueuse instantanée et celle qui serait exercée en régime établi. Dans le cas qui nous intéresse et pour des valeurs du nombre de Reynolds modérés, la force d'histoire est négligeable devant la force de traînée, ce qui n'est pas vrai pour une sphère solide ou une bulle de gaz très visqueuse. Pour une inclusion sphérique, elle s'écrit

$$\mathbf{F}_H(t) = 3\pi\mu_l d_e \int_0^t K(t-\tau) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \quad (1.8)$$

où $K(t-\tau)$ est appelé "noyau" et dépend de la nature de l'inclusion. Ainsi, pour une bulle sphérique et pour des valeurs du nombre de Reynold allant jusqu'à 300, le noyau est estimé par la formule suivante :

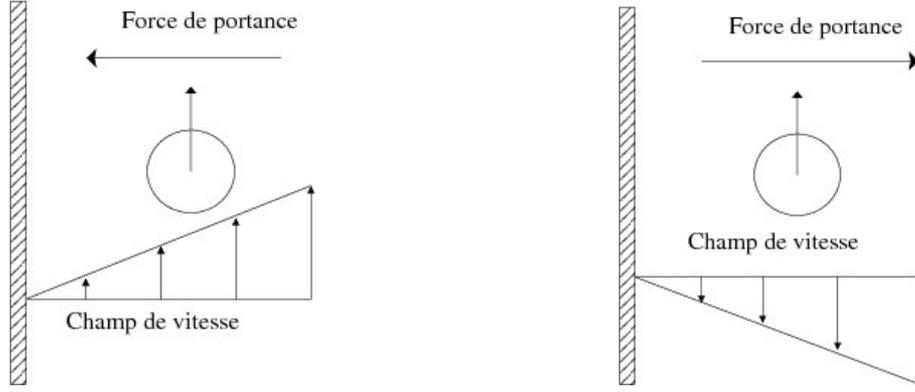
$$K(t-\tau) = \frac{4}{3} \exp \left[\frac{36\nu_f(t-\tau)}{d_e^2} \right] \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{36\nu_f(t-\tau)}{d_e^2}} \right] \quad (1.9)$$

La force d'histoire intègre l'ensemble des événements passés, elle est donc extrêmement difficile à estimer. Comme elle est assez faible dans les écoulements à bulles, elle est très souvent négligée.

Force de portance : Si une inclusion se déplace dans un fluide dont le champ de vitesse présente localement un gradient non nul, il apparaît alors un gradient de pression (et donc une force) opposé au gradient de vitesse².

Les figures 1.2.a-b illustrent ce phénomène, dans un cas laminaire, en écoulement ascendant et descendant respectivement. Dans la figure 1.2.a le gradient de vitesse est dans le sens de la normale à la paroi, la force de portance a donc tendance à ramener l'inclusion vers la paroi.

2. En effet, les champs de pression et de vitesse sont intimement couplés. Pour s'en convaincre simplement, il suffit d'écrire l'équation de Bernoulli pour un gaz parfait : sur une ligne de courant $P_l + \rho_l gz + \rho_l V^2/2 = cste$. On retrouve que si V augmente alors P diminue.



(a) Écoulement vertical ascendant

(b) Écoulement vertical descendant

FIGURE 1.2 – Illustration de la force de portance dans un cas laminaire

Au contraire, dans le cas de la figure 1.2.b le gradient de vitesse est dans le sens opposé à la normale, la force de portance a donc tendance à éjecter l'inclusion vers le cœur de l'écoulement. Elle s'écrit classiquement :

$$\mathbf{F}_L = C_L \rho_l \frac{\pi d_e^3}{6} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{U}) \quad (1.10)$$

Forces de gravité : Il existe deux forces qui résultent de la gravité : tout d'abord, le poids de l'inclusion, dirigé vers le bas. Ensuite, la force d'Archimède qui, au contraire, a tendance à pousser l'inclusion légère vers le haut. Ceci explique que dans le cas d'un écoulement ascendant, la vitesse verticale des bulles de gaz est plus élevée que celle de la phase continue. La résultante de ces deux forces s'écrit :

$$\mathbf{F}_g = \frac{\pi d_e^3}{6} (\rho_g - \rho_l) \mathbf{g} \quad (1.11)$$

1.3 Vitesse terminale

Par définition, la vitesse terminale (V_T) d'une bulle est la vitesse en régime établi de celle-ci en ascension sous l'effet de la gravité dans un fluide au repos. En régime permanent, les forces de gravité et de traînée visqueuse sont en équilibre, les autres forces s'annulent. On peut considérer une bulle comme une masse ponctuelle subissant un ensemble de forces (listé ci-dessus) dans un référentiel galiléen. On peut alors utiliser le principe fondamental de la dynamique pour en déduire une équation du mouvement de cette bulle. En régime stationnaire, on obtient dans la direction verticale :

$$\rho_l C_D \pi \frac{d_e^2}{8} V_T^2 + \pi \frac{d_e^3}{6} (\rho_g - \rho_l) g = 0 \quad (1.12)$$

$$\text{soit } V_T = \sqrt{\frac{4(\rho_l - \rho_g) g d_e}{3 \rho_l C_D}} \quad (1.13)$$

La notion de vitesse terminale d'une bulle est un concept qui fait référence à une situation stationnaire. Nous allons maintenant nous intéresser à une notion qui nous renseigne sur une caractéristique dynamique de l'inclusion dans cette situation.

1.4 Temps caractéristique de mise en mouvement

On considère, dans cette section, le mouvement d'une bulle sphérique sans vitesse initiale dans un liquide au repos. Celle-ci est soumise aux forces de traînée et de gravité (on néglige, ici, les forces de masse ajoutée, de Tchen et d'histoire). On suppose que la valeur du nombre de Reynolds de bulle est petite, de sorte que le coefficient de traînée vérifie la loi de Stokes. La force de traînée s'écrit alors (Hadamard [8] et Rybczynski [9]) :

$$\mathbf{F}_D = -2\mu_l d_e \mathbf{V} \quad (1.14)$$

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation du mouvement :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mu_l \frac{12}{d_e^2 \rho_l} \mathbf{V} - \mathbf{g} \quad (1.15)$$

Cette dernière s'intègre facilement avec une condition initiale $\mathbf{V} = 0$:

$$\mathbf{V}(t) = -\mathbf{g}\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad (1.16)$$

$$\text{avec, } \tau = \frac{d_e^2 \rho_l}{12 \mu_l} \quad (1.17)$$

Cette solution fait apparaître un temps caractéristique τ . C'est le temps au bout duquel l'inclusion a une vitesse du même ordre de grandeur que la vitesse terminale. Il peut aussi être vu comme le temps de réponse de la bulle lors d'un changement de vitesse de la phase liquide. De façon pratique, pour $t = 3\tau$, on a, $\mathbf{V} = 0,95\mathbf{V}_T$. Ce temps de mise en mouvement nous renseigne donc sur le temps (et implicitement la distance) nécessaire pour que la vitesse d'une inclusion soit indépendante de la condition initiale.

Celui-ci permettra dans nos simulations de distinguer la zone dans laquelle les bulles accélèrent de celle où les inclusions ont une vitesse stationnaire en moyenne.

1.5 Problème de définition de la vitesse des interfaces

Une interface entre deux fluides est une surface qui peut se déplacer et se déformer au cours du temps. En règle générale, cette dernière n'est pas matérielle puisqu'il n'est pas possible d'associer une particule fluide et un point de l'interface. En effet, en l'absence de surfactant et sans changement de phase, les molécules de fluide se déplacent, en général, le long de l'interface.

La position de l'interface à un instant t est donnée par une équation de la forme $F(\mathbf{x}, t) = 0$. Celle-ci obéit à une relation du type

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla F = 0 \quad (1.18)$$

où \mathbf{V} est la vitesse de l'interface. Comme le gradient de la fonction F est normal à la surface, l'équation précédente peut être réécrite sous la forme

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.19)$$

$$\text{où } \mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (1.20)$$

Il apparaît donc que la composante normale de la vitesse est définie de façon unique, ce qui n'est pas le cas des composantes tangentielles. Il existe donc une infinité de choix possibles en

ce qui concerne la vitesse d'une interface. La seule contrainte étant de vérifier la relation 1.19. Nous reviendrons sur ce point et nous proposerons deux choix particuliers pour les composantes tangentielles.

1.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes configurations d'écoulements (forme) d'une bulle isolée en ascension dans un milieu infini peut adopter. Nous avons constaté que ces inclusions pouvaient adopter une grande variété de formes. De plus, leur trajectoire n'est pas nécessairement verticale ; elle peut prendre, par exemple, une forme tridimensionnelle périodique (hélicoïdale par exemple). Nous avons ensuite détaillé les forces que ces bulles subissaient au sein d'un écoulement réel. Ces forces nous permettront d'expliquer certains phénomènes (principalement en ce qui concerne la répartition du taux de vide) qui interviennent dans un écoulement dispersé vertical. Nous avons pu aussi exhiber deux grandeurs caractéristiques du déplacement de ces inclusions que sont la vitesse terminale et le temps caractéristique de mise en mouvement. Ceux-ci nous permettront, dans la suite de ce travail, de choisir nos configurations d'écoulement. Néanmoins comme l'écoulement de N bulles est très différent de la superposition de N fois l'écoulement d'une bulle, nous allons dans le prochain chapitre nous intéresser à la dynamique des écoulements verticaux et en particulier des écoulements à bulles.

Chapitre 2

Écoulements verticaux

Ce chapitre a pour objet de présenter la phénoménologie des écoulements diphasiques verticaux. Nous allons commencer par exposer les principales configurations d'écoulement que l'on peut observer ainsi que les méthodes classiques pour la prédiction de l'occurrence de celles-ci. En s'appuyant sur le chapitre précédent, nous discuterons de la répartition radiale de bulles (et donc du taux de vide) dans les écoulements dispersés verticaux et des phénomènes collectifs qui peuvent apparaître. Enfin, nous présenterons quelques éléments découlant de la présence de particules sur le champ de vitesse de la phase continue (notion de pseudo-turbulence).

2.1 Configurations d'écoulement

La propriété la plus importante d'un écoulement diphasique est sa configuration, c'est-à-dire les caractéristiques géométriques des interfaces séparant gaz et liquide. Celle-ci est déterminée par les conditions aux limites imposées et la géométrie du système.

On distingue trois configurations élémentaires :

- configuration dispersée : la phase dispersée forme de petites inclusions (bulles si c'est du gaz, gouttes si c'est du liquide) dans l'autre phase, appelée phase continue,
- configuration séparée (ou stratifiée) : les deux phases n'ont globalement qu'une seule interface commune ; dans une conduite, on distingue le cas où les deux phases sont en contact avec la paroi (stratifiée) ou seulement l'une (annulaire),
- configuration intermittente (à bouchons, à poches) : les phases se succèdent alternativement dans une section de l'écoulement ; ce type n'existe que dans les conduites ou les colonnes.

La figure 2.1 représente les différentes structures d'écoulement précédemment citées. La première configuration (indiquée a) correspond à des écoulements à bulles, la suivante (indiquée b) se rapporte à des écoulements à poches et la dernière (indiquée c) équivaut à un écoulement annulaire.

Nb : Dans le cadre de cette étude, nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement dispersé à bulles, ce qui correspond à notée à la configuration "(a)" figure 2.1.

2.1.1 Prédiction de la configuration d'écoulement

La prédiction du régime d'écoulement est cruciale pour modéliser efficacement les écoulements diphasiques. En effet, un écoulement à phases séparées n'est pas du tout modélisé de la même façon qu'un écoulement intermittent. Une démarche sensée consiste donc à déterminer la configuration d'écoulement puis à sélectionner le modèle adapté à celle-ci.

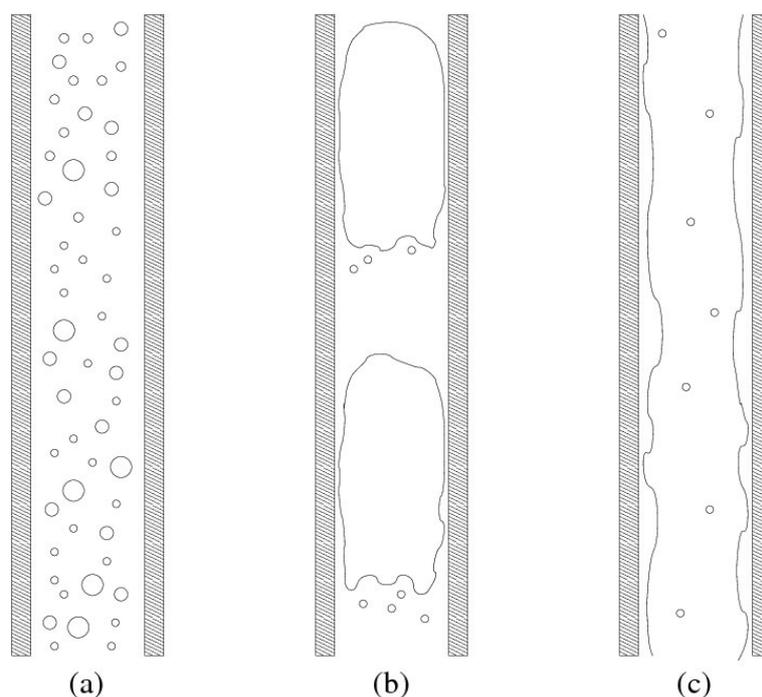


FIGURE 2.1 – Les différentes configurations élémentaires d'écoulement dans une colonne. (a) configuration dispersée, (b) intermittente, (c) séparée (annulaire)

La prévision de la configuration d'écoulement repose le plus souvent sur une représentation graphique bidimensionnelle appelée carte d'écoulement. Malheureusement, le choix du système de coordonnées est très difficile car il n'y a pas de raison pour que deux transitions soient complètement décrites dans le même système de coordonnées. Ainsi, les coordonnées utilisées varient selon les auteurs.

Certaines de ces cartes sont issues d'une approche empirique et ne pourront donc être utilisées que dans les conditions pour lesquelles elles ont été établies. D'autres, au contraire, résultent d'une analyse des mécanismes de transition et peuvent donc être utilisées de façon plus générale.

Écoulements cocourants ascendants

D'après Delhaye [10], pour les écoulements cocourants ascendants eau-air et eau-vapeur, la carte très utilisée est celle de Hewitt et Roberts [11] représentée à la figure 2.2. Elle est de nature empirique et a été originellement établie pour des écoulements eau-air dans une conduite de 31,2 mm et pour des pressions comprises entre 1.4 et 5.4 bar. Bennet *et al.* [12] ont étudié un écoulement eau-vapeur dans une conduite de diamètre 12,7 mm et pour des pressions comprises entre 34.5 et 69 bar. Leurs résultats sont bien représentés par la carte de Hewitt et Roberts.

Taitel *et al.* [13] ont réalisé une étude théorique des différentes transitions et ont proposé la méthodologie suivante. Même si les auteurs ont proposé une analyse basée sur un diagramme, nous présentons ici les équations correspondant aux différents critères de transition.

Il faut commencer par calculer les grandeurs définies aux équations 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, et qui correspondent aux différentes transitions.

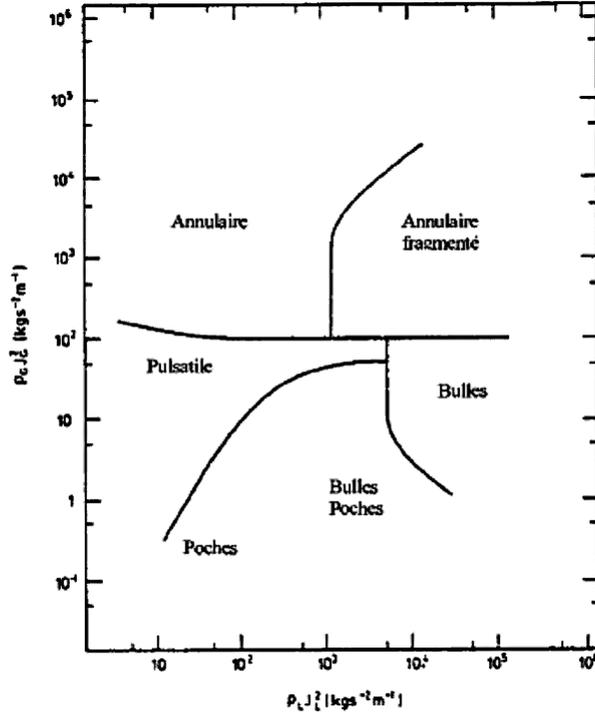


FIGURE 2.2 – Carte de Hewitt et Roberts

$$D_c \triangleq 19 \left(\frac{\sigma (\rho_l - \rho_g)}{g \rho_l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

$$J_{gA} \triangleq \frac{1}{3} J_l + \frac{1.15}{3} \left(\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.2)$$

$$J_{lB} \triangleq 4 \frac{D^{0.429} (\sigma / \rho_l)^{0.089}}{\nu_l^{0.072}} \left(\frac{g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l} \right)^{0.446} - J_g \quad (2.3)$$

$$J_{gE} \triangleq 3.1 \left(\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.4)$$

$$J_{lC} \triangleq 0.92 J_g \quad (2.5)$$

$$L_E \triangleq 40.6 D \left(0.22 + \frac{J_g + J_l}{\sqrt{g D}} \right) \quad (2.6)$$

Le choix de la configuration d'écoulement est ensuite réalisé à partir du tableau 2.1. Il est important de noter que les définitions topologiques des écoulements sont souvent propres aux auteurs.

2.2 Cas des écoulements à bulles

2.2.1 Répartition du taux de vide dans une colonne

En écoulement vertical à bulles, on distingue généralement deux zones caractéristiques :

- une fine couche pariétale,
- un cœur hétérogène

2.2. CAS DES ÉCOULEMENTS À BULLES

$J_g < J_{gA}$ et $J_l < J_{lB}$	
$D > D_c$ Écoulement à bulles :	$D < D_c$ Écoulement à poches :
Correspond à un écoulement où les petites bulles montent dans un mouvement zigzagant et où des bulles un peu plus grosses à calottes sphériques apparaissent de temps en temps.	Si le diamètre de la conduite est trop petit, l'écoulement à bulles ne peut être observé car les petites bulles rattrapent les plus grosses pour former des bulles de Taylor. Cela donne alors un écoulement à poches.
$J_g > J_{gE}$ Écoulement annulaire dispersé :	
Dans ce régime, l'écoulement comporte un film liquide en paroi qui présente des vagues de forte amplitude. Des gouttes de liquide sont arrachées et entraînées dans le cœur gazeux. Ce régime ne peut exister que si la vitesse du gaz dans le cœur de l'écoulement est suffisante pour sustenter les gouttelettes dont la taille résulte d'un équilibre entre l'énergie cinétique du gaz et leur énergie de surface.	
$J_g < J_{gE}$ et $J_l > \max(J_{lB}, J_{lC})$ Écoulement à bulles finement dispersées :	
Ce régime apparaît quand la turbulence disperse la phase gazeuse et que la taille des bulles est suffisamment faible pour éviter leur déformation et leur coalescence. Il n'existe alors plus de grosses bulles à calotte sphérique.	
$J_{gA} < J_g < J_{gE}$ et $J_l < \max(J_{lB}, J_{lC})$	
$Z_{obs} < L_E$ Écoulement pulsatile :	$Z_{obs} > L_E$ Écoulement à poches et à bouchons :
Cette configuration d'écoulement est considérée comme un phénomène d'entrée et qui se transforme en écoulement à poches au-delà d'une certaine cote.	Dans ce régime d'écoulement, de grandes bulles se succèdent dans la conduite et sont séparées par des bouchons de liquide.

TABLE 2.1 – Détermination de la configuration d'écoulement dans une conduite verticale par la méthode de Taitel *et al.* [13]

En régime laminaire et pour des bulles peu déformables, la formation de ces deux régions est due au mouvement latéral des bulles induit par la force de portance décrite dans la section 1.2 et illustrée par les figures 1.2.a-b. Ainsi, en écoulement ascendant, une bulle située près de la paroi est poussée vers celle-ci (dans la littérature anglophone, ce phénomène est appelé "wall peaking") alors qu'elle en est chassée en écoulement descendant ("core peaking").

Pour que l'écoulement ait lieu, il faut que le gradient de pression imposé compense le poids du mélange bulles/liquide et la contrainte de frottement due au gradient de vitesse. Tryggvason *et al.* [14] ont tiré partie de cela pour expliquer leurs observations.

Ainsi, pour un écoulement ascendant, comme les bulles sont chassées du cœur, la masse volumique moyenne de celui-ci augmente jusqu'à ce que le poids équilibre le gradient de pression. Le gradient de vitesse s'annule et la migration des bulles vers la paroi est stoppée. En écoulement descendant, au contraire, la masse volumique moyenne du cœur diminue jusqu'à ce que le poids du mélange équilibre le gradient de pression, si bien qu'il n'y a plus de cisaillement hors de la zone pariétale. De cette manière, le cœur est à l'équilibre hydrostatique et le gradient de vitesse est non nul uniquement dans la couche pariétale. Le profil de vitesse est donc quasiment plat dans la partie centrale de l'écoulement alors qu'il existe un cisaillement non nul dans la zone pariétale.

À l'opposé, dans l'écoulement ascendant, la masse du mélange bulles/liquide augmente dans le noyau central quand les bulles se dirigent vers la paroi. Le mélange riche en bulles dans la couche pariétale est conduit vers le haut par le gradient de pression imposé et la force d'Archimède. Pour l'écoulement descendant, les bulles doivent s'éloigner de la paroi pour réduire le poids du mélange dans le cœur. Ainsi, la zone pariétale est conduite vers le bas du fait de l'augmentation de son poids et du gradient de pression imposé.

Cette distribution est stable car il existe une contre-réaction aux effets qui viennent d'être décrits. En effet, pour l'écoulement ascendant, s'il y a un excès de bulles à la paroi, le mélange devient suffisamment lourd pour que le poids vainque le gradient de pression imposé et que l'écoulement change de direction. Le gradient de vitesse étant maintenant inversé par rapport à la situation initiale, la force de portance change alors de direction et les bulles retournent au cœur de l'écoulement réduisant ainsi le poids du mélange. De même, pour l'écoulement descendant, s'il y a un excès de bulles dans le cœur, il y a une inversion du sens de l'écoulement qui provoque le retour des bulles vers la paroi.

Ces mécanismes ont été vérifiés par une l'étude numérique de Tryggvason *et al.* [14] en canal bi-périodique pour une distribution monodisperse de bulles peu déformables. Song *et al.* [15] ont réalisé l'étude numérique d'un écoulement d'huile et d'air en régime laminaire avec des valeurs du nombre de Reynolds de conduite variant de 80 à 240 et des valeurs de 2 à 40 pour le nombre de Reynolds de bulle. Les auteurs se sont intéressés à des bulles dont le diamètre est compris entre 2 et 4 mm et des distributions de taille d'inclusions monodisperse et bidisperse. Dans cette expérience numérique, deux bulles ne peuvent se rapprocher suffisamment pour entrer en collision et coalescer car un surfactant ajouté au liquide retarde fortement la coalescence et permet, dans, certains cas, aux bulles de rebondir les unes sur les autres. De plus, contrairement à des bulles s'élevant dans l'eau, l'écoulement dans un liquide visqueux autour des particules présente une couche limite très épaisse et le sillage des bulles est très court, ce qui empêche deux bulles de s'approcher.

- Cas d'une distribution de taille de bulles monodisperse : Le profil du taux de vide dépend principalement de la taille des bulles et de la vitesse du liquide. Le pic du profil se déplace vers la paroi lorsque la taille des bulles diminue et que la vitesse du liquide augmente¹. De

1. Ceci est conforme avec les observations de Tryggvason *et al.* [14]. Néanmoins, quand le diamètre augmente, les résultats sont complètement différents puisque le pic se déplace vers le centre de la conduite car les bulles ne sont plus indéformables et que le coefficient de portance change de signe. Pour des bulles de plus gros diamètres

plus, le pic de taux de vide est plus grand et plus étroit si la vitesse de la phase liquide est grande et le taux de vide moyen est faible. À l'inverse, pour une faible vitesse du liquide et un écoulement à plus fort taux de vide (environ 2%), le profil du taux de vide présente un pic plus large et plus faible.

- Cas d'une distribution de taille de bulles bidisperse : La distribution des phases dépend beaucoup de la taille des bulles. On distingue deux groupes de bulles selon leur taille : les grosses bulles de diamètre supérieur à 3 mm et les petites bulles de diamètre inférieur ou égal à 3 mm. Pour les grosses bulles, le pic de taux de vide est près du centre de la conduite. Pour les petites bulles, le pic est près des parois mais il est plus large et plus bas en comparaison au cas uniforme (dans les mêmes conditions).

En ce qui concerne les écoulements turbulents, Tryggvason *et al.* [14] ont montré que leur analyse simplifiée reste valable dans le cas d'un écoulement à bulles peu déformables car la répartition du taux de vide est identique au cas laminaire. Néanmoins, dans le cas de bulles très déformables pour un écoulement ascendant, les tendances sont complètement opposées car le signe de la force de portance s'inverse et les bulles ont une propension à rester au cœur de l'écoulement.

2.2.2 Effets inter-bulles

L'écoulement dans une colonne à N bulles ne se réduit pas à N fois l'écoulement d'une bulle car les particules s'influencent les unes les autres (sauf si le taux de vide est suffisamment faible). Ces effets sont dus, en partie, à des interactions à distance au travers de la phase continue. Ainsi, une particule qui se déplace dans un fluide va modifier les champs de pression et de vitesse autour d'elle. Si une autre particule est suffisamment proche, elle est soumise à ces champs modifiés. Un exemple classique d'interaction à distance est celui d'une bulle aspirée par le sillage d'une autre, un peu comme une Formule 1 qui profite de la dépression créée par celle qui la précède pour la doubler.

Ainsi, Wylie et Kock [16] définissent une grappe de particules comme étant un ensemble de particules dont chaque membre est à une distance inférieure à l_c d'au moins un de ses voisins. En considérant que les particules peuvent interagir à distance *via* leur sillage, Uhlmann [17] a étendu la définition précédente aux cas anisotropes comme suit : deux particules i et j appartiennent à une grappe si les positions de leur centre de gravité obéissent à l'équation suivante

$$\frac{(x_c^i - x_c^j)^2}{l_{cx}^2} + \frac{(y_c^i - y_c^j)^2}{l_{cy}^2} + \frac{(z_c^i - z_c^j)^2}{l_{cz}^2} \leq 1 \quad (2.7)$$

où les l_{ci} sont des dimensions caractéristiques des grappes dans chacune des directions de l'espace. Uhlmann [17] a réalisé une étude numérique basée sur une approche particulière sur une configuration de type canal vertical bi-périodique. En comparant les résultats de sa méthode de détection de grappes basée sur l'équation 2.7 appliquée à cette simulation et à une répartition aléatoire de particules, Uhlmann conclut qu'il n'a pas trouvé de preuve significative de la présence de grappes dans la phase dispersée. Cela s'explique sûrement par le fait que le taux de vide est très faible, de l'ordre de 0.4%.

Pour qualifier la structure de la distribution des inclusions, Esmaeeli et Tryggvason [18], [19] proposent d'utiliser la fonction de distribution de paires $g(\mathbf{r})$, définies comme la probabilité qu'il existe un couple de bulles distantes de \mathbf{r} . Comme $g(\mathbf{r})$ est une fonction multidimensionnelle, pour faciliter l'interprétation des résultats, il est nécessaire de ne s'intéresser qu'aux variations

(supérieurs à 3, 5 mm dans la configuration de Song *et al.* [15]) le pic s'est tellement éloigné de la paroi qu'il est au centre de la conduite.

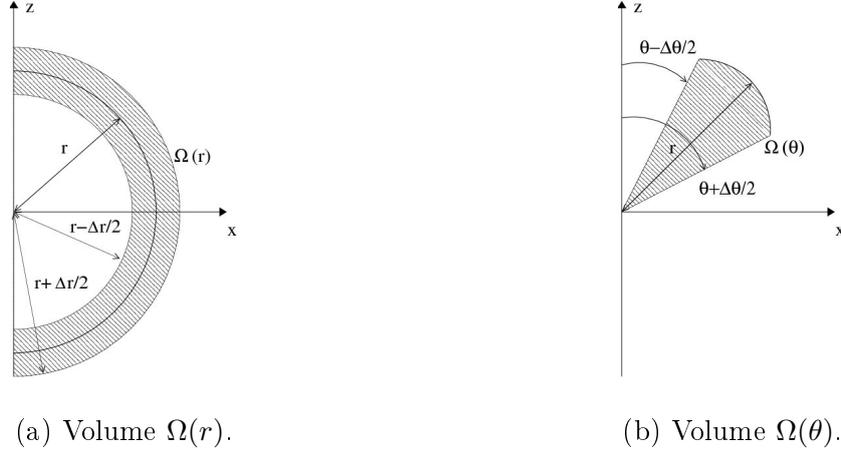


FIGURE 2.3 – Illustration des esquisses de $\Omega(r)$ et $\Omega(\theta)$. Les volumes sont obtenus par symétrie de révolution autour de l'axe vertical

de la fonction de distribution de paires dans une direction de l'espace. Pour cela, les auteurs proposent de se placer en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Ici, r est la distance radiale, θ est l'angle entre \mathbf{r} et l'axe vertical et ϕ est l'angle polaire mesuré à partir de l'axe x dans le sens inverse d'une aiguille d'une montre. En exploitant la périodicité de leur domaine, les auteurs ont négligé l'influence de ϕ . Ils définissent alors deux fonctions : la fonction radiale de distribution de paires $g(r)$ et la fonction angulaire de distribution de paires $g_r(\theta)$ définies respectivement aux équations 2.8 et 2.11.

$$g(r) = \frac{\Omega_0}{N_b(N_b - 1)} \left\langle \sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_b} \frac{\delta(r - r_{ij})}{\Omega(r)} \right\rangle \quad (2.8)$$

où

$$\Omega(r) = \frac{4\pi}{3} [(r + \Delta r/2)^3 - (r - \Delta r/2)^3] \quad (2.9)$$

$$\delta(r - r_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{si } r - \Delta r/2 \leq r_{ij} \leq r + \Delta r/2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Ω_0 est le volume total du domaine d'études. L'espace est discrétisé en portions en forme de coques sphériques d'épaisseur Δr et de volume $\Omega(r)$. Ce volume est schématisé à la figure 2.3.a. Le symbole $\langle \cdot \rangle$ indique une moyenne temporelle.

$$g_r(\theta) = \frac{\Omega_0}{N_b(N_b - 1)} \left\langle \sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_b} \frac{\delta(\theta - \theta_{ij})}{\Omega(\theta)} \right\rangle \quad (2.11)$$

où

$$\Omega(\theta) = \frac{2}{3} \pi r^3 [\cos(\theta + \Delta\theta/2) - \cos(\theta - \Delta\theta/2)] \quad (2.12)$$

Soit encore

$$\Omega(\theta) = \frac{4}{3} \pi r^3 \sin(\theta) \sin(\Delta\theta/2) \quad (2.13)$$

$$\delta(\theta - \theta_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{si } r_{ij} < r \text{ et } \theta - \Delta\theta/2 \leq \theta_{ij} \leq \theta + \Delta\theta/2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.14)$$

L'espace est ici discrétisé en portions en forme de coques coniques d'axe vertical et de sommet situé au centre de gravité de la bulle-test (indice i dans l'équation 2.11), d'épaisseur $\Delta\theta$ et de

volume $\Omega(\theta)$. Ce volume est schématisé à la figure 2.3.b. Comme les bulles ont un volume fini, la fonction $g_r(\theta)$ est petite quand r est petit et augmente avec r . Pour faciliter l'exploitation des résultats, $g_r(\theta)$ est ensuite normalisée par

$$\frac{\int_0^\pi g_r(\theta) d\Omega}{\int_0^\pi d\Omega} \quad (2.15)$$

Pour une distribution aléatoire de bulles, les fonctions $g(r)$ et $g_r(\theta)$ ont une valeur de 1. Ainsi, une valeur de $g(r)$ supérieure à l'unité (respectivement inférieure) indique une tendance (respectivement une répulsion) pour deux bulles d'être séparées d'une distance r . De même, une valeur de $g_r(\theta)$ supérieure à l'unité (respectivement inférieure) indique une tendance (respectivement une répulsion) pour deux bulles d'être alignées dans la direction θ .

Les auteurs ont ainsi montré que, dans leurs simulations pour lesquelles les bulles sont quasi sphériques, les inclusions ont tendance à former des amas² perpendiculaires au sens de l'écoulement et que leur formation dépend fortement du nombre de Morton. Ainsi, plus la valeur du nombre de Morton est faible plus les bulles ont tendance à former des amas. À l'inverse, pour les plus grandes valeurs du nombre de Morton, il n'y a plus formation d'amas. Dans le cas de bulles déformables, elles ont tendance à s'aligner dans la direction de l'écoulement.

Song *et al.* [15] ont observé que pour les plus fortes vitesses de liquide et les plus petits diamètres, les bulles tendent à s'aligner et à former des grappes (sous forme de trains³ de bulles) du fait de l'entraînement dans leur sillage. Dans ce cas, la plupart des bulles se regroupent sur un anneau près de la paroi du fait de l'influence de la force de portance induite par un fort gradient de vitesse. Ceci entraîne un pic intense et aigu du taux de vide en proche paroi. Quand le taux de vide augmente (à partir de 2% environ), le pic est plus large et moins intense car l'interaction entre les bulles modifie le champ de pression dû au liquide s'écoulant autour de la bulle (sillage). Les pressions les plus élevées dans les régions avec un fort taux de vide local vont pousser les bulles vers les régions avec de plus faibles taux de vide locaux.

Pour les plus faibles vitesses, l'écoulement présente un pic plus large et moins intense. De ce fait, les bulles peuvent se déplacer à différents rayons dans la conduite. Comme les bulles près du centre se déplacent plus vite que celles près de la paroi, les bulles les plus rapides dépassent continuellement les bulles plus lentes. Ce mouvement relatif de bulles perturbe l'écoulement et tend à détruire les amas.

Pour des écoulements de bulles de taille différente, les interactions entre les bulles sont encore plus fortes car les petites et les grosses bulles ont des distributions totalement différentes (le profil de taux de vide présente deux pics) ce qui rend les grappes de bulles instables. Cependant, des grappes de 3 à 5 bulles subsistent près des parois particulièrement pour les plus grandes vitesses de l'écoulement de bulles de tailles différentes.

Pour les petites bulles de l'écoulement, le pic est près des parois mais il est plus large et moins intense en comparaison du cas uniforme dans les mêmes conditions. Les interactions entre grosses et petites inclusions provoqueraient une "diffusion" de celles-ci à cause d'une modification du champ de pression analogue à celle évoquée précédemment. Une autre raison possible serait que les grosses bulles perturbent la distribution de vitesse et créent des fluctuations plus importantes. Celles-ci entraînent alors une diffusion de toutes les bulles, tendant à réduire l'effet des forces latérales sur les bulles.

2. Un amas ou grappe de bulles est un groupe de bulles très proches qui interagissent les unes avec les autres.

3. Un train de bulles est un ensemble de bulles qui interagissent entre elles par leur sillage. Elles se suivent l'une derrière l'autre sur le long d'une trajectoire commune.

2.2.3 Pseudo-turbulence

Dans les écoulements dispersés industriels, la phase continue est souvent turbulente. Deux causes peuvent être à l'origine des fluctuations de vitesse :

- la turbulence "classique" (elle existe aussi dans les écoulements monophasiques), qui est due au cisaillement présent dans l'écoulement,
- les fluctuations causées par le mouvement des bulles⁴. Cette agitation est classiquement appelée pseudo-turbulence : *turbulence* parce qu'elle présente des fluctuations aléatoires avec un spectre continu, *pseudo* car le caractère aléatoire est plus lié à la distribution des bulles dans l'espace qu'à la production de turbulence par le mouvement individuel de chaque bulle.

Il est bien connu que la turbulence classique présente une signature dans l'espace spectral⁵ sous la forme d'une dépendance du spectre d'énergie cinétique en puissance $-5/3$ du nombre d'onde k . De même, pour la pseudo-turbulence plusieurs auteurs ont montré qu'il existe une signature typique sous la forme d'une dépendance en puissance $-8/3$ ou -3 du nombre d'onde k .

Riboux [20] s'est récemment intéressé à l'hydrodynamique d'un essaim⁶ de bulles en ascension dans un liquide stagnant pour des valeurs du nombre de Reynolds de bulles comprises entre 500 et 800 et des taux de vide allant de 0,5 à 10%. Dans un écoulement industriel, il y a souvent cohabitation de la turbulence classique et de la pseudo-turbulence. Il est donc très difficile d'exhiber les effets de la pseudo-turbulence. Le fait de se placer dans un liquide stagnant permet à l'auteur de ne s'intéresser qu'aux fluctuations de vitesse dues au passage des bulles. De plus, dans un écoulement diphasique dispersé, il est difficile de réaliser des mesures du champ de vitesse et d'en déduire un spectre car la phase dispersée gêne la mesure. Le champ de vitesse de la phase liquide n'est pas continu, il existe des "trous" qu'il faut combler. Les auteurs utilisent plusieurs méthodes pour reconstruire un champ continu mais celles-ci ont un impact sur le résultat final. L'intérêt majeur du travail de Riboux [20] réside dans le fait qu'il a su s'affranchir de ces problèmes en s'intéressant à l'écoulement juste derrière l'essaim de bulles.

Riboux [20] a ainsi trouvé une signature de la pseudo-turbulence en k^{-3} aux grandes échelles. L'échelle intégrale à partir de laquelle le comportement précédant est observé est estimée en égalant la puissance fournie par le travail de la force de flottabilité et l'expression classique de la dissipation⁷ u^3/Λ . Cela donne $\Lambda \sim \frac{V_T^2}{g} \sim \frac{d_e}{C_D}$, où C_D est le coefficient de frottement de la bulle isolée.

L'auteur a aussi montré qu'en normalisant la densité de puissance par la variance des fluctuations, et en traçant les spectres en fonctions de $k \frac{d_e}{C_D}$, les courbes sont identiques pour l'ensemble des diamètres et des taux de vide considérés. Ces résultats se superposent à ceux de Lance et Bataille [21] qui ont étudié un écoulement dispersé turbulent avec des bulles de 5 mm de diamètre et à ceux de Larue de Tournemine [22], qui a également étudié un écoulement turbulent mais avec des bulles de diamètre 2 mm.

Contrairement à Lance et Bataille [21] et Larue de Tournemine [22], Riboux [20] a observé un comportement en $k^{-5/3}$ aux plus petites échelles (la loi en k^{-3} prenant fin pour une échelle un peu plus petite que le diamètre des bulles). Riboux [20] explique cette différence de comportement par la présence de turbulence classique dans les écoulements étudiés par ces auteurs.

4. Ces fluctuations de vitesse apparaissent à cause du passage des bulles et cela même si l'écoulement monophasique équivalent n'est pas turbulent.

5. Cette dépendance est observée dans le cas d'une turbulence homogène isotrope.

6. Un essaim est un groupe isolé de bulles. Certaines d'entre elles peuvent être en interaction.

7. L'auteur suggère ici que le "moteur" (la production d'énergie) de la pseudo-turbulence est la force de flottabilité.

2.3 Conclusions

Ce deuxième chapitre termine la première partie de ce mémoire. Nous y avons présenté les phénomènes physiques principaux qui nous semblent pertinents afin de comprendre les écoulements diphasiques et en particulier les écoulements verticaux à bulles. Dans le premier chapitre, nous nous sommes focalisés sur une bulle. Dans le second, nous avons commencé par introduire de façon générale les écoulements verticaux puis nous avons concentré notre attention sur les écoulements à bulles. Nous avons expliqué comment les interactions entre les bulles pouvaient influencer l'écoulement, en termes de répartition du taux de vide et de vitesse des phases. Nous nous sommes aussi intéressés aux effets de la phase dispersée sur la turbulence.

Cette phénoménologie nous permettra de justifier nos choix en termes de propriétés physiques et de configuration d'écoulement. Elle nous servira aussi à exploiter et expliquer nos résultats. Dans la prochaine partie, nous allons présenter les différents outils physiques et numériques qui nous ont permis d'étudier les écoulements diphasiques.

Deuxième partie

Modélisation physique et outils
numériques

Chapitre 3

Présentation des deux formalismes pour décrire un écoulement diphasique

LES écoulements monophasiques sont régis par les équations de Navier-Stokes. Celles-ci ne peuvent être utilisées en l'état dans notre travail car nous souhaitons étudier des écoulements qui ne sont plus monophasiques mais diphasiques. Dans ce chapitre, nous exposons les deux méthodologies classiques qui permettent de construire un système d'équations adapté à de tels écoulements. Ces deux méthodologies ne sont pas équivalentes entre elles, car la première conduit à un système d'équations et un jeu d'inconnues par phase, alors que la seconde conduit seulement à un seul système d'équations et un seul jeu d'inconnues. Il nous semble important de faire remarquer que, du fait de la remarque précédente, le choix de l'une ou de l'autre méthodologie n'est pas innocent et qu'il préfigure le type de modélisation qui est utilisé.

Nous allons commencer par écrire les équations d'un point de vue général, puis nous les spécifierons grâce aux hypothèses que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire :

- incompressibilité de chaque phase,
- propriétés physiques ρ et μ constantes dans chaque phase,
- isotherme,
- tension de surface constante,
- pas de changement de phase.

3.1 Modélisation physique des interfaces

Une interface liquide-gaz (ou liquide-vapeur) correspond, à l'échelle moléculaire, à une zone de transition où les propriétés physiques passent progressivement d'une valeur moyenne dans le liquide à une valeur moyenne dans le gaz (ou la vapeur). L'échelle de cette zone de transition est de l'ordre de quelques libres parcours moyens des molécules. Ceci signifie qu'elle est de l'ordre de un à quelques diamètres moléculaires pour une interface liquide-vapeur loin du point critique, et ne peut atteindre des dimensions macroscopiques que lorsque l'on s'en rapproche.

Classiquement, les interfaces sont modélisées par des surfaces de discontinuité des grandeurs physiques. En supposant que les propriétés physiques de chaque phase sont constantes loin de la zone interfaciale, cette description discontinue revient à prolonger ces valeurs constantes jusqu'à la surface de discontinuité. Il est néanmoins possible d'écrire un système d'équations qui décrit un milieu diphasique en tenant compte, rigoureusement d'un point de vue thermodynamique, de cette variation continue des grandeurs physiques. Pour les interfaces liquide-vapeur, la méthode du second gradient utilise une telle description [23]. Dans le cas de fluides non miscibles, l'équation dite de Cahn-Hilliard permet de décrire les interfaces comme une zone continue de transition [24].

3.2. POSITION DU PROBLÈME

Sur la figure 3.1 sont représentés, en trait plein, la variation microscopique d'une grandeur comme la masse volumique et en pointillés le modèle que nous utiliserons pour tenir compte de cette variation. Il est possible, *a priori*, de placer l'interface discontinue n'importe où dans la zone de transition réelle. En général, pour simplifier l'écriture des équations de bilan, on choisit la position de la surface de façon à conserver la masse. En notant h une échelle de longueur grande devant l'épaisseur de la zone de transition et x_σ la position de la surface de discontinuité, on définit x_σ de façon à satisfaire l'égalité :

$$\int_{-h}^h \rho(x) dx = \int_{-h}^{x_\sigma} \rho_l dx + \int_{x_\sigma}^h \rho_g dx \quad (3.1)$$

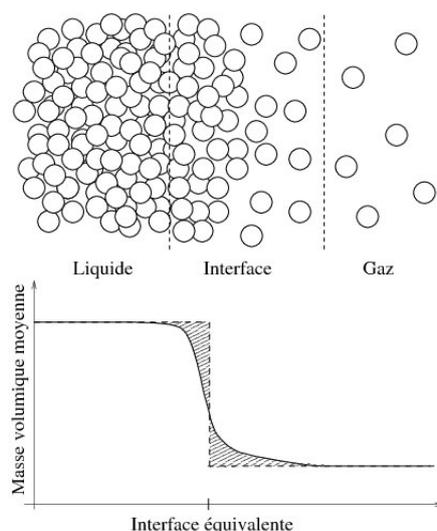


FIGURE 3.1 – Détermination de la position de l'interface équivalente

3.2 Position du problème

On suppose, ici comme dans le reste de ce mémoire, que la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ sont constantes dans chaque phase et on se place dans le cadre des écoulements incompressibles. On écrit les équations de Navier-Stokes pour chaque phase dans un domaine Ω_k (dans le cas du diphasique liquide-gaz, on a $k=g$ lorsqu'il s'agit de la phase gazeuse et $k=l$ pour la phase liquide). Ω_k est un domaine borné par des conditions aux limites et/ou par des interfaces et qui ne contient que la phase k .

Équation de continuité pour un fluide incompressible (équation bilan de masse) :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_k) = 0 \quad (3.2)$$

Équation de bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) = -\nabla p_k + \rho_k \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{S}_k \quad (3.3)$$

où \mathbf{S}_k est le tenseur des contraintes visqueuses d'un fluide newtonien :

$$\mathbf{S}_k = \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k) \quad (3.4)$$

Pour résoudre les problèmes diphasiques à partir des équations monophasiques dans chaque sous-domaine Ω_k , il est nécessaire de préciser les conditions aux limites au niveau des interfaces : Relation de saut de la quantité de mouvement (par exemple, Delhaye 1974) [25]

$$\left[\sum_k (\mathbf{u}_k \dot{m}_k - \mathbf{n}_k \cdot (-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k)) + (\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}) \right] \delta_\sigma = 0 \quad (3.5a)$$

où \mathbf{I} représente l'opérateur identité et la normale \mathbf{n} est indifféremment entrante ou sortante vis-à-vis de la phase k . L'indice s signifie que les opérateurs de différenciation sont des opérateurs surfaciques. Rappelons simplement ici que $-\nabla_s \cdot \mathbf{n}$ est la courbure moyenne de la surface, κ .

Relation de saut pour le bilan de masse à l'interface

$$\dot{m}_l = -\dot{m}_g \quad (3.5b)$$

où \dot{m}_k est le débit massique défini par $\dot{m}_k = \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_k$

Relation de saut de la composante tangentielle de la vitesse :

$$\mathbf{u}_g^t = \mathbf{u}_l^t \quad (3.5c)$$

Les équations que nous venons de présenter, ainsi que les champs qu'elles font intervenir, ne sont définis que dans les sous-domaines Ω_k auxquelles elles se rapportent. Ceci complique la résolution d'un problème diphasique car les sous-domaines Ω_k se déforment au cours du temps. Il est donc nécessaire de repérer ces sous-domaines pour déterminer quelles sont les variables qui sont définies en un point et quelles équations doivent être utilisées. Kataoka [26] propose de résoudre ce problème en prolongeant les champs de chaque phase sur le domaine total Ω grâce à la fonction indicatrice, χ_k , définie par

$$\begin{aligned} \chi_k(\mathbf{x}) &= 1 \text{ si } \mathbf{x} \in \Omega_k \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (3.6)$$

On montre simplement que ces fonctions ont les propriétés suivantes :

$$\sum_k \chi_k = 1 \quad (3.7a)$$

$$\chi_m \chi_n = \delta_{mn} \chi_m \quad (3.7b)$$

$$\nabla \chi_k = -\mathbf{n}_k \delta_\sigma \quad (3.7c)$$

Par ailleurs, l'équation de transport de χ_k s'écrit classiquement

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{v}_\sigma \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (3.8)$$

où \mathbf{v}_σ est la vitesse de l'interface, \mathbf{n}_k est la normale à l'interface orientée vers l'extérieur de la phase k et δ_σ est une fonction de Dirac centrée sur l'interface. L'équation 3.8 est aussi appelée équation topologique car c'est elle qui traduit le déplacement des interfaces et donc les changements topologiques de l'interface au cours du temps dans un écoulement.

3.3 Formalisme à deux fluides

Le formalisme à deux fluides a historiquement été établi par Delhayé [25] et Ishii [27] à l'aide de théorèmes intégraux. Cette démarche conduit directement à un système d'équations moyennées. Plus tard, Kataoka [26] a proposé une nouvelle démarche qui se décompose en deux étapes :

- passage à un système d'équations valable dans chaque phase (équations 3.2 et 3.3) muni de conditions de saut aux interfaces (relations 3.5a, 3.5b, 3.5c, 3.8) à un système d'équations valable dans tout le domaine Ω ,
- application d'un opérateur de moyenne à ces dernières.

Nous allons décrire dans cette section la première étape de cette démarche. La suite sera présentée plus loin dans ce mémoire. Ainsi, en multipliant l'équation (3.2) par χ_k , nous obtenons :

$$\chi_k \nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0 \quad (3.9)$$

D'où :

$$\nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_k \cdot \nabla \chi_k = 0 \quad (3.10)$$

Ce qui donne en utilisant l'équation (3.8) :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (3.11)$$

On procède de la même façon avec l'équation (3.3) :

$$\chi_k \frac{\partial \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \chi_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) = -\chi_k \nabla p_k + \chi_k \nabla \cdot (\mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k)) + \chi_k \rho_k \mathbf{g} \quad (3.12)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) &= -\nabla (\chi_k p_k) + \nabla \cdot (\chi_k \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k)) \\ + \chi_k \rho_k \mathbf{g} + \rho_k \mathbf{u}_k \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u}_k \cdot \nabla (\chi_k) \right) &+ p_k \nabla \chi_k - \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \chi_k \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ce qui donne en utilisant l'équation (3.8) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) &= -\nabla \chi_k p_k + \nabla \cdot (\chi_k \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k)) \\ &+ \chi_k \rho_k \mathbf{g} + ((-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k) \cdot \mathbf{n}_k) \delta_\sigma \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dans ce mémoire, nous ne considérerons que des écoulements isothermes et sans changement de phase. Dans ce cas :

- le champ de vitesse est entièrement continu à la traversée de l'interface (seules les composantes tangentes l'étaient dans le cas général : équations 3.5b, 3.5c),
- la vitesse de l'interface est simplement la vitesse des phases de part et d'autre de celle-ci (ceci est une conséquence de la continuité du champ de vitesse signalée précédemment : à l'équation 3.5b, si $\dot{m}_k = 0$ alors $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_\sigma$),
- la tension de surface peut être considérée comme constante et uniforme ; cette dernière hypothèse est également souvent faite dans un cadre anisotherme et avec changement de phase. Par conséquent, les forces capillaires que l'on considère sont uniquement normales à l'interface : leurs composantes tangentielles sont nulles, il n'y a pas d'effet Marangoni.

Grâce à ces nouvelles hypothèses, les équations précédentes se simplifient comme suit :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) &= -\nabla \chi_k p_k + \chi_k \rho_k \mathbf{g} \\ &+ \nabla \cdot (\chi_k \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k)) \\ &+ ((-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k) \cdot \mathbf{n}_k) \delta_\sigma \end{aligned} \quad (3.15b)$$

Avec les relations de saut aux interfaces :

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{u}_l \quad (3.15c)$$

$$\left[\sum_k (\mathbf{n}_k \cdot (-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k)) + (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \right] \delta_\sigma = 0 \quad (3.15d)$$

Nous venons d'établir le système d'équations à deux fluides à partir des équations phasiques. Il est important de souligner que nous disposons maintenant de deux champs de vitesse et de pression dans tout l'espace physique ainsi que de deux bilans de quantité de mouvement et de masse. Cette multiplication d'inconnues peut avoir un coût numérique important mais est bien adaptée aux situations où la taille de l'opérateur de moyenne est plus grande que la taille caractéristique des interfaces. En effet, dans ce type de situation, l'opération de prise de moyenne a pour effet de "mélanger" les phases. En chaque point de l'espace, on dispose alors effectivement d'un jeu d'inconnues par phase.

3.4 Formalisme monofluide

Au lieu de résoudre un ensemble d'équations par phase, il est possible de construire un problème équivalent pour un fluide fictif qui a les propriétés de la phase k dans le sous-domaine Ω_k et qui fait intervenir des termes sources aux interfaces.

On définit un champ fictif associé à une grandeur ϕ_k définie dans chaque phase par :

$$\phi = \sum_k \chi_k \phi_k \quad (3.16)$$

La propriété 3.7b est très utile pour réaliser le passage d'un produit de grandeurs phasiques à un produit de grandeurs fictives :

$$\phi \psi = \sum_k \chi_k \phi_k \sum_k \chi_k \psi_k = \sum_k \chi_k \phi_k \psi_k \quad (3.17)$$

Ce formalisme est appelé "formalisme monofluide". Celui-ci permet de condenser en une seule équation locale instantanée les bilans de chacune des deux phases et le bilan à l'interface. On pourra, pour plus de précision ou pour connaître les équations d'énergie et de température monofluides que nous n'énoncerons pas ici, se reporter à Magnaudet [28] ou au travail de thèse de Christophe Duquenooy [29].

Pour transformer les équations de chaque phase k , on multiplie les équations par la fonction indicatrice χ_k . Puis, on la fait rentrer dans les dérivées en prenant soin de soustraire ce qu'on a ajouté grâce à l'équation de transport (3.8) et à l'expression du gradient de χ_k (3.7c). On

obtient alors :

Équation monofluide de bilan de masse :

$$\nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{u}_k \right) + \sum_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_\sigma = 0 \quad (3.18)$$

Équation monofluide de bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \right) &= \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{g} - \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k p_k \right) + \\ &\nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \right) + \\ &\sum_k [\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{v}_\sigma - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k \cdot (-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k)] \delta_\sigma \end{aligned} \quad (3.19)$$

On transforme, ensuite, cette équation en utilisant la relation de saut de la quantité de mouvement équation 3.5a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \right) &= \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{g} - \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k p_k \right) + \\ &\nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \right) + (\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}) \delta_\sigma \end{aligned} \quad (3.20)$$

En utilisant les grandeurs monofluides $\mathbf{u} = \sum_k \chi_k \mathbf{u}_k$ et la propriété

$$\rho \mathbf{u} = \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k, \quad (3.21)$$

on obtient la forme plus condensée :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}) + \sum_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta_\sigma = 0 \quad (3.22a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \left(\sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \right) + (\nabla_s \sigma - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}) \delta_\sigma \quad (3.22b)$$

Il est important de noter que dans l'équation précédente, le tenseur des contraintes visqueuses n'est pas exprimé en fonction de grandeurs monofluides, mais à partir des vitesses phasiques. On ne peut pas introduire la vitesse monofluide dans ce terme comme dans les autres à cause de la double dérivation (divergence du gradient de vitesse). En effet, cela aurait pour conséquence de faire apparaître le produit $\chi_k \delta_\sigma$:

$$\chi_k \mu_k \nabla \mathbf{u}_k = \chi_k \mu_k (\nabla (\chi_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{n}_k \delta_\sigma) \quad (3.23)$$

Comme précédemment, nous nous plaçons dans un cadre des écoulements isothermes et sans changement de phase. En utilisant les mêmes simplifications que pour le modèle à deux fluides, les équations monofluides que nous avons établies se réduisent. De plus, comme toutes les composantes de la vitesse sont continues, on peut définir le tenseur monofluide des contraintes visqueuses. En effet, la continuité du champ de vitesse permet de supprimer le produit de distribution $\chi_k \delta_\sigma$ que l'on ne sait pas définir mathématiquement (même au sens des distributions)

$$\begin{aligned}
 \mu \nabla \mathbf{u} &= (\chi_g \mu_g + \chi_l \mu_l) \nabla (\chi_g \mathbf{u}_g + \chi_l \mathbf{u}_l) \\
 &= (\chi_g \mu_g + \chi_l \mu_l) (\chi_g \nabla \mathbf{u}_g + \chi_l \nabla \mathbf{u}_l + \underbrace{(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g)}_0 \otimes \mathbf{n} \delta_\sigma) \\
 &= \chi_g \mu_g \nabla \mathbf{u}_g + \chi_l \mu_l \nabla \mathbf{u}_l
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{n}_g$ est la normale qui est orientée de la phase gazeuse vers la phase liquide. Par souci de clarté, on a écrit les égalités sans tenir compte du gradient transposé mais cela ne change rien au résultat. Ainsi, lorsque le champ de vitesse est continu, l'écriture monofluide est possible.

Nous avons montré que le système suivant décrit alors la dynamique de l'écoulement :

Hypothèse d'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3.25a}$$

Équation de transport de la surface de discontinuité :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi_k = 0 \tag{3.25b}$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho \mathbf{g} - \nabla p - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma \\
 &\quad + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}))
 \end{aligned} \tag{3.25c}$$

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté les deux formalismes qui permettent de construire un système d'équations adaptées aux écoulements diphasiques. Ces deux-ci (3.15 et 3.25) ne sont pas équivalents car le formalisme bifluide permet de construire un jeu de deux équations par phase. Cela revient à considérer que chaque phase est présente dans l'ensemble du domaine considéré ; c'est-à-dire qu'en un point de l'espace, les deux phases coexistent et que l'on peut définir des champs de vitesse et pression pour chacune d'entre elles. À l'opposé le modèle monofluide suppose qu'en un point de l'espace ne peut exister qu'une seule phase et que cette abondance d'équations est alors inutile. En créant un fluide fictif qui a les propriétés physiques du liquide dans la phase liquide et du gaz dans l'autre phase, il est possible de construire un seul jeu d'équation et d'inconnues.

Dans la suite nous allons exposer les différents niveaux de modélisation diphasique qui utilisent ces deux formalismes et qui interviennent dans notre démarche multi-échelle. Ces niveaux de modélisation physique sont présentés des plus simples aux plus complexes, c'est-à-dire des échelles les plus locales vers les échelles les plus globales. Nous allons donc commencer dans le chapitre suivant par présenter les différentes approches de simulation numérique directe diphasique. Puis, nous nous intéresserons aux approches de type simulation des grandes échelles. Enfin, nous discuterons de l'approche moyennée.

Chapitre 4

Simulation numérique directe

A FIN de réaliser des simulations numériques directes diphasiques, nous avons besoin d'une méthode numérique précise et robuste. Nous verrons dans ce chapitre que, du fait des erreurs apportées par les opérateurs de convection, la plupart des méthodes ont des difficultés à conserver la masse. De plus, un autre point sensible de celles-ci réside dans la discrétisation correcte des forces de tension de surface. En plus de ces deux problèmes classiques, la méthode que nous mettrons en œuvre devra permettre de traiter des écoulements dans lesquels la topologie des interfaces est susceptible de changer lors des phénomènes de coalescence et de fragmentation.

Dans un premier temps, nous allons présenter les méthodes classiquement employées, nous listerons ainsi leurs points forts et leurs points faibles. Après avoir sélectionné l'une d'entre elle grâce aux critères précédents, nous exposerons l'implémentation de celle-ci dans la plate-forme de développement Trio_U. Enfin, nous présenterons les modifications apportées afin de réaliser les simulations numériques nécessaires à ce travail.

4.1 Différentes méthodes de traitement des interfaces

4.1.1 Méthodes à maillage adaptatif

Ces méthodes sont aussi appelées méthodes lagrangiennes car le maillage s'adapte dynamiquement à l'interface, de sorte que chaque maille soit purement monophasique. L'interface constitue alors l'une des lignes (en 2D) du maillage mobile adaptatif. La figure 4.1.a représente schématiquement l'approche lagrangienne (Arbitrary Lagrangian Eulerian method, ALE). Cette méthode présente l'avantage de décrire très précisément l'interface et de permettre d'imposer finement les conditions de saut à l'interface. De plus, la présence de degrés de liberté sur l'interface permet d'utiliser des schémas numériques précis. La convergence en maillage de ce type de méthode est donc très rapide. Néanmoins, un nouveau maillage doit être construit à chaque pas de temps ce qui représente un coût numérique important. De plus, les changements de topologie (rupture ou coalescence) sont très difficiles à prendre en compte. Pour cette raison, ce genre de technique est utilisé pour étudier la dynamique d'une ou quelques inclusions [30], [31]. Malheureusement, elles deviennent inapplicables dans un écoulement faisant intervenir un grand nombre de bulles qui peuvent interagir entre elles de façon complexe. De plus, souvent, ces méthodes supposent que la phase gazeuse n'a pas d'effet sur la dynamique de l'écoulement. Elles ne résolvent alors l'équation de quantité de mouvement que dans la phase liquide et imposent une condition de glissement à l'interface. Cette condition à l'interface est une bonne approximation surtout pour les fortes valeurs du nombre de Reynolds. Néanmoins, la condition de saut aux interfaces 3.5a implique que le gradient de vitesse est non nul à l'interface. Celui-ci ne peut être estimé sans résoudre l'écoulement à l'intérieur de la bulle.

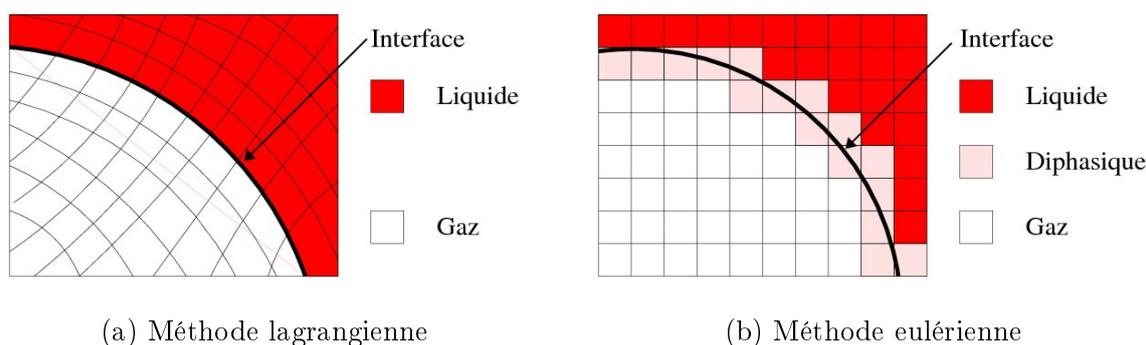


FIGURE 4.1 – Illustration de la différence entre une méthode lagrangienne et une méthode eulérienne. Coloration par la fonction indicatrice de phase

4.1.2 Méthodes eulériennes

Contrairement aux méthodes lagrangiennes, les méthodes eulériennes utilisent *a priori* un maillage non déformable pour réaliser les simulations. Par conséquent, certaines mailles ne sont pas strictement monophasiques. La figure 4.1.b représente schématiquement cette approche. La majorité de ces méthodes utilisent donc le formalisme monofluide pour tenir compte de la forte variation des propriétés physiques dans un domaine polyphasique. Dans le chapitre 3, nous avons présenté ce formalisme et nous avons montré que cette méthode repose sur l'idée que la distribution spatiale des différentes propriétés physiques est représentée par la fonction indicatrice de phase. Celle-ci satisfait l'équation topologique 3.25b et peut donc, *a priori*, être calculée simplement. Néanmoins, les très fortes variations de cette fonction (dans un cas monodimensionnel, cette fonction peut être représentée sous la forme d'une somme de fonctions créneaux) à la traversée de l'interface posent de sérieux problèmes numériques. L'utilisation de la plupart des schémas de convection introduisent deux comportements non physiques :

- la dispersion : le schéma n'a pas la même influence sur toutes les fréquences du signal (la vitesse de transport dépend de la fréquence) et il peut apparaître des oscillations à l'endroit des forts gradients, celles-ci sont susceptibles de déstabiliser le calcul,
- la diffusion : le schéma a tendance à lisser le signal (impact sur l'amplitude du signal) ; les fortes variations s'étalent au cours de la simulation et les interfaces ne sont pas décrites correctement.

L'enjeu est alors de trouver une méthode stable et précise. Parmi les schémas numériques les plus employés, notons les méthodes TVD (Total Variation Diminishing), ENO (Essentially non-oscillatory), WENO (Weighted ENO) et FCT (Flux Corrected Transport)¹. Le principe de ces méthodes est de contrôler les flux de manière à trouver le meilleur compromis entre stabilité (ajout de diffusion numérique dans le schéma au voisinage de la discontinuité) et précision (contrôle de l'étalement). La principale problématique de la simulation numérique directe polyphasique est donc de transporter la fonction indicatrice de phase le plus "proprement" possible. Nous allons, maintenant, présenter les méthodes les plus couramment utilisées.

1. Pour illustrer notre propos, nous proposons de résumer le principe du schéma FCT. Celui-ci se décompose en trois étapes :

- étape d'advection de l'interface avec un schéma d'ordre élevé,
- étape de diffusion explicite qui permet d'assurer que la fonction indicatrice de phase soit toujours comprise entre 0 et 1 (positivité) et qui assure la stabilité du schéma,
- étape d'antidiffusion (diffusion avec une viscosité négative) permet ensuite de maîtriser au mieux la diffusion numérique.

Techniques de type "Volume of Fluid" (VOF)

Naturellement, la première idée est de transporter directement la fonction indicatrice de phase grâce à l'équation 3.25b. Ceci revient, en fait, à suivre le volume de fluide (d'où le nom de la méthode). Comme nous l'avons expliqué précédemment, le choix du schéma numérique n'est pas trivial car la qualité des résultats dépendra grandement de la qualité du transport. L'enjeu est alors de trouver un schéma numérique qui puisse transporter un front (de type Heaviside) sans créer d'oscillation non physique et en l'étalant le moins possible.

Malgré le grand progrès au niveau des schémas numériques, la conservation d'une fonction discontinue n'est pas aisée et la fonction indicatrice de phase s'étale au cours du temps. Pour assurer que les grandeurs physiques varient rapidement dans le domaine de calcul, il existe deux stratégies.

Méthode sans reconstruction : Certains auteurs comme Benkenida [32] et Bonometti [33], laissent les fronts s'étaler et positionnent l'interface à une isovaleur 0.5 de cette fonction. La qualité de la simulation, notamment la maîtrise de l'épaisseur de l'interface, repose sur la performance du schéma numérique qui sert à transporter l'indicatrice de phase (Cf. introduction de ce chapitre). Les changements topologiques sont pris en compte naturellement par la méthode. Celle-ci présente l'énorme avantage d'être simple à mettre en œuvre et de permettre l'étude à faible coût d'écoulements divers et complexes.

Méthode avec reconstruction : À l'inverse, pour éviter l'étalement de la fonction indicatrice de phase, de nombreuses méthodes de suivi en volume visent à reconstruire l'interface à chaque pas de temps. L'une des méthodes de reconstruction les plus utilisées est le calcul de l'interface affine par morceaux (Piecewise linear interface, reconstruction PLIC) introduite par Li [34]. Les segments d'interface sont reconstruits dans chaque maille à partir de la fonction indicatrice de phase et de son gradient. Les segments ainsi construits ne se raccordent pas au niveau des faces du maillage eulérien. Ceux-ci sont ensuite transportés de façon lagrangienne à partir du champ de vitesse. Puis, cette dernière sert à recalculer la fonction indicatrice de phase au pas de temps suivant.

Cette étape de reconstruction est relativement difficile à mettre en œuvre surtout dans les configurations tridimensionnelles car il existe un grand nombre de cas différents d'intersections géométriques. Cette approche est néanmoins l'une des plus utilisées et elle est présente dans la plupart des logiciels commerciaux.

Techniques de type "level-set"

Pour faciliter le travail des schémas de convection, certains auteurs ont choisi de transporter une fonction moins raide que l'indicatrice de phase [35]. Elle est définie comme positive dans une phase, négative dans l'autre et s'annule à l'interface. Pour s'assurer que cette fonction soit lisse et régulière, la pente est choisie égale à l'unité. Cette fonction (level-set) est donc une fonction de distance signée. Ainsi, la valeur locale de cette fonction renseigne non seulement de la phase présente mais aussi de la distance à l'interface.

Malheureusement, la qualité de la fonction level-set se détériore au fur et à mesure de la simulation car la pente ne reste pas égale à l'unité et peut diminuer ou augmenter suivant les cas. Il faut alors la réinitialiser périodiquement pour ramener son gradient à l'unité. Néanmoins cette étape supplémentaire a tendance à modifier la position de l'interface (lieu où la fonction s'annule), ce qui nuit à la conservation de la masse.

Ces méthodes sont relativement simples à mettre en œuvre et relativement précises. Elles permettent, de plus, de prendre en compte le changement de phase [36].

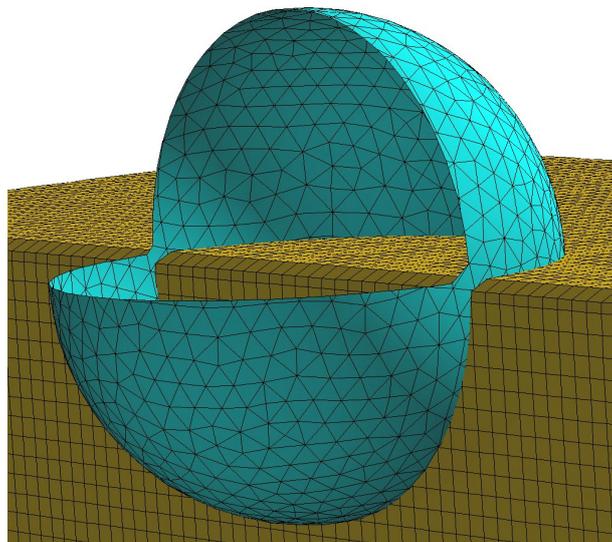


FIGURE 4.2 – Illustration de la méthode de type Front-Tracking de Trio_U

4.1.3 Méthodes à maillage mobile

L'idée, ici, n'est plus de suivre une concentration ou une fonction distance mais de suivre l'interface elle-même. Cette méthode s'appuie sur un maillage mobile qui se déplace et se déforme dans un maillage fixe eulérien. La figure 4.2 illustre la cohabitation de ces deux maillages dans un domaine tridimensionnel. Cette méthode a été introduite par Unverdi et Tryggvason [37] au début des années 1990. Le Front-Tracking est une méthode hybride entre les méthodes lagrangiennes et eulériennes. L'idée étant de tirer partie des qualités de ces deux-ci en essayant de s'affranchir de leurs défauts.

Ainsi, de la même façon que pour les méthodes lagrangiennes :

- le maillage (mobile) se déforme et suit l'interface,
- celui-ci est advecté grâce à l'équation topologique 3.25b,
- la gestion des ruptures et coalescences reste délicate car elle fait intervenir des algorithmes complexes,
- néanmoins, celles-ci ne sont pas simplement subies et peuvent, potentiellement, faire l'objet d'une modélisation².

De manière identique aux méthodes eulériennes :

- le recours à un formalisme diphasique devient nécessaire car certaines mailles sont diphasiques,
- les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un maillage qui ne se déforme pas.

Ces méthodes sont moins précises que les méthodes lagrangiennes mais décrivent mieux la géométrie des interfaces que les méthodes eulériennes. Elles permettent, en particulier, d'obtenir une meilleure approximation de la courbure et donc des forces de tension de surface. Néanmoins,

2. En effet, les changements topologiques de l'interface font apparaître des films liquides généralement trop fins pour être résolus dans une DNS diphasique. Il en résulte que ce genre de simulation a tendance à surestimer la fréquence de ces événements. Le recours à une modélisation spécifique devient alors indispensable pour rendre compte correctement des écoulements où ces événements deviennent fréquents. Cependant les méthodes eulériennes ne permettent pas une telle modélisation car les changements topologiques interviennent naturellement lors du déplacement des fonctions indicatrices de phase ou level-set. À l'opposé, avec les méthodes de type Front-Tracking, il est possible de décider de réaliser ou pas un changement topologique à un instant donné, par exemple à partir de critères physiques.

la gestion du maillage surfacique reste un problème majeur. L'utilisation d'un ensemble complexe d'algorithmes est nécessaire pour que le maillage lagrangien reste le plus homogène possible.

4.2 La méthode Front-Tracking discontinue de Trio_U

Trio_U [38] est un logiciel programmé en C++ par le CEA qui permet à chaque utilisateur d'ajouter au code de base les fonctionnalités qui sont nécessaires à ses recherches. Des tests réguliers de non régression et une rigoureuse gestion des configurations permettent à ce logiciel d'évoluer rapidement et sûrement.

La méthode que nous utilisons au sein du logiciel Trio_U appartient à la catégorie des méthodes Front-Tracking. Elle a été initialement implémentée par Aristeu Silveira-Neto et Christophe Duquennoy [29], puis revisitée par Benoît Mathieu [39], [40]. Dans la suite de cette section, nous allons présenter les principales caractéristiques de celle-ci. Les détails de ses caractéristiques et sa validation sont présentés dans les travaux de Benoît Mathieu [39], [40]. Nous avons choisi cette méthode pour réaliser nos simulations numériques car elle présente les avantages suivants :

- respect du bilan de masse (même lors des changements topologiques),
- description très précise des interfaces et donc des forces interfaciales,
- élimination des courants parasites généralement associés à la discrétisation des forces de tension de surface,
- étalement minimum et constant des surfaces de discontinuité (une maille),
- implémentation permettant le calcul massivement parallèle par découpage du domaine de la simulation.

4.2.1 L'algorithme général de la méthode

La formulation VDF

Le module Front-Tracking et le logiciel Trio_U en général sont conçus pour pouvoir traiter deux types de discrétisation :

- une formulation éléments finis (appelée VEF pour Volumes Éléments Finis) associée à une discrétisation irrégulière à base d'éléments tétraédriques (triangle en 2D),
- une formulation de type volumes finis (appelée VDF pour Volumes Différences Finis) associée à une discrétisation régulière à base d'éléments parallélépipédiques (rectangle en 2D).

Dans la suite de ce travail, nous ne traiterons que des cas académiques, nous allons donc utiliser exclusivement des maillages réguliers hexaédriques. Nous allons donc nous contenter de décrire uniquement la discrétisation VDF. Il est cependant intéressant de noter que ces formulations ne sont pas disjointes et qu'il est possible, dans certains cas, de faire des liens entre celles-ci. Par exemple, la formulation éléments finis de type Raviart-Thomas [41] est identique à la formulation volumes finis que nous détaillons dans la suite de cette section. La formulation VDF utilise un schéma décalé (les volumes de contrôle pour les scalaires et les différentes composantes vectorielles ne sont pas identiques). Les figures 4.3 et 4.4 illustrent cette discrétisation dans un cas bidimensionnel.

Discrétisation spatiale et temporelle

Nous avons à notre disposition deux schémas temporels. Le premier est un schéma de type Euler explicite qui est simplement d'ordre 1. Il présente l'avantage d'être rapide mais peut être instable quand il est couplé avec un opérateur de convection centré. Nous bénéficions d'un opérateur centrée d'ordre 2 qui assure une faible viscosité numérique par rapport à un schéma de

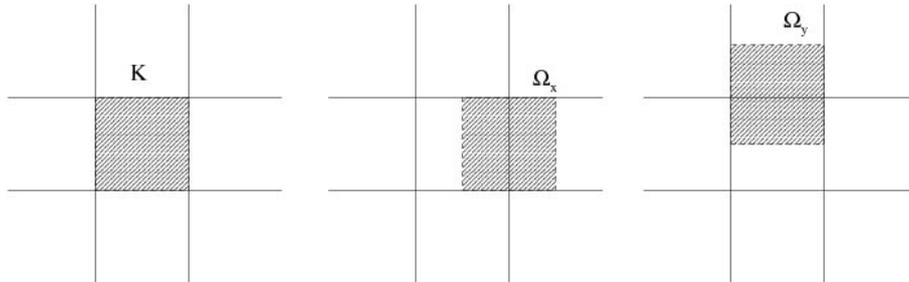


FIGURE 4.3 – Illustration des volumes de contrôle dans un cas bidimensionnel : les volumes K sont les volumes de contrôle des équations scalaires. Les volumes de contrôle des équations vectorielles dans la direction l sont les volumes décalés Ω_l .

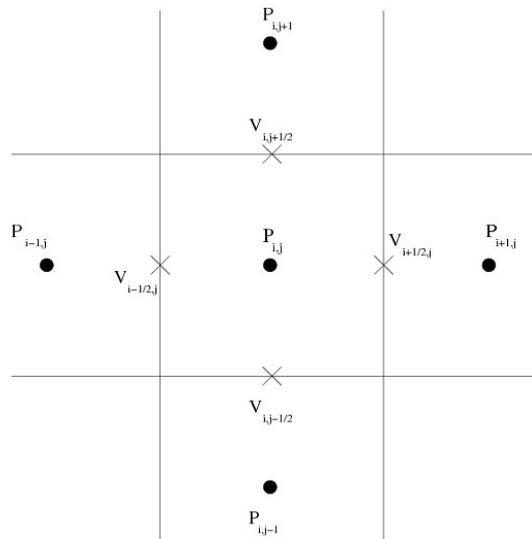


FIGURE 4.4 – Discrétisation en volumes finis dans un cas bidimensionnel. Les champs scalaires (comme la pression) sont localisés au centre des mailles et les composantes des champs vectoriels (comme la vitesse) au centre des faces.

type quick (aussi disponible). Pour pouvoir utiliser cet opérateur dans de bonnes conditions de stabilité, nous avons accès à un schéma temporel hybride. L'équation de quantité de mouvement est résolue avec un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 3 alors que l'interface est convectée avec un simple schéma de type Euler explicite. En SND (*i.e.* quand la convergence en maillage est atteinte³) ces différents schémas et opérateurs spatiaux donnent, *a priori*, le même résultat. Par contre, en SGE, le choix affecte directement le résultat et la qualité des simulations.

Courants parasites et discrétisation du terme source

La discrétisation des forces de tension de surface est une étape très importante des méthodes numériques diphasiques. De nombreuses implémentations de ces méthodes souffrent de l'apparition systématique de champs de vitesses parasites en proche interface. Ces courants parasites résultent d'erreurs de discrétisation de la tension de surface. Ceux-ci perturbent le champ de vitesse en proche interface, ce qui nuit gravement à la qualité des résultats et peut même déstabiliser la simulation au point de la rendre impossible. Avec la méthode CSF [42], l'intensité des courants parasites augmente quand la valeur du nombre d'Ohnesorge, Oh , diminue

$$Oh \triangleq \frac{\mu_l}{\sqrt{\sigma \rho_l R_b}} \quad (4.1)$$

où R_b est le rayon de la sphère osculatrice. En effet, l'erreur de discrétisation sur les forces de tension de surface sera visible quand la valeur de la tension de surface sera grande. À l'inverse, plus la viscosité est importante et plus les fluctuations parasites de vitesse seront dissipées. Une solution originale à ce problème de discrétisation est proposée dans [39]. Nous résumons le principe de cette méthode dans la suite de cette section.

L'équation de bilan de quantité de mouvement 3.25c monofluide s'écrit à l'équilibre :

$$\rho \mathbf{g} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma = \nabla p \quad (4.2)$$

Cette équation traduit, par exemple, l'équilibre statique d'une goutte posée sur une surface plane. La présence des courants parasites est due à une erreur de discrétisation qui interdit l'existence d'une géométrie discrétisée des interfaces telle qu'un champ de vitesse nul soit solution de cette équation. Par conséquent, il faut trouver une discrétisation de la gravité et des termes de tension de surface qui vérifie d'un point de vue discret l'équation 4.2. L'idée est alors d'exprimer le terme de gauche de cette équation comme un gradient discret. Pour cela, on commence par réexprimer simplement les forces de tension de surface à partir du gradient de l'indicatrice

$$- (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma = \kappa \sigma \nabla \chi_g \quad (4.3)$$

où κ est la courbure moyenne. Les forces de tension de surface sont définies sur le maillage lagrangien. Pour résoudre l'équation 4.2, il faut alors réaliser une extrapolation du maillage lagrangien vers le maillage eulérien. Pour respecter la condition qui vient d'être exprimée, cette force est alors discrétisée de façon mixte grâce à l'équation précédente. La courbure est évaluée précisément sur le maillage lagrangien puis extrapolée dans le volume. La direction de la force est, quant à elle, déterminée naturellement sur le maillage eulérien à partir du gradient de l'indicatrice de la phase gazeuse (on a implicitement choisi $\mathbf{n} = \mathbf{n}_g$).

Ensuite, on exprime les forces de gravitation à partir du potentiel des forces de pesanteur :

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi \quad (4.4)$$

3. La vitesse de convergence dépend naturellement des schémas utilisés.

On peut alors réécrire l'équation 4.2 grâce à ces simplifications :

$$\begin{aligned}
\nabla p &= \rho \mathbf{g} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma \\
&= -\rho \nabla \phi + \kappa \sigma \nabla \chi_g \\
&= -\nabla(\rho \phi) + \phi \nabla \rho + \kappa \sigma \nabla \chi_g \\
&= -\nabla(\rho \phi) + \phi(\rho_g - \rho_l) \nabla \chi_g + \kappa \sigma \nabla \chi_g \\
&= -\nabla(\rho \phi) + (\phi(\rho_g - \rho_l) + \kappa \sigma) \nabla \chi_g
\end{aligned} \tag{4.5}$$

L'équation précédente fait apparaître deux termes. Le premier $-\nabla(\rho \phi)$ est non nul dans l'ensemble du domaine : il ressemble, en fait, à une pression hydrostatique. Ce terme a un rotationnel nul et n'a donc aucun effet sur le champ de vitesse. Il peut être retiré pour, par exemple, accélérer la convergence du solveur de Poisson ou faciliter l'écriture des conditions de sortie libre sur les frontières verticales. L'équation précédente se réécrit alors :

$$\nabla p^* = (\phi(\rho_g - \rho_l) + \kappa \sigma) \nabla \chi_g \tag{4.6}$$

Le terme $(\phi(\rho_g - \rho_l) + \kappa \sigma) \nabla \chi_g$ est non nul uniquement en proche interface. Le terme gravitaire n'intervient donc plus qu'en proche interface ; c'est-à-dire là où la masse volumique n'est plus uniforme en espace.

En discrétisant les forces interfaciales et les forces de gravité à partir de l'écriture obtenue à l'équation 4.6, on est assuré de l'existence d'un équilibre discret. En effet, la position de l'interface peut converger vers une position d'équilibre telle que $\phi(\rho_g - \rho_l) + \kappa \sigma$ est constante sur chaque portion connexe de l'interface. De plus, la fonction indicatrice de phase χ_k et la pression p^* sont des scalaires. Ils sont par conséquent définis dans tout l'espace et sont discrétisés au centre des éléments du maillage eulérien et leurs gradients sont évalués aux faces. De cette façon, un équilibre discret entre le gradient de pression, les forces de gravité et les forces de tension de surface est possible.

Au final, le terme $\phi(\rho_g - \rho_l) + \kappa \sigma$ est évalué sur le maillage lagrangien puis interpolé aux faces du maillage eulérien (puis multiplié par $\nabla \chi_g$) là où l'équation de quantité de mouvement est résolue. Cette discrétisation présente néanmoins un inconvénient : si deux portions connexes d'interface sont trop proches l'une de l'autre (typiquement si elles sont présentes dans une même maille eulérienne) alors le gradient de l'indicatrice est localement très mal estimé. Les forces de tension de surface sont alors aussi mal calculées et les interfaces se déforment localement de façon non physique. Des remèdes sont envisageables mais n'ont pas été mis en œuvre dans nos travaux.

Transport de l'interface

Dans cette partie, nous détaillons les algorithmes qui permettent de transporter l'interface en respectant la conservation de la masse de chaque phase. Sont supposés connus tous les champs monofluides (vitesse, pression, indicatrice) à l'instant t_n ainsi que la position des marqueurs de l'interface \mathbf{x}_{i_n} . La résolution des équations monofluides 3.25a, 3.25c et 3.25b doit nous permettre d'évaluer les champs monofluides ainsi que la position des marqueurs de l'interface au temps t_{n+1} .

Advection : L'équation 3.25b, est résolue sur le maillage lagrangien qui discrétise l'interface. Chaque marqueur \mathbf{x}_i est déplacé grâce à la vitesse \mathbf{v}_i de l'interface. Celle-ci est calculée par interpolation du champ de vitesse du maillage eulérien sur le maillage lagrangien

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad (4.7)$$

ce qui donne d'un point de vue discret :

$$\mathbf{x}_{i\ n+1/2} = \mathbf{x}_{i\ n} + \Delta t \mathbf{v}_i \quad (4.8)$$

Bilan de masse : Le transport de l'interface par l'équation 4.7 ne permet pas de garantir la conservation de la masse de chaque phase au cours du temps. Cette étape de transport est donc suivie d'une étape de correction qui correspond à un deuxième déplacement des marqueurs. Celui-ci est, *a priori*, plus petit que le déplacement associé à l'équation 4.8.

Lors de la première étape, la variation de volume engendrée par le déplacement de chaque marqueur est calculée. Par ailleurs, on calcule la variation de volume exacte de chaque élément du maillage eulérien. Cette étape est empruntée aux méthodes eulériennes de type VOF. Elle utilise le champ de vitesse discrétisé aux faces et l'indicatrice de phase discrétisée au centre des éléments. La variation de volume ainsi calculée est ensuite transférée sur les marqueurs lagrangiens par une méthode d'interpolation conservative. Il en résulte que chaque marqueur possède une variation de volume résultant de son déplacement et une autre qui est associée au respect du bilan de masse. À partir de ces deux volumes, il est possible de calculer un déplacement correctif dans la direction normale. On aboutit à un bilan de masse qui est respecté à la précision machine et de façon relativement locale. À la fin de ces deux étapes, on connaît la position des marqueurs de l'interface au temps t_{n+1} : $\mathbf{x}_{i\ n+1}$.

Résolution de l'équation de Navier-Stokes

Pour déterminer le nouveau champ de vitesse, on résout l'équation monofluide de quantité de mouvement 3.25c grâce à un algorithme explicite appelé "méthode de projection". Cette équation est réécrite sous forme non conservative en tenant compte de l'équation 4.6

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) - \frac{1}{\rho} (\phi(\rho_g - \rho_l) + \kappa \sigma) \nabla \chi_g \quad (4.9)$$

en respectant l'équation 3.25a. Au cours d'un sous-pas temps pour un schéma temporel de type Runge-Kutta et du pas de temps pour un schéma de type Euler explicite, on distingue trois étapes.

- Calcul de l'accélération intermédiaire à partir de l'équation 4.9 sans le terme en gradient de pression

$$\mathbf{u}^* = -\nabla \cdot (\mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) + \frac{1}{\rho_n} \nabla \cdot (\mu_n (\nabla \mathbf{u}_n + \nabla^T \mathbf{u}_n)) - \frac{1}{\rho_n} (\phi(\rho_g - \rho_l) + \kappa_n \sigma) \nabla \chi_{g\ n} \quad (4.10)$$

\mathbf{u}^* est donc une fonction du champ de vitesse, de l'indicatrice et de la géométrie de l'interface à l'instant t_n .

- Estimation du champ de pression p_{n+1}^* tel que :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_{n+1}) = 0 \iff \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \right) = 0 \quad (4.11)$$

$$\iff \nabla \cdot (\mathbf{u}^*) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_n} \nabla p_{n+1}^* \right) = 0 \quad (4.12)$$

$$\iff \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_n} \nabla p_{n+1}^* \right) = \nabla \cdot (\mathbf{u}^*) \quad (4.13)$$

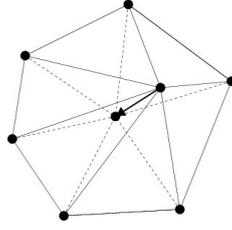


FIGURE 4.5 – Illustration de l'algorithme de barycentrage

On obtient alors un système linéaire dont l'inconnue est le champ de pression p_{n+1}^* . Celui-ci est ensuite résolu numériquement grâce à la méthode du gradient conjugué préconditionné.

- Calcul du champ de vitesse à partir de \mathbf{u}^* et de p_{n+1} :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta_t \left(\mathbf{u}^* - \frac{1}{\rho_n} \nabla p_{n+1}^* \right) \quad (4.14)$$

À partir de la nouvelle position de l'interface, on peut calculer la nouvelle valeur de l'indicateur ainsi que les valeurs locales des propriétés physiques (masse volumique, viscosité) au temps t_{n+1} .

4.2.2 Gestion du maillage de surface

D'après Brackbill *et al.* [42], le pas de temps de stabilité associé aux ondes capillaires est donné par la formule approchée :

$$\Delta_t \sim \sqrt{\frac{(\rho_l + \rho_g) l^3}{2\pi \sigma}} \quad (4.15)$$

où l est la longueur de la plus petite arête du maillage lagrangien. Comme ce pas de temps dépend de la longueur des arêtes du maillage lagrangien, il est important que les facettes aient une forme le plus proche possible d'un triangle équilatéral et qu'elles aient toutes, à peu près, les mêmes dimensions. Néanmoins, le simple déplacement du maillage lagrangien n'est pas suffisant pour garantir que la longueur de chacune des arêtes soit approximativement égale.

Pour s'assurer de la bonne qualité de celui-ci, il est nécessaire d'avoir recours régulièrement à des algorithmes qui visent à uniformiser la taille des arêtes. Sans entrer dans les détails, nous allons présenter les différents algorithmes qui sont utilisés dans le module Front-Tracking de Trio_U :

- remaillage local : À partir de la valeur de la longueur idéale pour les arêtes et d'une tolérance, cet algorithme vise à supprimer les arêtes trop courtes et à découper celles qui, au contraire, sont jugées trop longues. Cette étape modifie la topologie des connections du maillage ainsi que la structure de données associée.
- barycentrage : Par un processus itératif, chaque marqueur est déplacé au barycentre du polygone formé par les marqueurs voisins. Ce déplacement est illustré à la figure 4.5.
- lissage de la courbure : Il s'agit d'une méthode de diffusion de courbure qui vise à régulariser la courbure. L'idée sous-jacente est de détruire les fluctuations de courbure associées aux instabilités numériques soit, pour augmenter le pas de temps, soit pour accroître le nombre de marqueurs lagrangiens. L'inconvénient de cette dernière procédure est qu'elle est fortement non linéaire et qu'elle a un effet difficile à mesurer lors d'une étude de convergence en maillage.

Toutes ces méthodes modifient la géométrie des interfaces. Il en découle une variation de volume. Pour respecter le bilan de masse, il est nécessaire d'apporter une correction de volume

à chaque fois que l'une ou l'autre de ces procédures est utilisée. Tous ces algorithmes sont nécessaires au bon déroulement des simulations. Néanmoins leur effet sur le résultat n'est pas toujours négligeable et il convient de les utiliser avec parcimonie.

4.3 Parallélisme

Lors d'un calcul parallèle, le code Trio_U fonctionne la plupart du temps selon un modèle SPMD (Single Program, Multiple Data) : tous les processeurs exécutent le même algorithme et réalisent, à un instant donné, les mêmes opérations chacun sur un sous-domaine. Ainsi, tous les processeurs résolvent le même système d'équations simultanément (mêmes équations, même discrétisation, même schéma en temps, etc.). Dans ce modèle, les communications font l'objet de points de synchronisation chaque fois que les processeurs doivent échanger des données.

4.3.1 Domaine eulérien

Le domaine d'étude est divisé en N sous-domaines qui sont associés aux N processeurs qui servent à résoudre le problème. Chaque processeur résout le problème complet sur ce sous-domaine. Il a donc besoin de connaître les éléments géométriques (sommets, éléments, faces) qui se rapportent au sous-domaine en question. Chaque processeur possède aussi la valeur des champs physiques (vitesse, pression, indicatrice ...) dans cette zone.

Les opérateurs spatiaux nécessaires à la résolution des équations discrètes permettent de calculer une grandeur sur chaque élément géométrique à partir d'autres grandeurs situées sur ses voisins. Pour réaliser cette opération sur un élément situé au bord du domaine chaque processeur doit connaître les éléments géométriques voisins des siens. Comme ceux-ci ne lui appartiennent pas, il ne résout pas le problème sur ces éléments mais il doit pouvoir accéder à l'information qui y est relative. Pour cette raison, trois types d'éléments géométriques sont définis :

- les éléments réels : ils appartiennent au processeur considéré et sont situés dans le sous-domaine associé,
- les éléments de bords (sommets et faces) : ils sont communs à plusieurs processeurs,
- les éléments virtuels : ils sont une simple copie des éléments situés dans le voisinage direct du processeur.

Cette méthode de parallélisme par décomposition de domaine avec recouvrement permet de réaliser efficacement des calculs massivement parallèles. On peut *a priori*, découper le domaine en autant de portion que l'on veut. Néanmoins, il existe une limite pratique au-delà de laquelle il n'est plus intéressant (du point de vue de l'augmentation de la vitesse de calcul) d'augmenter le nombre de sous-domaines. Cette limite est associée au temps nécessaire pour réaliser les communications entre les différents processeurs.

4.3.2 Domaine lagrangien

Les algorithmes visant à la parallélisation de problèmes de type Front-Tracking apportent un niveau de complexité supplémentaire. En effet, dans ce qui précède, la structure de donnée est statique car les éléments géométriques ne changent pas de processeur en cours de calcul. À l'inverse, la structure de donnée associée au maillage lagrangien est dynamique. Elle est modifiée en cours de calcul non seulement par les algorithmes de remaillage (voir les paragraphes 4.2.2, 4.4.2), mais aussi par le fait que les éléments lagrangiens sont susceptibles de se déplacer d'un sous-domaine eulérien à un autre.

Pour illustrer cela, prenons l'exemple d'une bulle située en bas d'un domaine liquide. Ce domaine est découpé en tranches qui forment des sous-domaines (chacun associé à un processeur distinct). La bulle est mue par les forces de flottabilité. Elle va donc transiter au fur et à mesure

du temps par les différents sous-domaines. Chaque élément du maillage lagrangien est rattaché au processeur qui est en charge du domaine sur lequel il est. Les structures de données associées à chaque processeur vont donc être réarrangées au fur et à mesure du calcul pour tenir compte de ce déplacement.

De façon générale, les règles de rattachement d'un élément du maillage lagrangien sont :

- chaque sommet est situé au sein d'une maille (il ne peut être sur une face ou une arête),
- chaque processeur possède tous les sommets lagrangiens qui appartiennent à ses éléments eulériens,
- chaque facette lagrangienne est associée à l'un de ses sommets et est rattachée au processeur qui possède ce sommet.

De la même façon que pour le domaine eulérien, chaque processeur possède une copie de certains éléments lagrangiens appartenant à ses voisins (appelés éléments virtuels) qui lui sont nécessaires lors des interpolations entre le maillage lagrangien et eulérien.

4.4 Améliorations apportées

Dans cette partie, nous allons présenter les développements que nous avons réalisés dans le module Front-Tracking pour nos applications. Celles-ci seront détaillées plus tard dans ce mémoire.

4.4.1 Injection et destruction de bulles dans la colonne

Pour réaliser notre simulation en rationalisant les coûts de calcul, nous avons besoin d'un moyen efficace d'introduire et de faire sortir la phase gazeuse du domaine de calcul. Il s'agit ici de réaliser une condition aux limites en entrée qui permette d'introduire un nombre de bulles précis tout en maîtrisant leur taille. Dans un premier temps, nous avons commencé par utiliser un système d'injecteurs physiques composé de cavités remplies de gaz. Néanmoins, la précision sur le taux de vide injecté et la taille des bulles ne semblait pas satisfaisante. Une méthode plus efficace a donc été développée et utilisée ici en s'éloignant d'une mise en œuvre du type de celles utilisées expérimentalement. En bas de la colonne, les inclusions sont injectées par un processus non physique qui consiste à remplacer instantanément la phase liquide par la phase gazeuse (en modifiant l'indicatrice de phase) et ajouter la nouvelle portion d'interface correspondante. Le moment de l'injection et la forme de cette nouvelle inclusion sont décidés par la "stratégie" d'injection. Celle-ci est stockée dans un fichier fourni en entrée de Trio_U, en complément du jeu de données.

Par ailleurs, il est extrêmement difficile de faire "sortir" une interface du domaine car une condition d'angle de contact doit être imposée sur les faces de bord pour le maillage lagrangien. Si la quantité de gaz sortant du domaine est trop importante, il peut se former une sorte de "bouchon" qui condamne la sortie. Indépendamment de ce problème, il est nécessaire d'imposer correctement la pression en sortie afin de tenir compte du saut de pression associé aux forces de tension de surface. Pour éviter des problèmes en sortie, il est donc nécessaire de séparer les phases avant les conditions aux limites. Comme précédemment, nous avons, dans un premier temps, imaginé utiliser un processus physique pour séparer les phases. Malheureusement, nous n'avons pas trouvé de système suffisamment compact spatialement pour être compatible avec les calculs que nous voulions réaliser. Pour éliminer la phase gazeuse avant qu'elle ne touche la condition aux limites de sortie, nous avons opté pour un processus non physique. Ainsi, nous définissons une sous-zone du domaine d'une maille d'épaisseur avant la condition aux limites de sortie. En cours de calcul, si au moins un élément de cette sous-zone a une indicatrice différente de celle

de la phase continue, alors on recherche la composante connexe (définie par l'indicatrice) à cet élément. On détruit ensuite la portion du maillage qui appartient à cette composante connexe et la valeur de l'indicatrice est fixée à celle définissant la phase continue.

La procédure que vient d'être introduite présente l'avantage de ne nécessiter qu'un faible encombrement spatial. En effet, les parties du domaine en bas et en haut de la colonne où les bilans ne sont pas respectés sont très réduites. De plus, nous maîtrisons complètement le taux de vide injecté et la dispersion de l'essaim de bulles introduit dans le domaine. Enfin, cette méthode a une influence négligeable sur l'écoulement au centre de la colonne.

4.4.2 Remaillage semi-global

En cas de collision entre deux portions du maillage lagrangien, il existe un problème d'orientation des normales aux interfaces et de définition de la notion topologique d'intérieur et d'extérieur. Pour remédier à ce problème, une solution simple mais efficace et robuste est implémentée dans `Trio_U`. Celle-ci consiste à détruire le maillage lagrangien et à le reconstruire à partir d'une fonction telle que l'indicatrice de phase. On se replie alors sur une construction de l'interface à partir de l'indicatrice analogue à beaucoup d'autres approches.

Néanmoins, nous avons constaté que ce remaillage global des interfaces a une influence extrêmement néfaste sur la qualité de nos résultats. En effet, celui-ci a été conçu de sorte à conserver le volume, mais il a un effet de lissage sur les interfaces. Ainsi, il y a une forte diminution (non physique) de la surface d'interface (donc de l'énergie stockée sous forme de tension superficielle) dans le domaine au cours de cette opération.

Dans la mesure où notre simulation fait intervenir une grande quantité de portions connexes d'interface, il est inutile de remailler l'ensemble de celles-ci lors de la collision d'un faible nombre de bulles entre elles.

Nous avons donc développé une méthode qui ne remaillie que les portions connexes d'interface qui sont entrées en collision (figure 4.6(a)). Pour cela, on commence par repérer la portion connexe d'indicatrice (repérée par la phase dispersée) qui englobe le lieu de la collision. Cette zone de l'espace est appelée D_1 sur la figure 4.6(b). Ensuite, on crée deux nouveaux champs indicatrice (χ_1 et χ_2) et deux nouveaux maillages (M_1 et M_2). M_1 est une copie de la portion du maillage lagrangien comprise dans D_1 . χ_1 , quant à elle, est une copie de la fonction indicatrice de phase dans D_1 et vaut la valeur de l'indicatrice de la phase continue ailleurs (figures 4.6(c) et 4.6(d)). M_2 et χ_2 sont les complémentaires de M_1 et χ_1 .

Maintenant que nous avons séparé la zone à remailler de la zone à conserver intacte, il faut réaliser un remaillage global de M_1 à partir de χ_1 (figure 4.6(e)). Une fois fait, il ne reste plus qu'à concaténer M_1 et M_2 et à sommer χ_1 et χ_2 (figure 4.6(f)).

4.4.3 Terme source répulsif

Il s'agit, dans cette partie, d'empêcher que les inclusions ne rentrent en contact avec les parois. Pour cela, on ajoute une force sous la forme d'un potentiel calculé sur le maillage lagrangien de la même façon que le terme de gravité. Cette force est non physique et permet simplement d'empêcher les bulles d'adhérer aux parois. Les termes de gravité et de tension de surface se réécrivent alors

$$\rho g - (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma = ((\phi - \phi_r)(\rho_g - \rho_l) + \kappa \sigma) \nabla \chi_g \quad (4.16)$$

où ϕ_r est potentiel répulsif associé au terme source que l'on souhaite introduire. On choisit maintenant ce potentiel de sorte que la force répulsive soit non nulle uniquement près des parois

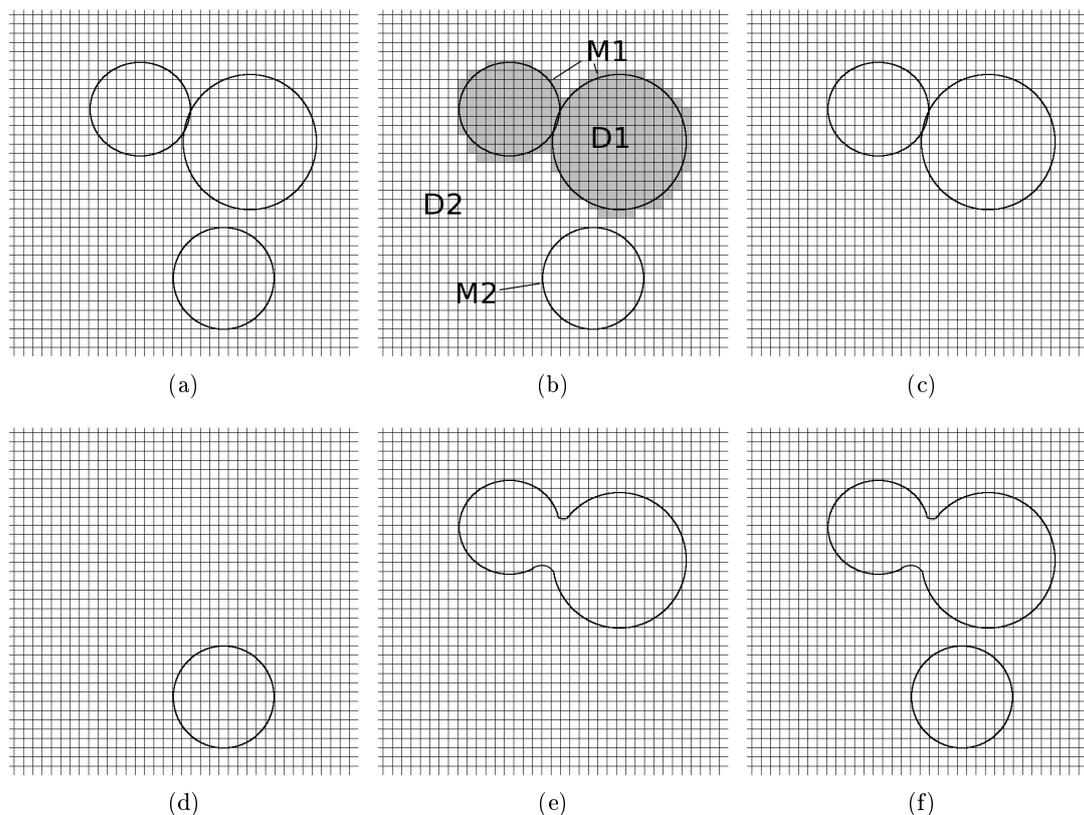


FIGURE 4.6 – Étapes du remaillage semi-global

et qu'elle soit dirigée dans le sens de la normale à la paroi. Nous avons choisi ϕ_r linéaire par morceaux : cette fonction est nulle loin des parois et linéaire près des frontières du domaine. La figure 4.7 illustre le choix que nous avons fait.

En imposant le terme source répulsif sous la forme d'un potentiel, on obtient une force résultante qui ne s'applique que sur les interfaces quand elles s'approchent des bords du domaine. Ainsi, le terme source répulsif est nul en l'absence d'interface et n'a donc pas d'effet sur le liquide près du bord. L'équation de Navier-Stokes monofluide 4.9 est donc presque toujours respectée. L'impact de ce terme sur les champs de vitesse et de pression est donc très faible.

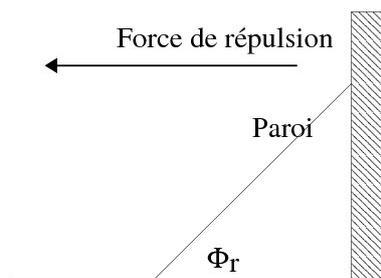


FIGURE 4.7 – Illustration du potentiel répulsif et de la force qui en résulte

4.4.4 Méthode de repérage des composantes connexes

Le module Front-Tracking de Trio_U traite une collection de facettes lagrangiennes reliées entre elles par des tableaux de connectivité. Il ne fait pas de distinction entre une bulle ou une autre. Afin de réaliser des post-traitements statistiques sur les essaims de bulles que nous allons étudier et de calculer une vitesse moyenne pour chaque inclusion, il est nécessaire de repérer, dans cette collection de facettes, les portions disjointes. Une difficulté supplémentaire provient de l'aspect parallèle des calculs. En effet, les composantes doivent être numérotées de façon globale : chaque bulle possède un numéro unique dans le domaine et si une bulle est à cheval sur deux sous-domaines (*i.e.* partagée entre plusieurs processeurs), elle doit être numérotée de la même façon dans chaque sous-domaine.

L'algorithme se décompose en trois étapes :

- dans un premier temps chaque processeur détermine les composantes connexes qui sont dans son domaine et leur assigne un numéro local,
- un tableau de connectivité entre les différents numéros locaux est réalisé,
- puis l'un des processeurs attribue, à partir de ce tableau de connectivité, un numéro global et unique à chaque bulle.

4.4.5 Déplacement des marqueurs dans le repère lié à une composante connexe

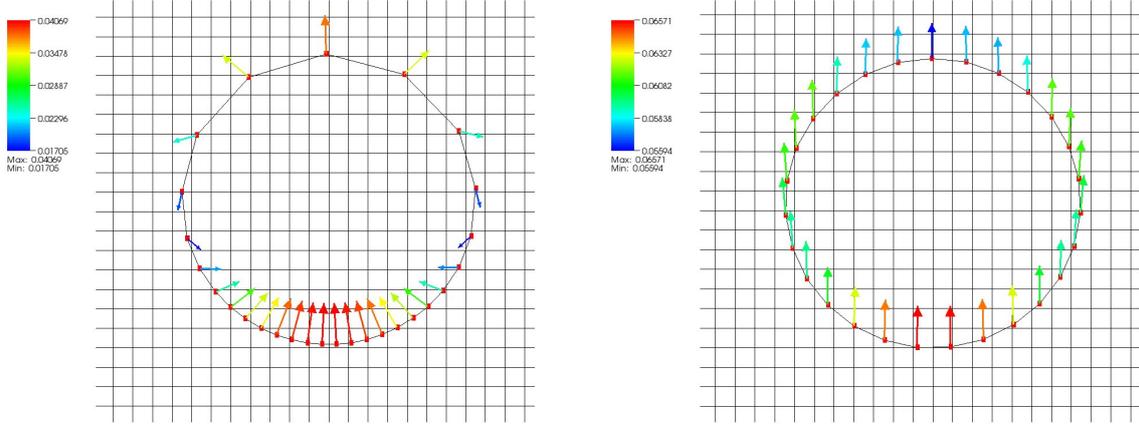
Si on considère le cas d'une bulle qui se déplace dans un liquide sous l'effet des forces de gravité, la vitesse monofluide dans le repère de la bulle en proche interface n'est pas nulle. Comme la divergence surfacique de la vitesse de déplacement des marqueurs n'est pas nulle sur l'interface, les facettes ont tendances à se dilater dans certaines zones et à se contracter dans d'autres. Typiquement pour une bulle en ascension dans un liquide, les facettes se dilatent en haut de la bulle et se contractent en bas. Cette migration de particules fluides le long de l'interface correspond à la situation physique d'une interface non contaminée. Il existe alors des points où ces particules convergent ou divergent. À ces points d'arrêt, il y a échange de matière entre les phases et l'interface. Ainsi, les molécules des fluides qui se trouvent à l'interface sont constamment renouvelées.

Pour cette raison, on est obligé de procéder périodiquement à un remaillage local de l'interface comme expliqué au paragraphe 4.2.2. Néanmoins, ces algorithmes influencent sensiblement les résultats des simulations. On souhaite donc limiter au maximum le recours à ces algorithmes.

Pour cela, on propose une méthode qui vise à réduire le déplacement relatif des marqueurs les uns par rapport aux autres. Si on considère une portion d'interface connexe et fermée (une bulle ou une goutte), cela revient à annuler la vitesse tangentielle des marqueurs dans le repère mobile associé à cette portion d'interface. Dans un premier temps, il est nécessaire d'estimer la vitesse de déplacement du centre de gravité de l'inclusion. La position du centre de gravité de l'interface est donnée, de façon discrète par

$$\mathbf{G}_{interface} = \frac{\sum_{facettes} \mathbf{x}_{facette} S_{facette}}{\sum_{facettes} S_{facette}} \quad (4.17)$$

où $\mathbf{x}_{facette}$ et $S_{facette}$ sont respectivement la position du centre de gravité et la surface de la facette considérée du maillage lagrangien. La vitesse du centre de gravité est alors obtenue par simple dérivation. Après simplification, on obtient



(a) Transport avec la vitesse monofluide interpolée

 (b) Utilisation de $\mathbf{V}_{\text{corrigee}}$

FIGURE 4.8 – Visualisation de l'influence du choix de la vitesse des marqueurs sur le maillage lagrangien à l'instant $t/\tau = 0.18$, où τ est le temps caractéristique de mise en mouvement (voir la section 1.4). La vitesse de déplacement des marqueurs est représentée dans les deux cas (coloration par la norme de la vitesse)

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\text{interface}}} = \frac{\sum_{\text{facettes}} [\mathbf{V}_{\text{facette}} S_{\text{facette}} + (\mathbf{x}_{\text{facette}} - \mathbf{G}^{\text{interface}}) S'_{\text{facette}}]}{\sum_{\text{facettes}} S_{\text{facette}}} \quad (4.18)$$

où $\mathbf{V}_{\text{facette}}$ et S'_{facette} ($\mathbf{V}_{\text{facette}}$) sont respectivement la vitesse et la dérivée de surface de la facette considérée (celle-ci, dépend bien évidemment du champ de vitesse $\mathbf{V}_{\text{facette}}$ choisi). La vitesse du centre de gravité de l'interface n'est donc pas réduit à la simple moyenne de la vitesse de chacune des facettes mais inclut la variation de surface, au cours du temps, de chaque facette.

Chaque vecteur \mathbf{a} de l'interface peut être décomposé en une partie normale, notée \mathbf{a}_n , et une partie tangentielle \mathbf{a}_t . Comme nous l'avons exposé précédemment, nous souhaitons transporter les marqueurs avec une vitesse $\mathbf{V}_{\text{corrigee}}$ telle que

$$\mathbf{V}_{\text{corrigee}} = \mathbf{V} - (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\text{interface}}})t \quad (4.19)$$

$$= \mathbf{V}_n + (\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\text{interface}}})t \quad (4.20)$$

$$= (\mathbf{V})_n + \mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\text{interface}}} - (\mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\text{interface}}})_n \quad (4.21)$$

$$= (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\text{interface}}})_n + \mathbf{V}_{\mathbf{G}^{\text{interface}}} \quad (4.22)$$

Nous avons réalisé un test de validation dans le cas d'une bulle d'air bidimensionnelle ($d_e = 0,74 \text{ mm}$ en ascension dans de l'eau. Pour cela, nous avons désactivé les algorithmes introduits à la section 4.2.2. Puis nous avons transporté l'interface d'une part avec la vitesse classique (*i.e.* la vitesse monofluide interpolée sur le maillage lagrangien) et d'autre part avec la vitesse corrigée calculée grâce à l'équation 4.22. La figure 4.8 présente les résultats associés à ces deux

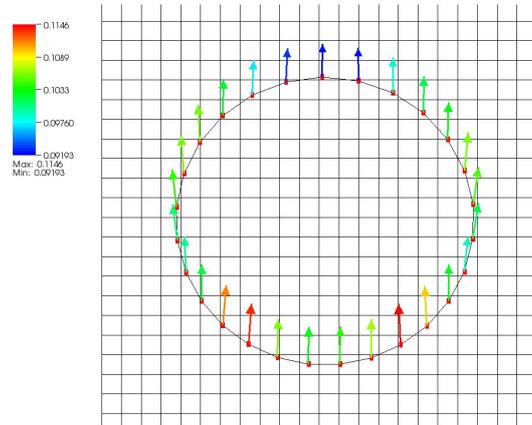


FIGURE 4.9 – Visualisation de maillage lagrangien obtenue quand la vitesse de transport est $\mathbf{V}_{\text{corrigée}}$ à l'instant $t \simeq \tau$. Le champ de vitesse de déplacement des marqueurs est représenté : coloration par la norme de la vitesse

configurations. On remarque sur la figure 4.8(a), que le champ de vitesse classique présente une divergence surfacique non nulle et que les mailles supérieures de la bulle sont fortement dilatées alors que celles qui sont en bas sont contractées. Le maillage résultant est, ici, très rapidement dégradé. À l'opposé, sur la figure 4.8(b), on constate que le champ de vitesse qui sert à transporter l'interface est beaucoup plus régulier. Le maillage lagrangien est presque identique à celui de la configuration initiale. Nous avons estimé que le temps au bout duquel il est nécessaire d'avoir recours aux algorithmes de traitement du maillage augmente d'un facteur 20. Sur la figure 4.9, est représentée une visualisation du maillage lagrangien dans la situation identique à celle de la figure 4.8(b) mais au temps $t \simeq \tau$. En comparant les figures 4.8(a) et 4.9, on constate que l'utilisation de la vitesse classique dégrade beaucoup plus rapidement le maillage lagrangien.

4.5 Conclusions

Pour ce travail, nous avons besoin d'une méthode de SND diphasique qui nous permette de réaliser des calculs précis d'écoulement contenant un nombre important de bulles. Dans ce chapitre, nous avons exposé quelques méthodes classiques de simulation numérique directe diphasiques. Nous avons ainsi évoqué les méthodes à maillage adaptatif qui sont précises mais qui ne permettent pas de gérer un grand nombre d'inclusions. Ensuite, nous avons présenté les méthodes VOF et level-set qui sont facile à implémenter mais qui ne permettent pas de conserver correctement la masse. Puis, nous avons présenté plus spécifiquement la méthode de type Front-Tracking que nous utilisons. Celle-ci est coûteuse d'un point de vue algorithmique mais permet d'avoir de bonnes propriétés de conservation de la masse. Après avoir décrit la méthode de discrétisation VDF et les méthodes numériques mises en œuvre, nous avons expliqué le fonctionnement de la procédure employée pour résoudre les équations de Navier-Stokes monofluides. Nous avons aussi présenté la discrétisation des termes de tension de surface qui permet de nous affranchir des courants parasites (que l'on retrouve classiquement dans les autres méthodes). Nous avons, ensuite, pointé du doigt les contraintes algorithmiques associées à la gestion du maillage lagran-

4.5. CONCLUSIONS

gien et à la parallélisation des calculs. Enfin, nous avons précisé les développements réalisés afin de produire des simulations diphasiques de colonne à bulles. Ceux-ci visent d'une part à imposer des conditions aux limites d'entrée et de sortie de la phase dispersée et d'autre part à assurer la conservation de la surface d'interface en limitant le recours aux algorithmes de remaillage (local et global).

Néanmoins, les phénomènes de coalescence, fragmentation sont encore mal pris en compte car les forces de tension superficielles ne sont pas précisément estimées lorsque deux portions d'interface sont trop proches l'une de l'autre. De plus, la méthode ne permet pas de modéliser la non résolution des films liquides. Nous nous limiterons donc dans ce travail à des écoulements pour lesquels le nombre de changements topologique est faible.

Nous allons, dans le prochain chapitre, réaliser un premier changement d'échelles en nous intéressant aux modélisations physiques de type simulation des grandes échelles.

Chapitre 5

Simulation des grandes échelles et modèle ISS

DANS le chapitre précédent, nous avons présenté quelques méthodes de simulations numériques directes des écoulements diphasiques. Ces modèles sont extrêmement précis mais nécessitent des moyens de calcul très importants. Afin de réduire le coût numérique de nos simulations, nous allons chercher à développer une méthode analogue aux SGE monophasiques. Nous allons commencer par présenter quelques généralités sur la SGE monophasique ainsi que les modèles classiques. Ensuite, nous allons filtrer les équations monofluides afin de construire un problème continu pour lequel l'interface est épaissie par le filtrage. Les termes sous-maille seront alors fermés grâce à une modélisation de type Bardina [43]. Afin de tirer partie de notre méthode de SND diphasique, nous allons présenter une utilisation de la méthode des développements asymptotiques raccordés qui vise à reconstruire un problème discontinu.

Après avoir établi les équations du modèle ISS, nous allons chercher à réaliser des tests *a posteriori* pour valider le modèle. Pour cela, nous allons étudier trois configurations qui nous semblent pertinentes.

5.1 Rappels concernant la SGE monophasique

La résolution "brutale" (SND) des équations de Navier-Stokes est extrêmement coûteuse. Par exemple, pour les écoulements turbulents, le rapport entre la plus grande et la plus petite échelle varie comme $R_e^{3/4}$ ¹. La résolution d'un tel problème dans un domaine cubique nécessite donc l'utilisation de $O(R_e^{9/4})$ degrés de liberté. Bien évidemment, la résolution temporelle du problème a un coût qui est, dans le meilleur des cas, aussi proportionnel à $R_e^{3/4}$. Dans les configurations industrielles classiques, la valeur du nombre de Reynolds dépasse couramment 10^5 . Afin de réaliser les études avec les moyens numériques disponibles, les auteurs ont donc très rapidement essayé de réduire le nombre de degrés de liberté des problèmes traités.

Historiquement, les premières approches ont consisté à décomposer les champs physiques en la somme d'une partie fluctuante et d'une partie moyenne. Il s'agit ici de l'approche appelée RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), qui est encore la plus utilisée pour les calculs d'ingénierie. L'idée est alors de résoudre des équations associées aux grandeurs moyennes et d'éliminer les fluctuations de vitesse et de pression. Néanmoins, ces équations font apparaître des termes non fermés (*i.e.* qui ne peuvent être calculés à partir des inconnues du problème). Ces derniers proviennent de la non linéarité des équations de Navier-Stokes et s'expriment comme des

1. Le nombre de Reynolds est ici construit à partir des propriétés physiques et des échelles de longueur et de vitesse pertinentes du problème traité.

fonctions des fluctuations du champ de vitesse.

De l'importance (dans certaines configurations) des fluctuations des champs physiques associées aux grosses structures de l'écoulement est née une autre approche appelée Simulation des Grandes Échelles (SGE). La réduction du nombre de degrés de liberté provient alors d'un filtrage spatial des équations de Navier-Stokes. On distingue donc deux catégories d'échelles :

- celles qui sont résolues : elles sont plus grandes que la largeur de coupure du filtre utilisé et sont donc explicitement calculées,
- celles qui sont modélisées : elles sont plus petites que la largeur de coupure du filtre utilisé. Même si elles ne sont pas résolues, elles ont un effet physique sur les grandes échelles qui est pris en compte par l'intermédiaire d'un modèle physique.

5.1.1 Filtrage

En filtrant les équations de Navier-Stokes, on cherche à construire un problème dont les inconnues sont plus régulières que celles du problème initial. Comme les variables du nouveau problème sont plus lisses (elles contiennent moins de hautes fréquences), le nombre de degrés de liberté nécessaire à la bonne description des champs est réduit. Il est donc possible de résoudre le nouveau système d'équations avec une discrétisation plus lâche. Néanmoins, comme les équations de Navier-Stokes sont non linéaires, le filtrage fait apparaître des termes qui ne sont pas directement calculables à partir des variables du problème filtré. Ceux-ci doivent donc faire l'objet d'une modélisation.

La taille du maillage ne peut être plus grande que la largeur de coupure du filtre² mais peut être choisie, *a priori*, aussi petite que l'on veut. En pratique, la largeur de coupure est identique à la taille des mailles pour minimiser le coût de calcul.

Il existe plusieurs types de filtres que l'on peut classer en trois grandes catégories :

- Le filtre analytique : il permet d'écrire les équations de Navier-Stokes filtrées,
- Le filtre explicite : il permet de réaliser un filtrage d'une grandeur physique. Ce genre de filtre est utilisé dans certains modèles physiques,
- Le filtre implicite : c'est un filtre qui est associé au choix de la discrétisation et des schémas numériques utilisés. On ne connaît pas sa forme et on suppose que sa largeur de coupure est de l'ordre de la taille du maillage.

5.1.2 Modèles monophasiques

Comme nous venons de l'expliquer, le formalisme de la SGE repose sur un filtrage passe-bas des équations de bilan. Le filtre utilisé est caractérisé par son noyau de convolution G et par sa largeur de coupure Δ . La plus petite longueur d'onde qui puisse être reproduite entièrement est alors $k_c = \pi/\Delta$. Le produit de convolution correspondant au filtrage d'une variable $f(\mathbf{x}, t)$ (scalaire ou vectorielle), s'écrit dans l'espace physique :

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = G \star f(\mathbf{x}, t) = \int_t \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, t) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t') d\mathbf{y} dt' \quad (5.1)$$

$\bar{f}(\mathbf{x}, t)$ correspond aux échelles de taille supérieure à Δ et associées aux nombres d'onde inférieurs à k_c . Le champ sous-maille est alors inconnu et correspond aux échelles de taille inférieure à Δ . Il est défini par rapport au champ total $f(\mathbf{x}, t)$ par :

$$f' = f(\mathbf{x}, t) - \bar{f}(\mathbf{x}, t) = (1 - G) \star f(\mathbf{x}, t) \quad (5.2)$$

2. Dans l'approche SGE, la largeur de coupure du filtre (ou le filtre lui-même) intervient dans la fermeture des termes sous-maille.

Propriétés du filtre

Dans la suite de ce travail, nous supposons que les filtres (analytique, implicite et explicite) utilisés ont les propriétés suivantes :

- conservation des constantes : $\overline{\lambda} = \lambda$. Cette caractéristique est vérifiée si

$$\int_t \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t') d\mathbf{y} dt' = 1 \quad (5.3)$$

- linéarité : $\overline{\lambda f + \mu g} = \lambda \overline{f} + \mu \overline{g}$ (avec λ et μ constantes),
- commutation avec les opérateurs de dérivation (en espace et en temps) :

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \text{ et, } \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad (5.4)$$

Cette propriété est vérifiée si le noyau du filtre utilisé est invariant en espace et en temps. En pratique l'invariance en temps est généralement constatée. En revanche, l'invariance en espace n'est que très peu souvent vérifiée car les filtres discrets sont définis à partir du maillage qui est souvent irrégulier. Il subsiste des erreurs de commutation.

Contrairement aux opérateurs de Reynolds utilisés dans les modélisations de type moyennées, les filtres utilisés en SGE n'ont pas, *a priori*, de propriétés d'idempotence :

$$\overline{\overline{f}} \neq \overline{f} \quad (5.5)$$

Soit encore,

$$\overline{f'} \neq 0 \quad (5.6)$$

Cette dernière propriété est extrêmement importante notamment pour les modèles basées sur une méthode de déconvolution. En effet, si le filtre n'est pas idempotent, alors le filtrage peut être interprété comme un changement de variable et peut être inversé lors d'un processus de déconvolution. Il n'y a alors pas de perte d'information [44], [45].

Quelques exemples de filtres

Nous présentons les filtres classiquement utilisés en simulation des grandes échelles. Ceux-ci permettent de réaliser la séparation d'échelles en espace pour une longueur de coupure Δ . Nous les écrivons pour le cas monodimensionnel :

- Le filtre boîte (spatial) défini par :

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{si } |x| < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Celui-ci est extrêmement pratique pour réaliser un test *a priori* car il peut être défini de façon discrète directement à partir du maillage lagrangien. Néanmoins, l'opération de dérivation est délicate avec ce type de filtrage.

- Le filtre gaussien défini par

$$G(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi \Delta^2}} \exp\left(\frac{-\gamma |x|^2}{\Delta^2}\right) \quad (5.8)$$

où γ est une constante habituellement prise égale à 6. Celui-ci est infiniment dérivable, ce qui est très utilisé pour estimer précisément les dérivées des fonctions filtrées.

- Le filtre porte (espace spectral) :

$$\hat{G}(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k < k_c \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.9)$$

Celui-ci est utilisé dans les modèles spectraux car il est facile à calculer dans l'espace spectral. Il permet ainsi de séparer exactement la partie du signal à haute fréquence de la partie à basse fréquence. En revanche, son utilisation dans l'espace physique est moins aisée car la fonction de transfert est non locale (son support n'est pas compact) à l'inverse des deux premiers.

Les équations de Navier-Stokes monophasiques filtrées

Dans cette partie, nous allons filtrer formellement les équations de Navier-Stokes 3.2 et 3.3 pour un fluide monophasique incompressible, dont les propriétés physiques sont constantes en temps et en espace. La même procédure sera ensuite appliquée au système d'équations mono-fluides 3.25 dans une situation polyphasique. Cette démarche va nous permettre de présenter le principe et les principaux modèles de la SGE monophasique qui seront ensuite transposés dans une situation polyphasique pour construire le modèle ISS.

Les équations de Navier-Stokes filtrées s'écrivent :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.10a)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla \cdot (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.10b)$$

Le système d'équations précédent fait apparaître le terme $\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}})$ qui n'est pas explicitement calculable à partir des variables filtrées : c'est le problème de fermeture. La procédure classique consiste à décomposer ce terme en la somme d'une partie associée au champ de vitesse filtré $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}})$ et d'une partie dite sous-maille qui traduit l'effet des échelles sous-filtre sur les échelles résolues.

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.11a)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla \cdot (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}}) \quad (5.11b)$$

Le terme sous-filtre $\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{u}}) = -\nabla \cdot \mathbf{T}$ représente l'effet des échelles sous-filtre sur les échelles résolues. Il apparaît à cause de la non linéarité du terme convectif. Comme le calcul direct de ce terme à partir des champs résolus est impossible, des modèles physiques sous-filtre sont employés pour tenter de l'estimer. Ceux-ci sont plus ou moins complexes et visent à fermer le système d'équations précédent grâce à des arguments physiques. Bien qu'il existe des modèles très performants, il découle, le plus souvent, de leur utilisation une perte de généralité, c'est-à-dire qu'ils ne sont applicables que dans certaines situations.

Nous allons présenter brièvement quelques approches pour modéliser ce terme sous-filtre. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter par exemple l'ouvrage de P. Sagaut [44].

Modélisation fonctionnelle

Cette approche est basée sur l'hypothèse de viscosité turbulente ou hypothèse de Boussinesq

$$\mathbf{T}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{T}_{ll} = -\nu_t \bar{\mathbf{S}}_{ij} \quad (5.12)$$

On fait dans ce cas l'hypothèse que la partie déviatorique du tenseur sous-maille est proportionnelle au tenseur des taux de déformation résolu. On suppose donc que l'effet des petites échelles s'apparente à de la diffusion (les petites échelles dissipent l'énergie). Cette idée provient du concept de cascade d'énergie selon lequel, dans le cas d'un écoulement turbulent, l'énergie est transférée des grandes structures vers les petites jusqu'à une échelle suffisamment petite pour que l'effet de la diffusion moléculaire dissipe cette énergie.

Dans le cas des fluides incompressibles, la partie sphérique du tenseur sous-maille est alors intégrée à la pression. L'équation 5.11b se réécrit alors :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + (\nu + \nu_t) \nabla \cdot (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.13)$$

Le coefficient de proportionnalité ν_t entre le tenseur sous-maille et le tenseur des taux de déformation résolu est alors associé à une viscosité. Elle est appelée viscosité turbulente. Il faut alors trouver un modèle pour estimer la valeur de celle-ci. Il existe un nombre important de modèles et nous allons seulement présenter les principaux.

Le modèle de Smagorinsky [46] : il est basé sur une hypothèse de longueur de mélange dans laquelle on considère que la viscosité turbulente est proportionnelle à une échelle de longueur associée à la taille du filtre Δ , et une échelle de vitesse déterminée par le produit $\Delta |\bar{\mathbf{S}}|$ où $|\bar{\mathbf{S}}|$ est la norme du tenseur des taux de déformation résolu définie par :

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (5.14)$$

On fait dans ce cas l'hypothèse qu'en chaque point de l'espace et à chaque instant la production et la dissipation sous-maille s'équilibrent : il n'y a pas de transport de l'énergie cinétique turbulente k . Le modèle de Smagorinsky s'écrit

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\bar{\mathbf{S}}| \quad (5.15)$$

où C_s est une constante déterminée dans le cas d'une turbulence homogène isotrope d'après l'hypothèse d'équilibre local entre production et dissipation de l'énergie turbulente. Néanmoins, la constante C_s doit être ajustée en fonction de la configuration étudiée. De plus, cette approche est basée sur l'existence d'une zone inertielle dans le spectre d'énergie, ce qui limite son utilisation. Pour améliorer la fiabilité du modèle, il est possible d'introduire une équation supplémentaire décrivant l'évolution de k . Ce genre de modèle ne suppose plus un équilibre local. Cette propriété est extrêmement utile quand l'écoulement présente une zone de production et un transport important de k . Cela est le cas, par exemple dans une turbulence de grille : la production d'énergie cinétique a lieu au niveau de la grille alors que la dissipation se produit en aval. Certains auteurs cherchent alors à évaluer la constante de Smagorinsky de façon dynamique. Pour cela, un deuxième filtrage est appliqué aux équations de Navier-Stokes. On obtient un nouveau tenseur sous-maille associé à ce second filtrage qui permet d'évaluer la constante de Smagorinsky. Ce dernier type de modèle repose sur des concepts proches de ceux que nous développerons dans le paragraphe suivant. Bien évidemment ces deux améliorations peuvent être utilisées conjointement. Elles représentent tout de même un surcoût de calcul puisqu'il faut tenir compte d'une équation supplémentaire et/ou réaliser un filtrage explicite.

Modélisation structurelle

Cette catégorie de modèles est basée sur l'hypothèse de l'existence d'une similarité d'échelles. Elle suppose en plus que l'interaction entre échelles résolues et échelles sous-maille a principalement lieu entre les plus petites échelles résolues et les plus grandes échelles sous-maille. Cette

idée n'est pas reprise dans les modèles basés sur une viscosité turbulente, qui sont purement dissipatifs.

Hypothèse de similarité d'échelle : On décompose le champ de vitesse en la somme d'une partie filtrée et d'une partie fluctuante

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i, \quad (5.16)$$

Ceci permet d'obtenir la décomposition de Leonard [47] de $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \\ L_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \\ C_{ij} &= \overline{u'_i u_j} + \overline{u_i u'_j} \\ R_{ij} &= \overline{u'_i u'_j} \end{aligned} \quad (5.17)$$

où L_{ij} est le terme de Leonard, C_{ij} le terme croisé et R_{ij} le terme de Reynolds. L'intérêt de cette décomposition réside dans le fait que le terme de Leonard ne nécessite pas de travail de fermeture³. Germano [45] a revisité les travaux de Leonard [47] et propose la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mathcal{L}_{ij} + \mathcal{C}_{ij} + \mathcal{R}_{ij} \\ L_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \\ \mathcal{C}_{ij} &= \overline{u'_i u_j} - \overline{u'_i} \overline{u_j} + \overline{u_i u'_j} - \overline{u_i} \overline{u'_j} \\ \mathcal{R}_{ij} &= \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i} \overline{u'_j} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Cette décomposition est dite consistante car elle n'utilise que des invariants galiléens. Le modèle de similarité d'échelles le plus simple initialement proposé par Bardina *et al.* [43] revient à fermer le tenseur de sous-maille, τ , par le terme de Leonard de la décomposition précédente :

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (5.19)$$

Ce type de modélisation est physiquement interprété par une hypothèse de similarité d'échelles. Elle consiste à supposer que la structure statistique des tenseurs construits à partir des échelles sous-maille est similaire à celle de leurs équivalents évalués grâce aux plus petites échelles résolues. Pour cela, on définit trois échelles qui sont représentées à la figure 5.1 :

- les plus grandes échelles résolues,
- les plus petites échelles résolues (celles qui servent à évaluer le tenseur sous-maille),
- les échelles non résolues.

La similarité de structure peut s'expliquer de deux façons différentes :

- les échelles non résolues et les plus petites échelles résolues subissent de façon similaire l'influence des plus grandes échelles résolues,
- la signature fréquentielle des structures cohérentes est suffisamment large pour qu'elles agissent à la fois dans les trois zones considérées. L'action de ces structures peut donc expliquer les fortes corrélations des champs suivant leur niveau de décomposition.

3. De la même façon, l'équation 5.16 permet d'écrire $\overline{u'} = \overline{u} - \overline{u}$. Par conséquent, tout comme le terme de Leonard, la partie $\overline{u'_i u_j} + \overline{u_i u'_j}$ de C_{ij} est directement évaluable et ne nécessite pas de fermeture.

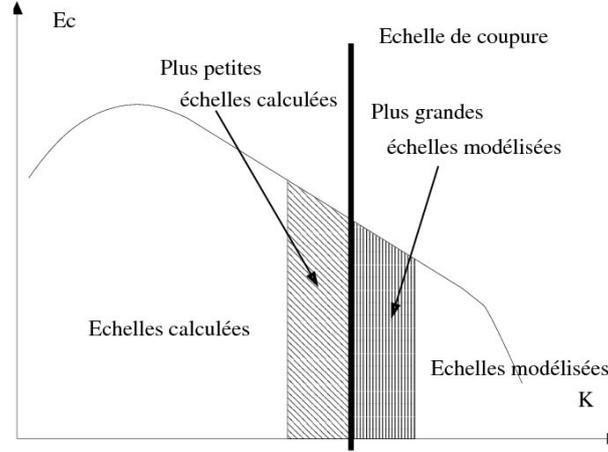


FIGURE 5.1 – Représentation schématique de la décomposition spectrale basée sur l’hypothèse de similarité d’échelles

L’hypothèse de similarité d’échelles est généralisée par Liu *et al.* [48] en fractionnant le spectre en un nombre arbitraire de zones et en reformulant l’hypothèse pour deux zones consécutives. On considère alors que la structure statistique des tenseurs construits à partir des plus grandes échelles sous-maille est identique à celle de leurs équivalents évalués à partir des plus petites échelles résolues. Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement avec succès dans le cas d’un jet turbulent [48].

Cependant, il est important de bien noter que ces interprétations physiques ne s’appuient pas sur la nature des interactions entre les différentes échelles. En particulier, elles ne présupposent pas les mécanismes de cascade énergétique. Pour illustrer leur généralité, on propose de les interpréter à partir des techniques de déconvolution.

Interprétation par une technique de déconvolution : on cherche, ici, à reconstruire formellement le champ de fluctuation de vitesse en inversant l’opérateur de filtrage. Ces techniques sont générales et échappent au seul champ d’application de la mécanique des fluides. Pour procéder à la reconstruction, on peut par exemple utiliser un développement de Taylor (pour les autres techniques de déconvolution ou plus de détail sur celle-ci, on pourra se référer encore une fois à [44]).

On rappelle les différentes étapes de calcul en 1D dans le cas d’un filtre porte dans le domaine spatial. Dans ce cas très particulier, on peut définir l’opération de filtrage comme suit :

$$\bar{\phi}(y) = \frac{1}{\Delta} \int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}} \phi(x) dx \quad (5.20)$$

Pour une grandeur physique supposée infiniment dérivable, on peut faire un développement de Taylor :

$$\phi(x) = \phi(y) + (x-y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{(x-y)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{(x-y)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + O((x-y)^4) \quad (5.21)$$

On utilise alors l’expression 5.21 dans 5.20. Les termes impairs de 5.21 ont une contribution nulle car y est au centre de l’intervalle d’intégration. Il en résulte que $\bar{\phi}$ se simplifie comme suit :

$$\bar{\phi} = \phi + \frac{\Delta^2}{24} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + O(\Delta^4) \quad (5.22)$$

En inversant formellement l'opérateur de filtrage, on a :

$$\phi = \bar{\phi} - \frac{\Delta^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + O(\Delta^4) \quad (5.23)$$

D'où on déduit :

$$\phi' = -\frac{\Delta^2}{24} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + O(\Delta^4) \quad (5.24)$$

La précision de la reconstruction dépend du taux de convergence de la série de Taylor. Pruett *et al.* [49] montrent que le développement en série converge vite pour des filtres classiques comme les filtres gaussiens et boîte. Le développement précédent n'est valable que pour le filtre porte et le filtre implicite a peu de chance de correspondre exactement à ce type de filtre. Aussi pour optimiser la valeur de la constante à mettre devant la dérivée seconde, on peut utiliser une procédure dynamique.

Avec cette technique de déconvolution, on trouve qu'à l'ordre le plus bas $\phi \approx \bar{\phi}$. En utilisant cette approximation dans l'expression du tenseur sous-maille $\boldsymbol{\tau}$, on retrouve l'expression 5.19.

On peut utiliser le même argument d'une autre façon. Le terme croisé, \mathcal{C}_{ij} , et l'équivalent du tenseur de Reynolds, \mathcal{R}_{ij} , de la décomposition consistante (*i.e.* la décomposition 5.18 proposée par Germano qui ne fait intervenir que des invariants galiléens) s'expriment à partir de la partie non résolue du champ de vitesse, \mathbf{u}' . D'après 5.24, cette partie est en Δ^2 . Le terme de Leonard est donc prépondérant devant ces deux autres termes et, en les négligeant, on retrouve à nouveau 5.19.

En résumé, l'ordre 0 des techniques de déconvolution nous semble naturellement conduire aux modèles dits de similarité d'échelles. Ces modèles ne sont donc pas associés à des mécanismes d'interaction spécifiques au 3D ou au monophasique (comme l'est le modèle de Boussinesq par exemple). D'ailleurs, de nombreux tests *a priori* réalisés à partir de données issues de SND ont montré que ce modèle est très bien corrélé avec le tenseur sous-maille même pour des écoulements anisotropes [50]. De plus, il modélise aussi le phénomène de cascade inverse. Malgré tout, ces modèles ont l'inconvénient d'avoir une contribution nulle lorsque le filtre est un filtre de Reynolds et ils ont tendance à ne pas être suffisamment dissipatifs.

Approche de type MILES

Ce type d'approche [51], [52], [53] consiste à ne pas introduire de modélisation sous-maille explicite mais à utiliser la dissipation numérique apportée par l'algorithme de convection comme modèle implicite. Elle est basée sur l'hypothèse selon laquelle les effets de la turbulence sous-maille sont essentiellement diffusifs. Cette dissipation implicite peut être quantifiée en réalisant la différence entre les équations de Navier-Stokes filtrées discrétisées avec l'opérateur de convection considéré, et celles discrétisées avec un schéma de convection d'ordre élevé. La méthode de type MILES est principalement utilisée pour des géométries complexes et/ou nécessitant des méthodes numériques robustes. C'est un outil extrêmement intéressant dans les configurations industrielles où la sous-résolution peut être très importante.

5.2 Quelques méthodes de SGE diphasique

Avant d'introduire le modèle ISS que nous avons utilisé dans ce travail, il convient de présenter les modèles de type SGE diphasique qui sont classiquement employés pour traiter les écoulements diphasiques.

5.2.1 Méthodes lagrangiennes

Cette méthode n'a été utilisée aujourd'hui que pour les écoulements dispersés [54], [55], [56], [57], [58]. La stratégie consiste dans ce cas à traiter la phase continue par une méthode eulérienne *via* la résolution des équations de Navier-Stokes monophasiques filtrés. La phase dispersée est, quant à elle, traitée par une méthode purement lagrangienne. Pour cela, les inclusions sont assimilées à des particules ponctuelles qui sont soumises à un ensemble de forces : traînée, portance, flottabilité, *etc.* (cf. section 1.2). Il existe un couplage entre les deux champs :

- les forces qui s'appliquent sur les particules s'expriment en fonction du champ de vitesse local des particules,
- l'équation de Navier-Stokes de la phase continue comprend des termes sources associés aux échanges de quantité de mouvement avec la phase dispersée.

5.2.2 Méthodes eulériennes

Dans cette approche les deux phases sont modélisées de façon eulérienne grâce à un formalisme qui peut être bifluide ou monofluide (la méthode que nous utiliserons appartient à cette dernière catégorie). On distingue généralement deux situations :

- la largeur de coupure du filtre est plus petite que le rayon de courbure, et les interfaces sont calculées [36],
- la largeur de coupure du filtre est plus grande que le rayon de courbure, et les interfaces sont essentiellement modélisées [59].

Les écoulements stratifiés sont généralement traités avec un modèle dont le filtre a une largeur de coupure plus petite que le rayon de courbure [60]. Comme nous allons développer un tel modèle dans la suite de cette partie, on pourrait penser que ce type de modèle est assez proche de celui que l'on souhaite réaliser ; néanmoins, on s'aperçoit que les écoulements stratifiés présentent généralement de faibles courbures et des valeurs du nombre de Reynolds assez élevées. Ainsi, le cisaillement à l'interface est très fort et l'influence des termes sous-maille diphasiques est négligés par certains auteurs comme par exemple [61], [62]. Il ne reste alors plus qu'à modéliser le terme sous-maille de convection monophasique par un modèle de type Boussinesq auquel on ajoute par exemple une fonction d'amortissement en proche interface côté gaz.

5.3 Modèle ISS

A. Toutant présente dans la version finale de sa thèse [63] et dans les articles qui en découlent [64] la méthodologie générale pour construire le modèle ISS. Nous avons participé, en partie, à l'élaboration de cette dernière : dans cette section, nous présentons une version modifiée et améliorée toujours en collaboration avec Toutant.

Pour cela, nous rappelons à nouveau les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placées :

- la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ sont constantes par phase,
- on se place dans le cadre des écoulements incompressibles,
- l'écoulement étudié est isotherme et sans changement de phase,
- la tension de surface σ est constante en espace et en temps.

Dans un premier temps, nous allons filtrer formellement les équations monofluides pour exhiber les termes à fermer. Nous obtiendrons alors un problème non fermé dans lequel les grandeurs physiques évoluent continûment en espace et en temps. En s'appuyant sur la hiérarchisation de

ces termes réalisée par Toutant [63] [64], nous allons fermer les termes sous-maille de plus forte importance grâce à des modèles de type similarité d'échelles et les autres par le vecteur nul. Enfin, nous présenterons la méthode des développements asymptotiques raccordés qui permet de construire un problème filtré discontinu.

5.3.1 Équations monofluides filtrées

L'objectif de cette partie est d'établir les équations monofluides filtrées en mettant en évidence les termes à fermer. En effet, ces les termes ne sont pas exprimés à partir des inconnues du problème et seront donc modélisés.

Les inconnues du problème

Nous rappelons que les inconnues du problème non filtré (système 3.25) sont \mathbf{u} , p , χ_k . En ce qui concerne le champ de vitesse, le choix fait ici est d'utiliser une moyenne classique ($\overline{\mathbf{u}} = \chi_l \mathbf{u}_l + \chi_g \mathbf{u}_g$) plutôt qu'une moyenne de Favre (moyenne pondérée par la masse volumique). L'utilisation de ce type de moyenne permet de simplifier l'écriture du bilan de quantité de mouvement mais complique de façon importante celle du bilan de masse filtré [65]. Ce choix devra tout de même être revu dans le cas des écoulements avec changement de phase, car les équations de bilan de masse et d'énergie ne s'écrivent plus aussi simplement. Les autres inconnues sont la pression filtrée $\overline{p} = \overline{\chi_l p_l + \chi_g p_g}$ et la fonction indicatrice de phase $\overline{\chi_k}$. Les deux fonctions indicatrices de phases sont reliées par la relation :

$$\chi_l + \chi_g = 1 \quad (5.25)$$

Le filtre employé étant linéaire, on en déduit trivialement que :

$$\overline{\chi_l} + \overline{\chi_g} = 1 \quad (5.26)$$

Les deux fonctions indicatrices de phases filtrées sont donc liées par une équation simple qui ne nécessite pas de fermeture. On ne résoudra donc qu'une seule équation de transport pour $\overline{\chi} = \overline{\chi_g}$ et on déduira $\overline{\chi_l}$ de l'équation 5.26.

Les filtres utilisés

Le filtrage explicite des équations est réalisé avec un filtre spatial de type boîte. Ce dernier présente l'avantage d'être simple et d'avoir les propriétés définies dans la section 5.1.2. De plus, la taille et la forme du support de ce filtre sont indépendantes du temps et de l'espace. Le filtre est alors défini par

$$\overline{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_{V_{\mathbf{x}}} \psi(y) dy \quad (5.27)$$

où $V_{\mathbf{x}}$ correspond au volume associé au support du filtre centré sur la position \mathbf{x} . On définit aussi l'opérateur de filtrage surfacique :

$$\overline{\psi}^s(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\int_{V_{\mathbf{x}}} \delta_{\sigma}(y) \psi(y) dy}{\int_{V_{\mathbf{x}}} \delta_{\sigma}(y) dy}, & \text{si } \int_{V_{\mathbf{x}}} \delta_{\sigma}(y) dy \neq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.28)$$

Les équations monofluides filtrées

Nous disposons maintenant des outils mathématiques pour procéder au filtrage formel des équations monofluides 3.25. Pour cela, nous allons adopter une démarche équivalente à celle utilisée pour les équations monophasiques dans la partie 5.1.2. En appliquant le filtre à tout l'espace, on réalise une opération de filtrage à "cheval" sur l'interface, ce qui n'est pas problématique car les équations monofluides sont définies dans tout l'espace.

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.29a)$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\chi}_k + \tau_{\text{interf}} = 0 \quad (5.29b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{temp}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{conv}}) &= -\nabla \bar{p} \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\mu}(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\tau}_{\text{diff}}) \\ &+ \bar{\rho}\mathbf{g} - \sigma \bar{\kappa}^s \bar{\mathbf{n}}^s \bar{\delta}_\sigma - \boldsymbol{\tau}_{\text{superf}} \end{aligned} \quad (5.29c)$$

où

$$\tau_{\text{interf}} = \overline{\mathbf{u} \cdot \chi_k} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\chi}_k \quad (5.30a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{temp}} = \overline{\rho \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.30b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{conv}} = \overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad (5.30c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{diff}} = \overline{\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})} - \bar{\mu}(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.30d)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{superf}} = \overline{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\sigma} - \sigma \bar{\kappa}^s \bar{\mathbf{n}}^s \bar{\delta}_\sigma \quad (5.30e)$$

Ces termes sous-maille sont, à l'exception d'une partie de $\boldsymbol{\tau}_{\text{conv}}$, spécifiques aux écoulements polyphasiques. τ_{interf} est associé à l'équation de transport de l'indicatrice filtrée. Il est dû aux corrélations entre la vitesse et la normale à l'interface causées par l'anisotropie du champ de vitesse en proche interface. Les autres termes sont associés à l'équation de quantité de mouvement monofluide filtrée. $\boldsymbol{\tau}_{\text{temp}}$ et $\boldsymbol{\tau}_{\text{diff}}$ sont dus à la forte anisotropie du champ de vitesse au voisinage des interfaces et à la discontinuité de l'indicatrice de phase. Cette forte variation de l'indicatrice de phase à l'interface implique que les propriétés physiques comme la masse volumique et la viscosité sont discontinues. $\boldsymbol{\tau}_{\text{superf}}$ est lié aux forces de tension de surface. Il est dû à l'existence de déformations interfaciales non résolues. Autrement dit, il provient de l'existence de fluctuations sous-maille de la normale à l'interface.

Il est possible de décomposer $\boldsymbol{\tau}_{\text{conv}}$ en deux parties :

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{conv}} = \overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\rho} \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} + \bar{\rho} (\overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.31)$$

La première partie est associée aux corrélations entre le champ de vitesse et la fonction indicatrice de phase. Elle est nulle loin de l'interface et dans le cas des écoulements monophasiques. La seconde partie, quant à elle, existe aussi en écoulements monophasiques et est associée aux corrélations vitesse-vitesse qui sont dues à la partie non résolue du champ de vitesse.

Hiérarchie des termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement

Dans l'équation de quantité de mouvement, nous avons mis en évidence quatre termes. Toutant [63] [64] a proposé de hiérarchiser ces termes. Cette hiérarchisation des termes est basée sur des résultats de SND [66], [67], [65] et a clairement pour but de réduire le travail

de modélisation en éliminant les termes de faible contribution. Cette série de tests correspond principalement à des cas liés à des bulles qui se déforment sous l'effet de leur régime d'écoulement propre ou d'une sollicitation extérieure : turbulence, vortex. Les auteurs souhaitent ainsi mettre en avant les interactions entre interfaces et turbulence. Les résultats de cette série de tests *a priori* sont :

$$\|\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{\text{conv}})\| > \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{\text{temp}}}{\partial t} \right\| \gg \|\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{\text{diff}})\| \gg \|\boldsymbol{\tau}_{\text{superf}}\| \quad (5.32)$$

Il est important de souligner que ces résultats sont relatifs aux maxima des termes considérés. Or, comme nous le verrons dans la suite de cette partie, ces termes sont intégrés formellement dans la direction normale de l'interface lors de l'étape de re-raidissement. Nous faisons donc implicitement l'hypothèse qu'il existe un lien direct entre les maxima des termes sous-maille à l'étape continue et leur contribution finale après re-raidissement.

Toutant [63] [64] choisit alors de négliger les termes $\boldsymbol{\tau}_{\text{superf}}$ et $\boldsymbol{\tau}_{\text{diff}}$ par rapport à $\boldsymbol{\tau}_{\text{conv}}$ et $\boldsymbol{\tau}_{\text{temp}}$. Dans le cadre de ce travail, et contrairement à l'auteur précédemment cité, nous allons tenir compte de $\boldsymbol{\tau}_{\text{diff}}$ et nous modéliserons ce terme. Nous verrons en fait que sa contribution est nulle à l'ordre 0.

Modélisation structurelle des termes sous-maille

De la même façon que pour la modélisation structurelle des écoulements monophasiques présentée dans la sous-section 5.1.2, on utilise la décomposition de Leonard revisitée par Germano [45]. Ainsi, le terme de Leonard, qui ne nécessite pas de fermeture, correspondant à chacun des termes à fermer est alors utilisé comme modèle. Pour différencier les termes sous-maille de leur modèle, on note ces derniers avec un exposant $.^m$:

$$\tau_{\text{interf}}^m = \overline{\mathbf{u} \cdot \overline{\chi}_k} - \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\chi}_k \quad (5.33a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{temp}}^m = \overline{\overline{\rho} \mathbf{u}} - \overline{\overline{\rho}} \overline{\mathbf{u}} \quad (5.33b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{conv}}^m = \overline{\overline{\rho} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \overline{\overline{\rho}} \overline{\mathbf{u}} \otimes \overline{\mathbf{u}} \quad (5.33c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{diff}}^m = \overline{\overline{\mu} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})} - \overline{\overline{\mu}} (\nabla \overline{\mathbf{u}} + \nabla^T \overline{\mathbf{u}}) \quad (5.33d)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{superf}}^m = 0 \quad (5.33e)$$

Le système d'équations précédent est valable dans tout l'espace et dégénère naturellement en un système qui correspond à un problème monophasique loin des interfaces (c'est-à-dire à une distance supérieure à la taille du filtre). À cette étape, le problème est fermé. Il serait donc possible de développer une méthode numérique capable de résoudre ces équations. Cette méthode devrait tenir compte du fait que la nouvelle interface est continue et présente une épaisseur non nulle. Néanmoins, nous souhaitons réutiliser la méthode de SND diphasique qui est disponible dans le logiciel Trio_U. Cette méthode est discontinue et présente l'avantage de permettre une localisation précise des interfaces. Afin de tirer partie de cette qualité, nous allons dans une seconde étape re-raidir le problème filtré. Pour cela, nous employons la méthode des développements asymptotiques raccordés.

5.3.2 Développements asymptotiques raccordés

Le système 5.29 muni des fermetures 5.33 correspond à une méthode de SGE diphasique avec une vision continue des interfaces. La résolution numérique de celui-ci nécessite de développer une méthode de type interface diffuse, ce qui demande un travail numérique et théorique important.

Il semble donc plus intéressant de reformuler directement le problème avec une vision discontinue des interfaces pour utiliser la méthode numérique de SND diphasique dont nous disposons.

Forme du système d'équations à fermer

On cherche à résoudre un système équivalent au système 5.29 muni des fermetures 5.33. Pour ce nouveau système, on souhaite ramener la zone continue de transition à une simple discontinuité. Les équations que l'on doit résoudre dans chacune des phases loin de l'interface se déduisent de 5.29 et 5.33. Comme tous les termes sous-maille dégènèrent loin des interfaces, on obtient :

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_k = 0 \quad (5.34a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k) &= -\nabla \tilde{p}_k + \nabla \cdot (\mu_k (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \tilde{\mathbf{u}}_k)) \\ &+ \nabla \cdot \left(\rho_k \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k} - \tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k \right) \right) \end{aligned} \quad (5.34b)$$

Ce système correspond à un problème monophasique avec un modèle de similarité d'échelles. C'est aussi le système que nous souhaitons obtenir loin des interfaces. Dans la mesure où nous résolvons notre problème discontinu dans tout l'espace, nous devons trouver :

- la forme des conditions à l'interface que l'on doit se donner,
- une fermeture de celles-ci,
- le lieu où elles sont imposées (*i.e.* la position de l'interface discontinue).

On utilise le formalisme monofluide afin de réaliser la première étape. De façon analogue à 3.16, chaque grandeur monofluide $\tilde{\psi}$ est alors définie par $\tilde{\psi} \triangleq \sum_k \tilde{\chi}_k \psi_k$. Ainsi, en multipliant le système d'équations 5.34 par la fonction indicatrice de phase du problème filtré discontinu $\tilde{\chi}_k$ pour chacune des deux phases et en les sommant, on obtient

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \sum_k \tilde{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \tilde{\chi}_k = 0 \quad (5.35a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) &= -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}}) \\ &+ \sum_k (\tilde{p}_k \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}_k) \cdot \nabla \tilde{\chi}_k \\ &- \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{L}}) \\ &+ \sum_k \rho_k \left(\tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{L}}_k) \cdot \nabla \tilde{\chi}_k \right) \end{aligned} \quad (5.35b)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_k &\triangleq \overline{\tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k} - \tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k \\ \tilde{\mathbf{S}}_k &\triangleq \mu_k (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \tilde{\mathbf{u}}_k) \end{aligned}$$

Le système 5.35 fait apparaître des termes de saut à l'interface. Néanmoins, celui-ci n'est pas fermé car il fait intervenir des grandeurs phasiques qui sont des fonctions de $\tilde{\chi}_k$. On ne peut pas, à ce stade, exprimer les relations de saut à l'aide des grandeurs monofluides filtrées discontinues. De façon équivalente à la SND définie par les équations 3.5 et 3.8, on cherche donc à préciser :

- la relation de saut issue du bilan de masse

$$\sum_k \tilde{\mathbf{u}}_k \cdot \nabla \tilde{\chi}_k = 0 \quad (5.36)$$

- la relation de saut issue du bilan de quantité de mouvement

$$\sum_k \left(\rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t} + \left(\tilde{p}_k \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}_k + \rho_k \left(\tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{L}}_k \right) \right) \cdot \nabla \tilde{\chi}_k \right) \quad (5.37)$$

- la vitesse, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, de la discontinuité équivalente, $\tilde{\chi}_k$

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t} + \mathbf{v}_{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \tilde{\chi}_k = 0 \quad (5.38)$$

La deuxième étape de notre démarche consiste à trouver une fermeture pour les équations 5.36 et 5.37. La dernière étape est, quant à elle, réalisée en précisant la vitesse de déplacement de la discontinuité équivalente. Contrairement au cas SND, cette vitesse ne se réduit pas à la vitesse monofluide du fait de l'existence de corrélations entre la vitesse et la normale à l'interface.

Pour cela, nous allons utiliser la méthode des développements asymptotiques raccordés aux équations de la SGE continue 5.29 et 5.33.

Choix de l'adimensionnalisation

La méthode des développements asymptotiques raccordés permet de trouver une solution approchée d'un système d'équations différentielles, où deux échelles de longueurs d'ordres de grandeurs très différents interviennent. En adimensionnalisant ce système, on fait apparaître un petit paramètre noté ϵ . On distingue alors deux zones distinctes de l'écoulement :

- la zone située loin de l'interface appelée zone "extérieure",
- la zone proche de l'interface où les grandeurs physiques varient très rapidement.

Ensuite, dans la zone intérieure, un changement de variable suivant la direction normale est réalisé afin de tenir compte de la variation rapide des grandeurs physiques. Les équations différentielles du problème intérieur sont alors écrites aux premiers ordres non nuls à l'aide d'un développement asymptotique en ϵ . Cela revient, en fait, à dilater la direction normale et à lui donner une importance prédominante par rapport aux deux autres directions. Après avoir résolu formellement les équations dans chacune des régions (intérieure et extérieure), on procède au raccord des solutions grâce aux conditions de raccord valables quand ϵ tend vers zéro [63], [64], [68].

Ainsi, en faisant tendre ϵ vers zéro, on fait tendre la zone de transition vers une surface de discontinuité. Les solutions des problèmes extérieurs sont alors les solutions approchées de ce nouveau problème discontinu appelé problème discontinu équivalent (il ne diffère du précédent que dans la zone de transition).

À partir de la résolution analytique d'une équation différentielle simplifiée dans la région intérieure, on obtient les équations de saut à appliquer aux problèmes extérieurs.

La méthode des développements asymptotiques raccordés repose donc sur l'existence de deux échelles de longueurs différentes et sur le choix du petit paramètre ϵ . Cette étape d'adimensionnalisation, qui peut paraître anodine et classique, a donc une influence directe sur le modèle final. La difficulté vient du fait que l'on choisit explicitement les échelles caractéristiques associées à notre problème (un autre auteur pourrait faire un choix complètement différent de celui qui est réalisé ici). Nous avons besoin de deux échelles de longueurs (pour construire ϵ , d'une échelle de vitesse (pour construire ensuite une échelle de temps) et d'échelles caractéristiques pour les propriétés physiques. Nous avons choisi les échelles caractéristiques suivantes :

- R_b , le rayon de la sphère osculatrice en un point de l'interface,
- δ , l'épaisseur de la zone de transition du problème filtré continu, *i.e.* la taille du filtre,
- V_T , la vitesse terminale de la bulle,
- g , la norme du vecteur gravité,
- ρ_l et μ_l la masse volumique et la viscosité dynamique de la phase liquide ⁴.

Le choix de ces échelles caractéristiques est principalement motivé par le fait que ces grandeurs caractérisent, à notre avis, le mieux le problème étudié ici. Comme nous l'avons expliqué plus haut, un autre auteur pourrait faire un choix différent (principalement dans le cas d'une configuration différente de la nôtre, comme ce serait le cas pour les écoulements stratifiés). On peut maintenant définir les variables adimensionnelles de notre problème noté $.^+$:

- $\nabla = \frac{1}{R_b} \nabla^+$,
- $\mathbf{u} = V_T \mathbf{u}^+$,
- $t = \frac{\delta}{V_T} t^+$,
- $p = \rho_l V_T^2 p^+$,
- $\rho = \rho_l \rho^+$ et $\mu = \mu_l \mu^+$.

Les nombres adimensionnels nécessaires à l'écriture des équations adimensionnalisées sont :

- $\epsilon = \frac{\delta}{R_b}$,
- $Re = \frac{\rho_l V_T R_b}{\mu_l}$,
- $We = \frac{\rho_l V_T^2 R_b}{\sigma}$.

La définition précédente fait apparaître un temps adimensionnalisé δ/V_T construit à l'aide de l'échelle de longueur correspondant à l'épaisseur de la zone de transition. Là encore, il s'agit d'un choix puisque l'on aurait pu utiliser le rayon de la sphère osculatrice. Ce choix est motivé par le fait que les grandeurs qui apparaissent dans les dérivées temporelles font intervenir la fonction indicatrice de phase qui varie sur l'épaisseur de transition δ . Comme nous le verrons plus loin, il résulte de ce choix qu'à l'ordre 0 en ϵ , le champ de vitesse macroscopique est stationnaire. Ceci signifie que l'interface est déplacée par un champ de vitesse stationnaire en première approximation.

Dans la suite, par souci de clarté, on omet l'exposant $.^+$. De même on se restreint, sans perte de généralité, à l'étude sans gravité car elle ne présente pas de difficulté de modélisation. Les

4. Les grandeurs de la phase liquide sont ici utilisées pour adimensionnaliser nos équations car les nombres adimensionnels utilisés dans ce mémoire et plus généralement dans la littérature consacrée aux écoulements à bulles, sont basés sur les grandeurs de la phase liquide.

choix précédents permettent d'adimensionnaliser le système 5.29 muni des fermetures 5.33

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.39a)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{\chi}_k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k + \overline{\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi_k} - \bar{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \bar{\chi}_k = 0 \quad (5.39b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) &= -\nabla \bar{p} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}})) \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}})}{\partial t} \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\rho} \bar{\bar{\mathbf{u}}} \otimes \bar{\bar{\mathbf{u}}}) \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\overline{\bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}})} - \bar{\mu} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \bar{\mathbf{u}})) \\ &+ \frac{\kappa}{We} \nabla \bar{\chi}_g \end{aligned} \quad (5.39c)$$

Développements asymptotiques raccordés

Système de coordonnées La fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ dont dépendent la viscosité dynamique $\bar{\mu}$ et la masse volumique $\bar{\rho}$ varie plus rapidement dans la direction normale à l'interface que suivant les directions tangentiellles. Pour dilater la direction normale à l'interface, on se place dans le système de coordonnées généralisées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) lié à l'interface discontinue équivalente. (ξ_1, ξ_2) mesurent la distance selon les directions principales de l'interface et ξ_3 mesure la distance selon la direction normale à l'interface.

Dans ce paragraphe, sont utilisés les facteurs d'échelle de chaque direction principale, h_1 et h_2 , ainsi que les courbures principales, κ_1 et κ_2 . La notation $\check{\check{u}}(i)$ désigne la composante i du vecteur $\check{\check{\mathbf{u}}}$ dans le repère associé à l'interface, $\{\mathbf{g}_i\}$ (les directions 1 et 2 sont les directions principales de l'interface et la direction 3 est la direction normale à l'interface).

- Pour étudier le problème intérieur, une nouvelle variable d'espace est introduite :

$$\xi \triangleq \frac{\xi_3}{\epsilon}, \quad \text{avec} \quad \epsilon \triangleq \frac{\delta}{R_b} \quad (5.40)$$

On réécrit le système 5.39 en utilisant cette nouvelle variable d'espace. Ceci a pour conséquence de faire apparaître un facteur $1/\epsilon$ devant les dérivées suivant la direction normale. Soit ϕ une grandeur physique, on pose :

$$\check{\check{\phi}}(\xi_1, \xi_2, \xi) = \phi(\xi_1, \xi_2, \frac{\xi_3}{\epsilon}) \quad (5.41)$$

Dans la région intérieure, on cherche les solutions sous la forme :

$$\check{\check{\phi}}(\xi_1, \xi_2, \xi, \epsilon) = \check{\check{\phi}}^0(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon \check{\check{\phi}}^1(\xi_1, \xi_2, \xi) + \epsilon^2 \check{\check{\phi}}^2(\xi_1, \xi_2, \xi) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (5.42)$$

De même, on utilise un développement limité de h_i au premier ordre :

$$h_i = 1 - \epsilon \xi \kappa_i + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad i = 1, 2 \quad (5.43)$$

La fonction indicatrice de phase filtrée $\bar{\chi}$ dont dépendent la viscosité et la masse volumique varie fortement dans la zone de transition dans la direction normale à l'interface. On fait l'hypothèse que ces variations sont en ξ_3/ϵ . Cela signifie simplement que ces variations sont indépendantes du facteur de dilatation ou encore que le développement en ϵ de $\check{\check{\chi}}_k$ est réduit à l'ordre 0 : $\check{\check{\chi}}_k = \check{\check{\chi}}_k^0$.

- Dans les régions extérieures, on se place loin de la zone interfaciale. L'indicatrice de phase et par suite la masse volumique et la viscosité sont supposées constantes par phase. Dans ces conditions, on constate que certains termes sous-maille dégénèrent vers zéro et le système 5.39 devient :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_k = 0 \quad (5.44a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k) &= -\nabla \bar{p}_k \\ &+ \nabla \cdot (\bar{\rho}_k (\bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k - \overline{\bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k})) \\ &+ \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\bar{\mu}_k (\nabla \bar{\mathbf{u}}_k + \nabla^T \bar{\mathbf{u}}_k)) \end{aligned} \quad (5.44b)$$

De façon rassurante, on constate également que ce système correspond aux équations de la SGE monophasique classique lorsque l'on modélise les corrélations de la vitesse par l'hypothèse de similarité d'échelles.

Dans ce problème, on cherche aussi des solutions sous la forme d'un développement limité en ϵ :

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon) = \phi_k^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \epsilon \phi_k^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.45)$$

Les développements des problèmes extérieur et intérieur ne sont pas réalisés au même ordre car, comme nous le verrons par la suite, les ordres les plus faibles à partir desquels les problèmes extérieur et intérieur ne sont pas dégénérés⁵ ne sont pas les mêmes. Ainsi, le raccordement sera réalisé entre l'ordre 1 du problème intérieur et l'ordre 0 du problème extérieur.

Équation de continuité

- En écrivant la divergence de la vitesse dans le repère associé à l'interface, il vient pour le problème intérieur :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \check{\mathbf{u}} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[h_2 \frac{\partial \check{u}(1)}{\partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial \check{u}(2)}{\partial \xi_2} + h_1 h_2 \frac{\partial \check{u}(3)}{\epsilon \partial \xi} - \check{u}(3)(\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1) \right. \\ &\quad \left. - \epsilon \xi \left(\check{u}(1) \frac{\partial \kappa_2}{\partial \xi_1} + \check{u}(2) \frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi_2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Comme on cherche $\bar{u}(i)$ de la forme 5.42 dans la région intérieure il vient, à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \check{u}^0(3)}{\partial \xi} = 0 \quad (5.47)$$

- En injectant la relation 5.45, appliquée au champ de vitesse filtré, dans l'équation 5.44a, on obtient

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_k^i = 0 \quad (5.48)$$

quel que soit l'ordre i .

5. Non réduit à 0 = 0

Équation de quantité de mouvement

Ordre 0

- On note :

$$\check{T} \hat{=} \overline{\check{\rho}} \overline{\check{\mathbf{u}}} - \overline{\check{\rho}} \overline{\check{\mathbf{u}}} \quad (5.49a)$$

$$\check{C} \hat{=} \overline{\check{\rho}} \overline{\check{\mathbf{u}}} \otimes \overline{\check{\mathbf{u}}} - \overline{\check{\rho}} \overline{\check{\mathbf{u}}} \otimes \overline{\check{\mathbf{u}}} \quad (5.49b)$$

Dans la suite, on notera \mathbf{C}^0 l'ordre 0 du tenseur \mathbf{C} . De plus, pour alléger l'écriture, la dérivée partielle par rapport à la composante i est notée :

$$\phi_{,i} \hat{=} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \quad (5.50)$$

De manière identique à ce qui a été présenté pour l'équation de bilan de masse, l'ordre 0 du problème intérieur donne :

$$\left(\overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} \right)_{,3} - \left(\left(\overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} \right)_{,3} - \left(\overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} \right)_{,3} \right) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (5.51)$$

Par linéarité de la dérivation, on trouve que :

$$\overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} - \overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} - \overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} = cste_i \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (5.52)$$

L'équation de continuité à l'ordre 0, équation 5.47, permet de montrer que dans la direction $i = 3$, l'équation précédente est réduite à $0 = 0$. Il nous reste maintenant à déterminer les constantes $cste_1$ et $cste_2$. Pour cela, on utilise les conditions de raccords [63], [68], [69] :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \check{\phi}^0 = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \phi^0 \quad (5.53a)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{\phi}^0}{d\xi} = 0 \quad (5.53b)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\check{\phi}^1}{d\xi} = \lim_{\xi_3 \rightarrow 0^\pm} \frac{d\phi^0}{d\xi_3} \quad (5.53c)$$

Comme $\check{\mu}$ est constante (implique $\overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} - \overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} = 0$) et bornée quand $\xi \rightarrow \pm\infty$, la condition de raccord 5.53b implique que $cste_1 = cste_2 = 0$. On en déduit :

$$\overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} - \overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} - \overline{\check{\mu}} \overline{\check{u}^0}(i)_{,3} = 0 \text{ pour } i = 1, 2 \quad (5.54)$$

Nous avons essayé d'intégrer analytiquement l'équation précédente sans succès. Dans une situation simplifiée⁶, on montre que la solution au problème est $\overline{\check{u}^0}(i)_{,3} = 0$. Nous faisons l'hypothèse que cette la solution de cette équation est $\overline{\check{u}^0}(i)_{,3} = 0$. Nous justifions cette hypothèse par le fait que l'équation 5.54 est extrêmement contraignante puisqu'elle fait intervenir une fonction à différents niveaux de filtrage sous la forme de produit avec $\check{\mu}$ et $\overline{\check{\mu}}$. Cela revient quelque part à négliger le terme τ_{diff} dans l'équation 5.29 puisque l'on néglige les corrélations entre la viscosité et le gradient de vitesse.

6. Dans un cas monodimensionnel, avec un filtre boîte et en supposant que la solution est un polynôme d'ordre k . Comme l'opération de filtrage augmente le degré du polynôme, on montre facilement que le coefficient devant le monôme de degré le plus grand est nécessairement nul.

Le champ de vitesse intérieur à l'ordre 0 est donc indépendant de ξ . La condition de raccord 5.53a, nous permet d'en conclure que le champ de vitesse est continu à l'ordre 0 :

$$\check{u}^0(i) = \bar{u}^0(i)|_+ = \bar{u}^0(i)|_- \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (5.55)$$

- En ce qui concerne le problème extérieur, si l'on procède de la même façon que pour l'équation de continuité, on trouve à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k^0}{\partial t} = 0 \quad (5.56)$$

À cet ordre, le problème extérieur est donc stationnaire. Cela signifie qu'à l'ordre 0 le déplacement de l'interface est prépondérant devant l'évolution temporelle du champ de vitesse. Comme si, en première approximation, l'interface était transportée par un champ de vitesse macroscopique stationnaire.

Ordre 1 L'ordre 0 du problème intérieur nous permet d'obtenir une condition de saut pour la vitesse (continuité de la vitesse à l'ordre 0 à l'interface). Nous allons maintenant écrire le problème intérieur à l'ordre 1 pour obtenir une condition de saut sur les tenseurs. Comme dans la suite, on ne se sert pas de l'ordre 1 pour le problème extérieur, nous n'en parlerons pas ici. De la même façon que pour l'ordre 0 et en tenant compte de 5.54, on a :

$$\left(\check{\mu} \check{u}^1(i) \right)_{,3} + \left(\check{\mu} \check{u}^0(3) \right)_{,i} + \frac{\kappa_i}{R_e} \left(\check{\mu} \check{u}^0(i) \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\rho} \check{u}^0}{\partial t}(i) + \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(i) + \left(\check{\rho} \check{u}^0(i) \check{u}^0(3) + \check{C}_{i3}^0 \right)_{,3} \text{ pour } i=1,2. \quad (5.57a)$$

$$-\check{p}_{,3}^0 + \frac{1}{W_e} \overline{\kappa \chi_{g,3}} + \frac{2}{R_e} \left(\check{\mu} \check{u}^1(3) \right)_{,3} = \frac{\partial \check{\rho} \check{u}^0}{\partial t}(3) + \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(3) + \left(\check{\rho} \check{u}^0(3) \check{u}^0(3) + \check{C}_{33}^0 \right)_{,3} \quad (5.57b)$$

Raccord En intégrant la différence entre les équations précédentes 5.57 sous forme dimensionnelle qui correspondent à l'ordre 1 du problème intérieur, et l'équation de bilan de quantité de mouvement du problème extérieur à l'ordre 0, équation 5.56, sur l'épaisseur de la zone de transition et en tenant compte des conditions de raccord 5.53a et 5.53c, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(i) \right)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,i} + \kappa_i \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(i) \right)_{,3} \Big|_+ - \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(i) \right)_{,3} + \bar{\mu} \bar{u}^0(3)_{,i} + \kappa_i \left(\bar{\mu} \bar{u}^0(i) \right)_{,3} \Big|_- \\ & = I_l(i) + I_g(i) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(i) d\xi + \\ & \quad \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(i) \bar{u}^0(3) + C_{i3}^0 \right) \Big|_+ - \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(i) \bar{u}^0(3) + C_{i3}^0 \right) \Big|_-, \text{ pour } i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.58a)$$

$$\begin{aligned} & \left(2 \bar{\mu} \bar{u}^0(3) \right)_{,3} - \bar{p}^0 \Big|_+ - \left(2 \bar{\mu} \bar{u}^0(3) \right)_{,3} - \bar{p}^0 \Big|_- + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi \\ & = I_l(3) + I_g(3) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{T}^0}{\partial t}(3) d\xi + \\ & \quad \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(3) \bar{u}^0(3) + C_{33}^0 \right) \Big|_+ - \left(\bar{\rho} \bar{u}^0(3) \bar{u}^0(3) + C_{33}^0 \right) \Big|_- \end{aligned} \quad (5.58b)$$

où \mathbf{I}_l et \mathbf{I}_g représentent respectivement l'évolution de la différence entre la quantité de mouvement microscopique (*i.e.* relative à la zone interfaciale) et la quantité de mouvement macroscopique (*i.e.* relative au problème extérieur) du côté liquide et du côté gaz :

$$\mathbf{I}_l = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\check{\rho} \check{\mathbf{u}}^0 - \rho_l \bar{\mathbf{u}}_l^0 \right) d\xi \quad (5.59a)$$

$$\mathbf{I}_g = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\check{\rho} \check{\mathbf{u}}^0 - \rho_g \bar{\mathbf{u}}_g^0 \right) d\xi \quad (5.59b)$$

On peut alors montrer [63], [64] que

$$\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\kappa \chi_{g,3}} d\xi \simeq \sigma \left(\frac{R_b}{r} \right)^2 \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \kappa(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sigma \bar{\kappa}^\sigma \quad (5.60)$$

où r est la taille du filtre. On fait, ici, l'hypothèse que les courbures varient faiblement sur la taille du filtre pour pouvoir décomposer les intégrales de volume en produit d'une intégrale surfacique sur ξ_1 et ξ_2 et d'une intégrale sur ξ_3 . Ceci est cohérent avec l'hypothèse de modélisation $\tau_{\text{superf}}^m = 0$ faite à l'issue des tests *a priori*.

Équation de transport de l'interface Précédemment, nous nous sommes placés dans le repère associé à l'interface. Dans celui-ci, nous avons écrit les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement à l'ordre 0. Néanmoins, dans notre modélisation, l'interface est mobile et ce repère se déplace avec elle. Il nous faut donc connaître la vitesse de déplacement de l'interface à l'ordre 0 en fonction des variables de notre problème. L'interface n'étant pas matérielle, l'expression de la vitesse normale est suffisante. D'après l'équation 5.39b, on a à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial t} + \check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{g}_3 \check{\chi}_{g,3} + \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{g}_3 \check{\chi}_{g,3}} - \overline{\check{\mathbf{u}}^0} \cdot \overline{\mathbf{g}_3 \check{\chi}_{g,3}} = 0 \quad (5.61)$$

Le lien entre les dérivées lagrangiennes et eulériennes à l'ordre 0 est

$$\frac{D \overline{\chi}_g}{Dt} = \left. \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + v_3^0 \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} \quad (5.62)$$

où v_3^0 est la composante normale de la vitesse de l'interface à l'ordre 0 dans le repère associé à l'interface. La combinaison des deux équations précédentes nous donne alors :

$$v_3^0 \frac{\partial \check{\chi}_g}{\partial \xi} = \frac{D \overline{\chi}_g}{Dt} + \check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{g}_3 \check{\chi}_{g,3} + \overline{\check{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{g}_3 \check{\chi}_{g,3}} - \overline{\check{\mathbf{u}}^0} \cdot \overline{\mathbf{g}_3 \check{\chi}_{g,3}} \quad (5.63)$$

En intégrant l'équation 5.63 dans la direction normale à l'interface et en faisant, ici encore, l'hypothèse de faible variation de la courbure, on obtient :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D \check{\chi}_g}{Dt} d\xi + \overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma} + \overline{\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^{\sigma\sigma}} - \overline{\overline{\mathbf{u}}^0} \cdot \overline{\mathbf{n}^{\sigma\sigma}} \quad (5.64)$$

On peut alors montrer [63], [64] que :

$$v_3^0(\xi_1, \xi_2) \approx \underbrace{\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma}}_{(i)} + \underbrace{\overline{\overline{\mathbf{u}}^0 \cdot \mathbf{n}^{\sigma\sigma}} - \overline{\overline{\mathbf{u}}^0} \cdot \overline{\mathbf{n}^{\sigma\sigma}}}_{(ii)} + \underbrace{\frac{r^2}{10} (\Delta_s(\mathbf{v}^0) \cdot \overline{\mathbf{n}^\sigma} - 2 \nabla_s(\mathbf{v}^0) : \nabla_s(\overline{\mathbf{n}^\sigma}))}_{(iii)} \quad (5.65)$$

- (i) est le produit des moyennes. Il s'agit de la contribution principale (d'ordre 0), celle qui correspond aux champs résolus.
- (ii) est le terme de Leonard de la corrélation sous-maille entre la vitesse et la normale. Il permet d'apporter une correction en ajoutant au terme précédent une estimation des corrélations entre la vitesse et la normale. On remarque que l'étape où l'on se ramène à une interface discontinue équivalente a transformé les moyennes volumiques en moyennes surfaciques. On a donc une sorte d'équivalent de l'hypothèse de similarité d'échelles pour une discontinuité.
- (iii) est une correction pour tenir compte de la variation de la courbure. L'écriture de ce terme dépend de la forme supposée du filtre ainsi que des hypothèses et approximations que nous avons faites précédemment.

Système SGE discontinu fermé

Le système ISS (SGE discontinue) correspond, en fait, au système d'équations vérifié par les solutions $\tilde{\chi}_g$, \tilde{p} et $\tilde{\mathbf{u}}$ du problème discontinu équivalent. Ce dernier équivaut au problème extérieur des développements asymptotiques raccordés à l'ordre 0 (c'est l'ordre que nous nous sommes donnés). On a donc par définition :

$$\tilde{\mathbf{u}} \hat{=} \bar{\mathbf{u}}^0 \quad (5.66a)$$

$$\tilde{p} \hat{=} \bar{p}^0 \quad (5.66b)$$

Dans le cas de la SGE continue, l'interface est épaisse (*i.e.* elle a une épaisseur non nulle qui dépend localement de la courbure et de la taille du filtre). Il est donc, *a priori*, possible de placer l'interface re-raïdie n'importe où dans la zone de transition de la SGE continue. Comme on souhaite privilégier l'usage de grandeurs conservatives afin de simplifier l'expression des équations de bilan, on impose la conservation locale de la masse. Ce choix revient à définir $\tilde{\chi}_g$ de telle sorte qu'il n'y ait pas de grandeur en excès sur cette fonction

$$\int_V (\tilde{\chi}_g - \bar{\chi}_g) dV = 0 \quad (5.67)$$

Maintenant que l'interface est placée, on définit logiquement pour la discontinuité équivalente sa normale, $\tilde{\mathbf{n}}$, et sa courbure, $\tilde{\kappa}$:

$$\tilde{\mathbf{n}} \delta_{\tilde{\sigma}} \hat{=} -\nabla \tilde{\chi}_g \quad (5.68a)$$

$$\tilde{\kappa} \hat{=} \nabla_s \cdot \tilde{\mathbf{n}} \quad (5.68b)$$

On rappelle que $\tilde{\cdot}$ est la limite asymptotique de $\overline{\cdot}$ quand l'épaisseur de la zone de transition, δ tend vers zéro et que $\overline{\cdot}^\sigma$ représente la moyenne surfacique. On en déduit l'approximation suivante :

$$\tilde{\mathbf{n}} \approx \bar{\mathbf{n}}^\sigma \quad (5.69a)$$

$$\tilde{\kappa} \approx \bar{\kappa}^\sigma \quad (5.69b)$$

En effet, faire tendre l'épaisseur de la zone de transition vers zéro en maintenant la taille du filtre constant revient moralement à transformer, à l'interface, le filtre volumique $\overline{\cdot}$ en filtre surfacique $\overline{\cdot}^\sigma$.

Équation de continuité Précédemment, nous avons montré que les vitesses à l'ordre 0 sont continues à la traversée de l'interface. On en déduit l'équation de continuité du problème discontinu équivalent :

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (5.70)$$

Équation de transport de l'interface Comme pour la SND diphasique, nous avons besoin, d'établir une équation de transport de la discontinuité équivalente. La vitesse de cette discontinuité, $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$, est définie par l'équation 5.38 que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} + \mathbf{v}_{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \tilde{\chi}_g = 0 \quad (5.71)$$

Comme nous l'avons montré à la section 1.5, seule la vitesse normale est utile pour transporter une surface. On suppose donc :

$$\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}} = v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{n}} \quad (5.72)$$

Par définition, la vitesse $\mathbf{v}_{\tilde{\sigma}}$ correspond à la vitesse du repère associé à l'interface. On en déduit qu'à l'ordre 0, on a :

$$v_{\tilde{\sigma}} \hat{=} v_3^0 = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} \right) + \frac{r^2}{10} (\Delta_s (v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{n}}_g) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s (v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{n}}_g) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}})) \quad (5.73)$$

Grâce à 5.38, l'équation de transport de l'interface discontinue équivalente s'écrit donc :

$$\frac{\partial \tilde{\chi}_g}{\partial t} = v_{\tilde{\sigma}} \delta_{\tilde{\sigma}} = \left(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} \right) + \frac{r^2}{10} (\Delta_s (v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{n}}_g) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s (v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{n}}_g) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}})) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (5.74)$$

Nous obtenons ici une expression implicite de la vitesse de transport de l'interface équivalente. Par la suite, un simple point fixe permettra d'évaluer cette vitesse à l'interface. L'équation 5.74 fait apparaître deux modèles sous-maille ; le premier fait intervenir les corrélations entre la normale et la vitesse du fluide alors que le second est proportionnel à une fonction puissance de la taille du filtre r . Par conséquent, ces deux corrections tendent naturellement vers 0 quand la taille du filtre r tend vers 0. Autrement dit, ces modèles sous-maille s'annulent quand les champs sont complètement résolus (*i.e.* en SND).

Équation de quantité de mouvement La méthode des développements asymptotiques raccordés nous a permis de préciser les relations de saut du bilan de quantité de mouvement du problème discontinu équivalent. La localisation de l'interface que nous avons choisie précédemment (Cf. équation 5.67) permet alors de calculer les quantités \mathbf{I}_k définies par les équations 5.59a. En effet, en utilisant le lien entre la dérivée temporelle et la dérivée lagrangienne (équation 5.62), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_l &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\check{\rho} \check{\mathbf{u}}^0 - \rho_l \bar{\mathbf{u}}_l^0 \right) d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{D}{Dt} \left(\check{\rho} \check{\mathbf{u}}^0 - \rho_l \bar{\mathbf{u}}_l^0 \right) - v_3^0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\check{\rho} \check{\mathbf{u}}^0 - \rho_l \bar{\mathbf{u}}_l^0 \right) \right] d\xi \end{aligned} \quad (5.75)$$

Comme la différence entre $\check{\mathbf{u}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$ est le changement de variable $\xi = \frac{\xi_3}{\epsilon}$ (équation 5.40) et qu'à l'ordre 0, $\check{\mathbf{u}}^0$ est indépendant de ξ , on a :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \check{\mathbf{u}}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0 \quad (5.76)$$

L'intégrale \mathbf{I}_l se réécrit :

$$\mathbf{I}_l = \frac{D}{Dt} \left(\tilde{\mathbf{u}} \int_0^{+\infty} (\check{\rho} - \rho_l) d\xi \right) - v_3^0 \tilde{\mathbf{u}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \xi} d\xi \quad (5.77a)$$

De façon tout à fait analogue pour \mathbf{I}_g , on trouve :

$$\mathbf{I}_g = \frac{D}{Dt} \left(\tilde{\mathbf{u}} \int_{-\infty}^0 (\check{\rho} - \rho_g) d\xi \right) - v_3^0 \tilde{\mathbf{u}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \xi} d\xi \quad (5.77b)$$

Ainsi, la somme des deux intégrales précédentes se simplifie pour donner :

$$\mathbf{I}_l + \mathbf{I}_g = \frac{D}{Dt} \left(\tilde{\mathbf{u}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\check{\rho} - \tilde{\rho}) d\xi \right) - v_3^0 \tilde{\mathbf{u}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \xi} d\xi \quad (5.77c)$$

Par construction de l'interface discontinue équivalente (Cf. équation 5.67), la quantité en excès associée à la masse volumique est nulle, on en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\check{\rho} - \tilde{\rho}) d\xi \simeq 0 \quad (5.78)$$

On en déduit finalement grâce à $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \xi} d\xi = \rho_l - \rho_g$ que :

$$(\mathbf{I}_l + \mathbf{I}_g) \delta_{\tilde{\sigma}} = \sum_k \rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t} \quad (5.79)$$

De même, on cherche maintenant à simplifier le terme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (\check{\rho} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} d\xi$.

On commence par démontrer l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (\check{\rho} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (\rho \tilde{\mathbf{u}} - \check{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} d\xi \quad (5.80)$$

Cette dernière équation traduit l'égalité entre deux quantités en excès⁷. Pour cela, il suffit de montrer que pour toute quantité ϕ indépendante de ξ_3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{\chi_g \phi} - \overline{\chi_g} \overline{\phi}) d\xi_3 = 0 \quad (5.81)$$

7. Cette dernière égalité permet de justifier la comparaison *a priori* réalisée par Toutant *et al.*. En effet, pour réaliser des tests *a priori* point à point, les auteurs ont dû chercher un modèle sous-maille dont l'étalement est de même largeur que celui des termes sous-maille associés. Il a donc été décidé de ne pas filtrer les grandeurs physiques. Néanmoins, pour assurer la pertinence de ces tests, il est nécessaire de faire un lien entre ces modèles et les modèles utilisés par la suite. Comme l'étape des développements asymptotiques raccordés aboutit à l'utilisation de quantité en excès, alors l'égalité des quantités en excès associées permet de valider les tests *a priori*.

ce qui s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{\chi_g \phi} - \overline{\chi_g} \overline{\phi}) d\xi_3 \quad (5.82) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{(\chi_g - \overline{\chi_g}) \phi} d\xi_3 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{r}{2}}^{+\frac{r}{2}} \int_{-\frac{r}{2}}^{+\frac{r}{2}} \int_{-\frac{r}{2}}^{+\frac{r}{2}} (\chi_g(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0) - \overline{\chi_g}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0)) \phi(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0) G(\boldsymbol{\xi}^0) d\xi_1^0 d\xi_2^0 d\xi_3^0 \right) d\xi_3 \\
 &= \int_{-\frac{r}{2}}^{+\frac{r}{2}} \int_{-\frac{r}{2}}^{+\frac{r}{2}} \int_{-\frac{r}{2}}^{+\frac{r}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\chi_g(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0) - \overline{\chi_g}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0)) \phi(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0) d\xi_3 G(\boldsymbol{\xi}^0) \right) d\xi_1^0 d\xi_2^0 d\xi_3^0 \\
 &\simeq 0 \quad (5.83)
 \end{aligned}$$

Ce résultat est obtenu en considérant qu'à l'ordre 0 en ϵ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_g - \overline{\chi_g} d\xi_3 \simeq 0 \quad (5.84)$$

qui découle du choix de la position de l'interface

$$\int_V \chi_g - \overline{\chi_g} dV = 0 \quad (5.85)$$

On cherche maintenant à décomposer l'intégrale précédente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\overline{\rho \mathbf{u}} - \check{\rho} \check{\mathbf{u}})}{\partial t} d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \overline{\rho \mathbf{u}}}{\partial t} d\xi}_A - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{u}}}{\partial t} d\xi}_B \quad (5.86)$$

Grâce à l'équation de continuité du problème extérieur à l'ordre 0 (équation 5.56) filtrée, B peut se réécrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{u}}}{\partial t} d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{u}} - \rho_g \overline{\mathbf{u}}_g}{\partial t} d\xi}_{B_g} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{u}} - \rho_l \overline{\mathbf{u}}_l}{\partial t} d\xi}_{B_l} \quad (5.87)$$

En utilisant le lien entre la dérivée temporelle et la dérivée lagrangienne, il vient pour B_l :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{u}} - \rho_l \overline{\mathbf{u}}_l}{\partial t} d\xi = \frac{D}{Dt} \left(\overline{\mathbf{u}}^\sigma \int_0^{+\infty} (\check{\rho} - \rho_l) d\xi \right) - \overline{v_3^{\sigma}} \overline{\mathbf{u}}^\sigma \int_0^{+\infty} \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \xi} d\xi \quad (5.88)$$

De façon analogue, pour B_g , il vient :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \check{\rho} \check{\mathbf{u}} - \rho_g \overline{\mathbf{u}}_g}{\partial t} d\xi = \frac{D}{Dt} \left(\overline{\mathbf{u}}^\sigma \int_{-\infty}^0 (\check{\rho} - \rho_g) d\xi \right) - \overline{v_3^{\sigma}} \overline{\mathbf{u}}^\sigma \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \check{\rho}}{\partial \xi} d\xi \quad (5.89)$$

On en déduit donc que :

$$B = -\overline{v_3^{\sigma}} \overline{\mathbf{u}}^\sigma [\rho] \quad (5.90)$$

On cherche maintenant à simplifier A. Comme à l'ordre 0, le problème extérieur (et donc le problème discontinu) est stationnaire, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \overline{\rho \tilde{\mathbf{u}}}}{\partial t} d\xi = [\rho] \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v_3^0 \delta_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}}} d\xi \quad (5.91)$$

$$= [\rho] \overline{v_3^0 \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \quad (5.92)$$

Au final, on trouve donc que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial (\overline{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}} - \overline{\tilde{\rho}} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} d\xi = [\rho] \left(\overline{v_3^0 \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} - \overline{v_3^0 \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \right) \quad (5.93)$$

Grâce aux simplifications précédentes, les relations de saut (équation 5.58a) s'écrivent d'après les définitions 5.66 et pour le problème discontinu équivalent à l'ordre choisi (ici l'ordre 0) :

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\rho_k \tilde{\mathbf{u}}_k \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial t} + \left(\tilde{p}_k \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}_k + \rho_k \left(\tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathcal{L}}_k \right) \right) \cdot \nabla (\tilde{\chi}_k) \right) \\ = - \left(\sigma \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} + [\rho] \left(\overline{v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} - \overline{v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (5.94)$$

Cette équation précise exactement la relation de saut issue du bilan de quantité de mouvement filtré (voir formule 5.37). Dans cette relation de saut, on retrouve la relation de la SND à laquelle s'ajoutent des modèles qui permettent de tenir compte des interactions sous-maille entre interfaces et turbulence. Ainsi, le saut du tenseur des contraintes n'est plus simplement égal à la tension de surface. On ajoute la grandeur en excès associée aux corrélations entre la vitesse et la variation temporelle de la masse volumique.

En résumé, on obtient le système d'équations suivant :

- Bilan de masse :

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.95a)$$

- Transport de l'interface :

$$v_{\tilde{\sigma}} = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \left(\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \cdot \overline{\tilde{\mathbf{n}}^\sigma} \right) + \frac{r^2}{10} \left(\Delta_s (\tilde{v}_\sigma \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2 \nabla_s (\tilde{v}_\sigma \tilde{\mathbf{n}}) : \nabla_s (\tilde{\mathbf{n}}) \right) \quad (5.95b)$$

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) &= - \nabla (\tilde{p}) + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}}) - \tilde{\mathbf{L}} \cdot \nabla (\tilde{\rho}) - \tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{L}}) \\ &- \left(\sigma \tilde{K} \tilde{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{u}} [\tilde{\rho}] (v_{\tilde{\sigma}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) + [\tilde{\rho}] \left(\overline{v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} - \overline{v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (5.95c)$$

avec,

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mu} \left(\nabla (\tilde{\mathbf{u}}) + \nabla (\tilde{\mathbf{u}})^\top \right) \quad (5.95d)$$

et,

$$\tilde{\mathbf{L}} = \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}} - \overline{\tilde{\mathbf{u}}} \otimes \overline{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (5.95e)$$

Au final, on obtient un système d'équations pour le problème discontinu équivalent. On distingue deux types de termes :

- le terme convectif $\tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{L}})$ qui est non nul dans tout le domaine,

- les autres termes qui sont non nuls uniquement près de l'interface⁸. Ces termes constituent donc une évolution des modèles monophasiques vers une modélisation des écoulements diphasiques. Dans ce travail, nous avons choisi de modéliser ces termes sous-maille grâce à une approche de type Bardina. Néanmoins, il serait tout à fait envisageable de chercher une modélisation basée sur la physique de ceux-ci. Cette modélisation, bien que plus efficace vis-à-vis de la réduction du nombre de degrés de liberté, entraînerait une perte de généralité que nous ne souhaitons pas concéder pour l'instant.

5.3.3 Limitations

Nous venons de développer un équivalent des modèles de type SGE pour les écoulements diphasiques. Notre modélisation permet de réduire le nombre de degrés de liberté de façon très générale car les modèles utilisés ne présupposent pas de mécanisme physique mais s'appuient simplement sur une méthode de déconvolution. Ce genre de méthode n'est efficace que si la largeur de coupure du filtre n'est pas trop grande par rapport aux plus petites échelles de l'écoulement. En d'autres termes, les modèles de similarité d'échelles ne sont vraiment efficaces que si la sous-résolution n'est pas trop importante. Pour des raisons de coût numérique, ce genre de simulation est donc limité :

- aux courbures modérées c'est-à-dire aux plus faibles valeurs d' $E\ddot{o}$,
- aux gradients de vitesses modérés et donc aux faibles valeurs de Re_b .

Au cours des tests de validation qui suivent, le lecteur touchera du doigt le paradoxe du coût de la simulation numérique directe d'écoulement à bulles. En effet, dans les cas qui nous intéressent, les plus forts gradients de vitesse sont dus à la présence des inclusions et sont localisés près des interfaces. Ceci est dû au fait que dans nos configurations la turbulence de la phase continue est faible voir nulle.

Comme les inclusions se déplacent dans le domaine d'études de façon non prévisible *a priori*, le pas d'espace du maillage eulérien doit être régulier et choisi de sorte à résoudre les forts gradients de vitesses à l'interface. Avec ce genre d'approche, un nombre de degrés de liberté très grand est nécessaire pour résoudre les forts gradients qui ne sont localisés qu'en quelques endroits précis. Afin de rationaliser le coût de calcul, il pourrait être intéressant d'utiliser une méthode de raffinement dynamique du maillage eulérien. Néanmoins, les développements théoriques et numériques nécessaires à la mise en place de ce genre de méthodes sont complexes et dépassent le cadre de cette thèse. De plus, la variation spatio-temporelle du maillage implique que les noyaux des filtres implicite et explicite ne sont plus constants. Il apparaît des erreurs associées aux commutations entre les opérateurs de filtrage et les dérivées. L'utilisation du modèle ISS devient d'autant plus délicate que la méthode de raffinement eulérien apporte de fortes variations du maillage.

5.4 Travail de validation du modèle ISS

5.4.1 Introduction

La section précédente est consacrée à l'élaboration du modèle ISS qui est un équivalent de la SGE pour les écoulements diphasiques. Avant de le mettre en œuvre dans nos simulations,

8.
$$-\tilde{L} \cdot \nabla(\tilde{\rho}) = [\rho] \left(\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} - \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}} \right) \cdot \nabla(\tilde{\chi}) = -[\rho] \left(\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) - \overline{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}} \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \quad (5.96)$$

Ce terme est donc bien un terme interfacial puisqu'il est porté par $\delta_{\tilde{\sigma}}$.

il convient de tester le modèle et notre implémentation de celui-ci dans le code Trio_U. Pour cela, nous avons réalisé quatre tests *a posteriori* qui visent à valider le modèle dans des situations différentes. Les tests se décomposent généralement en deux étapes : premièrement, une étude de l'influence des différents termes puis, deuxièmement, la comparaison des résultats de la simulation ISS avec une solution de référence.

Le premier cas test correspond à un écoulement monophasique et a pour objectif de mettre en place une modélisation de la turbulence plus robuste que le simple modèle de Bardina. Ce travail sera particulièrement utile pour étudier les écoulements diphasiques dont l'échelle de Kolmogorov est beaucoup plus petite que la taille des inclusions. Même si nous n'étudierons pas de tels écoulements par la suite, il nous semble pertinent d'éprouver le modèle dans un contexte le plus général possible.

Les trois autres tests sont plus proches de notre application. Il ne s'agit pas ici de déterminer la valeur des constantes mais de s'intéresser à l'influence et au rôle de chacun des modèles. Nous souhaitons aussi tester la limite de la méthode de reconstruction : à partir de quelle sous-résolution les résultats ne sont ils plus acceptables ?

Pour cela, nous avons défini trois cas test :

- Bulle de Taylor,
- Bulle ascendante 2D,
- Bulle ascendante 3D dans un écoulement turbulent.

Les deux premier cas tests correspondent à des situations bidimensionnelles. Le premier a pour but de valider les modèles associés au déplacement de l'interface, les autres modèles étant nuls. Le deuxième cas permet d'éprouver le modèle ISS complet dans le cas d'une bulle fortement déformable.

Afin de tester le modèle ISS dans un cas tridimensionnel pleinement turbulent, nous avons étudié le cas d'une bulle en ascension à contre-courant en aval d'une turbulence de grille. À cause du caractère turbulent de l'écoulement, il n'est plus possible de faire une comparaison point à point entre une simulation de type SND et une autre de type ISS. On peut néanmoins faire des comparaisons sur des grandeurs statistiques. Malheureusement, il n'est pas possible de simuler un temps physique suffisant dans le cas SND pour obtenir des grandeurs statistiques convergées. Nous nous sommes donc limités, dans ce cas, à l'étude de l'influence des différents termes du modèle ISS.

5.4.2 Turbulence homogène isotrope monophasique

Cette simulation va nous permettre de tester le modèle de turbulence et de le modifier si besoin. En effet, dans cette situation, le terme sous-maille de convection monophasique ($\tilde{\rho} \nabla \cdot (L)$) est le seul terme sous-maille non nul.

Généralités sur la THI

En considérant comme échelle de longueur caractéristique l_0 la taille du domaine et une échelle de vitesse caractéristique ($\sqrt{2 \cdot e_{c0}}$ avec e_{c0} la densité massique d'énergie cinétique initiale), il est possible de construire une échelle de temps caractéristique

$$t_r = \frac{l_0}{\sqrt{2 \cdot e_{c0}}} \tag{5.97}$$

aussi appelé temps de retournement des gros tourbillons.

En supposant que les plus petites échelles sont complètement isotropes, qu'elles ne sont ni influencées par le mouvement moyen ni par les grandes échelles et qu'elles sont en équilibre avec ces dernières, une analyse dimensionnelle permet d'évaluer la micro-échelle visqueuse (ou échelle de Kolmogorov) η caractéristique des petites échelles dynamiquement actives dans l'écoulement

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.98)$$

où ν représente la viscosité cinématique et ε le taux de dissipation visqueuse par unité de masse. Ainsi, en choisissant $\nu = 0$, on impose $\eta = 0$. Cela revient à dire que les plus petites structures turbulentes sont infiniment petites, que le nombre de Reynolds associé est infiniment grand et que la zone inertielle du spectre d'énergie s'étend vers des nombres d'ondes dont la valeur est infiniment grande. Cette dernière propriété est extrêmement intéressante car le modèle que nous voulons tester est un modèle de similarité d'échelles. Nous nous plaçons donc dans une telle situation. En pratique, on ne peut pas prendre ν strictement égal à 0 mais on peut la choisir très petite.

Quelques définitions

Transformée de Fourier et spectre d'énergie cinétique : On note \mathbf{x} la variable de l'espace physique et \mathbf{k} la variable de l'espace spectral. La transformée de Fourier d'une grandeur f est notée \hat{f} et s'écrit :

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (5.99)$$

On définit alors la transformée inverse

$$f(\mathbf{x}) = \int \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (5.100)$$

qui fournit en particulier pour la fonction tridimensionnelle de Dirac, $\delta(\mathbf{k})$:

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (5.101)$$

On note $\langle \cdot \rangle$ la moyenne statistique qui correspond à une moyenne sur l'ensemble des réalisations. On décompose toute grandeur physique, f , comme suit :

$$f = \langle f \rangle + f'' \quad (5.102)$$

En utilisant la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, le spectre de densité massique d'énergie cinétique moyenne s'écrit :

$$e_c(k, t) = \frac{1}{2} \int_{\|\mathbf{k}\|=k} \hat{U}_{ii}(\mathbf{k}, t) dS(\mathbf{k}) \quad (5.103)$$

avec,

$$U_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \quad (5.104)$$

le tenseur de corrélation de vitesse du deuxième ordre qui peut être vu comme le tenseur des corrélations de vitesse dans l'espace de Fourier.

D'après l'approche de Kolmogorov, le spectre d'énergie cinétique présente une zone dite inertielle dans laquelle l'énergie cinétique ne dépend que du taux de dissipation ε et de k

$$e_c(k, t) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (5.105)$$

avec C_K la constante de Kolmogorov. On peut alors définir le spectre compensé $e_c(k, t) k^{5/3}$ qui devrait être un plateau dans le cas d'une zone inertielle exactement en $k^{-5/3}$.

Enstrophie, facteur de dissymétrie et critère Q : On définit respectivement l'enstrophie D , les facteurs de dissymétrie, S_i (skewness en anglais) et le critère Q

$$D(t) = \frac{1}{2} \langle (\nabla \times \mathbf{u})^2 \rangle \quad (5.106)$$

$$S_\alpha(t) = - \frac{\langle (\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha})^3 \rangle}{\langle (\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha})^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (5.107)$$

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} (\Omega_{ij} \Omega_{ij} - D_{ij} D_{ij}) \quad (5.108)$$

avec

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla(\mathbf{u}) - \nabla(\mathbf{u})^\top) \quad (5.109)$$

$$D = \frac{1}{2} (\nabla(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u})^\top) \quad (5.110)$$

Le critère Q représente l'équilibre local entre le cisaillement et la vorticité. On ne s'intéresse qu'aux grandeurs positives (quand la vorticité est supérieure au cisaillement). Il est un indicateur pratique des structures cohérentes, en ce sens que, contrairement au rotationnel, il ne donne pas de contribution dans le cas de cisaillement pur (en proche paroi par exemple).

Résultats

Discussion concernant les modèles de turbulence monophasique Les modèles de similarité d'échelles comme le modèle de Bardina [43] ( quation 5.111) possèdent l'avantage de ne pas supposer l'alignement des axes propres du tenseur sous-maille avec ceux du tenseur de déformation résolu, et ne supposent aucune homog nit  ou isotropie de l'écoulement. De plus, ils sont bien connus pour leur fort niveau de corrélation avec le "vrai" tenseur sous-maille. Ceci a été démontré lors des tests *a priori* réalisés sur des champs de simulations numériques directes comme l'a fait Toutant [63]. En revanche, il s'avère généralement insuffisamment dissipatif lors des tests *a posteriori* de sorte que l'énergie cinétique ne diminue pas au cours du temps. Lors de nos tests nous avons constaté ce défaut du modèle de Bardina :

$$\tau_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \quad (5.111)$$

Pour pallier ce problème, Bardina [43] propose d'utiliser une combinaison linéaire de ces deux modélisations (ce type de modèle est appelé modèle mixte). Ce genre d'approche permet de tirer partie à la fois des bonnes propriétés dissipatives des modèles à base de viscosité sous-maille issues de l'approche fonctionnelle, et du caractère plus universel des modèles de type similarité d'échelles issus de l'approche structurelle, ainsi que de leur fort taux de corrélation avec les "vrais" terme sous-maille.

Même si cette hybridation peut se faire de façon dynamique comme cela a été fait par Zang et al. [70], il a été décidé de fixer le poids de chacune des modélisations pour éviter d'ajouter une complexité supplémentaire au modèle ISS et donc d'augmenter potentiellement les difficultés d'interprétations futures. Autrement dit, le terme sous-maille sera écrit comme une combinaison linéaire d'un modèle de similarité d'échelles et d'une modélisation fonctionnelle, soit :

$$\tau_{ij} = \alpha (\text{modèle structurel}) + \beta (\text{modèle fonctionnel}) \quad (5.112)$$

Il reste alors à déterminer la valeur de chacun des poids et le type de modèle fonctionnel. Le choix des poids est un point particulièrement délicat et il n'apparaît bien évidemment pas

de consensus sur le sujet dans la littérature. Sagaut [44] et Terracol [71] proposent d'effectuer une moyenne des expressions tirées de chacune des deux approches, en attribuant un poids de $\frac{1}{2}$ à chacune d'entre elles.

Bardina [43] fait des tests *a priori* dans le cas d'une turbulence homogène isotrope et trouve un poids de 1.1 pour le modèle de similarité d'échelles. En ce qui concerne la partie fonctionnelle qui est assurée par un modèle de Smagorinsky, il agit directement sur la constante de Smagorinsky et trouve une constante $C_s=0.19$ légèrement inférieure à celle qu'il a mis en évidence dans le cas d'un modèle fonctionnel classique ($C_s=0.20$). L'auteur attribue cette différence au fait que la partie structurale produit une légère dissipation.

En reprenant la décomposition de Germano [72]

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (5.113)$$

avec

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \\ C_{ij} &= \overline{\overline{u_i u'_j}} + \overline{\overline{u'_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u'_j}} - \overline{\overline{u'_i}} \overline{\overline{u_j}} \\ R_{ij} &= \overline{\overline{u'_i u'_j}} - \overline{\overline{u'_i}} \overline{\overline{u'_j}} \end{aligned} \quad (5.114)$$

on remarque que le terme L_{ij} correspond au modèle de similarité d'échelles qui a été initialement introduit par Bardina [43] et au terme structurel du modèle mixte associé à un poids $\alpha = 1$. Les deux autres termes C_{ij} et R_{ij} correspondent alors à la partie fonctionnelle du modèle mixte. Ces deux termes ont été négligé lors des tests *a priori*, c'est la raison pour laquelle ils n'apparaissent pas dans l'équation 5.95c. Néanmoins, ils sont indispensables puisque la modélisation structurale, même si elle est très bien corrélée avec le tenseur sous-maille, ne suffit pas à représenter l'effet dissipatif des échelles sous-filtre. On obtient alors,

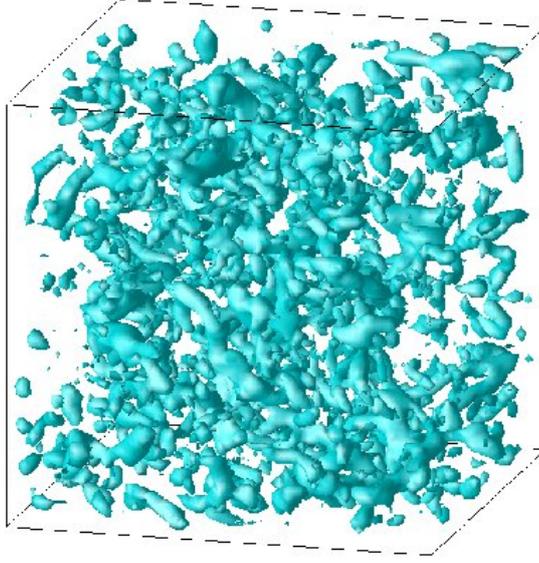
$$\begin{aligned} L_{ij} &= \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \\ C_{ij} + R_{ij} &= \beta (\text{modèle fonctionnel}) \end{aligned} \quad (5.115)$$

Il est intéressant de noter que la valeur de α ainsi mise en évidence est proche de celle de Bardina. On s'attend donc à ce que le coefficient β ait une valeur légèrement inférieure à 1 pour les raisons évoquées dans le paragraphe précédent.

Le choix du modèle fonctionnel s'est porté sur le modèle WALE (Wall Adapting Local Eddy-viscosity), proposé par Nicoud et Ducros [73]. Ce modèle est une évolution de celui de Smagorinsky qui contrairement à ce dernier n'induit pas de sur-dissipation près des parois. En effet, le modèle de Smagorinsky est basé sur le tenseur des contraintes qui est très fort en proche parois bien que la turbulence y soit absente alors que le modèle WALE se base sur la vorticit e qui, elle, est un bon indicateur d'activit e turbulente y compris en proche parois.

Les  equations du mod ele WALE sont

$$\begin{aligned} \overline{D}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \\ \overline{\Omega}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \\ z_{ij}^d &= \overline{D}_{ik} \overline{D}_{kj} + \overline{\Omega}_{ik} \overline{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\overline{D}_{mn} \overline{D}_{mn} - \overline{\Omega}_{mn} \overline{\Omega}_{mn}) \\ \nu_t &= (C_\omega \Delta)^2 \frac{\left(z_{ij}^d z_{ij}^d \right)^{\frac{3}{2}}}{\left(z_{ij}^d z_{ij}^d \right)^{\frac{5}{4}} + \left(\overline{D}_{ij} \overline{D}_{ij} \right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (5.116)$$


 FIGURE 5.2 – Isovaleur 0.3 du critère Q de la THI résolue avec le modèle mixte à $t/t_c = 5,4$.

où C_ω est une constante et Δ une échelle de longueur. Il convient de noter que les parties sphériques des tenseurs C et R sont négligées de sorte qu'ils sont confondus avec leur partie déviatorique. En effet, il est possible d'introduire une nouvelle pression qui inclut la partie sphérique du tenseur $R+C$ mais la définition de la pression devient alors ambiguë, ce qui n'est pas souhaitable surtout dans le cas d'écoulements diphasiques.

Plutôt que de travailler sur β , nous allons procéder de manière analogue à Bardina, c'est-à-dire que nous allons étudier l'influence de la valeur de la constante du modèle fonctionnel (ici C_ω) sur les spectres d'énergie et l'évolution temporelle de l'énergie cinétique de la THI. L'équation 5.95c se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = & -\nabla(\tilde{p}) + \nabla \cdot \left((\tilde{\mu} + \tilde{\rho} \nu_t) \left(\nabla(\tilde{\mathbf{u}}) + \nabla(\tilde{\mathbf{u}})^\top \right) \right) - \nabla \cdot \left(\tilde{\rho} \tilde{L} \right) \\ & - \left(\sigma \tilde{K} \tilde{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{u}} [\tilde{\rho}] (v_{\tilde{\sigma}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) + [\tilde{\rho}] \left(\overline{v_{\tilde{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \overline{v_{\tilde{\sigma}}^\sigma \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} \right) \right) \delta_{\tilde{\sigma}} \end{aligned} \quad (5.117)$$

Nicoud et Ducros [73] ont réalisé des tests *a priori* sur des THI monophasiques pour tester le modèle WALE seul et ont trouvé des valeurs de C_ω comprises entre 0.45 et 0.50 suivant la finesse du maillage utilisé et préconisent finalement d'utiliser une valeur de 0.50.

Étude numérique : les spectres Dans le cadre de ce travail, qui porte sur un modèle mixte, quatre valeurs de C_ω vont être étudiées : 0.35, 0.40, 0.45, et 0.50 dans un domaine de calcul qui comprend 64^3 mailles. Le schéma en temps est de type Runge-Kutta d'ordre 3 et le schéma convectif est de type centré. Les spectres compensés pour les différentes valeurs de C_ω testées sont tracés sur la figure 5.3(a) à l'instant $t/t_c = 8,91$. On remarque que tous les spectres présentent une pente négative aux plus petites échelles résolues. Cela est dû à la dissipation engendrée par le modèle structural qui s'ajoute à celle de modèle fonctionnel aux petites échelles. En effet, ce type de modélisation est interprété physiquement par une hypothèse de similarité d'échelles qui consiste à supposer que la structure statistique des tenseurs construits à partir des échelles sous-maille est similaire à celle de leurs équivalents évalués grâce aux plus petites échelles résolues. La similarité de structure peut s'expliquer de deux façons différentes :

- La signature fréquentielle des structures cohérentes est suffisamment large pour avoir une influence sur les trois zones considérées.

- Les échelles non résolues et les échelles résolues subissent de façon similaire l'influence des plus grandes échelles. La notion de cascade d'énergie implique que les plus grandes échelles influent sur les plus petites échelles résolues qui ont-elles mêmes un effet sur les plus grandes échelles non résolues.

En d'autres termes, le modèle structurel agit directement sur les plus petites échelles résolues en essayant d'estimer l'action des plus grandes échelles non résolues sur les plus petites échelles résolues à partir de l'observation de l'effet de ces dernières sur les plus grandes échelles.

On peut remarquer sur la figure 5.3(a) que les spectres compensés sont tous relativement proches de l'horizontale et que les résultats sont assez proches malgré la forte variation de C_ω (entre 0.50 et $0,50/\sqrt{2} \simeq 0,35$). Ce point est relativement rassurant car il nous indique que nos futurs calculs dépendront peu du choix de la constante du modèle. Néanmoins, il est assez difficile de conclure sur le choix de C_ω à partir de cette seule figure à cause de la forme légèrement en "cloche" des spectres compensés.

Étude numérique : évolution temporelle de e_c D'après Lesieur [74], sous l'effet de la dissipation visqueuse, la densité massique d'énergie cinétique a une décroissance de la forme

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \propto t^{-\alpha_e} \quad (5.118)$$

avec $\alpha_e \approx 1,38$.

Les courbes 5.3(b-c) représentent les variations temporelles de la densité massique d'énergie cinétique 5.3(b) et de sa valeur compensée 5.3(c). On s'intéresse à la décroissance de l'énergie cinétique pour $t > t_c$ car le spectre d'initialisation a une influence avant t_c . On remarque encore une fois qu'il y a une faible dispersion des résultats. En admettant que $\alpha_e = 1,38$, la valeur idéale de C_ω , dans ce cas, est comprise entre 0,40 et 0,50. Comme les auteurs du modèle WALE [73] ont constaté une certaine variation de C_ω , et vue la faible dispersion des résultats des figures 5.3 (b-c), il a été décidé d'utiliser la valeur de 0.5 préconisée par Nicoud et Ducros. En effet, il nous semblait arbitraire de choisir une valeur précise de C_ω à partir d'une simulation monophasique alors que les auteurs de la méthode ne l'ont pas fait.

Conclusion : l'ajout d'une partie dissipative *via* une modélisation de type Boussinesq permet de construire un modèle mixte. Ce type de modèle rend mieux compte des écoulements pour lesquels l'échelle de Kolmogorov est bien plus petite que le rayon de courbure, comme c'est le cas pour les écoulements stratifiés. Comme Bardina [43], nous avons choisi de prendre des poids α et β égaux à 1 dans l'équation 5.112. Ce choix est principalement motivé par le fait que le modèle de Bardina correspond au tenseur de Leonard de la décomposition de Germano, le tenseur $C_{ij} + R_{ij}$ étant alors modélisé par le modèle fonctionnel.

Maintenant que nous disposons d'un modèle monophasique satisfaisant, nous allons commencer à étudier une configuration diphasique simple.

5.4.3 Bulle de Taylor

Cette simulation va nous permettre de tester les deux termes sous-maille de l'équation de transport de l'interface 5.95b que nous avons modélisés. Tous les autres termes sous-maille doivent donc être nuls ou négligeables. Pour cela nous devons nous placer dans une configuration où les masses volumiques des deux fluides sont identiques et à faible valeur du nombre de Reynolds de bulle.

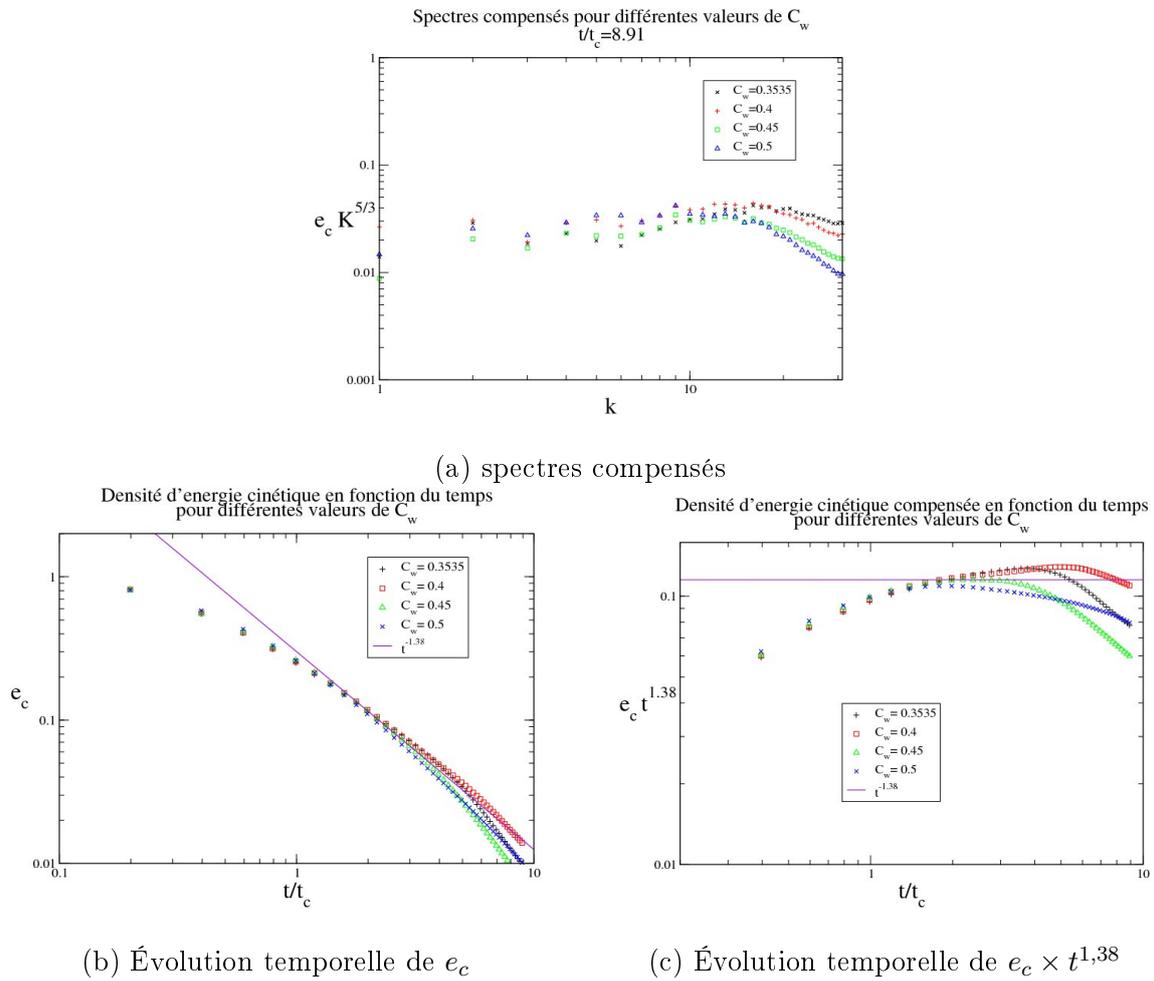


FIGURE 5.3 – Influence de la valeur de C_w

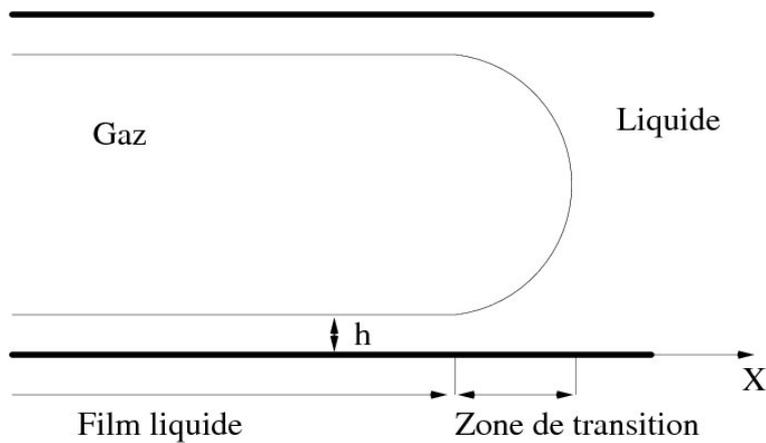


FIGURE 5.4 – Schéma représentant une bulle qui se déplace dans un tube capillaire

Contexte physique

Si une bulle de gaz est introduite dans un tube capillaire initialement rempli de liquide et se déplace dans celui-ci, un film liquide apparaît entre la bulle et la paroi du tube (Cf. figure 5.4). La détermination de l'épaisseur de ce film, notée h , est un problème très classique surtout dans le cas limite où la bulle se déplace très lentement. Taylor [75] et Bretherton [76] ont étudié expérimentalement ces écoulements et ont montré l'influence du nombre de capillarité (noté Ca) sur l'épaisseur du film. Ce nombre de capillarité est défini par

$$Ca = \frac{\mu_l V}{\sigma} \quad (5.119)$$

où μ_l est la viscosité dynamique du liquide, V est la vitesse de déplacement de la bulle et σ est la tension de surface.

En effet, à très faible vitesse de bulle, le régime est dit de Taylor-Bretherton et l'apparition du film liquide est due à l'équilibre entre le gradient de pression provoqué par la différence de courbure dans la zone de transition (Cf. figure 5.4) et les forces visqueuses. En écrivant cet équilibre, il vient

$$\frac{\mu_l V}{h^2} \sim \frac{\sigma}{\lambda(r-h)} \quad (5.120)$$

où λ est la longueur caractéristique de la zone de transition. λ est *a priori* une inconnue qu'il faut déterminer. Pour cela on utilise le fait que dans cette zone la courbure n'est pas constante et s'écrit

$$K \sim \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{r-h} \quad (5.121)$$

d'où :

$$\frac{\sigma}{r-h} + \frac{\sigma h}{\lambda^2} \sim \frac{2\sigma}{r-h} \quad (5.122)$$

En combinant les équations 5.119, 5.120 et 5.122, il vient alors :

$$\frac{h}{r} \sim \frac{Ca^{2/3}}{1 + Ca^{2/3}} \quad (5.123)$$

Il est intéressant de noter que dans le cas des films minces ($h \ll r$), l'équation 5.120 dégénère vers la relation que Bretherton a introduite en 1961 :

$$\frac{h}{r} \sim Ca^{2/3} \quad (5.124)$$

Plus récemment, Aussillous et Quéré [77] ont déduit de l'équation 5.120 une loi semi-empirique qui s'applique au cas d'une bulle dans un tube :

$$\frac{h}{r} \sim \frac{1,34 Ca^{2/3}}{1 + 1,34 \times 2,5 Ca^{2/3}} \quad (5.125)$$

L'équation 5.125 sera utilisée dans un cas 2D alors qu'elle est initialement construite pour des applications 3D. Ce point est justifié par le fait que le film se dépose sous l'effet d'un gradient de pression dans la zone de transition qui est lui même induit par la différence de courbure le long du ménisque, et que cette dernière est identique en 2D et en 3D. Il est d'ailleurs assez simple de réécrire les analogues des équations 5.120, 5.121 et 5.122 en 2D qui conduisent aussi à l'équation 5.123.

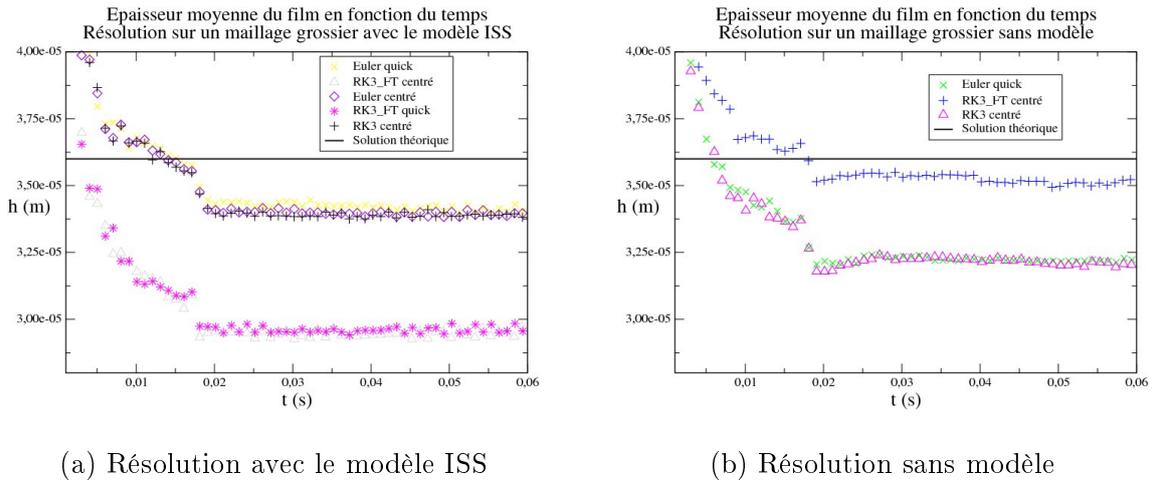


FIGURE 5.5 – Épaisseur moyenne du film en fonction du temps, en utilisant différents schémas (temps et convection), avec et sans le modèle ISS

Simulations et résultats

Les calculs sont réalisés en deux dimensions d'espace. Une bulle est initialement introduite dans un domaine de calcul rectangulaire, l'épaisseur initiale du film est $5,0 \cdot 10^{-4} \text{m}$. La vitesse de la bulle est ensuite imposée *via* le débit d'entrée à l'extrémité gauche du tube. Une condition de pression nulle est imposée à la sortie à l'extrémité droite.

Les paramètres importants sont regroupés dans le tableau suivant :

Tension de surface (N/m)	Viscosité liquide (Pa.s)	Hauteur de la conduite (m)	Vitesse de la bulle (m/s)	Ca	$h_{théorique}$ (Éq. 5.125) (m)	Re_b
$2,0 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	6,2

Dans la section précédente l'influence de la courbure sur l'épaisseur du film a été introduite. En effet, la forme du ménisque détermine le gradient de pression qui pilote à son tour l'épaisseur du film. Ici, nous nous intéressons justement aux termes du modèle ISS qui ont pour but de corriger la vitesse de déplacement de l'interface et donc sa position et sa forme. La modélisation des termes sous-maille de l'équation 5.95b ont donc une influence directe sur h.

Influence des schémas de convection et des schémas en temps : Il peut paraître assez paradoxal d'étudier l'influence des schémas de convection et des schémas en temps sur la résolution d'un problème laminaire et stationnaire. Néanmoins, cette démarche trouve un sens lors de la validation d'une implémentation. En effet, l'épaisseur du film en régime stationnaire est théoriquement indépendante de ces schémas. Une différence entre les résultats provenant de simulations réalisées avec ces divers schémas indiquerait donc un défaut de programmation ou un défaut de modélisation.

Tous les calculs présentés dans ce paragraphe sont menés sur un maillage qui comprend $N = 16$ mailles dans la hauteur du capillaire. Nous verrons plus tard que la convergence en maillage n'est pas atteinte mais cela ne constitue pas une difficulté car il est seulement question ici de vérifier la cohérence entre l'implémentation du modèle ISS et celles des différents schémas (temps et convection). Les figures 5.5 (a) et (b) représentent l'évolution temporelle de l'épaisseur moyenne du film liquide pour différents schémas respectivement avec et sans le modèle ISS. Les différents schémas étudiés sont :

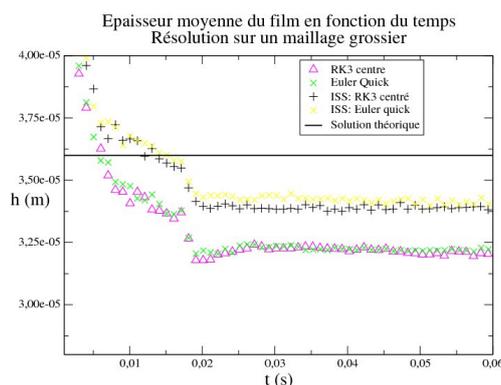


FIGURE 5.6 – Épaisseur moyenne du film en fonction du temps, en utilisant différents schémas (temps et convection), avec et sans le modèle ISS

- schémas temporels : {Euler, Runge Kutta ordre 3, Runge Kutta ordre 3 FT},
- schémas convectifs : {Quick, Centré}.

Deux schémas temporels de type Runge Kutta ordre 3 apparaissent précédemment. La différence est due au fait que dans le cas du schéma Runge Kutta ordre 3 l'interface n'est pas déplacée à chaque sous pas de temps mais seulement à la fin du pas de temps.

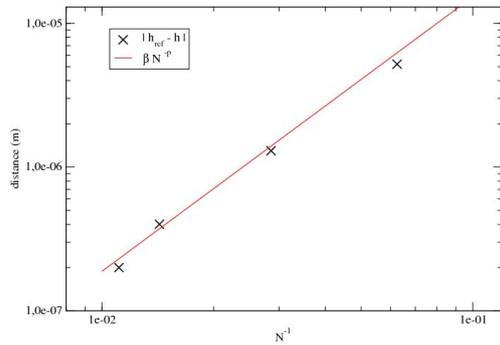
Les courbes des figures 5.5.a-b présentent toutes deux zones. La première, située à $t \leq 2.10^{-2}$ s, correspond au régime transitoire de l'écoulement. La seconde, où l'épaisseur moyenne du film liquide ne varie plus, correspond au régime stationnaire.

Les quatre premiers essais (figure 5.5.a) ont eu pour but de tester les quatre combinaisons possibles avec les schémas temporels Euler et Runge Kutta ordre 3 FT et les schémas convectifs Quick et Centré. La figure 5.5.a montre que si le schéma convectif n'a pas d'influence sur l'épaisseur du film, ce n'est pas le cas du schéma temporel. Il a donc été décidé de réaliser un calcul avec un schéma en temps de type Runge Kutta ordre 3. Il apparaît sur la figure 5.5.a que les schémas temporels Euler et Runge Kutta ordre 3 donnent des résultats identiques.

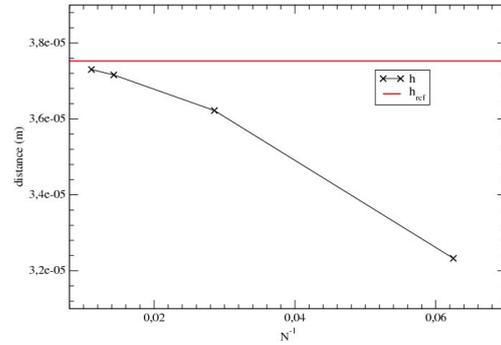
Pour déterminer si un défaut du modèle ISS pourrait être à l'origine de ce résultat, il a été décidé de réaliser des essais similaires sans utiliser de modèle. Les résultats pour les trois schémas temporels sont représentés sur la figure 5.5.b. Comme précédemment, le schéma Runge Kutta ordre 3 FT donne des résultats différents de ceux obtenus avec les deux autres schémas temporels. Ce constat montre donc qu'un défaut d'implémentation du modèle ISS ne pourrait expliquer (à lui seul) la différence de résultats obtenue. En attendant une investigation approfondie sur le sujet, ce schéma en temps ne sera plus utilisé dans la suite de ce travail.

Résultats concernant le modèle : l'examen de la figure 5.6 montre que le modèle ISS apporte une amélioration significative car l'épaisseur moyenne du film calculée avec le modèle ($3,4 \cdot 10^{-5}$ m) est la plus proche de la théorie. Néanmoins, ces résultats ne suffisent pas à valider le modèle car nous ne disposons pas d'une solution de référence suffisamment fiable. En effet, il ne faut pas oublier que la solution théorique proposée par Aussillous et Quéré [77] est adaptée aux écoulements tridimensionnels. De ce fait, elle indique l'ordre de grandeur de $h_{théorique}$ mais ne permet pas de trouver une valeur exacte. De plus, cette solution dépend de la vitesse de la bulle qui est estimée par conservation du débit volumique en supposant que le fluide est immobile dans le film. Pour combler cette lacune, des calculs SND et une étude de convergence en maillage vont être réalisés.

La figure 5.8.a représente l'épaisseur du film obtenue en régime stationnaire avec différentes

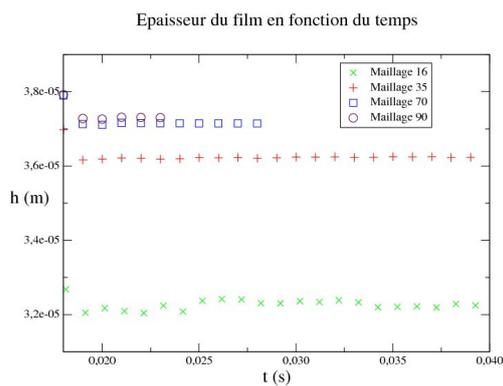


(a) Mise en évidence de l'ordre de convergence

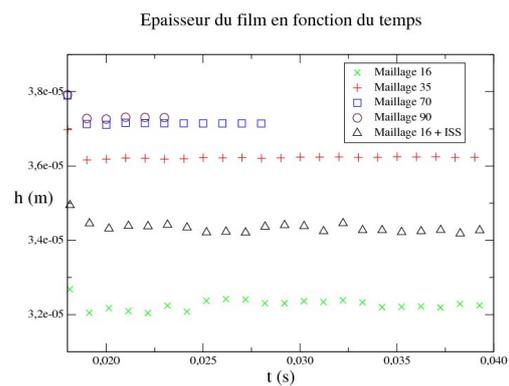


(b) Étude de convergence

FIGURE 5.7 – Étude de convergence en maillage. N est le nombre de mailles par diamètres de capillaire



(a) Étude de convergence



(b) Comparaison avec le modèle

FIGURE 5.8 – Étude de convergence en maillage et comparaison avec le modèle ISS

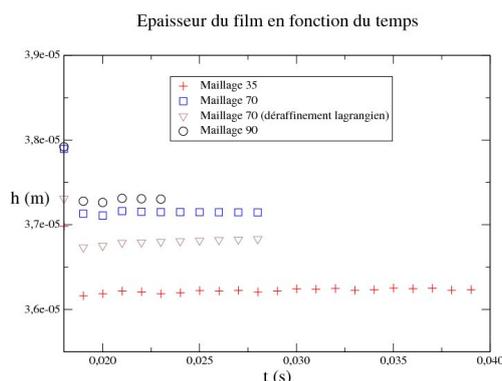


FIGURE 5.9 – Influence du déraffinement du maillage lagrangien et du modèle ISS

discrétisations. La finesse de chaque maillage est caractérisée par le nombre d'éléments dans le diamètre du capillaire.

Afin de caractériser la convergence en maillage, nous avons utilisé une méthode de Richardson (voir l'annexe A). Les figures 5.7.a-b représentent les résultats de cette étude. L'ordre de convergence est $p = 1,91$ et la solution extrapolée est $h_{ref} = 3,753 \cdot 10^{-5}$ m

Maintenant qu'une solution de référence est disponible, l'étude du modèle peut être entreprise. La figure 5.8.b représente l'épaisseur du film obtenue en régime stationnaire avec et sans le modèle ISS. Comme cela était prévu, le modèle a une influence non négligeable sur h puisque le résultat trouvé avec le modèle est $3,4 \cdot 10^{-5}$ m contre $3,2 \cdot 10^{-5}$ m sans le modèle et sur le même maillage. Néanmoins, même si l'ISS améliore le résultat de plus de 6 %, l'erreur commise par rapport à la solution de référence reste du même ordre de grandeur.

Vu la discrétisation utilisée, le film mince est représenté par une seule maille. Dans ces conditions, les forces visqueuses, qui sont calculées grâce aux dérivées secondes de la vitesse, sont très mal estimées dans la zone de transition. En rappelant que le film est dû à l'équilibre entre le gradient de pression provoqué par la différence de courbure dans la zone de transition (Cf. figure 5.4) et les forces visqueuses, le mauvais résultat constaté plus haut trouve une explication satisfaisante.

Nouvelle procédure d'études : pour remédier à ce problème, les champs eulériens seront résolus sur une grille fine dans la suite. Ce choix nous semble pertinent puisque cette étude se limite aux termes de déplacements de l'interface. La procédure se décompose en trois étapes :

- premièrement, un calcul suffisamment résolu est réalisé,
- ensuite, une deuxième solution est obtenue en déraffinant le maillage lagrangien,
- enfin, le modèle ISS est testé sur la même discrétisation que précédemment.

Les résultats de la procédure qui vient d'être présentée sont donnés à la figure 5.9. Le maillage eulérien utilisé pour cette partie comporte $N = 70$ éléments dans le diamètre du capillaire. La taille des segments qui composent l'interface est de $0,25 \cdot 10^{-4}$ m pour le maillage de référence alors qu'elle est de $1 \cdot 10^{-4}$ m dans les cas déraffinés. La comparaison avec les résultats précédents est assurée par la présence de la courbe obtenue avec le maillage $N = 35$.

La confrontation des deux courbes obtenues sans le modèle ISS sur le maillage eulérien $N = 70$, montre que le déraffinement du maillage lagrangien dégrade le résultat. Ceci est cohérent avec le fait que l'apparition du film est due à la différence de courbure dans la zone de transition. En effet, en déraffinant le maillage mobile, on procède à un filtrage implicite de l'interface. Ce filtrage modifie alors la courbure ce qui affecte l'épaisseur du film liquide.

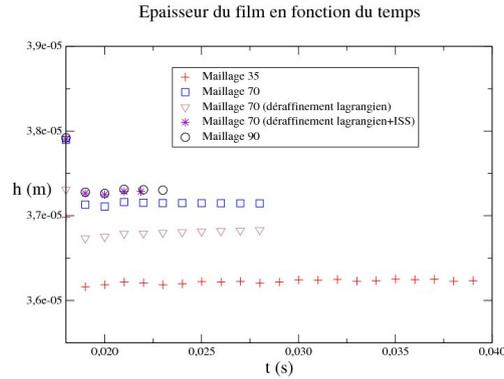


FIGURE 5.10 – Comparaison du résultat ISS avec celui d’un calcul réalisé sur un maillage $N = 90$

La comparaison des erreurs commises, par rapport à la solution de référence, avec et sans utilisation du modèle ISS, révèle une nette amélioration apportée par l’ISS. On remarque même que la solution dégradée avec le modèle ISS est meilleure que celle non dégradée et sans modèle. Ainsi, la figure 5.10 permet de comparer ces deux derniers résultats avec la solution obtenue avec le maillage $N = 90$. Cette comparaison met en évidence l’apport du modèle ISS sur la solution dégradée.

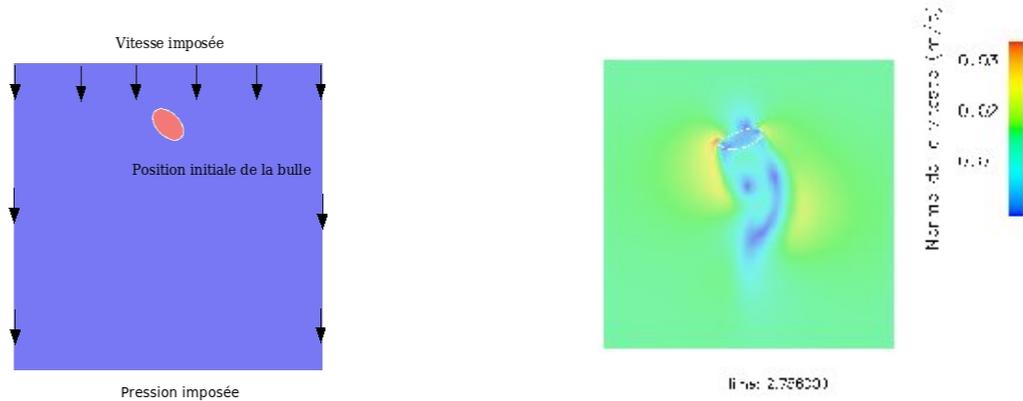
Le scénario exposé au paragraphe précédent est justifié en remarquant que l’erreur commise, avec le modèle ISS, par rapport à ce nouveau calcul est plus faible. Ceci confirme, en plus, l’hypothèse selon laquelle la mauvaise estimation des effets de viscosité des calculs sur le maillage $N = 16$ était à l’origine des résultats inexacts exposés à la figure 5.8.b.

NB : il serait assez tentant à ce stade d’envisager de poursuivre l’étude avec deux fluides ayant des propriétés physiques différentes pour tester les termes de l’équation 5.95c qui font apparaître le saut de masse volumique. Néanmoins, comme la valeur du nombre de Reynolds de bulle est faible, les termes concernés, qui sont liés à la convection, sont négligeables.

Conclusion : grâce à ce test, nous avons été en mesure de révéler un problème au niveau de schéma temporel de type Runge-Kutta 3. La mise au point d’un tel schéma dépassant le cadre de ce travail, nous n’avons plus réutilisé celui-ci dans la suite de ce mémoire. Ces tests nous ont aussi permis de démontrer la potentialité des modèles associés à la vitesse de déplacement de l’interface. En effet, la courbure de l’avant de la bulle qui est le moteur de dépôt de film, est déterminée par la vitesse de déplacement de l’interface. En améliorant l’estimation de cette dernière, on obtient une épaisseur de film plus précise. Nous venons de valider les modèles sous-maille associés à la vitesse de déplacement de l’interface. Nous allons maintenant nous intéresser à une configuration plus complexe pour laquelle l’ensemble des modèles sous-maille intervient.

5.4.4 Bulle ascendante 2D

L’objectif de cette simulation est de tester l’ensemble des modélisations sous-maille de l’ISS dans un cas bidimensionnel et non turbulent. Il est important de noter que le modèle fonctionnel WALE n’est pas utilisé ici car il représente l’effet dissipatif des petites échelles pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds. À l’inverse, la partie structurale du terme sous-maille de convection n’est pas nulle car elle représente les effets des non linéarités sous-maille qui existent même si le cas traité n’est pas pleinement turbulent.



(a) Conditions initiales, conditions aux limites

(b) sillage de la bulle

FIGURE 5.11 – Illustration du cas de calcul : (a) conditions initiales et conditions aux limites (b) visualisation du sillage de la bulle (Norme de la vitesse au temps 2.756 s).

Contexte physique

Le but de ce calcul est de simuler (dans un espace à deux dimensions) l'évolution d'une bulle montant à contre-courant. Les propriétés physiques ont été choisies de sorte que l'inclusion oscille de gauche à droite. Cette situation se rapporte au wobbling dans la carte de Clift *et al.* [1]. On cherche donc à ce que la valeur du nombre de Morton soit proche de 1.10^{-5} et que celle du nombre d'Eötvös avoisine 5.

On remarque que la viscosité dynamique du gaz n'intervient pas dans la détermination de la configuration d'écoulement. Le choix de la valeur de cette propriété physique est donc *a priori* complètement libre. Dans la mesure où le terme sous-maille de viscosité est négligé dans le modèle ISS et que le cas de calcul n'est pas pleinement turbulent, on choisit de prendre des viscosités dynamiques du gaz et du liquide égales.

Sont alors choisis : $\mu_l = 1.10^{-3}$ Pa.s, $\rho_l = 1.10^3$ kg.m $^{-3}$, $\mu_g = 1.10^{-3}$ Pa.s, $\rho_g = 990$ kg.m $^{-3}$, $\sigma = 5.10^{-4}$ N.m $^{-1}$, $d = 4,810^{-3}$ m.

Pour que la bulle reste dans le domaine d'études, on cherche à se placer dans son référentiel. Pour cela, il "suffit" d'imposer une vitesse en amont égale à la vitesse d'ascension de l'inclusion. Le principe *a priori* simple (on cherche à équilibrer les normes des forces de flottabilité et de traînée) nécessite un calibrage délicat de la vitesse de contre-courant du fait de la versatilité de l'équilibre (fortement dépendant de la forme de la bulle). Ainsi, on trouve qu'une vitesse de 0015 m.s $^{-1}$ permet de stabiliser raisonnablement la bulle dans le domaine d'études.

Les valeurs des grandeurs adimensionnelles sont regroupées dans le tableau suivant :

Mo	Eö	Re _b
$7,85 \cdot 10^{-5}$	4,44	71

La figure 5.11.a illustre la configuration (à l'état initial) de la simulation. Pour éliminer la dépendance de la trajectoire au bruit numérique des conditions initiales, la bulle est initialisée avec une forme d'ellipse dont on fait pivoter le grand axe par rapport à l'horizontale. Les conditions aux limites sont :

- une condition de vitesse imposée en entrée,
- une condition de pression imposée en sortie,
- des conditions de symétrie sur les côtés.

La figure 5.11.b illustre la configuration en cours de calcul. Elle représente la norme du champ de vitesse au temps 2.756 s qui permet de visualiser le sillage de la bulle.

Étude de convergence en maillage

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de convergence en maillage. Ce type d'études est d'une importance cruciale car elle permet de déterminer la solution de référence qui servira par la suite pour évaluer le potentiel prédictif du modèle ISS. Les conditions de cette étude sont résumées ci-dessous :

- maillages : $\{200 \times 200, 300 \times 300, 400 \times 400, 600 \times 600\}$,
- schéma temporel : {Euler},
- schémas convectifs : {Quick, Centré}.

Ce travail est intégralement réalisé avec un schéma temporel de type Euler explicite. On remarque que le maillage le plus fin comporte trois fois plus de nœuds dans chaque direction de l'espace que le maillage le plus grossier. La résolution du problème sur le maillage 600×600 est donc nettement plus coûteuse que sur la discrétisation 200×200 .

Il nous semble important de rappeler que, d'un point de vue pratique, le fait de raffiner un maillage peut représenter un surcoût non négligeable. En raffinant d'un facteur N le nombre de points dans les D dimensions de l'espace, le coût numérique de la simulation augmente pour deux raisons :

- le nombre de points de discrétisation est multiplié par N^D , le nombre d'opérations nécessaire est donc multiplié par N^D ⁹,
- le pas de temps de convection est divisé par N et le pas de temps de diffusion est divisé par N^2 .

Ainsi, les simulations sur le maillage 600×600 ont nécessité plus de 12 jours de temps de calcul contre 11 heures pour les simulations sur le maillage 200×200 .

On s'attend assez naturellement à ce que la diffusion numérique des schémas convectifs entraîne une surestimation du frottement. Un schéma amont d'ordre faible conduira donc à une sous-estimation de la coordonnée verticale de la bulle. Pour estimer l'influence de ce phénomène sur la solution obtenue, l'étude de convergence en maillage a été menée, d'une part avec un schéma Quick et, d'autre part avec un schéma centré d'ordre deux.

Les figures 5.12.a et 5.12.b représentent les résultats de l'étude de convergence en maillage. On constate immédiatement que l'influence du schéma convectif diminue avec la taille du maillage. En d'autres termes, la qualité du schéma de convection a une importance plus grande en SGE qu'en SND¹⁰. Il est assez rassurant (et assez logique d'ailleurs) de constater que les solutions obtenues avec les deux schémas convectifs semblent converger quand le pas du maillage tend vers zéro.

En utilisant cette propriété, il est alors possible de caractériser la convergence du calcul. Ainsi, la figure 5.13 représente la moyenne de la différence entre les coordonnées verticales de la bulle (entre 10 et 25 s) obtenues avec les deux schémas convectifs pour les différents maillages. On remarque que cette grandeur est divisée par huit entre le maillage 200×200 et le maillage 600×600 . On constate, de plus, que la pente de la courbe de la figure 5.13 se rapproche de zéro au fur et à mesure que le pas du maillage diminue. Ceci est la mise en évidence du phénomène

9. Si on néglige la variation du nombre d'itérations du solveur en pression associée à l'augmentation de la taille du problème.

10. Il n'est pas rare, d'ailleurs, de trouver dans la littérature des exemples de SGE monophasiques réalisées avec un schéma de convection d'ordre élevé (4 ou 5).

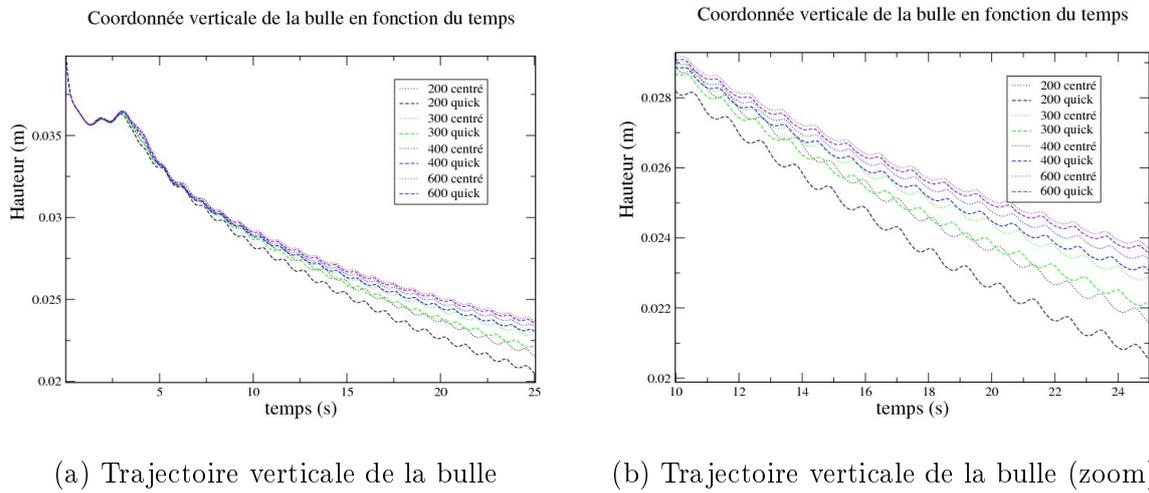


FIGURE 5.12 – Coordonnée verticale de la bulle en fonction du temps : étude de convergence en maillage.

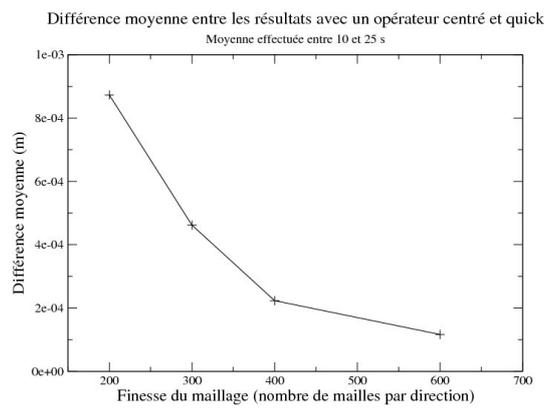


FIGURE 5.13 – Différence moyenne entre les résultats avec un opérateur centré et Quick : étude de convergence en maillage.

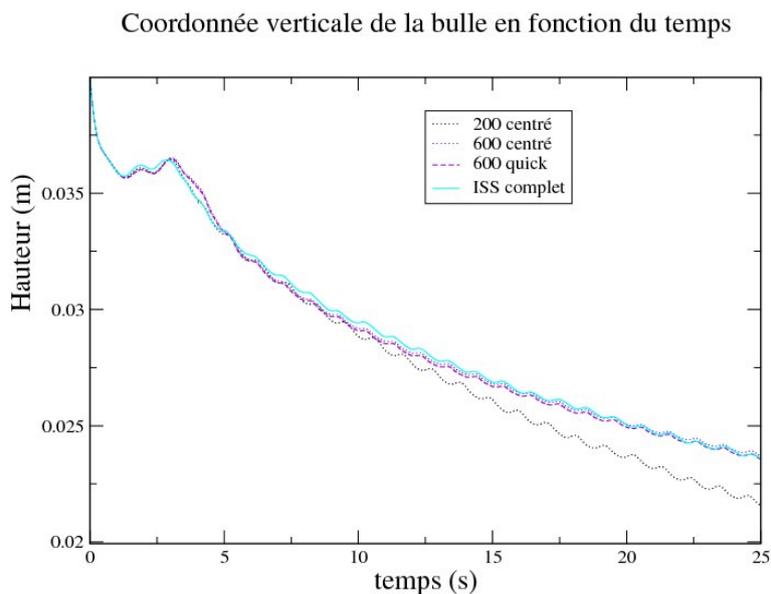


FIGURE 5.14 – Coordonnée verticale de la bulle en fonction du temps : comparaison SND / ISS.

de convergence en maillage. Dans la suite de cette étude, le résultat obtenu avec le maillage 600×600 et un schéma de convection centré sera donc utilisé comme référence.

Simulations ISS

Maintenant qu'une solution de référence est disponible, les tests sur le modèle ISS peuvent commencer. L'étude portera, dans un premier temps, sur le modèle complet. Ensuite, l'influence de chaque terme sera analysée séparément.

Résultats avec le modèle complet : l'un des enjeux de cette étude de validation du modèle ISS est de savoir si l'ensemble des hypothèses qui ont permis d'aboutir aux équations 5.95a, 5.95b, et 5.95c n'est pas trop restrictif. En particulier, dans le cas où ces tests *a posteriori* donneraient de mauvais résultats, il faudrait réétudier les hypothèses du modèle. Il serait alors nécessaire de faire apparaître de nouveaux coefficients pour pondérer les termes qui seraient mal estimés. Cette crainte est justifiée par les résultats des tests *a posteriori*¹¹ réalisés par A. Toutant [63].

La figure 5.14 représente l'évolution de la coordonnée verticale de la bulle avec le maillage 600×600 (solution de référence), et avec le maillage 200×200 (calcul sous-résolu et modèle ISS). On constate immédiatement que la solution avec le modèle ISS est très proche de la solution de référence. En particulier, on constate que l'amplitude, la phase et la fréquence d'oscillation de l'inclusion sont très proches alors que la fréquence d'oscillation de la bulle est plus faible dans le cas sous-résolu (maillage 200×200 centré sans le modèle). En revanche, le modèle ISS sous-estime très légèrement la vitesse moyenne d'ascension de la bulle (la pente moyenne du résultat obtenu avec le modèle est plus grande en valeur absolue que celle du résultat de référence). Le résultat obtenu avec le modèle ISS est donc satisfaisant. Il est néanmoins nécessaire d'étudier

11. Ces tests ont été réalisés dans une configuration similaire à la nôtre et avec un modèle proche de celui qui est exposé dans ce travail. L'auteur a conclu en introduisant une correction du terme sous-maille de l'équation de déplacement de l'interface sous la forme d'une constante. Il est important de rappeler qu' A. Toutant a utilisé (par manque de temps) un simple modèle de similarité d'échelles pour représenter le terme sous-maille en question.

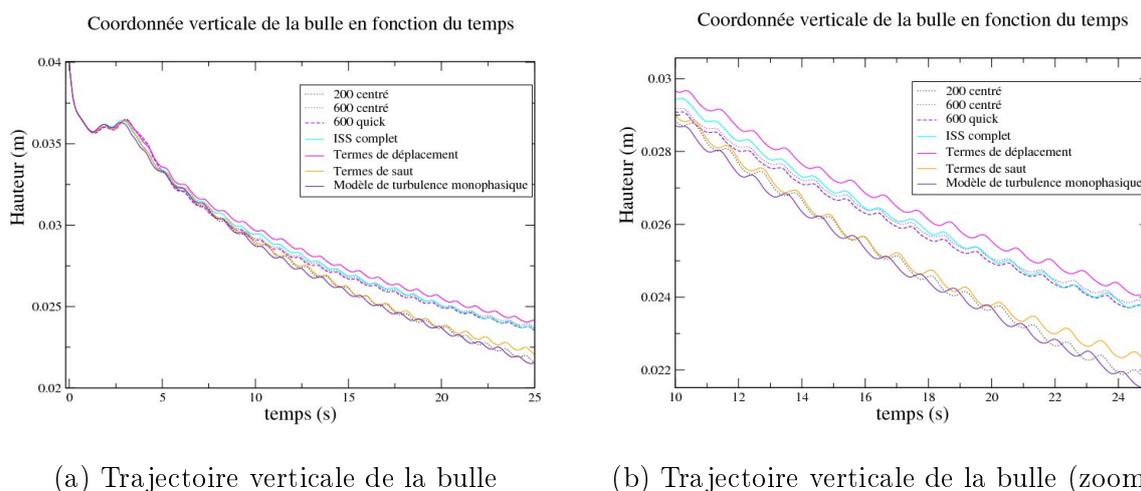


FIGURE 5.15 – Coordonnée verticale de la bulle en fonction du temps : étude de l’influence des différents termes du modèle ISS.

l’influence des différents termes sous-maille pour valider l’hypothèse initiale selon laquelle aucun terme n’est négligeable ici.

Influence des différents termes du modèle : l’étude d’influence des différents termes de modèle ISS porte sur trois groupes de termes :

- les termes sous-maille de l’équation de déplacement de l’interface 5.95b,
- les termes de saut de l’équation de quantité de mouvement 5.95c qui sont nuls dans les phases et qui peuvent s’écrire comme une force surfacique associée à l’interface par analogie à la tension de surface,
- le terme de turbulence monophasique de l’équation 5.95c qui est non nul dans les phases ¹².

L’ensemble des calculs mettant en œuvre le modèle ISS est mené sur un maillage 200×200 avec un opérateur de convection centré. Les résultats de cette étude sont présentés dans les figures 5.15.a et 5.15.b sous la forme de courbes qui représentent (encore une fois) l’évolution de la coordonnée verticale de la bulle dans les différents cas. Les différentes configurations étudiées et présentées aux figures 5.15.a-b sont :

- la solution de référence (maillage 600×600 , opérateur de convection centré),
- la solution dégradée (maillage 200×200),
- la solution avec le modèle ISS complet,
- les solutions avec une seule partie du modèle ISS.

En comparant les différences entre les résultats de la solution dégradée et ceux des solutions avec une seule partie du modèle, on constate que les termes sous-maille de l’équation de déplacement de l’interface sont ceux qui ont le plus d’influence. Cette dernière constatation était attendue car :

- premièrement, ce cas d’études n’est pas pleinement turbulent. Or, les termes sous-maille du modèle ISS dans l’équation de quantité de mouvement sont des termes convectifs.
- deuxièmement, du fait de l’équilibre entre les forces de flottabilité et les forces de frottement, et de la difficulté de garder la bulle dans le domaine de calcul, la différence de masse

¹². Ce terme existe aussi dans les modèles de turbulence monophasique et apparaît, après filtrage explicite, du fait de la non linéarité du terme de convection dans l’équation de quantité de mouvement.

volumique entre le gaz et le liquide est assez faible dans ce cas. Comme les termes interfaciaux de l'équation de quantité de mouvement 5.95c sont proportionnels à la différence de masse volumique, ils ont donc une influence limitée.

Même si deux groupes de termes ont une influence moindre, il est assez satisfaisant de constater qu'aucun d'eux n'a un effet négligeable. De plus, on remarque que les oscillations de la bulle dans les cas de référence et dans le cas du modèle ISS complet sont synchronisées alors que la fréquence d'oscillation dans le cas "termes de déplacement" est plus faible. En examinant les courbes de la figure 5.15.b, on peut noter que chaque groupe de termes a une influence équivalente sur la fréquence d'oscillation de l'inclusion. Ainsi, chaque groupe de termes du modèle ISS est nécessaire pour que la bulle soit à la bonne altitude et pour qu'elle oscille aux bonnes fréquence et amplitude. Ce dernier point est crucial car il démontre clairement l'importance de chaque terme.

Conclusion : ce test nous a permis de valider le modèle ISS dans un cas bidimensionnel. L'étude de convergence en maillage nous donne une solution de type SND qui permet une comparaison directe avec le résultat issu de simulations ISS. Le modèle complet donne de bons résultats pour une sous-résolution d'un facteur 3. Le gain en termes de coût de calcul est déjà important puisque la simulation ISS coûte 11 heures de temps CPU contre 12 jours pour la simulation de type SND.

L'étude de l'influence de chacun des termes sous-maille montre l'importance de la modélisation des termes associés au déplacement de l'interface. Les termes sous-maille de l'équation de bilan de quantité de mouvement ont une importance moindre du fait du faible rapport de masse volumique et de l'intensité relativement faible de l'énergie cinétique turbulente dans le domaine d'études.

Les deux tests précédents se rapportent à des situations bidimensionnelles. Dans la mesure où nous souhaitons par la suite étudier une situation tridimensionnelle, nous avons réalisé un dernier test dans une telle situation. Afin de mettre en avant l'intérêt des termes sous-maille du bilan de quantité de mouvement, nous allons étudier un écoulement diphasique pleinement turbulent.

5.4.5 Bulle ascendante 3D dans une THI

La simulation précédente est réalisée dans un domaine bidimensionnel. Or, les fermetures du modèle ISS tiennent compte de la possible anisotropie de la surface, *i.e.* du fait que les courbures des directions principales ne sont pas nécessairement égales. Pour valider complètement le modèle, il est donc impératif d'effectuer des tests sur un cas tridimensionnel qui fasse intervenir l'ensemble des fermetures.

Présentation générale de la simulation

Le but de cette simulation est de tester le modèle ISS dans un cas plus proche de celui de la colonne à bulles. Le cas d'étude est cette fois tridimensionnel et la turbulence y est pleinement développée.

Nous allons simuler l'interaction d'une bulle avec une turbulence de grille. Pour ce calcul, deux résolutions sont nécessaires. La première, r_1 , est monophasique. Elle correspond à un calcul classique de Turbulence Homogène Isotrope (THI) dans une boîte de recirculation présentant des périodicités dans les trois directions de l'espace. La deuxième, r_2 , est diphasique. Elle se rapporte au calcul de l'évolution d'une bulle unique. Le couplage se situe au niveau d'une frontière de r_1 qui sert de condition d'entrée à r_2 . Afin que cette condition d'entrée pénètre dans le domaine de

r_2 , on impose un mouvement de translation uniforme à tout le domaine de r_1 . Cette vitesse de translation est choisie de telle sorte qu'elle correspond à la vitesse d'ascension de la bulle. Ceci permet d'équilibrer approximativement les forces de traînée et de flottabilité et de maintenir la bulle dans le domaine de calcul le plus longtemps possible. La turbulence ainsi injectée dans r_2 est alors en décroissance spatiale libre. Tout se passe donc comme si la bulle était soumise à une turbulence de grille.

Méthode d'entretien de la Turbulence Homogène Isotrope : l'objectif de r_1 est de fournir des conditions d'entrée réalistes pour les écoulements turbulents. De façon classique, on peut décider de faire *mûrir* une Turbulence Homogène Isotrope (THI), de la figer à un instant donné et de se servir du champ de vitesse figé comme entrée du deuxième calcul. Cependant on ne dispose que d'un nombre fini de champs d'entrée. L'idée proposée ici est d'entretenir une THI en forçant l'énergie cinétique à une valeur donnée et de se servir du champ de vitesse sur une frontière du domaine comme condition d'entrée du deuxième calcul. Pour forcer l'énergie cinétique à une grandeur constante, on multiplie "brutalement" tout le champ de vitesse par la valeur adéquate. Cette méthode d'entretien relativement rudimentaire a été proposée par Lundgren [78] et ses propriétés ont été étudiées par Rosales et Meneveau [79].

Filtrage des grandes structures : en plus du forçage de l'énergie cinétique, les grandes structures turbulentes sont éliminées dans la boîte de recirculation (grâce à une méthode de filtrage).

En effet, dans ce test *a posteriori*, on cherche à comparer des grandeurs statistiques. Pour cela, il faut que la bulle reste dans le domaine d'études le plus longtemps possible. Dans l'idéal, il faudrait que l'inclusion oscille autour d'une position d'équilibre sans jamais sortir du domaine. Il est donc nécessaire de supprimer les grandes structures qui sont susceptibles de pousser la particule au-delà des limites du domaine.

Pour des raisons de rapidité et d'efficacité, le filtrage est réalisé dans l'espace spectral. En pratique, on calcule la transformée de Fourier discrète du champ de vitesse (grâce à l'utilisation d'un algorithme de transformée de Fourier rapide). Ensuite, le filtrage est réalisé par convolution du champ de vitesse transformé avec le noyau de notre filtre passe-haut choisi. Enfin, la transformée de Fourier discrète inverse est appliquée à ce dernier champ pour obtenir le champ de vitesse filtré dans l'espace physique.

Algorithme d'entretien

Nous allons exposer l'algorithme mis au point pour ce test *a posteriori*. Pour cela, écrivons les équations de Navier-Stokes de façon formelle :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (5.126)$$

On discrétise temporellement l'équation précédente. Pour faciliter le raisonnement et simplifier les écritures, on utilise un schéma d'Euler explicite :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = R(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) \quad (5.127)$$

Dans un premier temps, le champ de vitesse est filtré pour éliminer les grandes structures. Pour cela on calcule la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de ce champ :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = TFD(\mathbf{u}^{n+1}) \quad (5.128)$$

Comme le produit de convolution de deux fonctions correspond à la multiplication de leurs transformées de Fourier, le filtrage dans l'espace spectral se réduit à un simple produit

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1,filtré} = \hat{G} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (5.129)$$

avec \hat{G} le noyau de convolution dans l'espace spectral. La transformée de Fourier inverse de $\hat{\mathbf{u}}^{n+1,filtré}$ nous donne alors le champ de vitesse filtré dans l'espace physique :

$$\mathbf{u}^{n+1,filtré} = TFD^{-1}(\hat{\mathbf{u}}^{n+1,filtré}) \quad (5.130)$$

La deuxième étape consiste à forcer l'énergie cinétique à rester constante. Rappelons que l'énergie cinétique du domaine de calcul V est définie par :

$$Ec^n = \frac{\rho}{2} \int_V (\mathbf{u}^n)^2 dV \quad (5.131)$$

Pour conserver l'énergie cinétique l'idée consiste simplement à poser :

$$\mathbf{u}^{n,final} = \sqrt{\frac{Ec^n}{Ec^{n+1,filtré}}} \mathbf{u}^{n+1,filtré} \quad (5.132)$$

Il est évident qu'alors $Ec^{n+1} = Ec^n$ pour tout n.

Présentation de la simulation SND

Boîte de recirculation

Le modèle de Kolmogorov qui permet de caractériser les échelles de la turbulence monophasique repose sur trois hypothèses :

- hypothèse 1 : l'énergie turbulente e_c est principalement portée par les grands tourbillons qui ne sont pas affectés directement par la viscosité ν .
- hypothèse 2 : la viscosité moléculaire n'influence que les plus petits tourbillons responsables de la majeure partie de la dissipation.
- hypothèse 3 : le taux d'énergie dissipée par les plus petits tourbillons provient des plus grands.

Une analyse dimensionnelle permet alors de définir

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.133)$$

et

$$l_0 = \frac{e_c^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad (5.134)$$

qui sont respectivement l'échelle de Kolmogorov (échelle des plus petits tourbillons) et l'échelle intégrale (dimension caractéristique des grands tourbillons). En combinant ces deux équations, on peut relier l'énergie cinétique à l'échelle de Kolmogorov :

$$e_c = \nu^2 \left(\frac{l_0}{\eta^4} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.135)$$

Nous nous intéressons à l'énergie cinétique car c'est cette grandeur que notre méthode d'entretien permet de fixer. Dans l'objectif de réaliser des simulations ISS avec une faible sous-résolution, on choisit de décrire les petites structures avec une demi-maille. On choisit donc

$\eta = 0.5 \Delta_x$ où Δ_x représente le pas du maillage eulérien et vaut $\Delta_x = l/N$ avec l comme taille du côté du domaine et N comme nombre de mailles dans une direction. On approche alors l_0 par l/k_c où k_c est la coupure adimensionnelle de notre filtre passe-haut. On a alors :

$$e_c = \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{8}{3}} k_c^{-\frac{2}{3}} \quad (5.136)$$

Avec un maillage $32 \times 32 \times 32$ de côté $l = 0,0126 \text{ m}$, $k_c = 3$ et $\nu = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, on a $e_c = 0,13 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, mais ayant constaté que les différentes approximations faites sous-évaluaient la densité d'énergie cinétique, nous avons choisi $e_c = 0,34 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Le temps de retournement est calculé grâce à l'équation 5.97

$$t_r = \frac{l}{k_c \sqrt{2 \times e_c}} \quad (5.137)$$

ce qui donne numériquement : $t_r = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

Domaine de calcul de la bulle

Les propriétés physiques de l'écoulement diphasique sont :

- pour la phase liquide : $\rho_l = 851 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\mu_l = 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$,
- pour la phase gaz : $\rho_g = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\mu_g = 282 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

La tension de surface, σ , est $0,1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et le diamètre de la bulle, D_b , est $3,55 \text{ mm}$ (ce qui fait 38 mailles par diamètre de bulle). Sa vitesse terminale, V_T , est environ de $0,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour conserver la bulle dans le domaine, on cherche à se placer dans son référentiel en la faisant monter à contre-courant. Ainsi, la bulle n'aura pas de mouvement moyen alors que les structures turbulentes auront en moyenne un mouvement de translation de $0,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les nombres adimensionnels qui caractérisent cette simulation sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

$Re_b = \frac{V_T D_b}{\nu_l}$	$We = \frac{\rho_l e_c D_b}{\sigma}$	$Mo = \frac{g \mu_l^4}{\rho_l \sigma^3}$	$Bo = \frac{\rho_l g D_b^2}{\sigma}$	$\frac{\eta}{D_b}$
25,8	10,3	$2,8 \cdot 10^{-6}$	1,05	6

Présentation des simulations ISS

L'ensemble des simulations est réalisé sur un maillage régulier comprenant 32^3 volumes de contrôle pour chacun des domaines de calcul. Dans cette configuration, la turbulence est pleinement développée. Nous allons donc mettre en œuvre, dans un cas diphasique, le modèle mixte qui a été étudié dans la section 5.4.2. De plus, il est important de noter que l'écoulement dans la boîte de recirculation est toujours simulé avec un modèle de SGE monophasique de type WALE (y compris dans le cas "Sans modèle"). Cela permet d'assurer que les conditions d'entrée du domaine de calcul ne varient pas d'un cas à un autre.

Résultats

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence des différents termes du modèle ISS sur plusieurs grandeurs caractéristiques de l'écoulement. On peut classer ces grandeurs en deux catégories :

- celles qui se rapportent à l'interface,
- celles qui sont associées aux champs volumiques.

Comme précédemment, les termes sous-maille du modèle ISS ont été classés en trois groupes :

- les termes sous-maille de l'équation de déplacement de l'interface 5.95b,

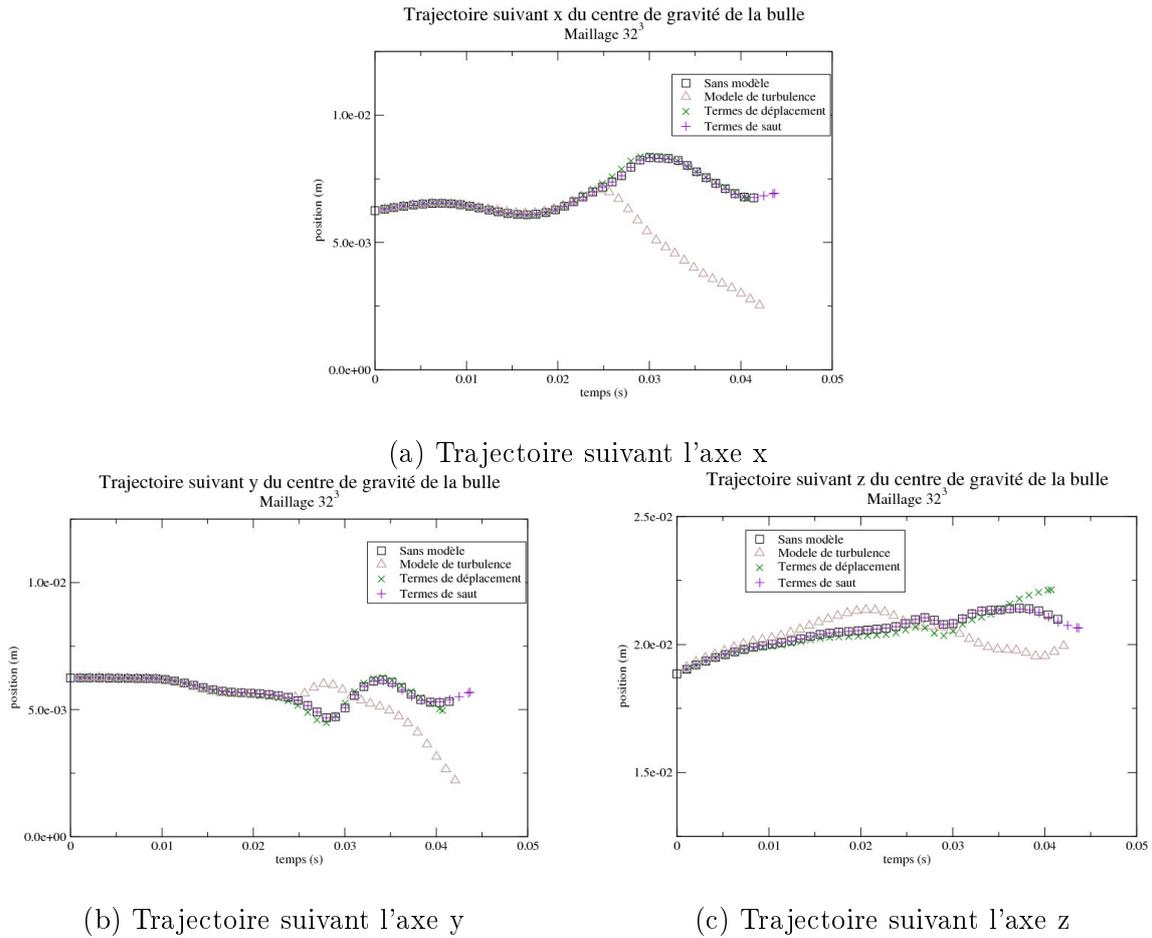


FIGURE 5.16 – Évolution temporelle des coordonnées du centre de gravité de la bulle : influence des différents termes du modèle ISS.

- les modèles des termes de saut de l'équation de quantité de mouvement 5.95c qui sont nuls dans les phases et qui peuvent s'écrire comme une force surfacique associée à l'interface par analogie à la tension de surface sont inclus,
- le terme de turbulence monophasique de l'équation 5.95c qui est non nul dans les phases.

Trajectoire de la bulle : Nous nous intéressons, dans cette section, à l'influence des différents termes sur la trajectoire de la bulle. Les figures 5.16.a, 5.16.b, 5.16.c représentent l'évolution temporelle des coordonnées du centre d'aire interfaciale¹³ pour les cinq cas suivant :

- **Sans modèle :** correspond à une simulation réalisée sans modèle sous-maille,
- **Modèle de turbulence :** le terme de turbulence monophasique est modélisé (utilisation du modèle mixte),
- **Termes de déplacement :** les termes sous-maille de l'équation de déplacement de l'interface sont modélisés,
- **Termes de saut :** utilisation des modèles associés aux termes de saut de l'équation de quantité de mouvement,

13. Comme la bulle ne se déforme pas trop, on peut approximer le centre de gravité de la bulle par le centre d'aire interfaciale. Ce dernier est calculé en faisant la moyenne des positions des facettes du maillage lagrangien pondérée par la surface.

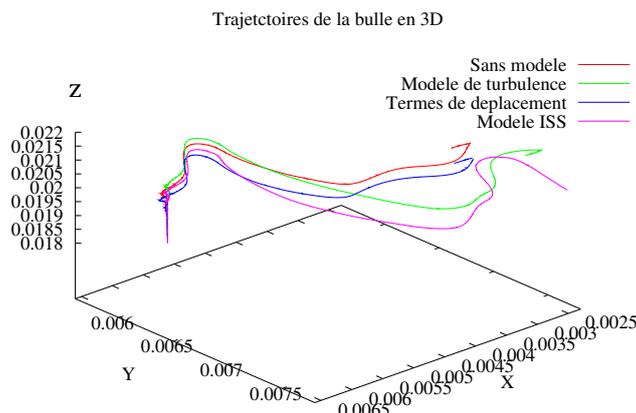


FIGURE 5.17 – Visualisation de la trajectoire du centre de gravité de la bulle.

- **Modèle ISS** : l'ensemble des modèles sous-maille est utilisé.

Les deux configurations extrêmes ("Sans modèle" et "Modèle ISS") constituent des références qui vont nous permettre de juger l'influence relative des différents termes. Ainsi, en comparant les courbes des figures 5.16 pour les cas "Sans modèle" et "Termes de saut", on remarque que les termes de saut de l'équation de quantité de mouvement ont un effet assez faible sur la position de l'inclusion.

À l'inverse, la comparaison des résultats pour les cas "Sans modèle", "Modèle de turbulence" et "Termes de déplacement" montre que les termes sous-maille associés ont une influence non négligeable sur la position de la bulle. Si on s'intéresse, en plus, au cas "Modèle ISS", on remarque que la trajectoire obtenue avec le modèle complet résulte de l'action combinée des modèles de turbulence monophasique et des termes sous-maille de l'équation de déplacement de l'interface.

La figure 5.17 permet de visualiser la trajectoire tridimensionnelle de la bulle pour les configurations présentées précédemment. À l'instant initial, l'inclusion se trouve en bas à gauche ($x=6,25 \cdot 10^{-3}$ m, $y=6,25 \cdot 10^{-3}$ m, $z=18,85 \cdot 10^{-3}$ m).

Les paramètres que nous venons d'étudier sont relatifs à la position du centre de gravité de l'interface, c'est-à-dire à la vitesse moyenne de l'interface. Pour étudier l'influence des différents termes sur la forme de la bulle, c'est-à-dire aux fluctuations de vitesse de l'interface, nous allons nous intéresser dans le prochain paragraphe à l'aire interfaciale volumique.

Aire interfaciale volumique (AIV) : l'AIV nous renseigne directement sur la surface de la bulle puisqu'il n'y a qu'une inclusion dans le domaine d'étude. Cette surface dépendant elle-même de la géométrie de la bulle, on conclut facilement que l'AIV est un indicateur simple de la forme de l'interface.

Les courbes représentant l'évolution temporelle de l'AIV dans les différentes configurations présentées dans le dernier paragraphe sont exposées à la figure 5.18.

Comme pour la position du centre de gravité de la bulle, les termes de saut de l'équation de quantité de mouvement ont un effet limité sur l'AIV. Aussi, on constate que l'évolution temporelle de l'AIV obtenue avec le modèle complet résulte de l'action combinée des modèles de turbulence monophasique et des termes sous-maille de l'équation de déplacement de l'interface.

Les figures 5.19, 5.20, 5.21 permettent de visualiser la forme de la bulle dans les différents cas, au temps $t=0,1009$ s. L'interface est colorée en fonction de la courbure (rouge pour les fortes courbures et bleue pour les faibles). On remarque que les différences entre les cas sont assez

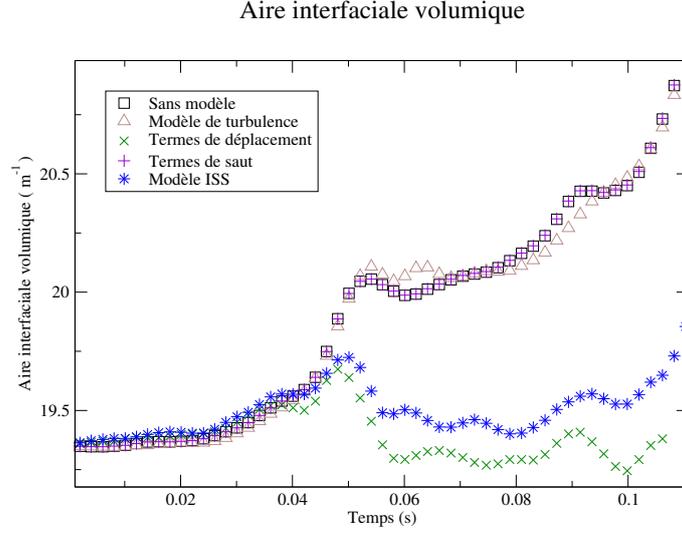


FIGURE 5.18 – Évolution temporelle de l'aire interfaciale volumique.

faibles. Ce point est corroboré par le fait que l'écart d'AIV, à cet instant, entre les cas "Modèle de turbulence" et "Termes de déplacement" est de l'ordre de 6 %.

On constate que les visualisations des cas "Sans modèle" et "Termes de saut" sont presque identiques sur les trois vues. Cette dernière remarque est cohérente avec les résultats concernant l'influence des termes de saut sur la trajectoire de la bulle et sur l'AIV.

Sur la figure 5.19, la bulle présente une "tâche" rouge qui correspond à une zone de forte courbure dans le cas "Termes de déplacement". Sur les figures 5.20 et 5.21, la bulle possède une zone plus aplatie ("tâche" bleue) dans les cas "Modèle de turbulence" et "Modèle ISS". On montre ainsi que les termes sous-maille de l'équation de déplacement de l'interface et les termes de convectifs de l'équation de bilan de quantité de mouvement ont une incidence importante sur la forme et sur la position de la bulle.

Nous venons d'étudier l'influence des différents groupes de termes du modèle ISS sur la position et la forme de l'interface (AIV). Nous allons maintenant étudier l'action de ces termes sur l'écoulement dans la phase liquide. Pour cela, on s'intéresse dans un premier temps aux corrélations en deux points puis, nous verrons comment le modèle agit sur l'intensité en énergie de la turbulence.

Corrélations en deux points : L'échelle intégrale est une évaluation grossière de la durée ou de la distance en-deçà de laquelle la vitesse fluctuante $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ serait corrélée avec elle-même et totalement décorrélée d'elle-même au-delà. On construit cette échelle à partir de la fonction de corrélation définie comme suit

$$G_{ij}(r, t) = \frac{\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + r \mathbf{e}_j, t) \rangle}{\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle} \quad (5.138)$$

où \mathbf{e}_j correspond au vecteur unité dans la direction j et,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{V} \int_V x \, dv \quad (5.139)$$

On fait la moyenne temporelle de $G_{ij}(r, t)$

$$g_{ij}(r, t) = \frac{1}{T} \int_t G_{ij}(r, t) \, dt \quad (5.140)$$

5.4. TRAVAIL DE VALIDATION DU MODÈLE ISS

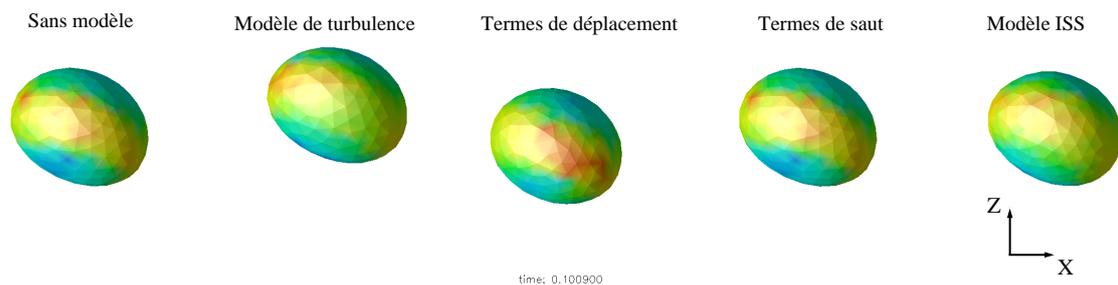


FIGURE 5.19 – Visualisation de la forme de la bulle dans les différentes configurations pour $t=0,1009$ s : vue du dessus.

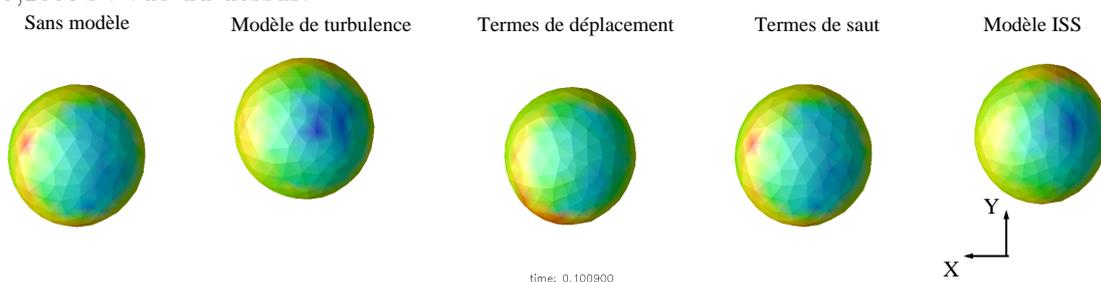


FIGURE 5.20 – Visualisation de la forme de la bulle dans les différentes configurations pour $t=0,1009$ s : vue arrière.

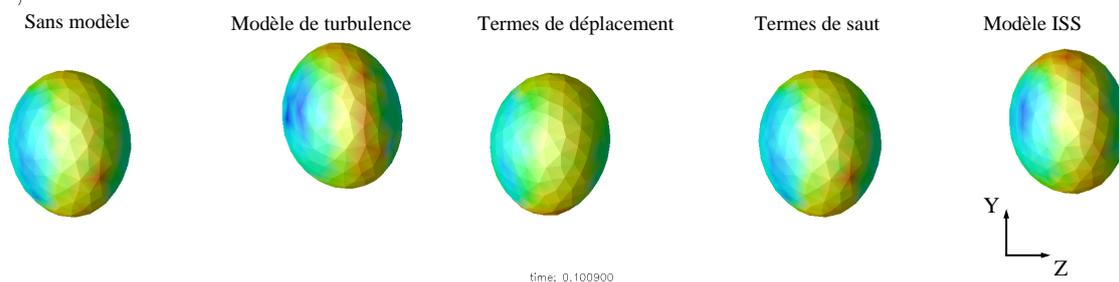


FIGURE 5.21 – Visualisation de la forme de la bulle dans les différentes configurations pour $t=0,1009$ s : vue de côté.

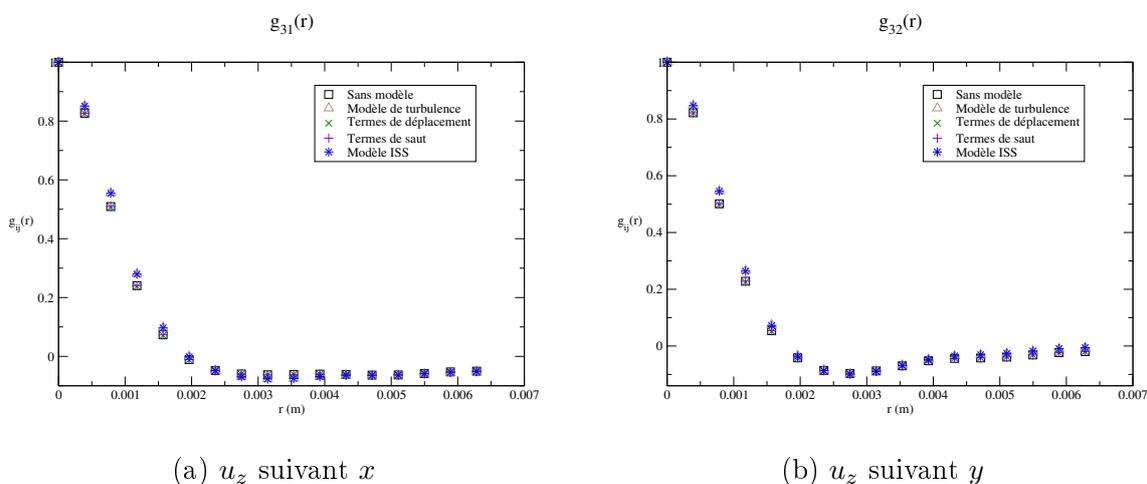


FIGURE 5.22 – Corrélations en deux points pour la composante u_z du champ de vitesse mono-fluide.

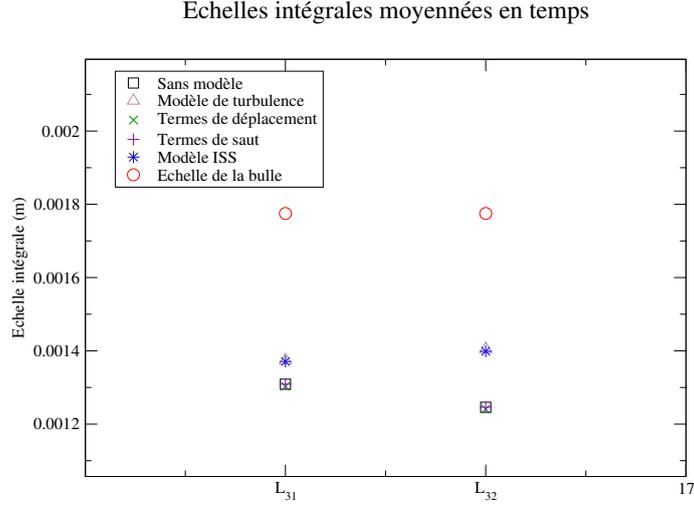


FIGURE 5.23 – Échelles intégrales moyennées en temps.

ce qui permet de construire les échelles intégrales :

$$\Lambda_{ij} = \int_0^{\infty} g_{ij}(r) dr \quad (5.141)$$

Numériquement, on arrête, lors de l'évaluation, les intégrales infinies à la longueur du domaine et à la durée de la simulation.

Comme le domaine d'études est bipériodique, on ne s'intéresse qu'aux corrélations g_{ij} suivant les deux directions de périodicité. De plus, en étudiant l'évolution temporelle de $G_{ij}(r, t)$, on remarque qu'il n'y a pas convergence de $g_{ij}(r, t)$ pour les composantes de vitesse u_x et u_y . Nous allons donc examiner les corrélations g_{31} et g_{32} . Celles-ci sont présentées aux figures 5.22.a et 5.22.b.

On constate que ces corrélations ont une forme caractéristique des corrélations transversales en THI isovolume. On remarque que les cas "Termes de déplacement" et "Termes de saut", contrairement à la configuration "Modèle de turbulence", présentent des résultats proches de ceux du cas "Sans modèle". Ceci démontre que le terme de turbulence monophasique est le seul qui ait une influence visible sur g_{31} et g_{32} .

La figure 5.23 représente les échelles intégrales Λ_{31} et Λ_{32} pour les différentes configurations. Les résultats sont cohérents avec ce qui vient d'être présenté. En particulier, le terme de turbulence monophasique est celui qui a le plus d'influence. Le rayon de la bulle au début de la simulation est donné comme référence. On constate que les échelles intégrales sont plus petites que cette dernière. Ce point est relativement important car il permet de valider notre méthode de filtrage des grandes structures.

Intensité en énergie de la turbulence de la phase liquide : La densité d'énergie cinétique turbulente du champ de vitesse filtré de la phase k est définie par

$$e_{ck} = 0.5 \langle u_k''^2 + v_k''^2 + w_k''^2 \rangle_k \quad (5.142)$$

avec,

$$x_k'' = \overline{x_k} - \langle \overline{x_k} \rangle_k \quad (5.143)$$

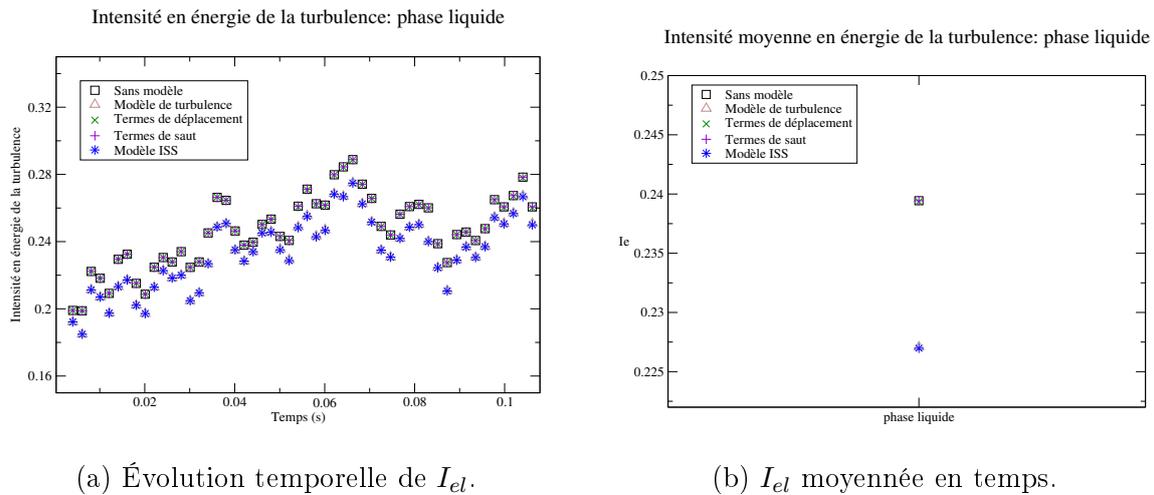


FIGURE 5.24 – Intensité en énergie de la turbulence de la phase liquide.

où $\bar{\cdot}$ est le filtre explicite dans le cas de la SND et implicite dans le cas de la SGE. Numériquement, on remplace, lors de l'évaluation, la moyenne statistique par la moyenne phasique :

$$\langle x_k \rangle_k = \frac{1}{V_k} \int_{v_k} x_k dv \quad (5.144)$$

On définit alors l'intensité en énergie de la turbulence comme le rapport de la densité d'énergie turbulente de la phase k et de l'énergie cinétique moyenne de cette même phase :

$$I_{ek} = \frac{\langle u_k'^2 + v_k'^2 + w_k'^2 \rangle_k}{\langle \bar{u}_k \rangle_k^2 + \langle \bar{v}_k \rangle_k^2 + \langle \bar{w}_k \rangle_k^2} \quad (5.145)$$

Ce rapport nous renseigne sur l'intensité de la turbulence. D'après Chassaing [80], ce rapport permet de distinguer les champs turbulents faibles $I_{ek} \sim 0,01^2$, moyens $I_{ek} \sim 0,1^2$, forts $I_{ek} \sim 0,2^2$ et au-delà. Les résultats sont présentés à la figure 5.24.a. Les valeurs de I_{el} correspondent à un champ turbulent fort selon la classification de Chassaing [80]. On observe que les termes surfaciques associés aux simulations "Termes de déplacement" et "Termes de saut" ont une influence limitée sur cette grandeur.

La moyenne temporelle de I_{el} est présentée à la figure 5.24.b pour mettre en lumière les contrastes entre les différents résultats. Comme pour les corrélations en deux points, on se rend compte que le terme qui a le plus d'importance est le modèle de turbulence monophasique. Ces résultats s'expliquent simplement par le fait que ce dernier terme est le seul qui est non nul dans les phases. De plus, celui-ci comprend une partie fonctionnelle dont le rôle est de modéliser la dissipation de l'énergie au niveau des plus petites échelles de l'écoulement.

Conclusion de cette partie : ce test nous a permis de tester le modèle ISS dans une situation tridimensionnelle pleinement turbulente. Même si une comparaison avec une simulation de type SND n'a pas été possible, nous avons été en mesure de regarder l'influence de chacun des termes du modèle. Nous nous sommes intéressés à des quantités liées à l'interface et à des quantités volumiques. Nous avons constaté que les termes de saut ont une importance assez limitée. Cela s'explique par la faible intensité de la turbulence et par la faible déformation de l'interface. Les termes convectifs de l'équation de bilan de quantité de mouvement ont, quant à eux, une grande influence sur les résultats. Ces deux derniers constats sont en accord avec les tests *a priori* réalisés par Toutant [64]. Les termes associés à la vitesse de déplacement de l'interface

ont principalement une influence sur l'interface et leur influence sur l'intensité de la turbulence ou l'échelle intégrale est assez faible.

5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les développements qui conduisent à l'écriture du modèle ISS. Celui-ci est un équivalent de la SGE pour les écoulements diphasiques. Il présente en plus l'avantage de correspondre à un problème discontinu et peut donc être mis en œuvre à partir d'une méthode classique de SND diphasique. Nous avons mis en évidence plusieurs limitations à l'utilisation de ce modèle : faible sous-résolution de champ de vitesse et de la courbure. Celles-ci proviennent principalement de l'utilisation de modèle de type Bardina pour fermer les termes sous-maille et de l'étape de re-raïdissement qui fait apparaître un petit paramètre. Avec les moyens numériques actuels, le modèle est donc limité aux valeurs des nombres d'Eö et de Re_b modérés ce qui correspond à la zone en bas à gauche sur la carte de Clift *et al.* [1].

Dans une deuxième étape, nous avons procédé à des tests *a posteriori* afin d'améliorer et de valider le modèle ISS. Le premier test nous a permis de modifier le modèle sous-maille associé à la partie convective de l'équation de bilan de quantité de mouvement. En particulier, nous avons mis en œuvre un modèle mixte. Ainsi, l'ajout d'un modèle de Boussinesq au modèle de Bardina rend mieux compte de l'effet dissipatif des échelles de vitesses sous-maille et permet de modéliser des écoulements pour lesquels l'échelle de Kolmogorov est beaucoup plus petite que le rayon de la sphère osculatrice. Les trois autres tests nous ont permis de montrer la potentialité du modèle *via* la comparaison des résultats de simulations SND et les simulations de type ISS associées. Nous avons aussi été en mesure d'exhiber l'importance de chacun des termes du modèle.

Nous disposons maintenant d'un modèle éprouvé équivalent de la SGE pour les écoulements diphasiques. Nous allons pouvoir passer à la deuxième étape de notre démarche multi-échelles : le passage de la SGE vers le moyenné. Dans le prochain chapitre, nous allons présenter la modélisation de type moyenné que nous cherchons à renseigner. Ensuite, nous présenterons les cas d'études et nous validerons le modèle dans ces cas précis.

Chapitre 6

Approche moyennée

L'OBJECTIF final de ce travail est de renseigner les modèles moyennés diphasiques. Dans le chapitre 5, nous avons présenté la première partie de cette démarche. Celle-ci a consisté à construire le modèle ISS et à réaliser une validation partielle *a posteriori* du modèle. Avant de passer à la seconde étape de nos travaux qui tente de faire le lien entre l'approche ISS et l'approche moyennée, nous allons présenter les développements formels qui conduisent au modèle à 6 équations.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté le formalisme bifluide. Celui-ci revient à écrire un système d'équations microscopiques pour chacune des phases. Celles-ci sont définies dans tout l'espace grâce à l'utilisation de la fonction indicatrice de phase. Dans ce chapitre, nous allons moyenniser le système 3.15. Nous obtiendrons alors un ensemble d'équations qui décrivent l'évolution des grandeurs physiques moyennes. À cause de l'aspect non linéaire des équations de Navier-Stokes, tous les termes qui apparaissent ne peuvent être calculés explicitement à partir des grandeurs moyennes. Il est alors nécessaire de se donner des relations supplémentaires : c'est le problème de fermeture.

6.1 Opérateur de moyenne

6.1.1 Quelques opérateurs classiques

Avant de chercher à construire un modèle RANS diphasique, nous allons présenter les opérateurs classiques de prise de moyenne. Ceux-ci permettent de décomposer toute grandeur en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$f = \underbrace{\bar{f}}_{\text{moyenne}} + \underbrace{f'}_{\text{fluctuation}} \quad (6.1)$$

Les opérateurs utilisés sont tous des opérateurs de Reynolds et ont, par définition, les propriétés suivantes :

- conservation des constantes : $\overline{C} = C$,
- linéarité : $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$ et $\overline{\lambda f} = \lambda \bar{f}$ (pour λ constant),
- commutativité avec les opérateurs de dérivées spatiale et temporelle : $\overline{\nabla \cdot (f)} = \nabla \cdot (\bar{f})$
et $\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$,
- idempotence : $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$, soit aussi $\overline{f'} = 0$,
- conséquence de l'idempotence : $\overline{f \times g} = \bar{f} \times \bar{g} + \overline{f' \times g'}$.

Une façon simple d'envisager le processus de moyenne consiste à réaliser un grand nombre d'observations, à les sommer et à diviser par le nombre total d'observations. En utilisant cette

idée, on écrit la moyenne statistique sur un ensemble de réalisations indépendantes $f^{(i)}$ en un point fixe de l'espace et du temps :

$$\bar{f}(\mathbf{r}, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(\mathbf{r}, t) \quad (6.2)$$

Une configuration est donc associée à l'ensemble des écoulements qui vérifient les conditions aux limites et les conditions initiales qui peuvent être imposées par le dispositif physique étudié. Il n'est pas possible d'imposer exactement, dans un processus physique, deux fois les mêmes conditions initiales et conditions aux limites. C'est la raison pour laquelle deux réalisations ne sont pas strictement identiques. Ainsi, la moyenne statistique permet d'interpréter un phénomène en termes de reproductibilité d'une expérience. Chaque réalisation d'une expérience se réfère à un membre de l'ensemble en question.

La moyenne temporelle se rapporte au résultat d'une seule réalisation $f^{(i)}$ intégré sur un intervalle de temps :

$$\bar{f}(\mathbf{r}, t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^{(i)}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \quad (6.3)$$

Si T est grand par rapport aux différences échelles de la turbulence, $\overline{f(\mathbf{r})}$ ne dépend pas de t_0 : la turbulence est stationnaire en moyenne. L'utilisation d'une telle moyenne est alors motivée par l'hypothèse d'ergodicité qui permet de substituer cette moyenne à la moyenne statistique dans le cas d'un écoulement stationnaire. Il n'est alors plus nécessaire d'observer l'ensemble des réalisations possibles de façon répétitive mais il suffit de réaliser une unique observation assez longue.

Une interprétation similaire peut être faite avec une moyenne en volume pour un écoulement homogène :

$$\bar{f}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V f^{(i)}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad \mathbf{x} \text{ centre du volume } V \quad (6.4)$$

Remarque : Il existe d'autres moyennes, en particulier celles utilisées plus ou moins implicitement dans les simulations numériques du fait du maillage. Un maillage large ne permet pas d'observer des phénomènes locaux et se comporte alors comme un filtre passe-bande. La moyenne statistique est le processus de moyenne le plus fondamental et le plus général puisqu'il permet de traiter les écoulements transitoires et inhomogènes. Les moyennes en temps et en espace peuvent être vues comme des approximations de la moyenne statistique (grâce à l'hypothèse d'ergodicité) qui sont justifiées dans les cas d'écoulements respectivement permanents ou homogènes.

6.1.2 Moyenne aux interfaces

Certaines grandeurs ne sont définies qu'à l'interface. On peut citer la courbure mais aussi toutes les grandeurs relatives aux échanges entre les phases. Il est alors nécessaire définir la moyenne de ces grandeurs à l'interface. Pour cela, on utilise la notion de distribution de Dirac ayant l'interface pour support et définie par l'équation 3.7c

$$\bar{f}^I = \frac{\overline{f\delta_\sigma}}{\overline{\delta_\sigma}} = \frac{\overline{f\delta_\sigma}}{a_i} \quad (6.5)$$

où a_i est la densité d'aire interfaciale. Cette grandeur caractérise la quantité d'interface et dépend directement de la configuration d'écoulement. Sa signification physique dépend directement de l'opérateur de moyenne choisi. Par exemple dans le cas d'une moyenne en volume, a_i représente la quantité de surface d'interface présente dans le volume de contrôle. Comme nous le verrons par la suite, la densité d'aire interfaciale a_i intervient dans le calcul des termes d'échanges interfaciaux et devra faire l'objet d'une modélisation dédiée.

6.2 Les équations moyennées

6.2.1 Modèle à deux fluides

À partir du système bifluide microscopique 3.15 valable dans tout l'espace, on cherche à écrire un système d'équations faisant intervenir des grandeurs moyennées. Pour cela, on applique formellement l'opérateur de moyenne à ce système :

$$\overline{\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k)} = 0 \quad (6.6a)$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k)} &= \overline{-\nabla \chi_k p_k + \chi_k \rho_k \mathbf{g}} \\ &+ \overline{\nabla \cdot (\chi_k \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k))} \\ &+ \overline{((-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k) \cdot \mathbf{n}_k) \delta_\sigma} \end{aligned} \quad (6.6b)$$

$$\begin{aligned} &\text{avec,} \\ \overline{\left[\sum_k (\mathbf{n}_k \cdot (-p_k \mathbf{I} + \mathbf{S}_k)) + (\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \right] \delta_\sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (6.6c)$$

On définit la moyenne pondérée par la fonction indicatrice de phase d'une grandeur f par :

$$\overline{f}^k = \frac{\overline{f \chi_k}}{\overline{\chi_k}} = \frac{\overline{f \chi_k}}{\alpha_k} \quad (6.7)$$

Cette grandeur moyenne correspond physiquement à la moyenne de f dans la phase k . On l'appelle aussi moyenne phasique. Comme χ_k n'est pas constante, l'opérateur $\overline{\cdot}^k$ ne commute pas avec les opérateurs de dérivation. En particulier, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\chi_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k)} &= \overline{\nabla (\chi_k \mathbf{u}_k)} + \overline{\nabla^T (\chi_k \mathbf{u}_k)} - \overline{\mathbf{u}_k \otimes \nabla \chi_k + \nabla \chi_k \otimes \mathbf{u}_k} \\ &= \overline{\nabla (\alpha_k \overline{\mathbf{u}_k}^k)} + \overline{\nabla^T (\alpha_k \overline{\mathbf{u}_k}^k)} \\ &- \overline{\overline{\mathbf{u}_k}^k \otimes \nabla \chi_k + \nabla \chi_k \otimes \overline{\mathbf{u}_k}^k} - \overline{\mathbf{u}'_k \otimes \nabla \chi_k + \nabla \chi_k \otimes \mathbf{u}'_k} \\ &= \alpha_k \left(\nabla \overline{\mathbf{u}_k}^k + \nabla^T \overline{\mathbf{u}_k}^k \right) + \overline{(\mathbf{u}'_k \otimes \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{u}'_k) \delta_\sigma} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Comme les propriétés physiques sont constantes par phase¹, en utilisant la définition précédente et les propriétés de l'opérateur de moyenne, il vient :

1. Si la masse volumique n'est pas constante par phase (ce qui est le cas pour les écoulements dans les réacteurs à eau pressurisée), il est nécessaire de définir la moyenne pondérée par la masse volumique :

$$\overline{f}^k = \frac{\overline{f \chi_k \rho_k}}{\overline{\chi_k \rho_k}} = \frac{\overline{f \rho_k}}{\overline{\rho_k}^k} \quad (6.9)$$

Dans notre cas, on a :

$$\overline{f}^k = \overline{f}^k \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\mathbf{u}_k^k}) = 0 \quad (6.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \rho_k \overline{\mathbf{u}_k^k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \alpha_k (\overline{\mathbf{u}_k^k} \otimes \overline{\mathbf{u}_k^k} + \boldsymbol{\tau}_{conv}^k)) &= -\alpha_k \nabla \overline{P_k^k} - \overline{P_k^k} \nabla \alpha_k + \rho_k \alpha_k \mathbf{g} \\ &+ \nabla \cdot (\mu_k (\alpha_k (\nabla \overline{\mathbf{u}_k^k} + \nabla^T \overline{\mathbf{u}_k^k}))) \\ &- \overline{\boldsymbol{\tau}_k \cdot \nabla \chi_k} + \nabla \cdot (\mu_k D_k^i) \end{aligned} \quad (6.11b)$$

$$\text{avec,} \quad \sum_k \overline{\boldsymbol{\tau}_k \cdot \nabla \chi_k} = \overline{(\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}} \delta_\sigma \quad (6.11c)$$

$$\text{et,} \quad \boldsymbol{\tau}_{conv}^k = \overline{\mathbf{u}_k^k \otimes \mathbf{u}_k^k} - \overline{\mathbf{u}_k^k} \otimes \overline{\mathbf{u}_k^k} \quad (6.11d)$$

$$D_k^i = \overline{(\mathbf{u}'_k \otimes \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{u}'_k)} \delta_\sigma \quad (6.11e)$$

$$\boldsymbol{\tau}_k = -P_k I + \mu_k (\nabla \mathbf{u}_k + \nabla^T \mathbf{u}_k) \quad (6.11f)$$

Ce système correspond au modèle à 6 équations [27], [81], [82] dans le cas des écoulements isothermes, incompressibles et sans changement de phase. Celui-ci est à la base d'un grand nombre de modèles diphasiques moyennés.

6.2.2 Signification physique des variables moyennes

Dans ce paragraphe, nous présentons les variables moyennes appropriées à la description d'un écoulement polyphasique. Afin de présenter la signification physique de ces variables moyennes, nous nous plaçons dans le cas d'une moyenne en volume.

La géométrie des interfaces est décrite, au niveau microscopique, par la fonction indicatrice de la phase k : χ_k . La moyenne de celle-ci représente, dans le cas de la moyenne statistique, la probabilité que la phase k soit présente en un point et à un instant précis :

$$\alpha_k = \overline{\chi_k} \quad (6.12)$$

Pour les écoulements diphasiques, on ne définit généralement que α_g . Celui-ci est alors appelé "taux de vide" car il représente, dans le cas de la moyenne en volume, le volume de gaz présent dans une région divisé par le volume total de cette région.

Une autre grandeur géométrique importante est la densité d'aire interfaciale a_i présentée précédemment. Elle représente la quantité de surface d'interface dans un volume et s'exprime en m^{-1} .

Les équations de quantité de mouvement contiennent un terme source qui correspond aux échanges de cette grandeur entre les phases. Ceux-ci sont reliés par l'équation de saut aux interfaces 6.11c et sont définis par :

$$\mathbf{M}_k = \overline{\boldsymbol{\tau}_k \cdot \nabla \chi_k} \quad (6.13)$$

Le tenseur D_k^i est appelé "tenseur d'extra-déformations interfaciales". Il traduit l'effet du mouvement des interfaces sur le champ de déformation moyen. Les grandeurs suivantes font intervenir la notion de moyenne phasique introduite à l'équation 6.7. Ainsi, la vitesse moyenne de chaque phase est définie par :

$$\overline{\mathbf{u}_k^k} = \frac{\overline{\mathbf{u}_k \chi_k}}{\alpha_k} \quad (6.14)$$

De même, la pression phasique s'écrit :

$$\overline{P}_k^k = \frac{\overline{P_k \chi_k}}{\alpha_k} \quad (6.15)$$

Le tenseur de Reynolds associé aux fluctuations de vitesse de la phase k s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_{conv}^k = \overline{\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k}^k - \overline{\mathbf{u}_k}^k \otimes \overline{\mathbf{u}_k}^k \quad (6.16)$$

Il provient de la non linéarité du terme convectif de l'équation de quantité de mouvement. On l'interprète physiquement comme l'effet des fluctuations de vitesse sur l'écoulement moyen. Il est classiquement modélisé par un modèle de Boussinesq comme en LES. Néanmoins, les modèles qui permettent d'estimer la viscosité turbulente ne font pas intervenir de notion de filtrage.

6.2.3 Problème de fermeture

Dans ce paragraphe, nous allons lister le nombre d'équations disponibles ainsi que le nombre d'inconnues. On en déduit le nombre de relations supplémentaires à se donner pour fermer le problème. Le système 6.11 contient 4 équations et une relation de saut :

- deux équations de bilan de masse 6.11a,
- deux équations de bilan de quantité de mouvement 6.11b.

Nous distinguons les variables principales du problème qui sont les grandeurs physiques recherchées, des variables secondaires dont on a besoin pour estimer les variables principales. Les équations précédemment citées font intervenir les variables principales suivantes :

- les taux de présence des phases : α_k ,
- les vitesses moyennes des phases : $\overline{\mathbf{u}_k}^k$,
- les pressions moyennes des phases : \overline{P}_k^k .

Afin de réduire le nombre d'inconnues du problème, deux types d'hypothèses standards sont présentés. Ainsi, en supposant que l'épaisseur des interfaces est négligeable, il est possible de relier les taux de présence des phases par :

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad (6.17)$$

Une hypothèse de modélisation utilisée dans les grand codes système comme CATHARE, RELAP5 et NEPTUNE consiste à supposer un champ de pression unique défini par :

$$P \triangleq \sum_k \alpha_k \overline{P}_k^k \quad (6.18)$$

Ces deux dernières relations permettent de réduire le nombre de variables principales indépendantes du problème physique. Ainsi, il ne reste plus que quatre variables principales : $\alpha = \alpha_g$, P , $\overline{\mathbf{u}_l}^l$ et $\overline{\mathbf{u}_g}^g$. Les autres variables correspondent aux grandeurs secondaires qui nécessitent l'emploi de relations de fermeture. Celles-ci sont :

- les tenseurs d'extra-déformations interfaciales : D_k^i qui peuvent être négligés ou estimés par la relation proposée par Ishii [27],
- les tenseurs de Reynolds : $\boldsymbol{\tau}_{conv}^k$ qui sont évalués par le modèle de turbulence adapté au cas des écoulements diphasiques,
- la courbure moyenne $-(\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma$,
- les transferts interfaciaux de quantité de mouvement : \mathbf{M}_k .

\mathbf{M}_k représente l'échange de quantité de mouvement entre les phases. Certains auteurs [27] le décomposent comme suit :

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}'_k + \overline{P}_K^{-I} \nabla \alpha_k \quad (6.19)$$

\overline{P}_K^{-I} est la pression moyenne aux interfaces et peut avoir une influence importante, notamment dans le cas des écoulements stratifiés. Une hypothèse classique en écoulement dispersé consiste à supposer que l'égalité de la pression aux interfaces et la pression moyenne au sein du liquide :

$$\overline{P}_g^g = \overline{P}_g^I = \overline{P}_l^I = \overline{P}_l^I \quad (6.20)$$

Cette dernière relation implique que l'on néglige les effets de la tension de surface : soit $-\overline{(\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n}} \delta_\sigma = 0$.

Dans le cas des écoulements dispersés \mathbf{M}'_k est physiquement interprété à l'aide des forces qui agissent sur une bulle² (Cf. section 1.2). Ces dernières dépendent directement de la configuration d'écoulement de chaque bulle et donc de la géométrie des interfaces.

6.3 Prise en compte de la géométrie des interfaces

Comme nous venons de l'exposer, la description de la géométrie des interfaces est extrêmement importante pour rendre compte des échanges aux interfaces. Classiquement [83], on écrit :

$$\text{Transferts aux interfaces} \simeq a_i \cdot \text{densité de flux} \quad (6.21)$$

Pour tenir compte de a_i , l'équation d'évolution de cette grandeur est introduite [84]

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\delta_\sigma \mathbf{w}}) = \overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w})} \quad (6.22)$$

où \mathbf{w} est la vitesse microscopique de l'interface. On définit alors la vitesse moyenne des interfaces : $a_i \mathbf{V}_i = \overline{\delta_\sigma \mathbf{w}}$. Dans le cas d'un écoulement monodisperse, il est possible de la relier à la vitesse de la phase dispersée : $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_g$. Cela signifie simplement que les interfaces se déplacent à la même vitesse que le gaz. Le terme $\overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w})}$ est alors interprété comme une source de densité d'aire interfaciale associée aux déformations, coalescences et fragmentations.

Comme les essaims sont rarement monodisperses, il peut être intéressant de tenir compte de la polydispersion. Cette information géométrique est nécessaire pour estimer correctement la vitesse de convection de a_i . De plus, les forces associées aux échanges de quantité de mouvement aux interfaces tiennent compte de la géométrie des interfaces (par exemple le diamètre des bulles) par l'intermédiaire de corrélations (Cf. section 1.2).

Afin de rendre compte de la polydispersion de l'essaim de bulles, plusieurs types de modélisation ont été introduits. Parmi celles-ci on peut distinguer deux catégories de modèles largement employés. Une première catégorie de modèles [85], [86], est basée sur une discrétisation de la fonction de distribution des diamètres des inclusions. Chaque classe de bulles est alors représentée par un modèle monodisperse : une équation de masse et de quantité de mouvement est résolue pour chaque classe. On résout le transport de ces différentes familles comme s'il s'agissait de fluides distincts. Les échanges de masse entre les sous-familles sont alors assurés grâce à des modèles de coalescence et fragmentation.

Une deuxième catégorie de modèles [87], [88] vise à modéliser la fonction de distribution des diamètres de bulles. Ainsi, en se donnant la forme de la fonction de distribution $f(d, \mathbf{x}, t)$ (loi

2. \mathbf{M}'_k représente en partie la somme des forces agissant sur une bulle et moyennées sur la population de bulles.

log-normale, loi quadratique par exemple), il est possible de calculer analytiquement les moments statistiques d'ordre p :

$$S_p \triangleq \int d^p f(d, \mathbf{x}, t) dd \quad (6.23)$$

Les premiers moments statistiques représentent physiquement :

- $S_0 = n$, où n est le nombre volumique de bulles,
- $S_1 = n d_{10}$, où d_{10} est le diamètre moyen arithmétique,
- $S_2 = \pi a_i$,
- $S_3 = \pi \alpha/6$.

Pour fermer le problème, il "suffit" alors de déterminer les paramètres de la loi choisie. Pour cela, on utilise l'équation de Liouville-Boltzmann. A partir de cette dernière, on peut déduire des équations de bilan associées à chacun des moments S_p . Celles-ci sont toutes fermées par des modèles de coalescence et fragmentation. La résolution d'un nombre suffisant de ces équations permet alors de fermer le problème, les paramètres de f étant reliés analytiquement aux différents moments S_p . Cette dernière propriété mathématique conditionne le choix de la fonction de distribution qui modélise f .

6.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les développements formels qui conduisent à l'écriture du modèle à 6 équations dans le cas des écoulements isothermes, sans changement de phase et incompressibles. Après avoir présenté la signification physique des grandeurs moyennes qui apparaissent nous avons succinctement exposé quelques fermetures classiques de la littérature. En particulier, nous avons vu l'importance de la densité d'aire interfaciale et des modèles qui permettent de rendre compte de la géométrie des interfaces.

Dans la suite de ce travail, nous allons nous intéresser à l'utilisation du modèle ISS présenté au chapitre 5 afin de renseigner les modèles moyennés.

Troisième partie

De la SND (ISS) vers le moyenné (RANS)

Chapitre 7

Travail préliminaire aux mesures

DANS une première étape de ce travail, nous avons établi un lien entre les modèles de types SND diphasiques et une modélisation de type SGE diphasique appelée ISS. Nous souhaitons maintenant utiliser cette dernière afin de réaliser la seconde étape de notre projet.

Avant cela, il convient de s'interroger sur la méthode de prise de moyenne qui va être employée et sur la signification physique des variables moyennes ainsi obtenues.

Pour cela, nous allons réaliser dans ce chapitre une série d'études théoriques dans le cadre d'une moyenne en volume. Ensuite nous allons exposer la méthode de prise de moyenne que nous avons développée. Enfin, nous allons mettre en œuvre cette dernière dans deux configurations simplifiées qui se rapportent à des situations caractéristiques de nos futures simulations.

7.1 Différentes vitesses microscopiques des interfaces

7.1.1 Calcul de la vitesse du centre de gravité d'une interface

Comme nous l'avons exposé précédemment, le choix de la partie tangentielle de la vitesse des interfaces n'affecte pas le transport de la discontinuité. Néanmoins, nous allons montrer que ce choix n'est pas sans conséquence sur les grandeurs moyennes. Pour cela, nous avons choisi deux vitesses :

- $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}$ qui correspond à la vitesse locale du fluide à l'interface,
- $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{u} - \mathbf{V}_G)_n + \mathbf{V}_G$ ¹ qui se rapporte à la vitesse du fluide à laquelle on enlève sa partie tangentielle dans le repère de la bulle.

Les deux définitions précédentes ne diffèrent que par leur partie tangentielle. En effet :

$$(\mathbf{u} - \mathbf{V}_G)_n + \mathbf{V}_G = \mathbf{u}_n + \mathbf{V}_{Gt} \quad (7.4)$$

$$= \mathbf{u} - (\mathbf{u} - \mathbf{V}_G)_t \quad (7.5)$$

1. Un champ vectoriel défini sur l'interface peut être décomposé en une partie normale et une partie tangentielle. Ainsi soit ϕ un tel champ, on a :

$$\phi = \phi_n + \phi_t \quad (7.1)$$

Avec,

$$\phi_n = (\phi \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (7.2)$$

$$\phi_t = \phi - \phi_n \quad (7.3)$$

7.1. DIFFÉRENTES VITESSES MICROSCOPIQUES DES INTERFACES

La définition de \mathbf{w}_2 fait intervenir la vitesse du centre de gravité de la portion connexe d'interface considérée \mathbf{V}_G . Il se pose donc le problème du calcul de cette grandeur. Par définition, la position du centre de gravité d'une portion d'interface est :

$$\mathbf{X}_G = \frac{\int_s \mathbf{x} ds}{\int_s ds} \quad (7.6)$$

En utilisant la relation [89]

$$\frac{d}{dt} \left(\int_s f ds \right) = \int_s \frac{df}{dt} ds + \int_s f \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) ds \quad (7.7)$$

il vient :

$$\mathbf{V}_G = \frac{d\mathbf{X}_G}{dt} \quad (7.8)$$

$$= \frac{1}{\int_s ds} \int_s \frac{d\mathbf{x}}{dt} ds + \frac{\int_s \mathbf{x} \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) ds}{\int_s ds} - \frac{\int_s \mathbf{x} ds}{(\int_s ds)^2} \int_s \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) ds \quad (7.9)$$

$$= \underbrace{\frac{\int_s \mathbf{w} ds}{\int_s ds}}_{\text{Moyenne de la vitesse}} + \underbrace{\frac{\int_s (\mathbf{x} - \mathbf{X}_G) \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) ds}{\int_s ds}}_{\text{Déformation locale de l'interface}} \quad (7.10)$$

Ainsi, la vitesse du centre de gravité de l'interface ne se réduit pas à la simple moyenne de la vitesse mais elle tient compte d'un terme associé aux déformations locales de l'interface. Afin d'illustrer l'importance du terme associé aux déformations locales de l'interface, on propose de calculer la vitesse du centre de gravité d'une bulle indéformable pour une faible valeur du nombre de Reynolds de bulle Re_b . La configuration est illustrée à la figure 7.1. La solution de cet écoulement dans le repère sphérique lié à la bulle est donnée par Hadamard et Rybczynski [9], [8] :

$$u_r(r = R) = 0 \quad (7.11a)$$

$$u_\phi(r = R) = 0 \quad (7.11b)$$

$$u_\theta(r = R) = \frac{U \sin(\theta)}{2(1 + \kappa)} \text{ avec, } \kappa = \frac{\mu_g}{\mu_l} \quad (7.11c)$$

Le calcul de la vitesse de l'interface doit naturellement donner 0 puisque nous nous sommes placés dans le repère barycentrique de l'inclusion. On commence par calculer la moyenne de la vitesse à l'interface :

$$\frac{\int_s \mathbf{w}_1 ds}{\int_s ds} = -\frac{1}{\pi d_e^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{U \sin^2(\theta)}{2(1 + \kappa)} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \mathbf{e}_z \quad (7.12a)$$

$$= -\frac{U}{4(1 + \kappa)} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \mathbf{e}_z \quad (7.12b)$$

$$= -\frac{U}{3(1 + \kappa)} \mathbf{e}_z \quad (7.12c)$$

Ainsi, on trouve que la moyenne de la vitesse sur l'interface est négative. *A posteriori* ce résultat n'est pas étonnant puisque la vitesse est dirigée suivant $+\mathbf{e}_\theta$, mais il est relativement

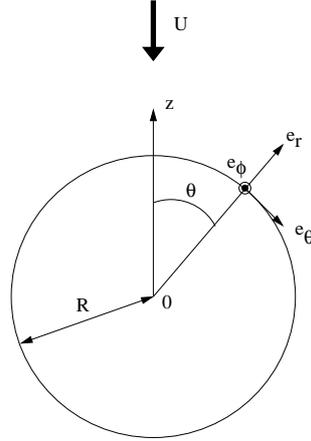


FIGURE 7.1 – Configuration associée à la solution d’Hadamard et Rybczynski [9], [8]

contre-intuitif *a priori*. Le calcul de la divergence surfacique de la vitesse donne :

$$\nabla_s \cdot (\mathbf{w}_1) = \frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{U \sin^2(\theta)}{2(1+\kappa)} \right] \quad (7.13a)$$

$$= \frac{U \cos(\theta)}{R(1+\kappa)} \quad (7.13b)$$

On trouve que la divergence surfacique de la vitesse est positive au sommet de la bulle, nulle à l’équateur et négative en bas. Cela est cohérent avec le fait qu’il y a un étirement en haut de l’inclusion et une contraction en bas. Cette migration de particules fluides le long de l’interface correspond à la situation physique d’une interface non contaminée. Il existe alors des points où ces particules convergent ou divergent. À ces points d’arrêt, il y a échange de matière entre les phases et l’interface. Ainsi, les molécules des fluides qui se trouvent à l’interface sont constamment renouvelées. Il est important de noter que cette déformation locale de l’interface est cohérente avec l’aspect non déformable de l’inclusion d’après l’équation 7.11a. On montre aussi que la surface totale de la bulle ne varie pas :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \nabla_s \cdot (\mathbf{w}_1) \sin(\theta) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{U \cos(\theta)}{R(1+\kappa)} \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (7.14a)$$

$$= 0 \quad (7.14b)$$

L’équation 7.13b permet de calculer le second terme de \mathbf{V}_G :

$$\frac{\int_s (\mathbf{x} - \mathbf{X}_G) \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) ds}{\int_s ds} = \frac{1}{\pi d_e^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{x} \frac{U \cos(\theta)}{R(1+\kappa)} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (7.15a)$$

$$= \frac{\pi d_e}{\pi d_e^2} \int_0^\pi \mathbf{x} \frac{U \cos(\theta)}{1+\kappa} \sin(\theta) d\theta \quad (7.15b)$$

$$= \frac{U}{2(1+\kappa)} \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta \mathbf{e}_z \quad (7.15c)$$

$$= \frac{U}{3(1+\kappa)} \mathbf{e}_z \quad (7.15d)$$

On déduit alors de 7.10 que \mathbf{V}_G est nulle, ce qui était attendu. On montre ainsi que la divergence surfacique de la vitesse participe au transport de l’interface. Ainsi, il existe deux contributions

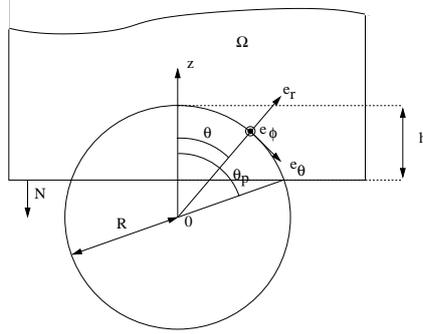


FIGURE 7.2 – Configuration associée à la solution d'Hadamard et Rybczynski [9], [8]

au mouvement global de l'interface : la première correspond à la moyenne des déplacements alors que la seconde se rapporte aux mouvements relatifs des différentes portions d'interfaces entre elles.

7.1.2 Mise en évidence de l'influence du choix de la vitesse microscopique de l'interface sur le bilan de densité d'aire interfaciale

Nous venons de voir que le transport d'interface est assuré non seulement par la moyenne de la vitesse à l'interface mais aussi par les déplacements relatifs des portions d'interfaces les unes par rapport aux autres. Ces déplacements relatifs sont alors pris en compte par l'intermédiaire de la divergence surfacique locale à l'interface. Ainsi, \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 permettent de transporter la même interface puisqu'ils ne diffèrent que par leur partie tangentielle. Pourtant, ils n'ont ni la même moyenne ni la même divergence surfacique. Ces deux champs de vitesse assurent en fait le même transport mais de deux façons différentes. Comme le bilan d'aire interfaciale volumique 6.22 fait intervenir un terme relatif à la moyenne de la vitesse et un autre à $\nabla_s \cdot (\mathbf{w})$, nous allons maintenant préciser l'effet du choix de la vitesse microscopique \mathbf{w} (plus précisément de sa partie tangente) sur les termes de ce bilan.

Pour cela, nous proposons d'étudier le cas d'une bulle indéformable en régime laminaire qui pénètre dans un volume de prise de moyenne Ω . Celui-ci est un cube de volume V_Ω dont l'une des arêtes est parallèle à \mathbf{e}_z . L'opérateur de prise de moyenne s'écrit alors :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \phi \, dv \quad (7.16)$$

L'inclusion est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme et se déplace à la vitesse définie par $\mathbf{V}_G = V_G \mathbf{e}_z$. La configuration d'écoulement est représentée schématiquement à la figure 7.2. Nous utilisons la solution Hadamard et Rybczynski [9], [8] dans un repère lié au volume de prise de moyenne Ω . La surface d'interface incluse dans le volume de contrôle à un instant t est $S(t) = \pi d_e h(t)$. On en déduit que la variation de a_i associée à l'entrée de l'inclusion dans Ω est :

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} = \frac{1}{V_\Omega} \frac{\partial S(t)}{\partial t} \quad (7.17a)$$

$$= \frac{1}{V_\Omega} \pi d_e V_G \quad (7.17b)$$

Dans cette situation, la variation temporelle de densité d'aire interfaciale est constante en temps. Nous allons maintenant nous intéresser aux autres termes du bilan d' a_i en utilisant chacune des vitesses \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 .

Cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$

Ce cas se rapporte à la situation naturelle où la vitesse matérielle à l'interface est utilisée pour le transport de celle-ci. Cette vitesse correspond à la solution d'Hadamard et Rybczynski donnée au système 7.11. Comme celle-ci est définie dans le référentiel de l'inclusion, on effectue un changement de référentiel. Ainsi, le calcul du terme source de l'équation de bilan d' a_i donne alors :

$$\overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}_1)} = \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \frac{V_G \cos(\theta)}{R(1+\kappa)} \delta_\sigma dv + \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \delta_\sigma \nabla_s \cdot (V_G \mathbf{e}_z) dv \quad (7.18)$$

$$= \frac{1}{V_\Omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_p} \frac{V_G \cos(\theta)}{R(1+\kappa)} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (7.19)$$

$$= \frac{\pi V_G d_e}{2(1+\kappa)V_\Omega} \sin^2(\theta_p) \quad (7.20)$$

De même, le terme convectif s'écrit simplement :

$$\nabla \cdot (\overline{\delta_\sigma \mathbf{w}_1}) = \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \nabla \cdot (\delta_\sigma \mathbf{w}_1) dv \quad (7.21)$$

$$= -\frac{1}{V_\Omega} \int_{\partial\Omega} V_G \delta_\sigma ds + \frac{1}{V_\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{V_G}{2(1+\kappa)} \sin^2(\theta_p) \delta_\sigma ds \quad (7.22)$$

$$= -\frac{1}{V_\Omega} \pi d_e V_G + \frac{\pi V_G d_e}{2(1+\kappa)V_\Omega} \sin^2(\theta_p) \quad (7.23)$$

De façon rassurante, on trouve que le bilan d' a_i est bien respecté. Comme nous l'avons pressenti, le terme source participe au transport de la quantité a_i de la même manière que le terme $\nabla_s \cdot (\mathbf{w})$ participe au mouvement global de l'inclusion défini à l'équation 7.10.

Cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$

En utilisant les relations 7.11 et la définition de \mathbf{w}_2 , on trouve qu'avec ce choix de vitesse : $\mathbf{w} = \mathbf{V}_G = V_G \mathbf{e}_z$. Le calcul du terme source du bilan d' a_i donne alors simplement :

$$\overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}_2)} = \overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (V_G \mathbf{e}_z)} = 0 \quad (7.24)$$

Contrairement au cas précédent, le terme source est nul ici et ne participe pas au transport d' a_i . Le calcul du terme convectif nous donne alors simplement :

$$\nabla \cdot (\overline{\delta_\sigma \mathbf{w}_2}) = \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \nabla \cdot (\delta_\sigma \mathbf{w}_2) dv \quad (7.25)$$

$$= \frac{1}{V_\Omega} \int_{\partial\Omega} \delta_\sigma \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{N} ds \quad (7.26)$$

$$= -\frac{V_G}{V_\Omega} \int_{\partial\Omega} \delta_\sigma ds \quad (7.27)$$

$$= -\frac{1}{V_\Omega} \pi d_e V_G \quad (7.28)$$

Ce terme compense exactement la variation d' a_i de sorte que le bilan de conservation d' a_i est aussi respecté avec la vitesse $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$.

Cet exemple théorique permet de montrer que la partie tangentielle de vitesse microscopique de déplacement de l'interface n'affecte pas le transport d' a_i puisque l'équation de bilan de cette

grandeur est respecté. Néanmoins, le choix explicite de la vitesse microscopique influence directement les termes convectif et source de cette équation. Autrement dit, la somme de ces deux termes compense la variation temporelle d' a_i quel que soit le choix de la partie tangentielle de la vitesse. Néanmoins, la répartition du transport de la quantité a_i dans ces deux termes dépend directement du choix de w .

7.2 Opération de prise de moyenne

Nous venons de réaliser une étude théorique qui nous a permis de mettre en lumière l'importance du choix de la partie tangentielle sur les termes de l'équation de bilan de densité d'aire interfaciale. Ce genre d'étude est néanmoins limité aux configurations extrêmement simplifiées. Afin de généraliser ce résultat dans des situations plus complexes, nous avons besoin de réaliser des études numériques. Pour cela nous allons commencer par présenter la méthode de prise de moyenne utilisée par la suite. Afin d'étudier les difficultés liées aux calculs des grandeurs instantanées et de l'opération de prise de moyenne, nous allons ensuite nous intéresser à deux études numériques.

7.2.1 Méthode de filtrage

Il est assez usuel, lors d'un test *a priori*, d'utiliser des opérateurs de filtrage spatiaux, car ceux-ci sont aisés à mettre en œuvre au sein d'un logiciel de post-traitement. Néanmoins, cela revient à ignorer l'information (physique) coûteuse qui est nécessaire pour passer d'un pas de temps de post-traitement à l'autre. Dans la mesure où la convergence des moyennes est un point critique de notre étude, il a été décidé d'utiliser un opérateur composite qui couple un opérateur temporel à opérateur spatial en tranches (sur la section de conduite). Dans la suite de ce document on notera :

- $\bar{\cdot}$ la moyenne temporelle,
- $\langle \cdot \rangle$ la moyenne en tranches. Celle-ci est définie à l'équation 7.31 et illustrée par la figure 7.4

Le noyau de convolution associé à l'opérateur temporel est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui doit avoir les propriétés suivantes :

- support compact de taille 2Δ ,
- normé (l'intégrale de cette fonction sur \mathbb{R} est égale à l'unité),
- pair,
- C^2 sur \mathbb{R} .

La fonction choisie est un polynôme de degré 4 sur l'intervalle $-\Delta, +\Delta$:

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\zeta \mapsto \begin{cases} \frac{15}{16\Delta} \left(\left(\frac{\zeta}{\Delta} \right)^4 - 2 \left(\frac{\zeta}{\Delta} \right)^2 + 1 \right) & \text{si } |\zeta| \leq \Delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.29)$$

La figure 7.3 représente la fonction $G(\zeta)$, donnée par l'expression 7.29.

La figure 7.4 présente un exemple de l'une des configurations étudiées par la suite, la tranche visualisée étant, dans cet exemple, située à une altitude $z = 0,3$ m. L'écoulement concerné est globalement dirigé suivant la verticale ascendante (direction z). On peut donc, dans notre

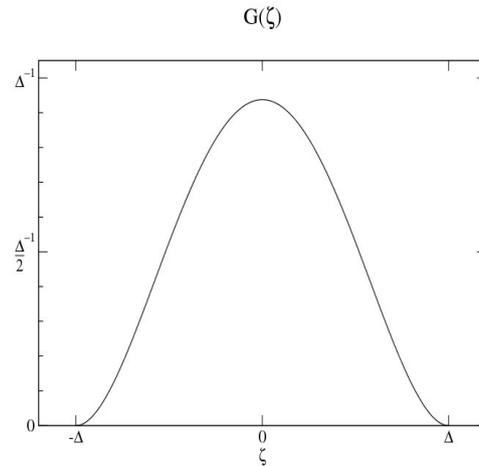


FIGURE 7.3 – Noyau de convolution

analyse, faire l'approximation que l'écoulement moyen est monodimensionnel, ce qui permet de faire une moyenne par tranches de la colonne (une tranche par maille eulérienne dans la direction z). Dans une seconde étape, on procède à un filtrage spatial dans la direction z avec le même noyau que pour le filtrage temporel. Ce dernier filtrage permet d'estimer plus précisément les dérivées spatiales *via* le produit de convolution de la variable à dériver et de la dérivée du noyau.

7.2.2 Calcul des grandeurs moyennes

Pour obtenir les champs moyens, il faut d'abord estimer les grandeurs instantanées à chaque pas de temps puis effectuer le produit de convolution.

Calcul des grandeurs instantanées

Pour estimer les termes des trois bilans que nous souhaitons étudier (système d'équations 7.39), nous avons besoin de définir et calculer plusieurs grandeurs locales :

$$\begin{array}{ll} \chi_k & \chi_k \mathbf{v}_k \\ \chi_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k & \chi_k P_k \\ \delta_\sigma & \delta_\sigma \mathbf{w} \end{array}$$

Comme nos simulations sont toutes réalisées avec une discrétisation de type VDF², les champs eulériens sont soit au centre des éléments soit au centres des faces. Afin de réaliser les produits $\chi_k \mathbf{v}_k$ et $\chi_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k$, on interpole le champ de vitesse au centre des éléments.

L'indicatrice de phase nous donne directement χ_g et χ_l . En ce qui concerne le calcul de δ_σ , il est aisé de calculer la surface d'interface présente dans chaque élément eulérien à partir des données d'intersection entre les maillages lagrangien et eulérien du module Front-Tracking. Nous exploitons ici la précision de la méthode de SND diphasique utilisée. En effet, comme les

2. On parle de grandeurs locales par abus de langage : on ne dispose en fait que de grandeurs moyennes sur un volume de contrôle à cause de la formulation de type volumes finis. La résolution des équations de Navier-Stokes est alors réalisée localement par le biais d'un bilan sur chaque volume de contrôle. Comme ces volumes (qui correspondent aux mailles) sont suffisamment petits, on peut approximer que la valeur moyenne est égale à la valeur locale.

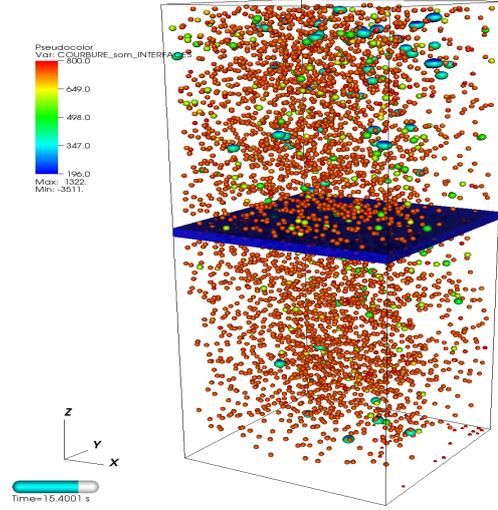


FIGURE 7.4 – Exemple de configuration étudiée. La tranche bleue située à $z = 0,3$ m est utilisée comme exemple dans la suite du document

méthodes de type Front-Tracking décrivent explicitement les interfaces, le calcul de la surface d'interface incluse dans une maille est aisée et précise.

Le terme source de l'équation de densité d'aire interfaciale est plus délicat à estimer. La divergence surfacique de vitesse est calculée sur le maillage lagrangien à partir de la vitesse de déplacement de l'interface. On procède ensuite à une interpolation pour obtenir un champ volumique au centre des éléments eulériens.

Nous avons constaté que les algorithmes de remaillage ont une influence non négligeable sur la densité d'aire interfaciale et donc sur son bilan. Pour tenir compte de cette variation de surface (non physique), nous procédons à la mesure de cette grandeur avant et après les étapes de remaillage. Il est alors possible de distinguer la variation d' a_i physique de celle qui est induite par le changement brusque de topologie lors d'une coalescence.

Cela revient en fait à décomposer $(\frac{\partial a_i}{\partial t})_{total}$ en une partie résolue notée $(\frac{\partial a_i}{\partial t})_r$ et une partie modélisée $(\frac{\partial a_i}{\partial t})_m$. $(\frac{\partial a_i}{\partial t})_r$ se rapporte aux mouvements des interfaces calculées par la méthode de SND diphasique alors que $(\frac{\partial a_i}{\partial t})_m$ correspond à la variation de surface engendrée par l'algorithme de remaillage. La valeur de $(\frac{\partial a_i}{\partial t})_m$ tend vers 0 quand le pas d'espace du maillage tend vers 0.

Dans la suite de ce travail nous ne considérerons pas la variation d' a_i associée aux changements de topologie puisqu'elle ne peut être prise en compte par l'équation 6.22. Les résultats présentés dans ce mémoire se rapporteront donc à :

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_{total} - \left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_m \quad (7.30)$$

Afin d'alléger les notations, on omettra par la suite l'indice r .

Opération de prise de moyenne en temps

L'opération de prise de moyenne temporelle est réalisée en cours de calcul : on ne stocke pas les champs instantanés. Le calcul du produit de convolution démarre à $t = t_{init}$ (défini par l'utilisateur) et se poursuit sur une période 2Δ . À cet instant, le résultat est écrit dans un fichier de post-traitement, et une nouvelle séquence de prise de moyenne commence. Dans la mesure où un bloc de post-traitement ne permet d'obtenir qu'une valeur des champs filtrés par période

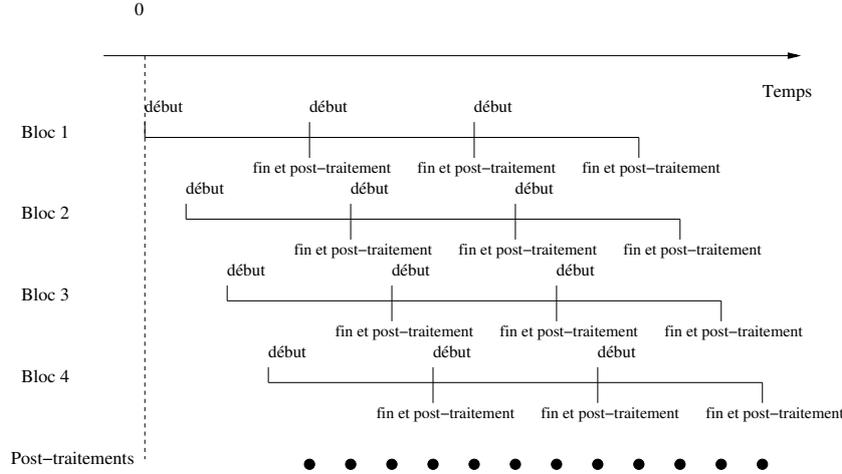


FIGURE 7.5 – Chronogramme de l'opération de prise de moyenne

d'intégration, nous avons utilisé plusieurs blocs décalés en temps (choix d'un instant t_{init}) pour avoir un échantillonnage en temps correct des champs moyens (voir la figure 7.5). Nous avons implémenté les possibilités d'utiliser le noyau de convolution défini par l'équation 7.29, de post-traiter les résultats automatiquement à la fin de la période 2Δ et d'enchaîner les séquences de prise de moyenne. Tout cela est bien évidemment réalisé en tenant compte du parallélisme et de la nécessité de pouvoir sauvegarder et reprendre un calcul.

Le choix d'une prise de moyenne lors du calcul n'est pas anodin : cela interdit de modifier des paramètres comme G et Δ . Celui-ci nous a semblé plus réaliste vues les quantités d'information à stocker dans le cas contraire : dans la configuration actuelle, le plus gros calcul réalisé dans ce travail (42 millions de mailles) nécessite déjà un espace de plus de 850 Go pour sauvegarder les informations récoltées en 19 secondes de temps physique simulé.

Moyenne en tranches

Maintenant que nous disposons des champs moyennés en temps, il faut encore procéder à une opération de moyenne en tranches (voir figure 7.4). Le système d'équations 6.11 correspond à un problème moyen tridimensionnel. L'opérateur utilisé dans notre cas est l'opérateur de moyenne temporelle. Nous devons donc procéder à une étape supplémentaire qui va nous permettre d'obtenir de construire un problème monodimensionnel. Pour cela, on applique aux équations du système 6.11 un opérateur de moyenne sur une section de conduite défini par

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{A} \int_A \phi dA \quad (7.31)$$

où A est la section de la conduite considérée. De façon analogue à la moyenne en temps, on définit aussi la moyenne pondérée par α_k :

$$\langle \phi_k \rangle_k = \frac{\langle \alpha_k \phi_k \rangle}{\langle \alpha_k \rangle} \quad (7.32)$$

Ainsi, en utilisant les définitions précédentes, il vient d'après [10] et [81] :

$$\frac{\partial \langle \alpha_k \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\langle \alpha_k \rangle \langle \overline{v_k^k} \rangle_k) = 0 \quad (7.33a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k \langle \alpha_k \rangle \langle \overline{v_k^k} \rangle_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_k \langle \alpha_k \rangle \langle \overline{v_k v_k^k} \rangle_k) &= - \frac{\partial}{\partial z} (\langle \alpha_k \rangle \langle \overline{P_k^k} \rangle_k) \\ &- \rho_k \langle \alpha_k \rangle g \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (\langle \alpha_k \rangle (2 \mu_k \langle \frac{\partial \overline{v_k^k}}{\partial z} \rangle_k)) \\ &- \langle \overline{\tau_k \cdot \nabla \chi_k} \rangle_z + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_k \langle D_{kzz}^i \rangle) \end{aligned} \quad (7.33b)$$

$$\text{avec,} \quad \sum_k \langle \overline{\tau_k \cdot \nabla \chi_k} \rangle_z = \langle \overline{(\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma} \rangle_z \quad (7.33c)$$

De même, l'équation de densité d'aire interfaciale 6.22 s'écrit en 1D :

$$\frac{\partial \langle a_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \overline{\delta_\sigma w_z} \rangle}{\partial z} = \langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) \rangle \quad (7.34)$$

En négligeant les erreurs de commutations entre les dérivées spatiales et les opérateurs de moyennes phasiques : \cdot^k et $\langle \cdot \rangle_k$, il vient lors du calcul des termes visqueux

$$\langle D_{kzz}^i \rangle = 0 \quad (7.35)$$

et,

$$\langle \frac{\partial \overline{v_k^k}}{\partial z} \rangle_k = \frac{\partial \langle \overline{v_k^k} \rangle_k}{\partial z} \quad (7.36)$$

Ces simplifications sont justifiées par le fait que les effets visqueux sont faibles par rapport aux effets convectifs. L'erreur de commutation associée aux termes visqueux est donc négligeable. Cette hypothèse se retrouve fréquemment : elle est, par exemple, faite dans le logiciel Neptune CFD. Afin d'alléger les notations, on définit les variables doublement moyennées suivantes :

$$V_k \triangleq \langle \overline{v_k^k} \rangle_k, \quad R_k \triangleq \langle \alpha_k \rangle \quad (7.37)$$

$$A_i \triangleq \langle a_i \rangle, \quad \mathcal{P}_k \triangleq \langle \overline{P_k^k} \rangle_k \quad (7.38)$$

Au final le système d'équations correspondant au cas monodimensionnel est :

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (R_k V_k) = 0 \quad (7.39a)$$

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{\partial R_k V_k}{\partial t} + \rho_k \frac{\partial}{\partial z} (R_k \langle \overline{v_k v_k^k} \rangle_k) &= -R_k \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{P}_k) - \rho_k R_k g \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (2 \mu_k R_k \frac{\partial V_k}{\partial z}) + F_k \end{aligned} \quad (7.39b)$$

$$\text{avec,} \quad \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \overline{\delta_\sigma w_z} \rangle}{\partial z} = \langle \overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w})} \rangle \quad (7.39c)$$

$$F_k = - \langle \overline{\tau_k \cdot \nabla \chi_k} \rangle_z - \mathcal{P}_k \frac{\partial R_k}{\partial z} \quad (7.39d)$$

$$\sum_k \langle \overline{\tau_k \cdot \nabla \chi_k} \rangle_z = \langle \overline{(\nabla_s \cdot \mathbf{n}) \sigma \mathbf{n} \delta_\sigma} \rangle_z \quad (7.39e)$$

Le terme $-\langle \overline{\tau_k \cdot \nabla \chi_k} \rangle_z$ peut se décomposer en une partie fluctuante et une partie moyenne qui s'écrit $\mathcal{P}_k^i \frac{\partial R_k}{\partial z}$. \mathcal{P}_k^i est alors physiquement interprétée comme une pression moyenne aux interfaces. De façon classique, en négligeant la différence entre \mathcal{P}_k^i et \mathcal{P}_k , on assimile le terme F_k à la partie fluctuante de $-\langle \overline{\tau_k \cdot \nabla \chi_k} \rangle_z$. Celle est alors reliée aux forces qui agissent sur l'essaim de bulles : traînée, portance...

Cette dernière étape du processus de prise de moyenne est réalisée après le calcul dans un logiciel de post-traitement. Ce choix peut paraître absurde dans la mesure où nous sommes obligés de conserver un nombre important de champs tridimensionnels (scalaire et vecteurs) pour calculer, au final, un ensemble de champs monodimensionnels (qui nécessitent 10 000 fois moins d'espace de stockage). Néanmoins, ceci s'explique par le fait que nous avons l'ambition de pouvoir également réaliser ce genre d'études dans une configuration présentant des gradients moyens latéraux non nuls.

7.3 Études préliminaires sur des cas simplifiés

Nous venons d'étudier le bilan de densité d'aire interfaciale dans un cas analytique avec une opération de prise de moyenne en volume. Nous allons maintenant procéder à une analyse grâce à des calculs numériques dans deux cas simplifiés (*i. e.* ils font intervenir un nombre de bulles très réduit). Le premier est relatif à la montée d'une bulle unique et va nous permettre de montrer comment évoluent les grandeurs moyennes et comment se répartissent les différents termes des équations de bilan. Le second cas se rapporte au phénomène de coalescence. Bien que ce phénomène ne soit pas étudié dans ce travail, nous ne pouvons pas l'empêcher simplement avec la méthode numérique utilisée³. L'étude de l'influence de celui-ci sur les bilans de masse et d'aire interfaciale volumique constitue donc une étape préliminaire importante.

7.3.1 Montée d'un bulle unique

Dans un premier temps, nous allons nous restreindre à un cas sans coalescence ni fragmentation. Cela va nous permettre de discuter de l'évolution physique des grandeurs moyennes sur un écoulement simple. Pour cela, nous nous intéressons à la montée d'une bulle unique quasi-sphérique : $Eö = 70$, $\log(Mo) = -5, 8$. La colonne étudiée possède les caractéristiques suivantes :

- dimensions : 0,025 m, 0,025 m, 0,2 m,
- maillage : $20 \times 20 \times 160$ mailles.

Le diamètre de la bulle est 10 mm ce qui correspond à environ 8 mailles eulériennes dans le diamètre de celle-ci. Les figures 7.6(a) et 7.6(b) représentent une visualisation de la configuration d'écoulement. La forme de la bulle est stationnaire et de type ellipsoïdale (plus forte courbure à l'équateur qu'aux pôles). Le champ de vitesse est perturbé autour de l'inclusion. On note aussi la présence d'un sillage assez long.

Avant de choisir les tailles des filtres temporel et spatial, il faut déterminer des ordres de grandeurs des temps et tailles caractéristiques de l'écoulement : $t_{car} = d_e/V_T = 0,077$ s et $d_e = 0,01$ m. Dans la mesure où nous souhaitons étudier le passage d'une bulle, il faut prendre $\Delta_t \approx t_{car}$ et $\Delta_x \approx d_e$. Pour cette raison, nous avons sélectionné $2 \Delta_t = 0,1$ s et $2 \Delta_x = 0,02$ m.

3. Nous aurions pu utiliser des artifices numériques afin d'empêcher les changements topologiques des interfaces. Néanmoins, l'utilisation de ceux-ci aurait eu une influence non négligeable sur l'écoulement. En particulier, il serait nécessaire d'avoir recours à des forces répulsives non physiques qui empêchent les bulles de se rapprocher les unes des autres.

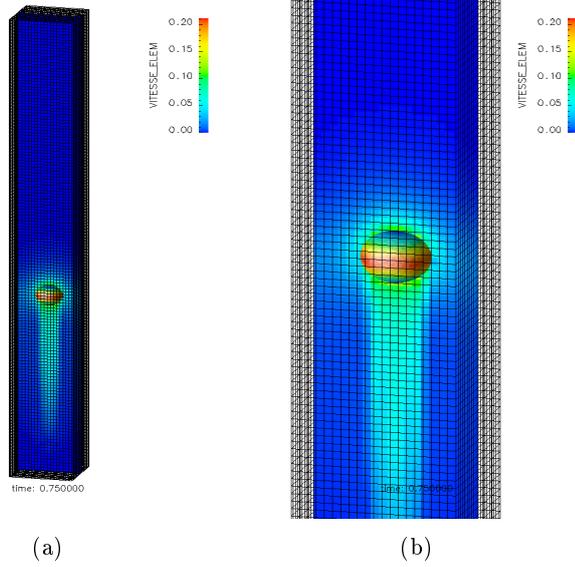


FIGURE 7.6 – Visualisation de la configuration d'écoulement. Coloration de l'interface par la courbure. Coupe colorée par la norme du champ de vitesse

Équation de bilan de masse

La figure 7.7 représente l'évolution temporelle des différents termes de l'équation de bilan de masse ⁴ 6.11a sur une tranche (en $z=0,1$ m). On constate que ce bilan est bien respecté et que l'erreur ϵ_{R_g} (définie à l'équation 7.40) est faible.

Quand la bulle pénètre dans la tranche, R_g augmente et $\frac{\partial R_g}{\partial t}$ est positive. Comme la bulle indéformable se déplace à vitesse constante, $\frac{\partial R_g}{\partial t}$ augmente aussi.

À l'inverse, quand l'inclusion a traversé à moitié la tranche, $\frac{\partial R_g}{\partial t}$ s'annule puis change de signe très rapidement. Au fur et à mesure que la bulle quitte la tranche, R_g diminue et $\left| \frac{\partial R_g}{\partial t} \right|$ diminue. Le comportement observé pour les quantités filtrées est donc correct et valide partiellement notre démarche.

$$\epsilon_{R_g} \triangleq \frac{\partial R_g}{\partial t} + \frac{\partial R_g V_g}{\partial z} \quad (7.40)$$

Vitesses des interfaces

Dans le cadre de l'analyse théorique réalisée à la section 7.1, nous avons montré que le choix de la partie tangentielle de la vitesse microscopique de déplacement des interfaces influence le bilan d' A_i . En particulier, si on choisit mal cette vitesse, le terme source, qui nécessite une fermeture, participe au transport de A_i .

Comme précédemment, nous allons nous intéresser aux deux mêmes choix pour \mathbf{w} : les vitesses \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 définies en début de chapitre. Ces champs de vitesse et les divergences surfaciques associées sont représentés aux figures 7.8. On note que \mathbf{w}_2 est plus régulier que \mathbf{w}_1 . En

4. Le lecteur attentif remarquera que des grandeurs qui n'ont pas la même dimension sont représentées sur un axe commun. Il n'est bien évidemment pas question de comparer de telles grandeurs entre elles mais la représentation de la variation temporelle de R_g (ou A_i) permet de visualiser la plage temporelle de mesure.

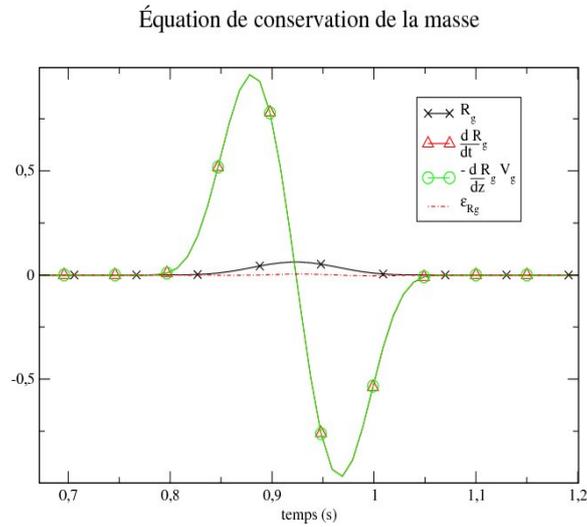


FIGURE 7.7 – Équation de conservation de la masse⁴ : tranche $z=0,1$ m (analogue à celle représentée sur la figure 7.4)

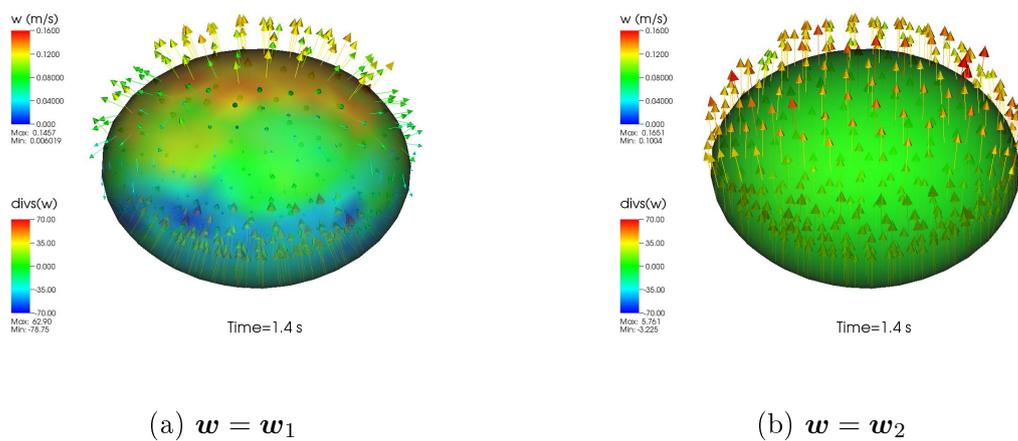


FIGURE 7.8 – Visualisations du champ de vitesse surfacique d’une bulle en ascension (vecteurs) et de la divergence surfacique de ce dernier (champ de couleur). Les échelles sont identiques dans les deux cas

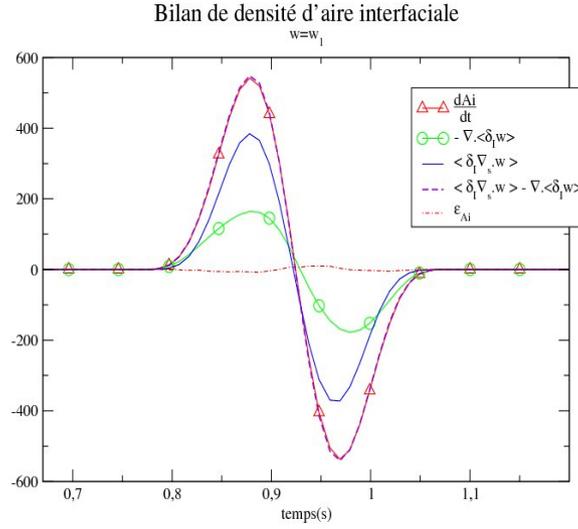


FIGURE 7.9 – Équation d'évolution de la densité d'aire interfaciale définie par l'équation 6.22 : tranche $z=0,1$ m (analogue à celle représentée sur la figure 7.4)

particulier, la composante verticale de \mathbf{w}_1 change deux fois de signe aux environs de l'équateur de la bulle. Cette différence de régularité se retrouve sur les divergences surfaciques. En effet $\nabla_s \cdot (\mathbf{w}_2)$ est homogène et nul sur l'ensemble de la surface de la bulle alors que $\nabla_s \cdot (\mathbf{w}_1)$ est positif en haut, nul à l'équateur et négatif en bas de l'inclusion.

Équation de bilan de densité d'aire interfaciale

$$\epsilon_{A_i} \triangleq \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \overline{\delta_\sigma w_z} \rangle}{\partial z} - \langle \overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot \mathbf{w}} \rangle \quad (7.41)$$

Les figures 7.9 et 7.10 représentent l'évolution temporelle des termes de l'équation d'aire interfaciale volumique 6.22 dans les cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$. On constate que ces bilans sont bien respectés et que l'erreur ϵ_{A_i} (définie à l'équation 7.41) est faible dans les deux cas. Comme la bulle ellipsoïdale ne se déforme pas, on peut voir sur les figures 7.9 et 7.10 que A_i et $\frac{\partial A_i}{\partial t}$ varient de la même façon que R_g et $\frac{\partial R_g}{\partial t}$ respectivement sur la figure 7.7.

Dans le cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$, on remarque que le terme source n'est pas nul alors que l'inclusion ne se déforme pas. Ce constat s'explique par le fait que la divergence surfacique de la bulle n'est pas nulle localement mais uniquement globalement comme précisé précédemment. La portion d'interface qui pénètre en premier dans la tranche, a un champ $\nabla_s \cdot \mathbf{w}$ globalement positif (en rouge sur la figure 7.3.1) et le terme source de l'équation d'aire interfaciale volumique est lui aussi positif. Près de l'équateur, ce dernier champ est globalement nul (en vert sur la figure 7.3.1) si bien que le terme source s'annule quand l'inclusion a traversée à moitié la tranche. Enfin, la portion d'interface intersectée par la tranche en dernier a un champ $\nabla_s \cdot \mathbf{w}$ globalement négatif (en bleu sur la figure 7.3.1) et donc le terme source est aussi négatif.

À l'opposé, dans le cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$, le terme source de l'équation d' A_i est constant et nul. Le transport de la densité d'aire interfaciale est donc entièrement assuré par le terme $\frac{\partial \langle \overline{\delta_\sigma \mathbf{w}_2} \rangle}{\partial z}$.

À ce niveau également, le comportement des quantités filtrées est donc correct et valide partiellement notre démarche.

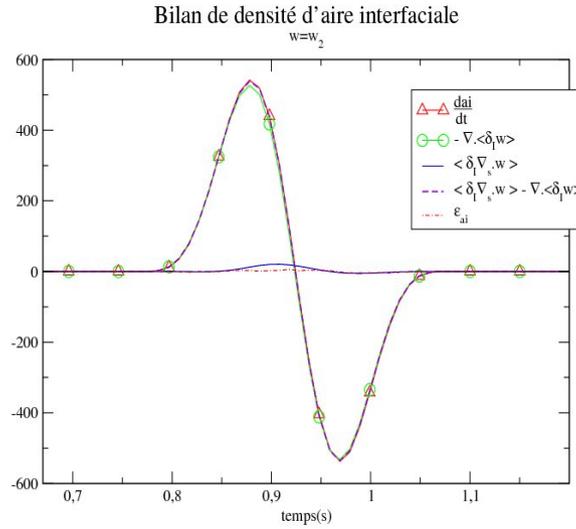


FIGURE 7.10 – Équation d'évolution de la densité d'aire interfaciale définie par l'équation 6.22 : tranche $z=0,1$ m (analogue à celle représentée sur la figure 7.4)

7.3.2 Coalescence de deux bulles

Les phénomènes de coalescence sont gérés par les algorithmes de remaillage global dans Trio_U. Ceux-ci garantissent la conservation de la masse mais pas nécessairement celle de la quantité de surface d'interface. Pour cette raison, nous ne souhaitons pas que plusieurs bulles coalescent dans nos futures simulations. Néanmoins, comme il n'est pas possible d'éviter ce phénomène dans notre implémentation, nous devons quantifier son impact sur le bilan d'aire interfaciale volumique. Pour cela, nous étudions la montée de deux bulles quasi-sphériques qui coalescent. Le domaine d'étude est le même que précédemment.

Pour réussir à faire interagir rapidement nos deux inclusions, nous les avons placées l'une au dessus de l'autre à une distance de 2,5 mm, ce qui correspond à 2 mailles eulériennes. La bulle supérieure est légèrement plus grande que l'autre. Le diamètre des inclusions est 10 mm et 14 mm, ce qui correspond respectivement à environ 8 et 11 mailles eulériennes dans le diamètre de celles-ci. La figure 7.11 représente une visualisation de la configuration d'écoulement à l'initialisation.

Les figures 7.12(a), 7.12(b), 7.12(c) représentent les inclusions avant, pendant et après coalescence. On remarque la différence importante de surface d'interface entre ces différentes figures. Ces déformations ont deux causes :

- après la coalescence, il ne reste plus qu'une seule interface. L'énergie de celle-ci est très importante du fait de la forme "en poire" qu'elle adopte. La réduction de la quantité de surface d'interface n'est pas monotone en temps : il apparaît des oscillations. Pendant cette phase de retour à une forme stable, la bulle va donc adopter un grand nombre de formes qui pourront présentées localement de très fortes courbures.
- la seconde cause de déformation intervient avant la coalescence. Celle-ci provient d'un effet non physique de notre méthode de discrétisation de la tension de surface (voir section 4.2). Ainsi, quand deux bulles sont proches l'une de l'autre et qu'elle traverse la même maille eulérienne, il apparaît une erreur lors de l'estimation de $\nabla\chi$. Celle-ci entraîne alors une mauvaise estimation du terme source de tension de surface dans l'équation de Navier-Stokes. Il apparaît alors localement un gradient de pression non physique qui déforme les deux interfaces là où apparaît l'erreur sur $\nabla\chi$. Ces déformations sont visibles à la figure 7.12(b).

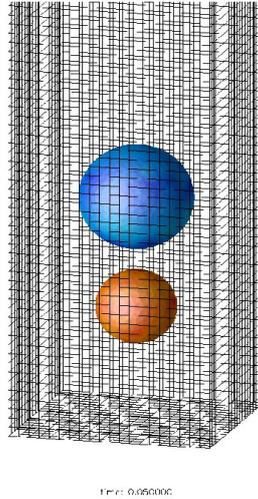


FIGURE 7.11 – Visualisation de l'écoulement en début de calcul : $t=0,05$ s. Coloration par la courbure : la couleur rouge correspond à une valeur de 400 m^{-1} et la bleu à 285 m^{-1}

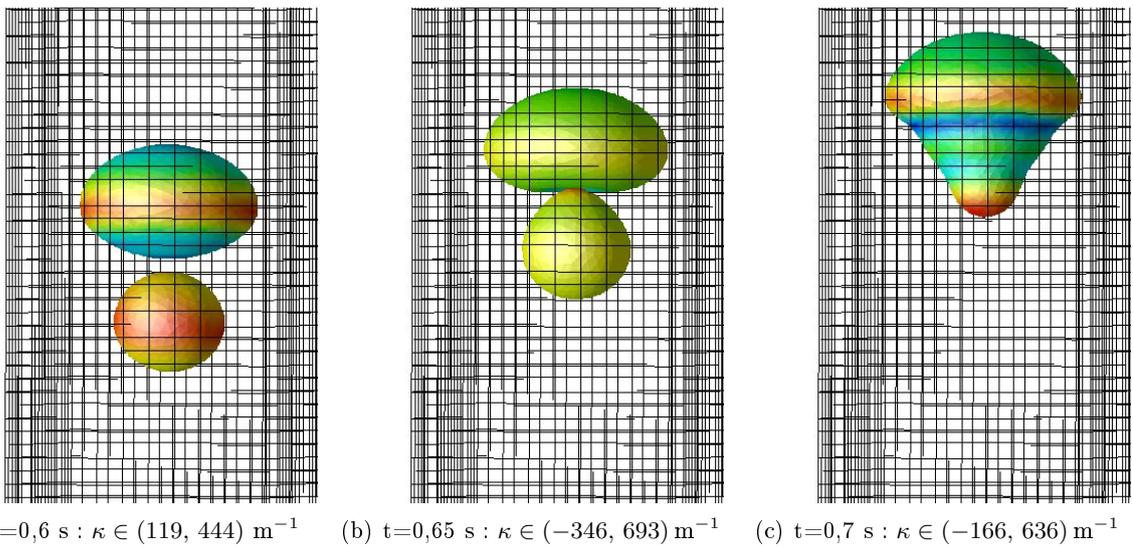


FIGURE 7.12 – Visualisation de l'écoulement au moment de la coalescence. Coloration par la courbure

Équation de bilan de masse

La coalescence a environ lieu à $z=0,075$ m. On va donc regarder les bilans à cette cote. Les résultats sont présentés aux figures 7.13, 7.14, et 7.15. Les tailles des filtres temporel et spatial sont inchangées par rapport à l'étude précédente.

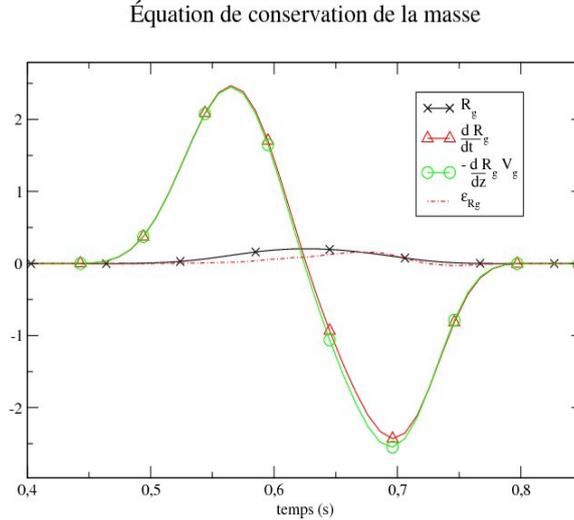


FIGURE 7.13 – Équation de conservation de la masse⁴ : tranche $z=0,075$ m

Il existe une petite erreur sur le bilan de masse au moment de la coalescence. Celle-ci est provoquée par le transfert de masse non physique qui a lieu lors du remaillage de l'interface. En d'autres termes, les algorithmes de remaillage conservent la masse globalement mais ils ne permettent pas de conserver exactement la masse localement. Il apparaît donc un transport de R_g non physique qui ne peut pas être pris en compte par le terme $\frac{\partial R_g V_g}{\partial z}$.

Équation de bilan de densité d'aire interfaciale

Dans les cas précédents, les inclusions ne se déformaient pas au cours du temps. On s'attendait donc *a priori* à ce que le terme source de l'équation de bilan d' A_i soit nul. Au contraire, ici, les interfaces sont très déformées lors de la coalescence (cf. paragraphe précédent). Il existe donc une source de densité d'aire interfaciale associée à ces déformations. Autrement dit, quand les bulles se déforment la quantité d'interface augmente.

Les résultats dans les cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$ sont présentés respectivement aux figures 7.14 et 7.15. Dans les deux cas, il existe une erreur ϵ_{A_i} non nulle. Celle-ci ne provient pas des algorithmes de remaillages puisque nous avons déjà éliminé cette source d'erreurs. Comme nous l'avons expliqué précédemment, les interfaces se déforment de façon importante lors de la collision. L'existence de zones de fortes courbures rend difficile l'estimation de la divergence surfacique de la vitesse qui intervient dans le calcul du terme source de l'équation de bilan d' A_i . Comme cet opérateur divergence est estimé à l'interface (*i.e.* sur le maillage lagrangien), nous avons donc intérêt à "doper" l'interface en marqueurs pour diminuer ϵ_{A_i} .

Comme pour les configurations précédentes, les résultats concernant les cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$ sont assez différents :

- Dans le cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$, on constate sur la figure 7.15 que le terme source est non nul. D'après les études sur des cas de bulles indéformables, le transport de A_i est assuré entièrement par le terme $\frac{\partial \langle \delta_\sigma \mathbf{w}_2 \rangle}{\partial z}$. Le terme $\langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}_2) \rangle$ correspond alors aux déformations résolues

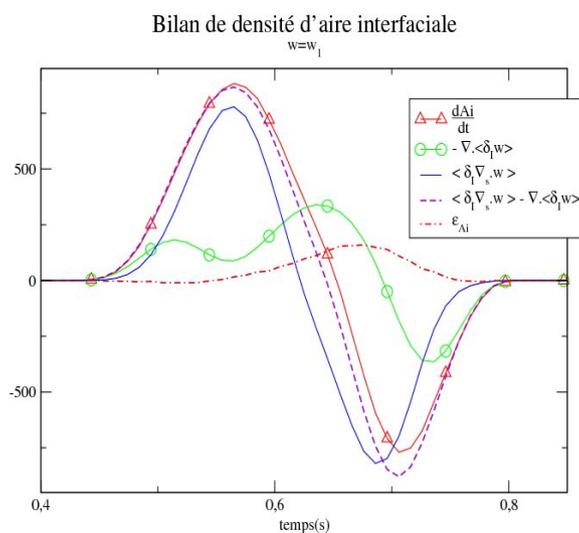


FIGURE 7.14 – Équation d'évolution de la densité d'aire interfaciale (équation 6.22) : tranche $z=0,075$ m

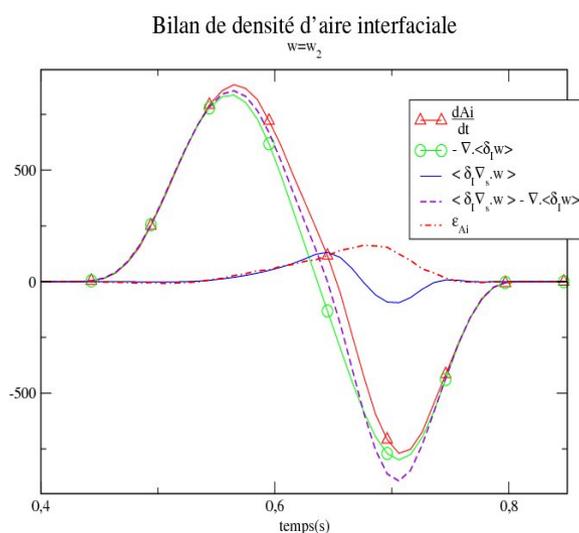


FIGURE 7.15 – Équation d'évolution de la densité d'aire interfaciale (équation 6.22) : tranche $z=0,075$ m

de l'interface au moment de la coalescence.

- Dans le cas $w = w_1$, l'interprétation est plus difficile car le terme source de l'équation de bilan de densité d'aire interfaciale participe en partie au transport. Il n'est donc plus possible d'interpréter les termes $\frac{\partial \langle \delta_\sigma w_1 \rangle}{\partial z}$ et $\langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (w_1) \rangle$ comme un terme de transport et un terme de déformation.

7.4 Conclusions

Pour réaliser nos mesures, deux problématiques importantes doivent être résolues :

- Comment sont définies les variables physiques qui doivent être mesurées ?
- Quelles sont les contraintes techniques associées à ces mesures ?

Ainsi, grâce à une étude théorique, nous avons montré que le choix des variables microscopiques influence directement les équations de bilan. En effet, dans le cas de l'équation de bilan d' A_i , par exemple, la vitesse $\mathbf{V}_i = \langle \overline{\delta_\sigma \mathbf{w}} \rangle / A_i$ nécessite une fermeture. Classiquement, celle-ci est assimilée à la vitesse du gaz \mathbf{V}_g . Ce choix est justifié dans les cas des écoulements monodisperses pour lesquels on s'attend à ce que les centres d'aire et de volume se déplacent à la même vitesse. En faisant cette hypothèse de modélisation sur les grandeurs moyennes, les auteurs définissent implicitement \mathbf{w} . La difficulté pour nous consiste alors à trouver la définition adéquate au niveau microscopique qui correspond à $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_g$. Cette problématique est au centre de notre démarche car sans elle, il n'est pas possible de faire de lien entre les quantités mesurées et celles qui sont résolues par les codes moyennés. Cette difficulté ne se limite pas à \mathbf{V}_i mais retrouve dans l'équation de bilan de quantité de mouvement et en particulier dans la problématique de la définition de la pression unique.

Dans ce chapitre, nous avons présentés notre méthode de prise de moyenne. Nous avons ensuite montré la façon dont elle est utilisée dans des cas pratique. Nous avons montré qu'il existe des erreurs associées à la méthode de SND diphasique utilisée : propriétés de conservation, en particulier lors des changements de topologie.

Chapitre 8

Présentation des simulations de colonnes à bulles

DANS ce chapitre, nous allons présenter les simulations qui ont été réalisées et exploitées dans le cadre de cette étude. Dans un premier temps, nous allons valider et optimiser le modèle ISS pour nos configurations particulières. En effet, au chapitre 5, nous avons présentés des tests qui permettent de valider le modèle ISS d'un point de vue général. La démarche qui est mise en œuvre dans ce chapitre n'est pas identique puisqu'il s'agit ici de tester le modèle dans le cadre de nos simulations et d'optimiser le choix des constantes afin de tirer partie au mieux du modèle ISS en terme de gain sur le coût de calcul.

Les simulations qui seront exploitées dans le chapitre 9 sont présentées dans une deuxième partie de ce chapitre. Les caractéristiques de celles-ci sont présentées : dimensions, conditions aux limites... La phénoménologie des écoulements est ensuite analysée afin de permettre une meilleure exploitation des résultats par la suite. Le processus de filtrage, décrit au chapitre 7 et mis en œuvre ici, est illustré sur l'exemple du taux de vide.

8.1 Ascension d'une bulle unique

Dans la suite de notre travail, nous allons nous intéresser à des écoulements plus complexes comprenant un nombre de bulles assez important. Au niveau de la condition aux limites d'entrée, nous introduirons un essaim de bulles comportant une ou deux familles d'inclusions. Les configurations d'écoulements de ces deux familles sont représentées par un point rouge sur la carte de Clift, Grace et Weber [1] à la figure 8.1. Elles correspondent aux conditions :

- bulles quasi-sphériques : $Re_b = 13$, $Eö = 0,075$ soit $d_e = 5,5$ mm,
- bulles ellipsoïdales : $Re_b = 60$, $Eö = 0,3$ soit $d_e = 11$ mm.

Ces deux familles de bulles se trouvent de part et d'autre de la frontière entre les régimes d'écoulement de type "bulle sphérique" et celui de type "bulle ellipsoïdale". Dans les deux configurations, les bulles isolées ont une forme stationnaire et une trajectoire rectiligne.

8.1.1 Effets du filtrage implicite

Avant de réaliser nos études, il convient de se demander quel est l'effet de la sous-résolution sur la solution. En d'autres termes quels sont les effets qui doivent être modélisés par le modèle ISS. Comme la configuration d'écoulement choisie est laminaire, les forts gradients de vitesse et de pression sont localisés près des interfaces. La sous-résolution conduit donc principalement à une mauvaise estimation des efforts aux interfaces. Ceux-ci correspondent aux échanges de

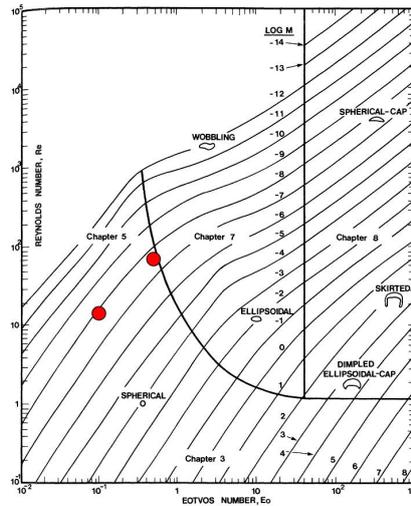


FIGURE 8.1 – Représentation des deux familles de bulles sur la carte de Clift, Grace et Weber [1]

quantité de mouvement aux interfaces (cf. équation 3.5a) : ils guident la dynamique de l'essaim de bulles. Ces efforts intégrés sur une particule peuvent être interprétés par l'intermédiaire d'une décomposition en forces (Cf. section 1.2) :

- la force de Basset qui est négligée ici,
- la force de flottabilité,
- la force de portance,
- la force de traînée,
- les forces de masse ajoutée et de Tchen.

On s'attend donc à ce que le modèle ISS apporte une correction qui permette de tenir compte correctement des forces agissant sur une bulle.

8.1.2 Étude de convergence en maillage

Dans un premier temps, nous cherchons à établir une solution de référence à l'aide d'une méthode diphasique de type SND. Cette solution permettra ensuite d'optimiser les coefficients du modèle ISS dans la configuration qui nous intéresse. Pour cela, nous procédons à une étude de convergence en maillage. Nous réalisons trois calculs avec trois pas d'espaces différents dans chacune des deux configurations :

- maillage grossier : $\Delta x = 0,9$ mm,
- maillage intermédiaire : $\Delta x = 0,45$ mm,
- maillage fin : $\Delta x = 0,225$ mm.

Cette étude est réalisée dans le cas de l'ascension d'une bulle isolée pour chacune des deux types de bulles. A l'instant initial, les inclusions ont une vitesse nulle. Dans un premier temps elles accélèrent jusqu'à ce que leur vitesse atteigne la vitesse terminale V_T . Les inclusions sont donc soumises aux forces suivantes :

- la force de flottabilité : c'est le moteur de l'écoulement et elle n'est pas influencée par la sous-résolution car le volume de la bulle est indépendant du maillage,
- la force de masse ajoutée et de Tchen : qui n'agissent que pendant la phase d'accélération,

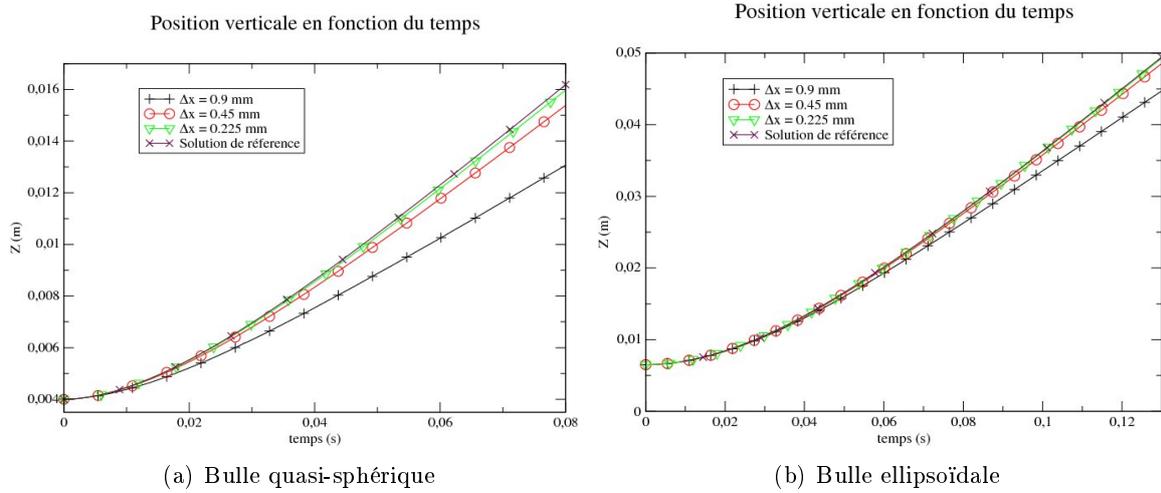


FIGURE 8.2 – Études de convergence en maillage : position verticale des inclusions dans les différents cas

- la force de traînée.

Même si la force de portance est nulle dans ces configurations, nous supposons que si les forces de traînée, de masse ajoutée et de Tchen sont bien représentées alors, le modèle ISS sera validé pour la suite de ce travail. D'après le théorème de la quantité de mouvement, ces forces agissent directement sur la trajectoire de la bulle. Afin de caractériser la solution (*i. e.* la bonne prise en compte des forces), nous choisissons donc la position verticale des inclusions. Ainsi, les résultats sont présentés sur les figures 8.2. De façon contre-intuitive, la sous-résolution conduit à une surestimation des forces. En particulier, on remarque dans les deux cas que la vitesse terminale des inclusions est sous-évaluée du fait d'une mauvaise estimation de la force de traînée.

Grâce au modèle d'erreur (Cf. annexe A), il est possible d'évaluer l'ordre de convergence à chaque instant. Dans chacun des cas, l'ordre de convergence fluctue au cours du temps aux alentours de la valeur 2. On construit alors deux solutions de référence qui sont présentées sur les figures 8.2.

Les figures 8.3 représentent une visualisation des écoulements associés aux deux familles de bulles dans le cas du maillage fin. On remarque la forme des inclusions : quasi-sphérique dans le cas de la figure 8.3(a) et ellipsoïdale sur la figure 8.3(b). L'écoulement n'est pas turbulent et il n'y a pas de recirculation derrière les inclusions. On note aussi, la présence de recirculations caractéristiques à l'intérieur des inclusions.

8.1.3 Calcul des coefficients de traînée

Nous venons de réaliser une étude de convergence en maillage qui conduit à l'établissement d'une solution de référence. Afin de confronter ces résultats avec des données expérimentales, nous proposons de calculer le coefficient de traînée pour le comparer à une corrélation de la littérature. En régime stationnaire l'équation 1.12 appliquée à une bulle de forme quelconque nous donne

$$\rho_l \frac{C_D}{2} M_c V_T^2 + v_b (\rho_g - \rho_l) g = 0 \quad (8.1)$$

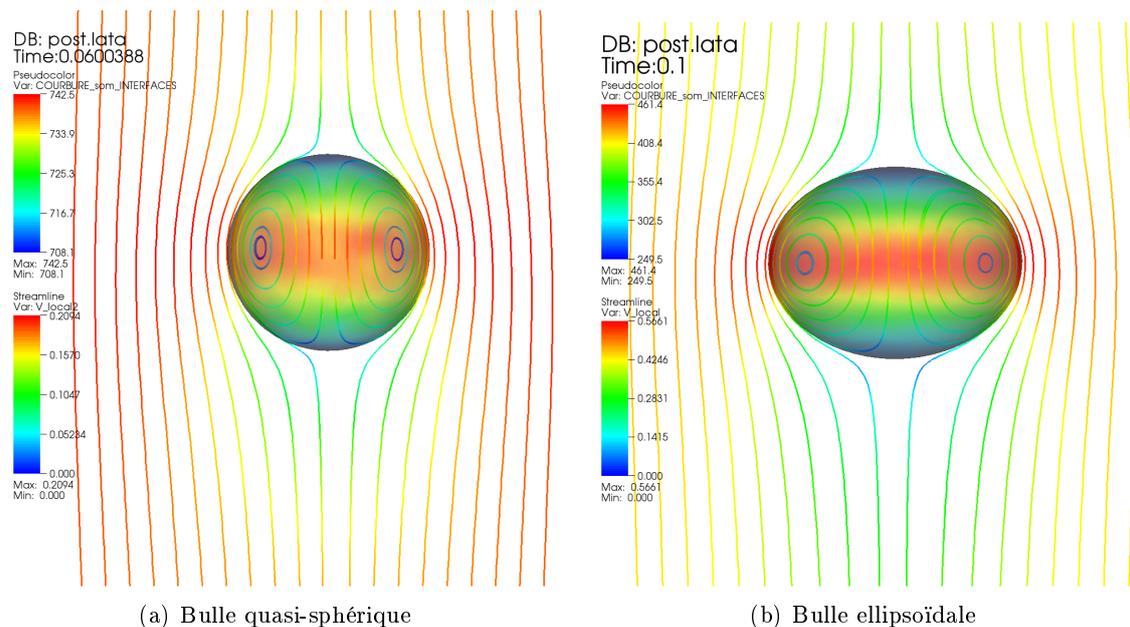


FIGURE 8.3 – Visualisation des solutions dans le cas du maillage fin : coloration de l'interface par la courbure, lignes de courants colorées par la norme de la vitesse

où M_c est le maître couple de l'inclusion et v_b est le volume de la bulle. On en déduit alors le coefficient de traînée "mesuré" :

$$C_D^{mes} = \frac{2 v_b (\rho_l - \rho_g) g}{\rho_l M_c V_T^2} \quad (8.2)$$

Le coefficient de frottement théorique est évalué à partir de Re_b grâce à la corrélation de Mei *et al.* [90] :

$$C_D^{theo} = \frac{16}{Re_b} \left[1 + \left(\frac{8}{Re_b} + 0,5 \left(1 + \frac{3,315}{Re_b^{0,5}} \right) \right)^{-1} \right] \quad (8.3)$$

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

	bulle quasi-sphérique	bulle ellipsoïdale
C_D^{mes}	1,8	0,54
C_D^{theo}	2,0	0,59

De façon rassurante, on trouve que les coefficients de frottements mesurés et théoriques sont proches : dans les deux cas, la différence n'excède pas 10%. En d'autres termes, les simulations numériques que nous réalisons sont en accord avec la corrélation semi-empirique de Mei *et al.* [90]. Cette comparaison valide en partie nos résultats de simulation numérique directe qui, rappelons-le, serviront de référence pour la suite de ce travail.

8.1.4 Choix des constantes du modèle ISS

Maintenant que nous disposons d'une solution de référence, nous allons pouvoir l'utiliser afin de valider le modèle ISS. La discrétisation utilisée dans le cas du maillage grossier correspond en tous points (pas d'espace, pas de temps, longueur des mailles lagrangiennes...) à celle qui sera

employée dans la suite pour réaliser nos simulations. La solution du maillage grossier avec le modèle ISS représente donc une image à petite échelle des cas étudiés par la suite. C'est donc sur cette configuration que nous allons tester le modèle.

Dans les cas de validations du modèle ISS qui ont été présentés au chapitre 5, le modèle est utilisé tel quel sans ajustement de constante. Les cas ISS présentent une faible sous-résolution vis-à-vis des configurations SND associées. Dans les situations présentes, la sous-résolution est d'un facteur 4. Dans ces conditions, les modèles de reconstruction dont nous disposons ne sont plus en mesure d'opérer correctement. On procède donc à un ajustement des constantes du modèle dans notre situation particulière. Il est important de souligner que cette ajustement des constantes permet de travailler aux limites du modèle mais conduit à une perte de son potentiel prédictif : il est nécessaire de réaliser une simulation de type SND dans une situation simplifiée et représentative de l'écoulement étudié pour ajuster le modèle avant de le mettre en œuvre.

Nous allons commencer par rappeler les équations du modèle ISS qui nécessitent une fermeture :

$$v_{\bar{\sigma}} = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + C_1 \left[\overline{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma} - \tilde{\mathbf{u}}^\sigma \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\sigma \right] + C_2 \frac{r^2}{10} \left[\Delta_s(\tilde{v}_\sigma \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}} - 2\nabla_s(\tilde{v}_\sigma \tilde{\mathbf{n}}) : \nabla_s(\tilde{\mathbf{n}}) \right] \quad (8.4)$$

et,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) &= -\nabla(\tilde{p}) + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}}) + C_3 \left[\tilde{\mathbf{L}} \cdot \nabla(\tilde{\rho}) + \tilde{\rho} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{L}}) \right] \\ &- \left(\sigma \tilde{K} \tilde{\mathbf{n}} + C_4 \left[\tilde{\mathbf{u}} [\tilde{\rho}] (v_{\bar{\sigma}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}) + [\tilde{\rho}] \left(\overline{v_{\bar{\sigma}} \tilde{\mathbf{u}}^\sigma} - \tilde{v}_{\bar{\sigma}}^\sigma \tilde{\mathbf{u}}^\sigma \right) \right] \right) \delta_{\bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

La détermination des C_i est alors réalisée grâce à la méthode du simplex de Nelder et Meald [91]

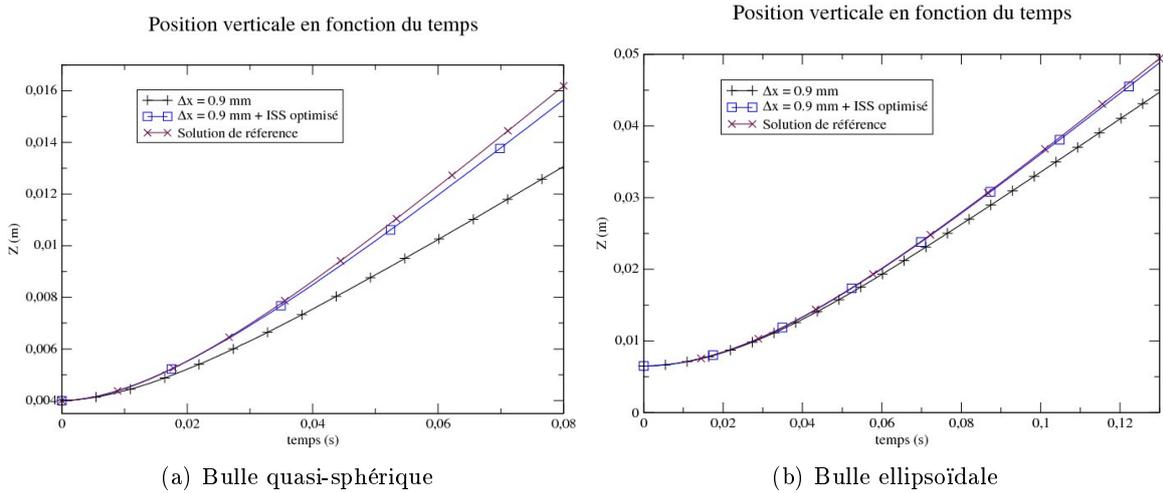


FIGURE 8.4 – Choix des constantes du modèle ISS (équations 8.4 et 8.5) pour les deux types de bulles choisies : $C_1 = 2, 4$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1, 5$, $C_4 = 1$

dans le cas "bulle quasi-sphérique". Les résultats sont présentés à la figure 8.4(a). Le modèle ISS optimisé correspond alors au choix : $C_1 = 2, 4$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1, 5$, $C_4 = 1$. On vérifie ensuite que ce choix reste valide dans le cas "bulle ellipsoïdale". Les résultats sont présentés à

la figure 8.4(b). De façon rassurante, on trouve que les C_i sont tous proches de la valeur 1. Une situation différente serait révélatrice d'une mauvaise prise en compte de certains effets et aurait donc conduit à une remise en question du modèle.

Nous disposons maintenant d'un modèle de SGE diphasique que nous avons testé, validé et optimisé dans la configuration qui nous intéresse. Nous allons maintenant pouvoir l'utiliser dans des simulations plus complexes qui font intervenir un nombre relativement important de bulles. Celles seront "instrumentées" afin de réaliser la deuxième étape de notre démarche multi-échelles.

8.2 Configurations étudiées

Nous souhaitons instrumenter nos simulations afin d'obtenir les grandeurs associées au problème moyen par prise de moyenne. On décompose les grandeurs instantanées en une partie moyenne et une partie fluctuante. Le but de l'opération de prise moyenne décrite à la section 7.2 est de retirer la partie fluctuante à la variable instantanée pour obtenir la grandeur moyenne. Prenons l'exemple de l'indicatrice de phase χ :

$$\begin{aligned}\chi &= \langle \bar{\chi} \rangle + \chi' & (8.6) \\ &= R_g + \chi' & (8.7)\end{aligned}$$

R_g correspond au taux de vide : c'est la grandeur moyenne que nous cherchons à obtenir. χ' représente la fluctuation associée au passage des bulles. On souhaite que l'équation de bilan de masse 6.11a ne se réduise pas à $0 = 0$, ce qui revient à imposer que α ne soit pas constante dans la colonne. On doit donc choisir la géométrie, la configuration d'écoulement, les conditions aux limites et les paramètres de notre méthode de prise de moyenne afin d'obtenir α et donc d'éliminer χ' .

8.2.1 Configuration d'écoulement

Du fait de la discrétisation hexaédrique associée à la formulation de type volume finis, nous avons choisi de nous placer dans une colonne à base rectangulaire. La géométrie de la colonne est présentée à la figure 8.5. Les conditions aux limites pour les variables eulériennes sont :

- entrée en bas de la colonne : vitesse nulle imposée,
- sortie en haut du domaine : pression nulle imposée,
- gradient de vitesse nul sur les côtés.

Les conditions aux limites associées aux interfaces sont un peu plus complexes à mettre en place. En entrée, les bulles sont injectées par le processus non physique décrit à la section 4.4.1. Les bulles sont injectées à une altitude imposée : z_{inj} . Les autres coordonnées sont choisies aléatoirement de façon équiprobable en tenant compte des positions des inclusions précédemment introduites. Pour chaque famille de bulles, on cherche à imposer un taux de vide partiel. Celui-ci est alors utilisé pour déterminer à quels instants les inclusions sont injectées. Afin de garantir la reproductibilité de nos simulations, les instants, positions, diamètres des inclusions ainsi injectées sont choisis *a priori* et stockés dans un fichier spécifique.

La condition aux limites en sortie est réalisée grâce au processus inverse de celui qui précède, lui aussi décrit dans la section 4.4.1. Même si les conditions aux limites impliquent que les phases ne peuvent pas sortir du domaine, du fait de ces processus non physiques d'injection et de destruction des interfaces, le liquide à une vitesse moyenne descendante non nulle : $V_l = -V_g R_g / (1 - R_g)$.

Pour éviter que les bulles n'adhèrent aux parois, un terme source répulsif est employé dans les équations monofluides. Le fonctionnement de celui-ci est détaillé à la section 4.4.3. Cette force n'est effective que pour les marqueurs lagrangiens situés à une distance inférieure à 3 mm des

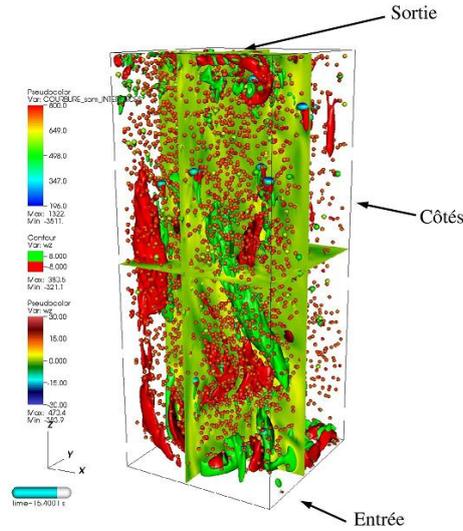


FIGURE 8.5 – Géométrie typique de nos simulations : visualisation des conditions aux limites. Coloration des interfaces par la courbure. Isosurfaces de la composante verticale de la vorticité : valeur $+8 s^{-1}$ en vert et $-8 s^{-1}$ en rouge. Coupes du champ de vorticité verticale

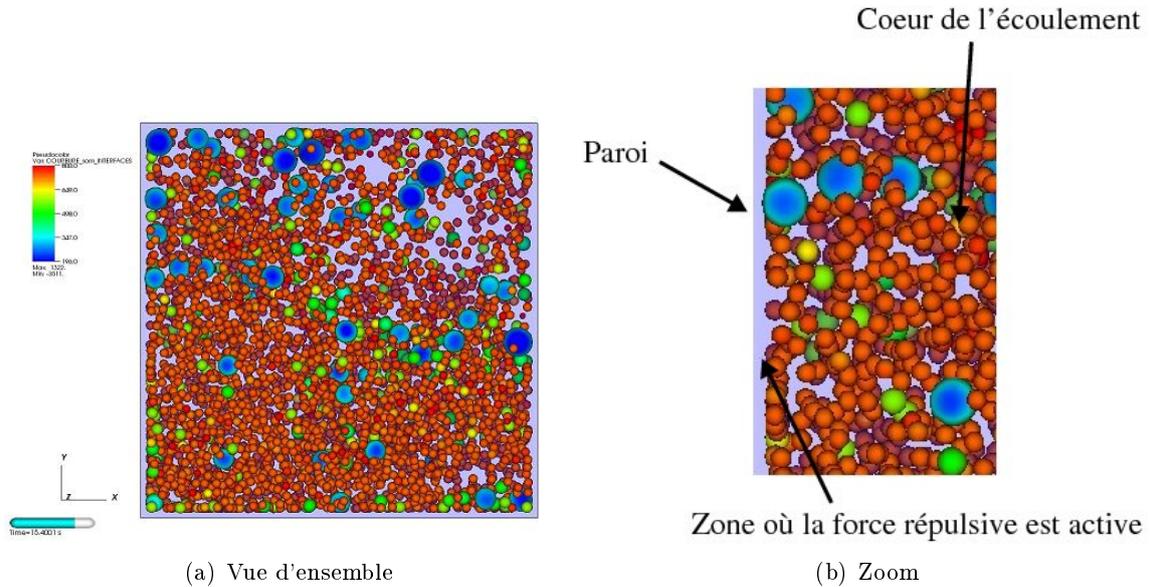


FIGURE 8.6 – Visualisation de l'effet des forces répulsives sur les interfaces

parois ce qui correspond à un peu plus de trois mailles eulériennes. Dans le volume concerné, l'absence d'inclusion et donc d'obstacle à la redescente du liquide (Cf. paragraphe précédent) et le gradient de masse volumique moyen latéral favorisent l'apparition d'une recirculation. La figure 8.6, illustre l'influence de la condition aux limites sur les côtés du domaine sur les interfaces.

Pour l'ensemble des simulations qui sont présentées dans la suite de ce mémoire, le pas d'espace du maillage eulérien est $\Delta x = 0,9 \text{ mm}$, le pas d'espace du maillage lagrangien est $\Delta l = 0,8 \Delta x$ et le pas de temps est $dt = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

8.2. CONFIGURATIONS ÉTUDIÉES

Essaim \ Géométrie	"Colonne courte"	"Colonne longue"
Bidisperse	Ia	IIa
Bulles ellipsoïdales seules	Ib	•
Bulles sphériques seules	Ic	•

TABLE 8.1 – Présentation des différents cas d'études

8.2.2 Choix de l'essai de bulles

Il ne nous reste encore à décider de la condition à la limite d'entrée des bulles. Comme mentionné au paragraphe précédent, cette condition aux limites est imposée par l'intermédiaire de deux taux de vides partiels associés à chacune des deux familles de bulles. Les différents cas étudiés sont présentés dans le tableau suivant et seront détaillés par la suite.

Cas d'une colonne courte

Dimensions du domaine : le domaine d'études est un parallélépipède dont les dimensions caractéristiques sont : $0,1 \times 0,1 \times 0,2 \text{ m}^3$. Il comporte $111 \times 111 \times 222 = 2,7 \cdot 10^6$ mailles. La réalisation de chaque calcul nécessite 128 processeurs pendant environ 6 jours.

Cas bidisperse (Ia) : Pour chacune des deux familles de bulles, la variation temporelle des taux de vide partiel imposé correspond à une sinusoïde. La période de celles-ci est $T = 4 \text{ s}$ et elles présentent un déphasage de $3\pi/2$ radians. Le taux de vide médian dans la colonne est de 2,4 % soit 1,4 % pour les bulles sphériques et 1 % pour les bulles ellipsoïdales. L'essai comporte au maximum 593 inclusions. Les figures 8.7 représentent l'écoulement associé à cette configuration

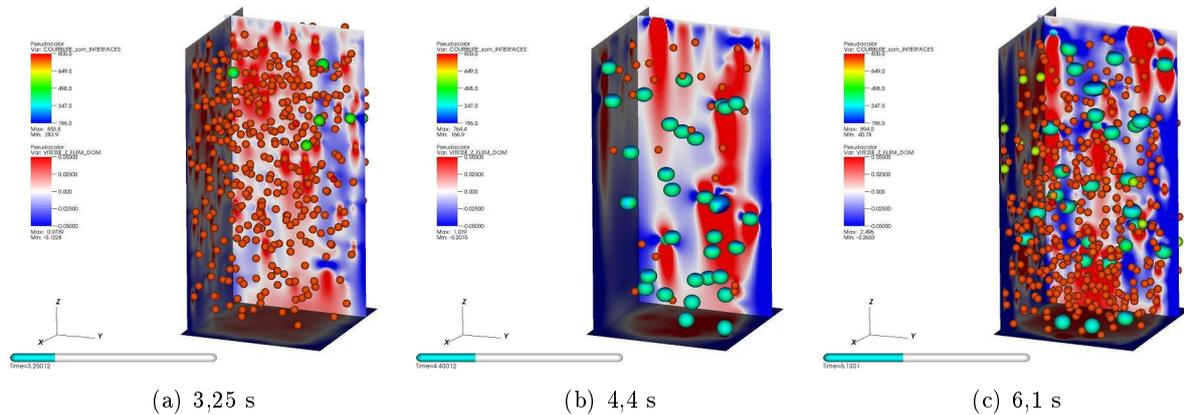


FIGURE 8.7 – Visualisation de la configuration d'écoulements dans le cas Ia : Coloration des interfaces par la courbure, coloration des coupes par la vitesse verticale

à différents instants de la simulation. La figure 8.7(a) se rapporte à un instant où il n'y a que des bulles sphériques, la figure 8.7(b) se rapporte à un moment où il n'y a que des bulles ellipsoïdales et la figure 8.7(c) représente l'écoulement quand α est maximum.

Colonnes monodisperses Afin de mettre en évidence les phénomènes d'interaction entre les deux familles de bulles, nous avons réalisé deux calculs avec des essais de bulles monodisperses.

Cas bulles ellipsoïdales (*Ib*) : dans cette situation, on reprend la stratégie d'injection du cas précédent pour la famille de bulles ellipsoïdales. Les bulles sphériques ne sont pas injectées dans le domaine de calcul. On obtient donc une situation analogue au cas bidisperse mais sans la famille de bulles sphériques : la famille de bulles ellipsoïdales est injectée de la même façon que pour le cas *Ia* (mêmes instants et mêmes positions). Les figures 8.8 représentent l'écoulement associé aux mêmes instants qu'aux figures 8.7. L'essaim comporte au maximum 55 inclusions.

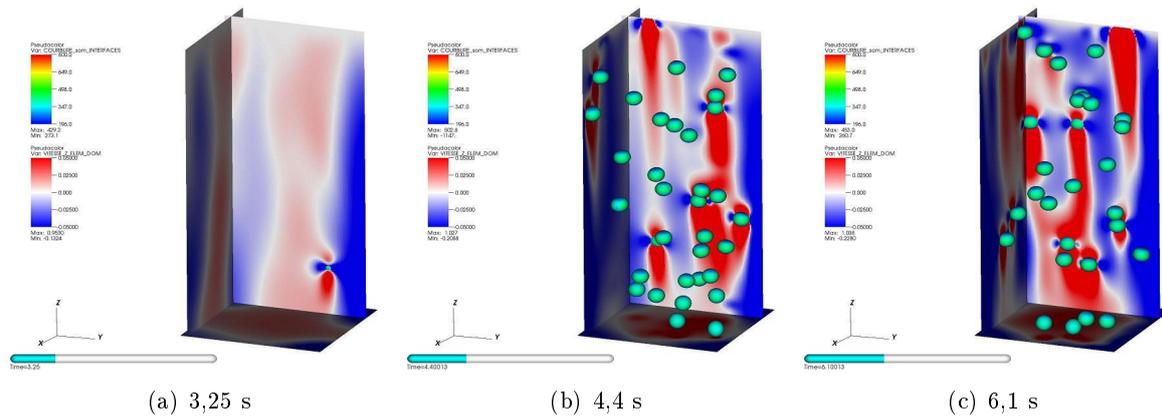


FIGURE 8.8 – Visualisation de la configuration d'écoulements dans le cas *Ib* : Coloration des interfaces par la courbure, coloration des coupes par la vitesse verticale

Cas bulles sphériques (*Ic*) : de manière symétrique, cette situation se rapporte à la famille des bulles sphériques seules injectées de façon identique à la situation bidisperse. Les figures 8.9 représentent l'écoulement associé à cette configuration aux mêmes temps que pour les deux situations précédentes. L'essaim comporte au maximum 612 inclusions. On s'attendait à ce que celui-ci comporte moins d'inclusions que l'essaim bidisperse puisqu'il correspond à une partie des bulles injectées dans le cas *Ia*. Ce résultat s'explique par le nombre important de coalescences qui se produisent dans le cas *Ia* du fait de la différence de vitesse entre les deux familles d'inclusions.

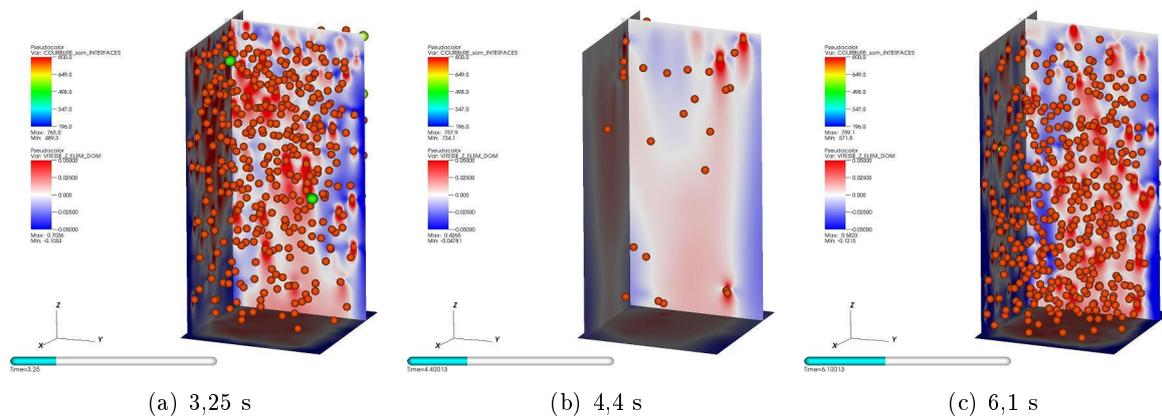


FIGURE 8.9 – Visualisation de la configuration d'écoulements dans le cas *Ic* : Coloration des interfaces par la courbure, coloration des coupes par la vitesse verticale

8.2. CONFIGURATIONS ÉTUDIÉES

Filtrage : nous souhaitons valider *a posteriori* les choix associés à notre méthode de filtrage. Pour l'ensemble de ces trois configurations, nous avons sélectionné $2\Delta t = 0,8\text{ s}$ et $2\Delta x = 0,0108\text{ m}$. Le filtrage est donc principalement réalisé par l'opérateur temporel. Il convient donc de s'intéresser aux différentes échelles de temps qui caractérisent nos simulations. Ainsi, on distingue trois temps caractéristiques :

- t_{int} , le temps d'intermittence diphasique qui correspond à l'inverse de la fréquence de passage des bulles, par exemple en un point donné ou dans une tranche particulière du domaine,
- Δt , le support du noyau de convolution, approximativement l'inverse de la fréquence de coupure du filtre temporel,
- T , la période du signal filtré. Ce dernier temps est associé à la période de variation des signaux filtrés. Il est imposé par la physique de l'écoulement étudié (par exemple, les variations du taux de vide α introduit dans le domaine).

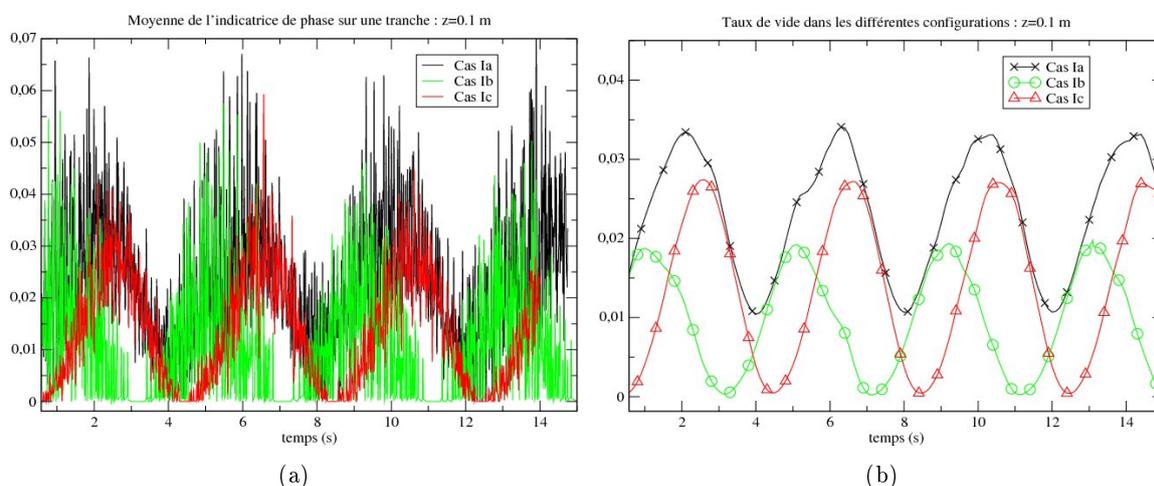


FIGURE 8.10 – Mise en évidence de l'effet du filtrage temporel sur α avec les différents essais de bulles

La figure 8.10(a), représente la moyenne de l'indicatrice de phase dans une tranche dans les trois configurations. Les signaux filtrés correspondants sont présentés à la figure 8.10(b). On observe sur les courbes de la figure 8.10(a) l'effet des variations à hautes fréquences qui donnent aux courbes un aspect irrégulier. Au contraire, sur la figure 8.10(b), les courbes sont très régulières. Le filtrage a donc permis d'éliminer les composantes hautes fréquences des signaux. Les composantes à basses fréquences ne sont que peu influencées par le filtrage. Pour mettre en évidence la séparation d'échelles entre T et t_{int} , le spectre de la moyenne de l'indicatrice de phase dans le cas Ia est tracé à la figure 8.11. Ce spectre présente un pic aux alentours de 0,25 Hz qui correspond à la composante basse fréquence du signal. Celui-ci provient de la condition d'entrée des bulles. Aux alentours de quelques Hz, le spectre présente un creux qui marque la séparation d'échelles. Nous avons placé à cet endroit la fréquence de coupure du filtre temporel : $2\Delta t = 0,8\text{ s}$. Au-delà de quelques Hz, se trouve une bosse qui correspond à l'intermittence diphasique : c'est cette partie du signal que l'on souhaite éliminer par l'intermédiaire du filtrage.

Description des écoulements : Pour les trois essais de bulles, les inclusions ont des trajectoires quasiment verticales. Les bulles ont une faible influence les unes sur les autres. On

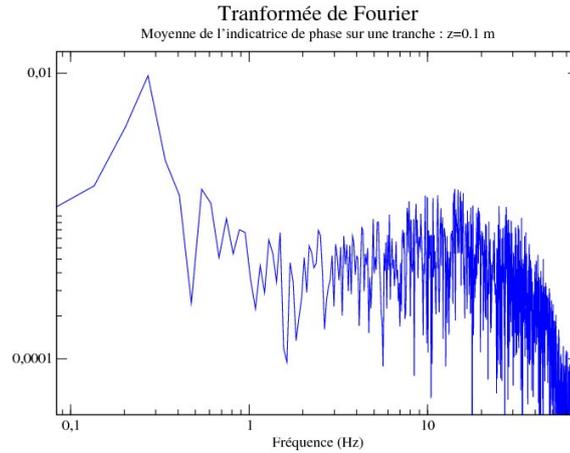


FIGURE 8.11 – Transformée de Fourier du signal avant moyenne dans le cas de l'essai bidisperse

remarque en particulier sur les figures 8.10 que la somme des taux de vide des deux essais monodisperses correspond à celui de l'essai bidisperse. En d'autres termes, les deux familles de bulles s'influencent peu l'une l'autre. On note la présence de quelques bulles qui n'appartiennent à aucune des deux familles de bulles. Elles sont issues de la coalescence de deux bulles, et suivant leur volume, il est possible de déduire la nature des deux inclusions concernées : deux petites, deux grosses ou une petite et une grosse.

Sur les figures 8.7, 8.8 et 8.9, on remarque l'influence des inclusions sur le champ de vitesse liquide. De façon générale les bulles sphériques ont tendance à créer des perturbations à plus hautes fréquences que les bulles ellipsoïdales du fait de leurs plus petits sillages. Néanmoins, comme elles sont plus nombreuses que les grandes inclusions, elles sont aussi à l'origine de fluctuations du champ de vitesse à basse fréquence.

Cas d'une colonne plus longue (IIa)

Nous avons réalisé une simulation dans un domaine de plus grande dimension. Comme cette colonne est plus large, on s'attend à une meilleure séparation d'échelles. En effet, en un temps donné, il passe plus de bulles dans une tranche : le temps d'intermittence est donc plus petit que précédemment. De plus, comme la colonne est plus longue, le temps que met une inclusion pour parcourir le domaine est plus grand. On s'attend à ce que les bulles aient le temps d'interagir de façon plus complexe.

Dimensions du domaine : le domaine d'études est un parallélépipède dont les dimensions caractéristiques sont : $0,23 \times 0,23 \times 0,576 \text{ m}^3$. Il comporte $256 \times 256 \times 639 = 41,9 \cdot 10^6$ mailles. Avec les moyens de calcul disponibles en 2009, la réalisation du calcul nécessite 1024 processeurs pendant environ 8 jours.

Essaim bidisperse : Les variations temporelles des taux de vide partiels associés à chacun des deux familles sont identiques à celles de la colonne I et présentées au paragraphe 8.2.2. Le nombre d'inclusions présentes dans la colonne est au maximum de 5098 inclusions.

Filtrage : comme précédemment, nous allons chercher ici à valider *a posteriori* le choix de l'opérateur de filtrage. Pour cela, la moyenne de l'indicatrice de phase dans une tranche est

8.2. CONFIGURATIONS ÉTUDIÉES

tracée à la figure 8.12(a). Le signal filtré correspondant est présenté à la figure 8.12(b). Comme

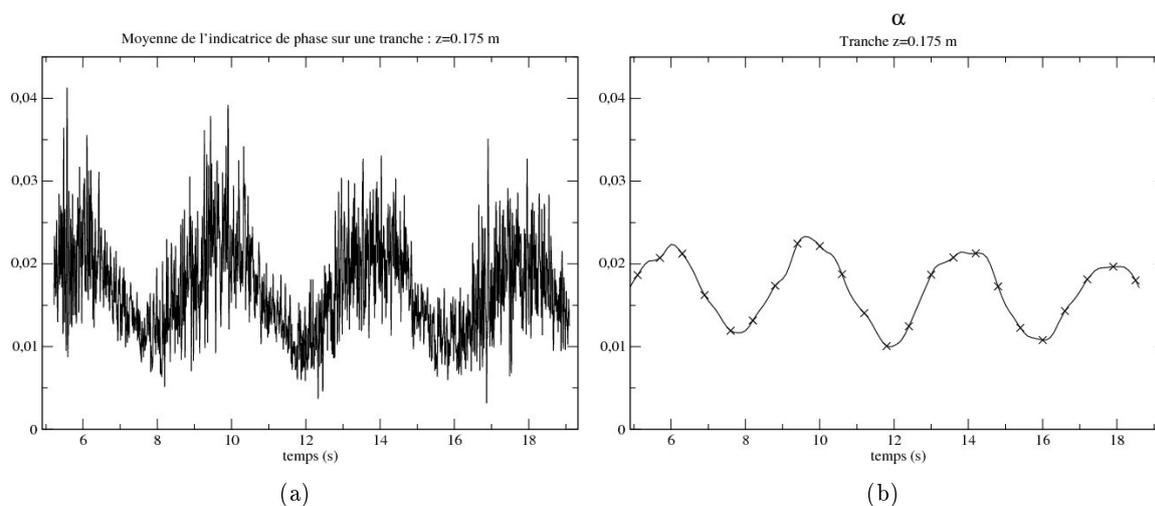


FIGURE 8.12 – Mise en évidence de l'effet du filtrage temporel sur α

dans les cas de la configuration *I*, on observe que la courbe de la figure 8.12(b) est plus régulière que celle de la figure 8.12(a). Le filtrage a donc éliminé les plus hautes fréquences du signal. Contrairement à ce qui était attendu, la courbe de la figure 8.12(b) n'est pas très régulière.

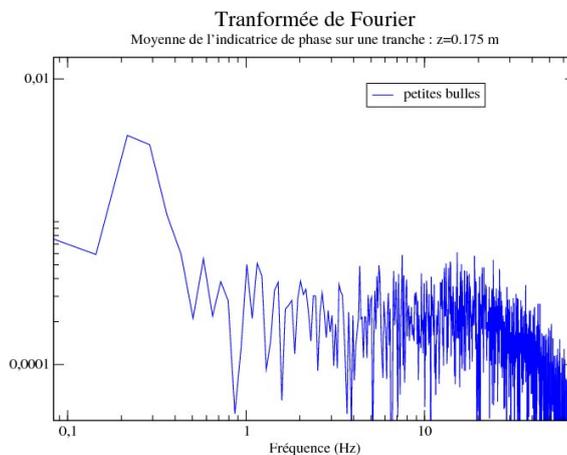


FIGURE 8.13 – Transformée de Fourier du signal avant moyenne

Le spectre associé à ce signal a donc été tracé à la figure 8.13. L'observation précédente est confortée par la présence d'un pic aux alentours de 0,25 Hz moins intense et plus large qu'à la figure 8.11. De plus, le creux que forme le spectre aux environs de 1 Hz est moins prononcé et au-delà de quelques Hz le spectre est relativement plat. La moyenne de l'indicatrice sur une tranche présente donc plus de basses fréquences : la séparation d'échelles est moins effective que dans la configuration *I*.

Description de l'écoulement : Afin de comprendre les raisons de cette perte de régularité du taux de vide, nous allons maintenant étudier l'écoulement. Pour cela, l'essaim de bulles est présenté sur les figures 8.14 aux instants $t = 3,53$ s, $t = 5,08$ s, $t = 6,53$ s. On remarque

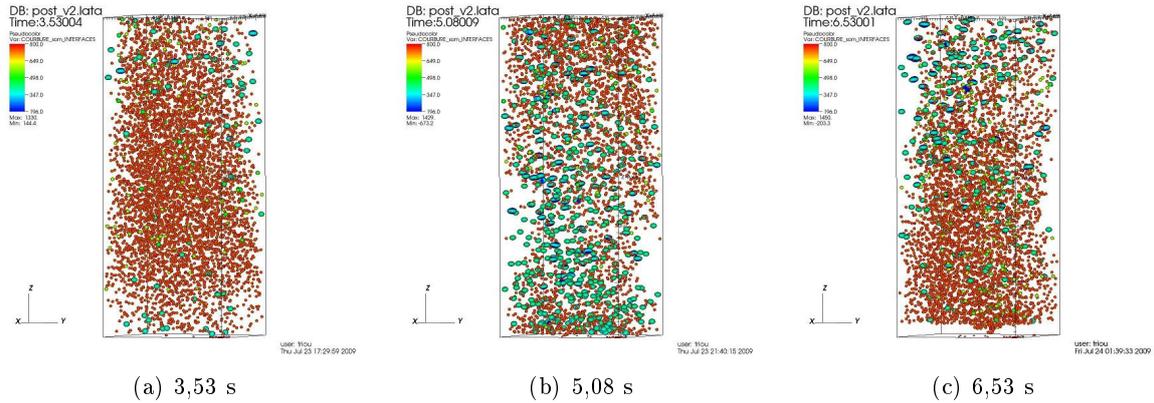


FIGURE 8.14 – Visualisation de la configuration d’écoulements dans le cas *IIa* : Coloration des interfaces par la courbure

l’alternance de bulles sphériques et ellipsoïdales due aux conditions aux limites. On note aussi que l’essaim est reparti de façon homogène dans la colonne. Néanmoins, il y a plus de coalescences que précédemment et le nombre d’inclusions qui n’appartiennent à aucune des deux familles injectées est plus important. Sur la figure 8.14(c), en bas de la colonne, certaines bulles ont tendance à descendre plutôt qu’à monter. Ce phénomène est étudié dans le paragraphe suivant.

8.3 Effets du passage des bulles sur le liquide

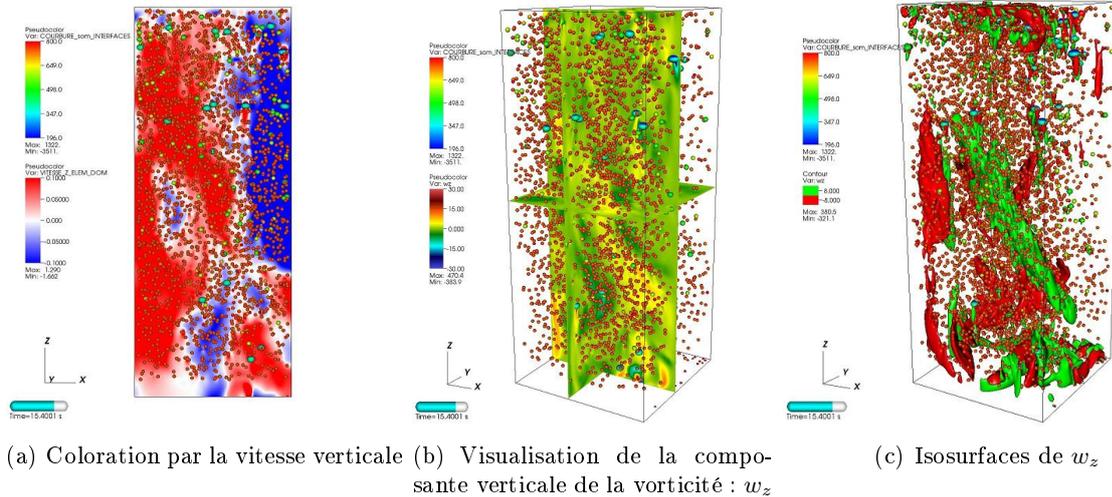


FIGURE 8.15 – Visualisations des effets tridimensionnels à l’instant $t = 15,4$ s

Dans le cas *IIa*, on constate que certaines bulles n’ont pas une trajectoire simple. Pour comprendre ce phénomène, une coupe du champ de vitesse verticale est représentée à la figure 8.15(a). Contrairement au cas *I*, une recirculation apparaît au sein de la colonne : une partie du liquide descend pendant que l’autre monte. Si la vitesse verticale descendante du liquide est suffisamment importante, alors les petites bulles qui sont présentes dans ce domaine redescendent au

lieu de monter. Sur les figures 8.15(b) et 8.15(c) est représentée la composante verticale de la vorticité. On constate sur ces figures que l'écoulement est très complexe et présente des structures de plus grandes dimensions que les bulles. Celles-ci sont créées par le fort cisaillement qui existe du fait de la recirculation. Comme l'écoulement est nettement plus complexe dans cette situation que dans les cas I , il est normal de trouver que la variation temporelle du taux de vide est perturbée vis-à-vis de la condition aux limites. La présence de la recirculation ne remet pas en cause le modèle monodimensionnel moyen car l'écoulement est vertical en moyenne.

Afin de mettre en avant l'effet du passage des bulles sur le champ de vitesse, les variations temporelles des composantes de vitesse et indicatrice en un point au centre de chaque écoulement sont présentés sur les figures 8.16(b), 8.16(a), 8.17(a), 8.17(b). À chaque passage de bulle, les composantes de vitesse sont perturbées et présentent des variations autour de la valeur 0. Si l'on s'intéresse au couplage entre les variations des différentes grandeurs, il est très difficile de distinguer un quelconque motif qui se répéterait. En effet, même dans le cas d'une bulle unique, il existe un grand nombre de cas suivant que le centre de l'inclusion passe plus ou moins près de la sonde. Ainsi, si le centre de la bulle passe par le point considéré tandis il existe une forte augmentation de V_z alors que V_x et V_y restent nulles. Si, au contraire, le centre de l'inclusion est décalé dans la direction e_x , alors V_z varie de façon moins importante et peut même devenir négative. De plus, contrairement à V_y , la composante de vitesse V_x ne reste pas nulle. Dans le cas d'un essaim de bulles, la tâche est d'autant plus ardue que le nombre d'inclusions est grand.

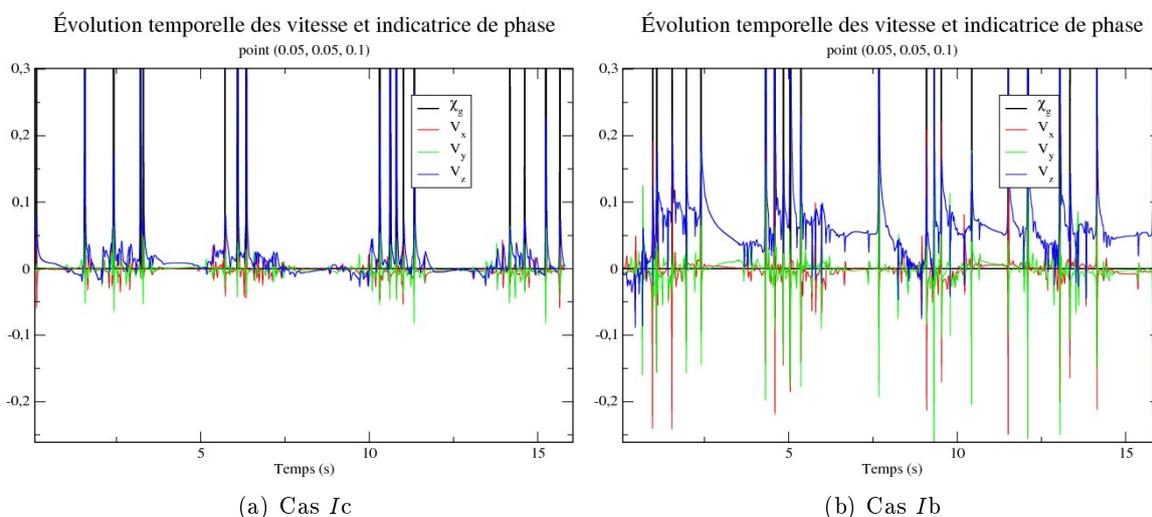


FIGURE 8.16 – Exemple en un point des évolutions temporelles des vitesses et indicatrice dans la configuration I

Comme on s'y attendait, l'amplitude de ces variations est plus importante sur la figure 8.16(b) que sur la figure 8.16(a). Ainsi, on retrouve que l'agitation créée par les grosses inclusions est plus intense que celle qui est provoquée par les petites bulles.

Dans les configurations I , les composantes de vitesses transverses (V_x et V_y) oscillent autour de la valeur 0 à hautes fréquences. À l'inverse, dans les cas où les grosses inclusions sont présentes, la composante de vitesse verticale possède des modes à basses fréquences. En particulier sur la figure 8.16(b), on remarque que sur le temps physique simulé, la vitesse verticale est principalement positive. Ce dernier constat implique qu'en d'autres points (situés plus sur les

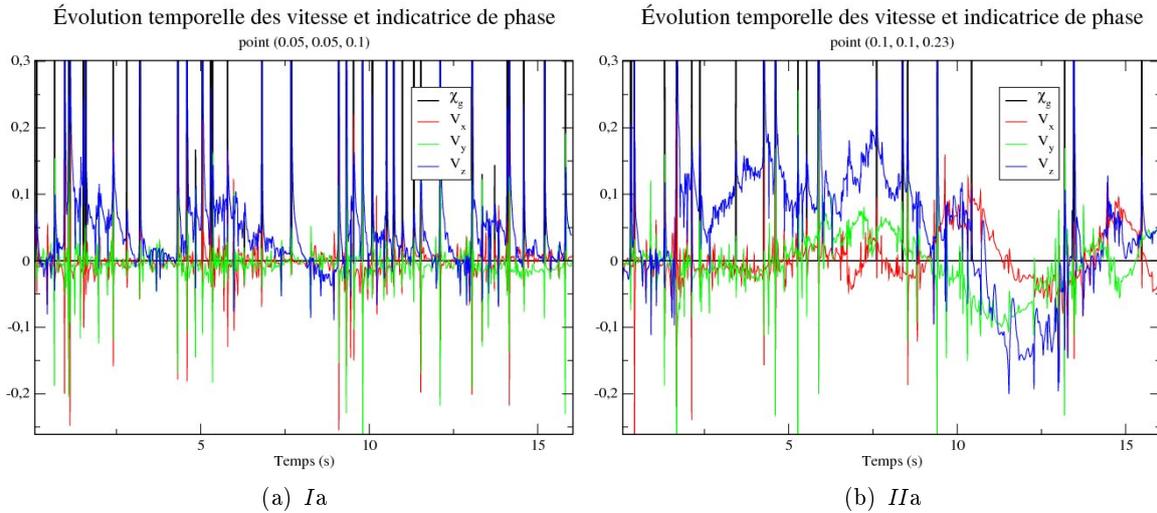


FIGURE 8.17 – Exemple en un point des évolutions temporelles des vitesses et indicatrice dans les cas *Ia* et *IIa*

bords du domaine par exemple) la vitesse verticale est majoritairement négative. Dans les cas des essais bidisperses (voir les figures 8.17(a) et 8.17(b)), la présence des plus petites inclusions a tendance à détruire les fluctuations à basses fréquences de la vitesse verticale associées au passage des grosses bulles.

Dans le cas *IIa*, figure 8.17(b), on remarque que les variations des composantes de vitesse sont assez différentes de celles des configurations *I*. En particulier, on distingue qu'après quelques secondes, les évolutions temporelles des composantes de vitesses fluctuent à basses fréquences. Cette agitation révèle la présence d'une structure cohérente dans l'écoulement. Ce résultat est en accord avec les constatations précédentes concernant la présence d'une recirculation au sein de l'écoulement.

8.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré sur des écoulements prototypes quels sont les effets de la sous-résolution. Ensuite, nous avons testé et optimisé le modèle ISS afin de rendre compte correctement de ces effets. Dans une seconde partie, nous avons présenté les simulations réalisées dans ce travail à l'aide du modèle ISS qui seront exploitées dans le chapitre suivant. Nous avons décrit les configurations étudiées et les conditions aux limites utilisées. Ainsi, malgré l'apparente similitude des configurations, l'écoulement du cas *IIa* est nettement plus complexe que ceux des cas *I*. Enfin, nous avons illustré le processus de filtrage des quantités instantanées dans le cas particulier de l'indicatrice de phase (qui permet d'obtenir le taux de vide). Nous avons montré l'existence d'une séparation d'échelles entre les basses fréquences qui correspondent à la variation temporelle du taux de vide induite par la condition aux limites et les plus hautes fréquences liées à l'intermittence diphasique.

Chapitre 9

Exploitation des résultats

LES chapitres précédents ont permis de construire la démarche qui vise à calculer des grandeurs moyennes à l'aide des simulations fines décrites au chapitre 8. Nous allons maintenant utiliser ces mesures et les comparer au modèle moyen proposé au chapitre 7.

La première problématique associée à la modélisation diphasique moyennée est liée à la formulation du modèle lui-même : quels sont les termes importants ? Certaines hypothèses simplificatrices ne sont-elles pas trop restrictives ? Nous allons ainsi chercher à tester les équations du système 7.39 afin de voir si tous les effets présents dans les écoulements prototypes sont bien pris en compte par le modèle.

Une deuxième problématique est liée au choix des lois de fermetures mises en œuvre dans les modèles. En particulier, nous allons nous intéresser à une loi de fermeture des échanges de quantité de mouvement entre les phases. Nous pourrions ainsi déterminer si celle-ci est bien corrélée avec les termes sous-maille associés.

La dernière problématique se rapporte plus spécifiquement aux écoulements dispersés. Une hypothèse classique consiste à supposer que la phase dispersée peut être modélisée par un essaim d'inclusions de diamètre unique. Nous allons donc discuter des difficultés associées à ce genre d'approche lorsque l'essaim de bulles réel présente une polydispersion importante. Il s'agit de s'intéresser aux lois de fermetures liées à ce type de modélisation. Pour cela, nous allons étudier les différentes équations de bilan les unes après les autres.

9.1 Équation de bilan de masse

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux résultats obtenus dans le cadre de l'équation de bilan de masse dans chacune des configurations. Nous rappelons que l'équation de bilan de masse, pour le gaz, 7.39a s'écrit :

$$\frac{\partial R_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(R_g V_g) = 0 \quad (9.1)$$

Les résultats vont nous permettre de vérifier, à nouveau, notre méthode de prise de moyenne. Nous allons ensuite étudier plus précisément l'évolution temporelle R_g afin de caractériser les effets de la résolution et du développement de l'écoulement physique sur les grandeurs moyennes.

9.1.1 Colonne I

Pour l'ensemble des cas qui concernent la géométrie I , les courbes présentées se rapportent à une tranche située au centre du domaine, soit à la côte $z = 0, 1$ m. Ainsi, les résultats concernant les configurations Ia , Ib et Ic sont représentés respectivement sur les figures 9.1, 9.2(a), 9.2(b).

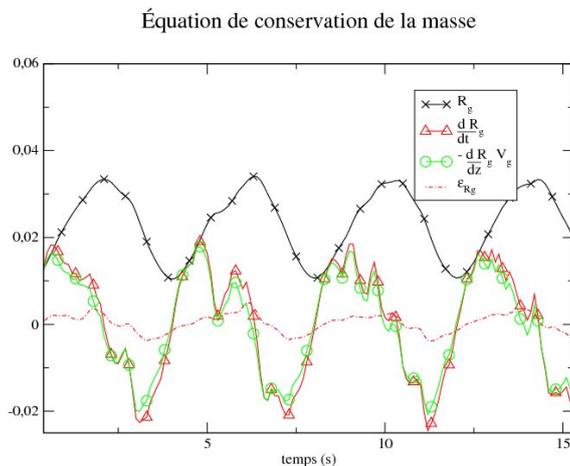


FIGURE 9.1 – Termes de l'équation de bilan de masse : cas Ia

De façon rassurante, on retrouve pour l'ensemble des cas la condition aux limites d'entrée du gaz décrite au chapitre 8. On note aussi que les grandeurs sont généralement plus régulières que leurs dérivées. Comme dans le chapitre précédent, on remarque que dans chacun des cas l'erreur ϵ_{R_g} est faible. Ce constat est cohérent avec les bonnes propriétés de conservation de la masse de la méthode utilisée ici. Nous avons cependant remarqué, au paragraphe 7.3.2, que les algorithmes de coalescence engendraient un transport non physique de masse. Celui-ci était à l'origine d'une erreur du bilan de masse au moment des coalescences. Néanmoins, ce transport non physique est relativement local : il se fait à une échelle plus petite que l'échelle caractéristique des inclusions. Comme la fréquence de coupure de l'opérateur de moyenne utilisé dans les chapitres 8 et 9 est grande par rapport à la fréquence de passage des inclusions, cette erreur est filtrée. Il est intéressant de noter qu'en changeant la taille du support de l'opérateur de prise de moyenne, les effets sont différents et les conclusions, également, doivent être nuancées. On ne peut donc pas se contenter d'une approche exclusivement locale pour renseigner les modèles moyennés.

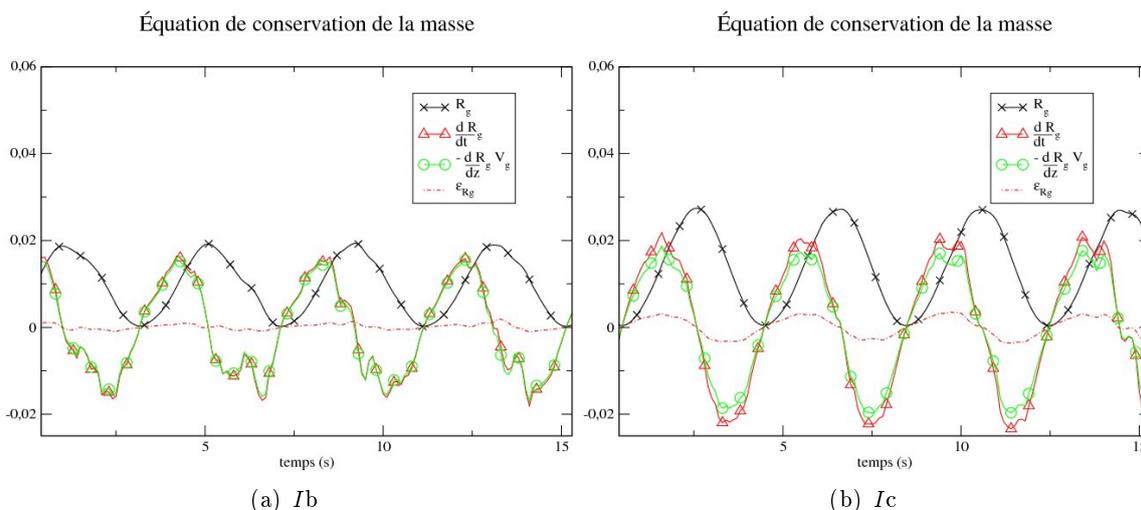


FIGURE 9.2 – Termes de l'équation de bilan de masse : essais monodisperses

De façon plus surprenante, on remarque que l'erreur ϵ_{R_g} est plus grande en moyenne dans

le cas Ic que dans le cas Ib . On se souvient en effet que le nombre de mailles par diamètre de bulle est deux fois plus grand dans le cas Ib que dans le cas Ic . Cette différence de discrétisation implique que les champs de vitesse et d'indicateur à l'intérieur des bulles quasi sphériques sont moins bien décrits que ceux des inclusions ellipsoïdales. Les grandeurs moyennes associées à ces deux champs sont donc moins bien évaluées.

On note aussi que la courbe de taux de vide est plus régulière dans le cas Ic que dans le cas Ib . En d'autres termes, le temps d'intermittence diphasique est plus faible dans le cas Ic que dans le cas Ib . On se souvient en effet que la condition aux limites de taux de vide implique que l'essaim c contient nettement plus d'inclusions que l'essaim b .

9.1.2 Colonne II

Dans l'ensemble des cas relatifs au domaine II , nous nous intéressons à une tranche située au centre du domaine dans la direction verticale, soit à la côte $z = 0,28$ m. Les résultats concernant le bilan de masse sont présentés sur la figure 9.3. Comme cela a déjà été exposé au chapitre 8, la simulation IIa est très différente des cas I . En effet, il apparaît, dans le cas II , des recirculations qui "brassent" l'essaim de bulles, amenant les plus petites inclusions à présenter des mouvements d'ensemble structurés. Ce mélange macroscopique des inclusions tend à diminuer les variations de taux de vide créées par la condition d'injection des bulles. On retrouve ici cette caractéristique puisque les variations temporelles de R_g ne correspondent plus aux conditions aux limites d'injection. On note que la variation temporelle de $\frac{\partial R_g}{\partial t}$ est plus bruitée que dans

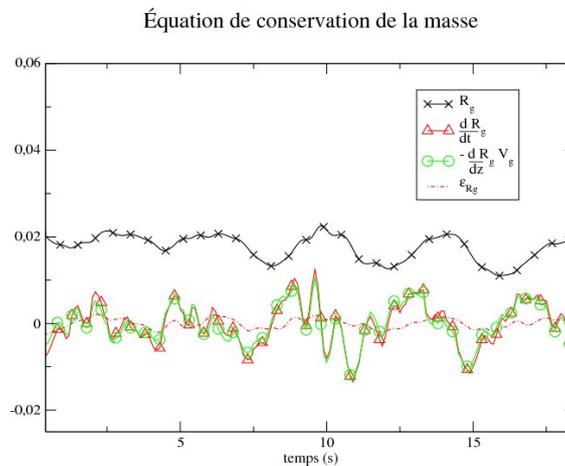


FIGURE 9.3 – Termes de l'équation de bilan de masse : cas IIa

les configurations I . On remarque également que ϵ_{R_g} est plus faible en moyenne que dans le cas Ia .

En conclusion, on observe dans l'ensemble des cas que le bilan de masse est bien respecté (*i.e.* que ϵ_{R_g} est faible). De plus, les résultats sont cohérents avec les types d'écoulements observés dans les différentes configurations. Cette étape valide donc en partie notre démarche.

9.2 Bilan de quantité de mouvement

Nous venons d'étudier le bilan de masse dans les différents cas. Celui-ci est relativement simple et ne présente pas de terme à fermer. Cette étude avait pour objectif de qualifier notre

démarche. En effet, nous n'avons pas mesuré les termes interfaciaux ($\tau_k \cdot \nabla \chi_k$) au niveau microscopique. Nous ne pouvons donc pas vérifier si la somme des termes de l'équation 7.39b s'annule. L'étude précédente sur le bilan de masse nous a néanmoins démontré que l'erreur commise lors de nos mesures est relativement faible. Nous nous appuyons donc sur celle-ci pour justifier de la qualité de nos mesures.

Nous allons maintenant nous intéresser au bilan de quantité de mouvement. D'après l'équation 7.39b, celui-ci s'écrit :

$$\rho_k \frac{\partial R_k V_k}{\partial t} + \rho_k \frac{\partial}{\partial z} (R_k \langle \overline{v_k v_k^k} \rangle_k) = -R_k \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{P}_k) - \rho_k R_k g + \frac{\partial}{\partial z} (2 \mu_k R_k \frac{\partial V_k}{\partial z}) + F_k \quad (9.2)$$

Cette équation est plus complexe que l'équation de bilan de masse, car elle fait intervenir plus de termes. De plus, certains d'entre eux ne sont pas fermés. En particulier, deux termes ne peuvent être évalués à partir des seules grandeurs moyennes. Il s'agit du terme convectif et du terme d'échange de quantité de mouvement aux interfaces, F_k . L'analyse du modèle de turbulence, qui permet de représenter la différence entre $\langle \overline{v_k v_k^k} \rangle_k$ et $V_k V_k$, dépasse largement le cadre de ce travail. Nous nous limiterons donc ici à l'analyse du terme F_k .

Un autre point délicat de la modélisation moyennée se rapporte à la pression. En effet, afin de simplifier la résolution numérique du problème, beaucoup de modèles ne font apparaître qu'une seule pression ; il devient alors nécessaire de faire le lien entre cette pression unique et les champs de pressions phasiques qui apparaissent à l'équation 7.39b.

Nous allons dans un premier temps analyser le rôle de la pression sur l'équation de quantité de mouvement, puis nous nous intéresserons aux échanges aux interfaces représentés par F_k .

9.2.1 Problématique de la pression unique

Comme nous l'avons évoqué dans la partie 6.2.3, le problème de fermeture conduit de nombreux auteurs à imposer l'égalité des pressions, soit $\mathcal{P} \triangleq \mathcal{P}_l = \mathcal{P}_g$. Cette hypothèse de modélisation est réalisée au niveau moyen. Par conséquent, l'étude de ce genre de modèles implique la "traduction" de la condition précédente au niveau microscopique. En d'autres termes, avant d'envisager de mesurer \mathcal{P} dans une simulation fine, il est nécessaire de définir la grandeur microscopique p qui vérifie :

$$\frac{\langle \overline{\chi_g p} \rangle}{R_g} = \frac{\langle \overline{\chi_l p} \rangle}{R_l} \quad (9.3)$$

Les modèles à pression unique (par exemple, CATHARE et NEPTUNE) constituent la cible de la démarche globale dans laquelle s'inscrit notre travail. Néanmoins, la difficulté théorique précédente n'a pas été surmontée pour l'instant. Nous nous sommes donc limités dans la suite de ce travail à l'étude d'un modèle à deux pressions distinctes décrit par le système d'équations 7.39b.

Néanmoins, nous avons cherché à corréliser les gradients des deux champs de pression dans chacune des configurations étudiées. En effet, dans le cadre des écoulements dispersés, on peut penser que le gradient de pression de la phase continue a un rôle moteur sur la phase dispersée. Autrement dit, le terme $-R_g \frac{\partial \mathcal{P}_l}{\partial z}$ jouerait un rôle moteur dans l'équation de bilan de quantité de mouvement de la phase dispersée. Il remplacerait ainsi le terme $-R_g \frac{\partial \mathcal{P}_g}{\partial z}$ qui apparaît naturellement dans cette équation.

Les résultats qui concernent les cas monodisperses (Ib et Ic) sont présentés aux figures 9.4(a) et 9.4(b). On remarque dans les deux cas un fort niveau de corrélation entre les deux termes

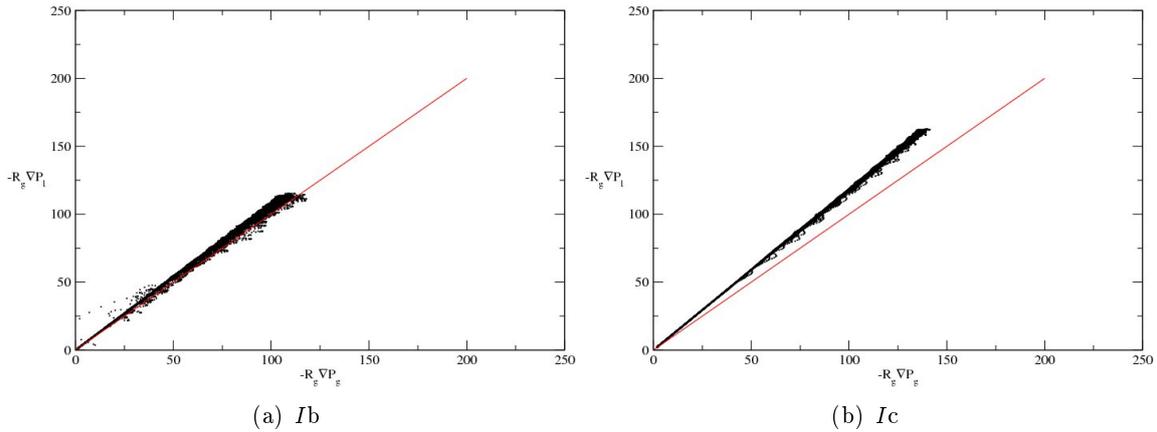


FIGURE 9.4 – Corrélation entre les gradients de pression des deux phases : cas monodisperses

$-R_g \frac{\partial P_g}{\partial z}$ et $-R_g \frac{\partial P_l}{\partial z}$. L'égalité de ces deux termes est particulièrement marquée dans le cas *Ib*. À l'inverse, dans le cas *Ic*, le rapport de ces deux termes est très légèrement différent de 1, ce qui peut s'expliquer de deux façons. Premièrement, les bulles sphériques sont moins bien discrétisées relativement aux inclusions ellipsoïdales, ce qui implique que le champ de pression de la phase dispersée est moins bien résolu dans le cas *Ic* que dans le cas *Ib*. Deuxièmement, le taux de vide est plus grand dans le cas *Ic* que dans le cas *Ib*. Ainsi, le plus grand nombre d'inclusions perturbe plus le champ de pression de la phase liquide. Les gradients des champs de pressions phasiques diffèrent alors d'autant plus que le nombre d'inclusions est important. Comme les champs de pression et de vitesse sont liés, il est possible de se rendre compte de ce dernier effet sur les figures 8.8 et 8.9 qui représentent les essais de bulles et des coupes du champ de vitesses dans les cas *Ib* et *Ic*.

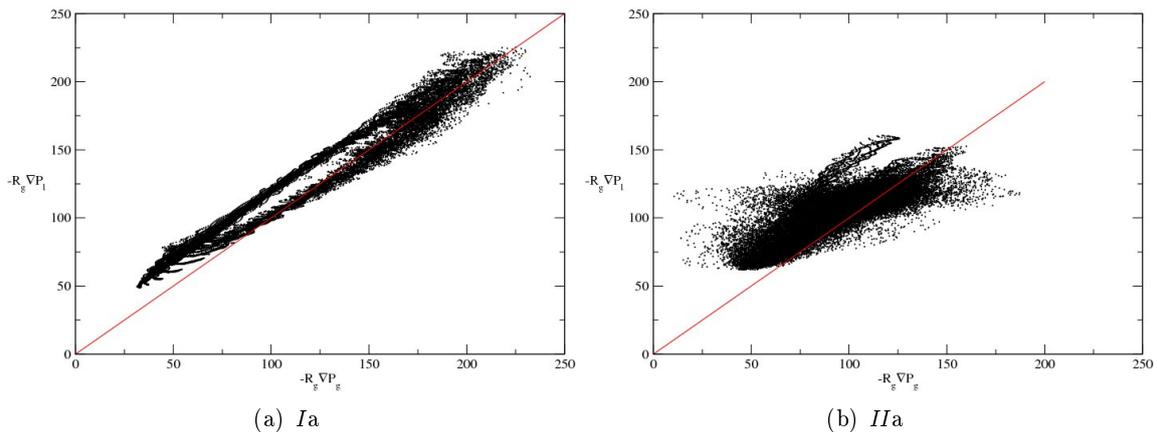


FIGURE 9.5 – Corrélation entre les gradients de pression des deux phases : cas bidisperses

Les résultats qui concernent les cas bidisperses (*Ia* et *IIa*) sont présentés aux figures 9.5(a) et 9.5(b). On note que dans le cas *Ia* les deux champs associés aux termes $-R_g \frac{\partial P_g}{\partial z}$ et $-R_g \frac{\partial P_l}{\partial z}$ sont bien corrélés. Les résultats sont cohérents avec ceux qui concernent les cas *Ia* et *Ib* puisque l'on distingue plusieurs zones qui correspondent à l'évolution temporelle de la polydispersion.

9.2. BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la configuration d'écoulement *IIa* est nettement plus complexe que les cas *I*. En particulier la dynamique de l'écoulement est plus riche que dans les autres cas. Ceci explique la moins bonne corrélation entre les gradients de pressions phasiques. En effet, les résultats présentés à la figure 9.5(b) suggèrent que les fluctuations de vitesse provoquées par les recirculations perturbent le champ de pression de la phase continue.

Dans cette sous-partie, nous avons montré que les termes $-R_g \frac{\partial \mathcal{P}_g}{\partial z}$ et $-R_g \frac{\partial \mathcal{P}_l}{\partial z}$ sont bien corrélés dans les cas des écoulements fortement dilués et faiblement turbulents pour lesquels le champ de pression de la phase continue est presque uniforme. Dès que des perturbations du champ de pression apparaissent, il n'est plus possible de substituer un gradient par l'autre.

Dans la sous-partie suivante nous allons présenter le rôle de la pression et de son gradient sur l'écoulement. Nous allons ainsi illustrer l'importance de la formulation du modèle utilisé.

9.2.2 Influence de la pression

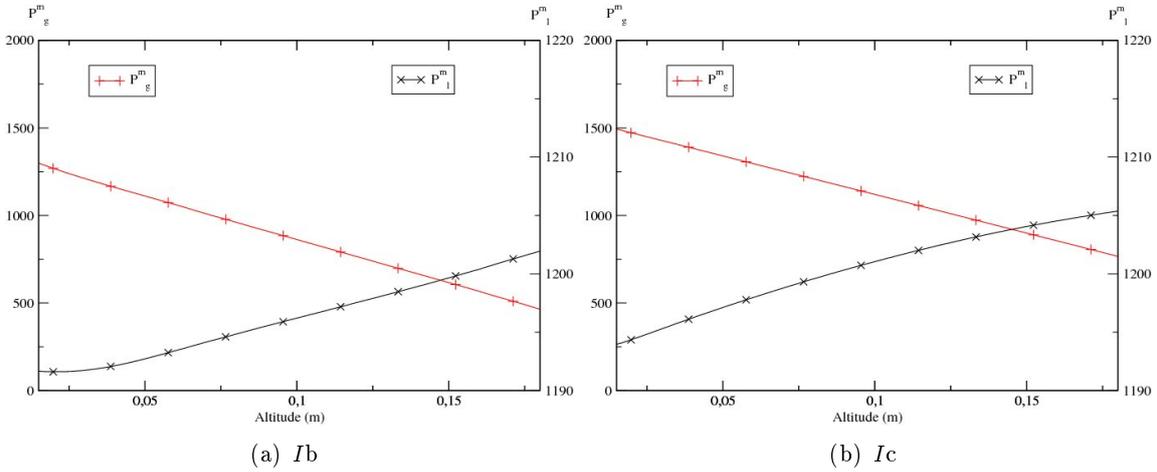


FIGURE 9.6 – Comparaison des termes \mathcal{P}_l^m et \mathcal{P}_g^m en fonction de l'altitude au temps $t=6$ s

Les conditions aux limites imposées dans cette situation (Cf. partie 8.2) impliquent que les gradients de pressions phasiques ne sont pas imposés par un dispositif extérieur, comme il le serait par une pompe. Les pertes de pressions phasiques sont principalement provoquées par les effets gravitaires car il n'y a pas de frottement sur les parois du domaine et les pertes de pression par accélération ne peuvent pas être modélisées par notre approche incompressible. Cette caractéristique implique que les termes prépondérants du bilan de quantité de mouvement sont $-R_k \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{P}_k)$ et $-\rho_k R_k g$. Comme ces termes se compensent presque exactement, nous les avons rassemblés au sein d'une même contribution. Pour cela, on définit :

$$\mathcal{P}_k^m \triangleq \mathcal{P}_k + \rho_k g z \quad (9.4)$$

Cette grandeur est homogène à une pression et est appelée pression hydrostatique dans les cas monophasiques. Cette définition n'est toutefois pas directement transposable pour les écoulements diphasiques car la masse volumique du mélange n'est pas constante. Même si l'interprétation physique de \mathcal{P}_k^m est difficile, le gradient de celui nous donne :

$$-R_k \frac{\partial \mathcal{P}_k^m}{\partial z} = -R_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial z} - R_k \rho_k g \quad (9.5)$$

Afin de comprendre le rôle de ce terme, nous allons nous intéresser aux champs \mathcal{P}_l^m et \mathcal{P}_g^m au temps $t = 6$ secondes dans les différents cas. Les résultats correspondants sont présentés sur les figures 9.6(a), 9.6(b), 9.7(a) et 9.7(b).

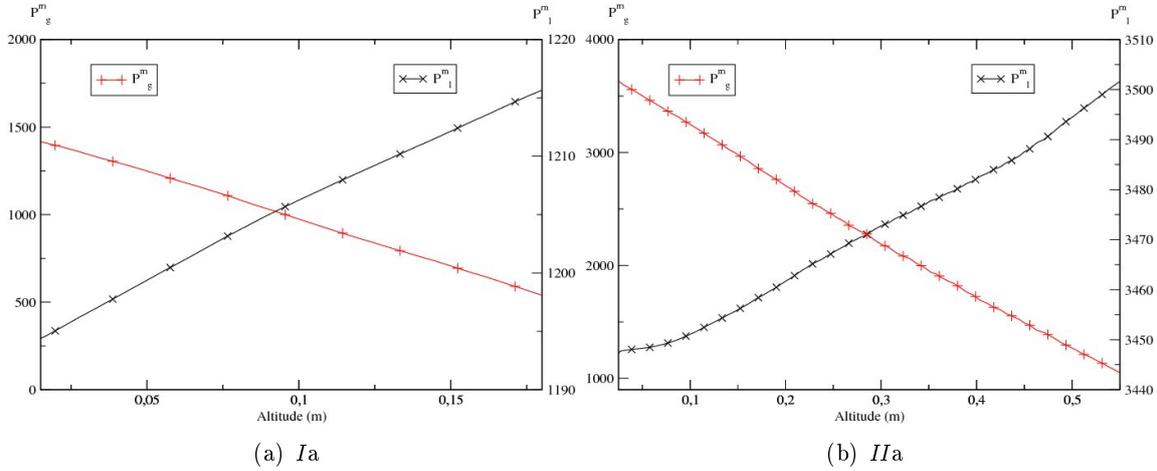


FIGURE 9.7 – Comparaison des termes \mathcal{P}_l^m et \mathcal{P}_g^m en fonction de l'altitude au temps $t=6$ s

Dans l'ensemble des configurations, on remarque que les termes $-R_k \frac{\partial \mathcal{P}_k^m}{\partial z}$ sont dirigés dans des sens opposés : Ils sont dirigés dans le sens de l'écoulement de la phase considérée. Ainsi, le terme $-R_k \frac{\partial \mathcal{P}_k^m}{\partial z}$ se comporte comme un terme source de l'équation 7.39b qui est la cause de l'écoulement. Ce terme est responsable de l'ascension du gaz (pour $k = g$) et de la descente du liquide (pour $k = l$). En d'autres termes, c'est "le moteur" de la différence de vitesse entre les phases.

Comme nous venons de le montrer, la modélisation de la pression est extrêmement importante dans les écoulements car elle représente en partie la cause du mouvement. Ainsi dans les écoulements diphasiques, le terme $-R_k \frac{\partial \mathcal{P}_k}{\partial z} - R_k \rho_k g$ est responsable de l'écoulement et de la différence de vitesse. Une mauvaise prise en compte de \mathcal{P}_k conduit donc à une mauvaise estimation de la vitesse des phases.

En effet, avant même de chercher une loi de fermeture pour les échanges de quantité de mouvement aux interfaces, qui correspond généralement à un frein à la différence de vitesse, il convient d'exprimer correctement le terme moteur celle-ci. Autrement dit, il faut trouver une formulation adaptée au problème étudié. Ainsi, nous avons mis en évidence le fait que la définition d'une pression unique est possible dans le cas des écoulements dilués et faiblement turbulents. Dans les autres cas, nous n'avons pas trouvé de formulation qui fasse ressortir cette pression unique. Pour cette raison, nous nous sommes limités ici à l'étude d'un modèle à deux pressions.

9.2.3 Échanges de quantité de mouvement aux interfaces

Nous venons de voir que le terme source $-R_k \frac{\partial \mathcal{P}_k^m}{\partial z}$ est à l'origine de la différence de vitesse entre les phases. Celui-ci est couplé aux termes d'échanges de quantité de mouvement qui ont un rôle de frein sur les mouvements relatifs des phases entre elles. Ces termes nécessitent l'utilisation d'une loi de fermeture que nous allons étudier dans cette partie. Il est important de souligner que la pertinence de cette loi de fermeture doit être jugée relativement au reste de la formulation du modèle physique. Autrement dit, suivant la formulation du modèle, la loi de fermeture englobe

plus ou moins de termes. Il résulte que deux lois de fermetures ne peuvent être confrontées que si elles sont relatives à la même formulation du modèle physique. De la même manière, ce travail se rapporte à la formulation représentée par le système d'équations 7.39.

Dans un premier temps, nous allons étudier la corrélation entre F_g et F_l , puis, dans une seconde étape, nous mesurerons les coefficients de traînée afin de les comparer à une loi de fermeture.

Corrélation entre F_g et F_l

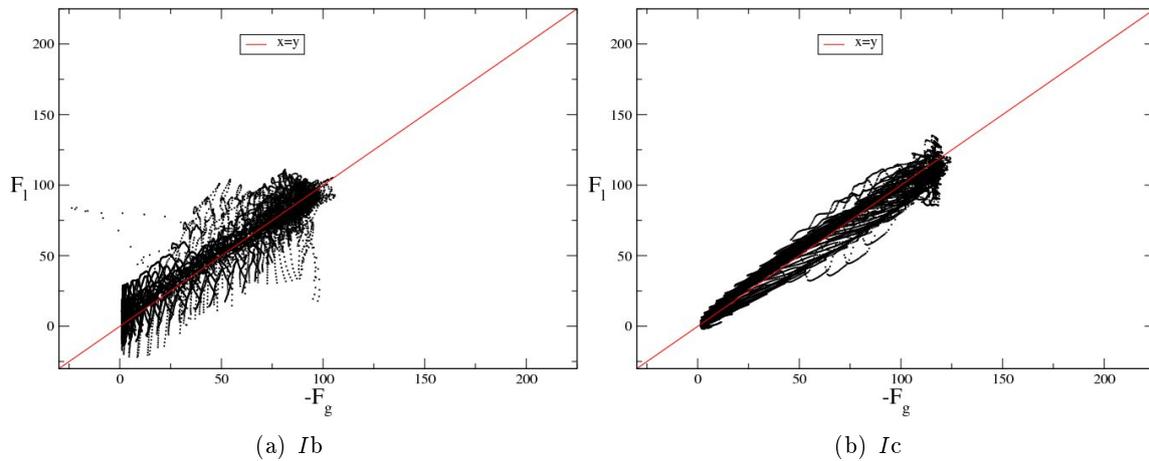


FIGURE 9.8 – Corrélation entre les termes $-F_g$ et F_l : configurations monodisperses

D'après 7.39d et Ishii [27], on peut déduire la relation suivante entre F_g et F_l

$$\sum_k F_k = \sum_k - \langle \overline{\tau_k \cdot \nabla \chi_k} \rangle_z - \sum_k \mathcal{P}_k \frac{\partial R_k}{\partial z} \quad (9.6)$$

$$= \sum_k F'_k + \sum_k \mathcal{P}_k^I \frac{\partial R_k}{\partial z} - \sum_k \mathcal{P}_k \frac{\partial R_k}{\partial z} \quad (9.7)$$

Dans l'expression précédente, le terme $\sum_k F'_k$ représente les forces qui s'exercent sur les phases et qui s'annulent d'après le principe d'action et de réaction. L'équation 9.7 se simplifie et donne

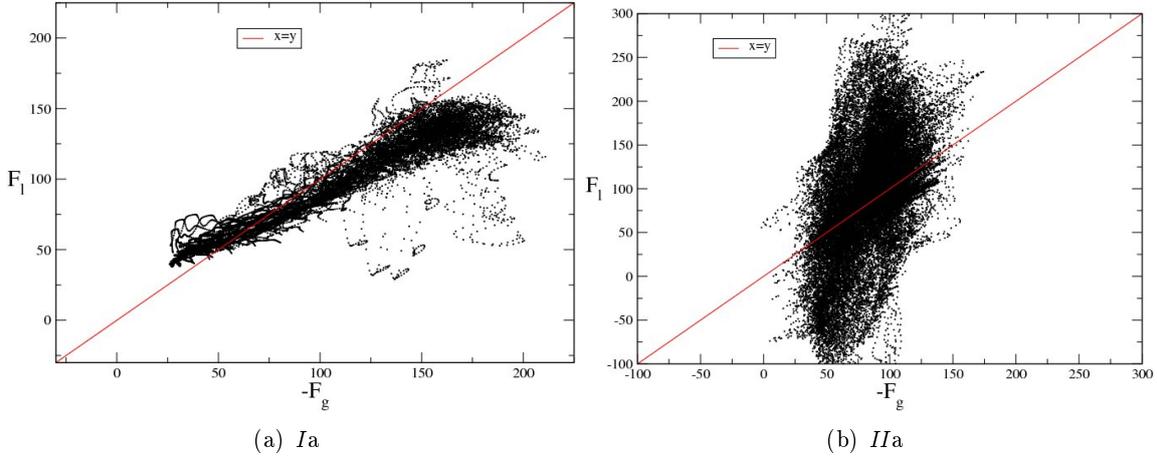
$$\sum_k F_k = \sum_k \mathcal{P}_k^I \frac{\partial R_k}{\partial z} - \sum_k \mathcal{P}_k \frac{\partial R_k}{\partial z} \quad (9.8)$$

où \mathcal{P}_k^I est la moyenne de la pression de la phase k aux interfaces. Ainsi, Le terme $\sum_k \mathcal{P}_k^I \frac{\partial R_k}{\partial z}$ représente le saut de pression moyen aux interfaces lié aux effets de tension de surface.

Si le champ de pression est homogène alors la différence entre la moyenne de la pression aux interfaces est :

$$\sum_k F_k \approx 0 \quad (9.9)$$

On s'attend à ce que cette propriété d'homogénéité du champ de pression soit plus souvent observée dans la phase dispersée que dans la phase continue. Autrement dit, on pressent que la différence entre $\mathcal{P}_g^I - \mathcal{P}_g$ doit être plus faible que $\mathcal{P}_l^I - \mathcal{P}_l$.


 FIGURE 9.9 – Corrélation entre les termes $-F_g$ et F_l : configurations bidisperses

Sur les figures 9.8(a), 9.8(b), 9.9(a) et 9.9(b), sont tracés le terme F_l en fonction F_g dans les cas *Ib*, *Ic*, *Ia* et *IIa* respectivement. Ces résultats sont obtenus de façon indirecte, grâce à la mesure des autres termes du bilan de quantité de mouvement représentée par l'équation 7.39b.

On remarque que dans les trois premières configurations les termes F_g et F_l sont bien corrélés. Cela revient en fait à dire que les champs de pressions phasiques sont suffisamment réguliers pour que l'on puisse négliger les termes en $\mathcal{P}_k^I - \mathcal{P}_k$.

À l'inverse dans le cas *IIa*, on remarque que les termes F_g et F_l sont très mal corrélés car l'écoulement est nettement plus complexe. Dans ces conditions, une (ou plusieurs) des hypothèses qui ont été faites n'est plus valable du fait de la plus grande complexité de l'écoulement *IIa*. En particulier, il semble raisonnable de penser que l'un des termes qui ont été négligés dans cette démarche a une influence plus importante que dans les configurations *I*. Même si nous n'avons pas été en mesure d'isoler l'origine exacte de cette différence, nous pouvons énoncer les causes probables de celle-ci :

- la présence de recirculations perturbe le champ de vitesse et donc le champ de pression. Ainsi, les effets dynamiques pourraient provoquer une différence non négligeable entre \mathcal{P}_k et \mathcal{P}_k^I . Dans ces conditions, les termes $(\mathcal{P}_k^I - \mathcal{P}_k) \frac{\partial R_k}{\partial z}$ ne seraient plus négligeables dans l'équation 9.7 et la relation $\sum_k F_k \approx 0$ ne serait plus vérifiée.
- de la même manière, la perte de régularité du champ de vitesse associée à cette recirculation pourrait avoir un effet important sur les erreurs de commutation entre les opérateurs de moyenne et les opérateurs de dérivée. Ainsi, les relations 7.35 et 7.36 ne seraient plus vérifiées. Autrement dit, il apparaîtrait un terme sous-maille associé aux effets visqueux.

Nous venons de constater que dans les cas faiblement turbulents, le modèle physique représenté par l'équation 7.39b représente correctement l'écoulement. Cependant, dans le cas *IIa* où apparaît des recirculations sous-maille, le modèle n'est plus représentatif. Ceci serait engendré par une mauvaise prise en compte de certains termes sous-maille de l'équation de quantité de mouvement.

Liens entre F_k et les forces de traînées

Contrairement aux modèles de type SND ou ISS, les modèles moyennés bifluide font apparaître des termes F_k non fermés. Ceux-ci correspondent aux échanges de quantité de mouvement entre les phases. Les lois de fermeture utilisées pour modéliser ces termes dans le cadre des

9.2. BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

écoulements dispersés sont dérivées des forces qui agissent sur une inclusion isolée.

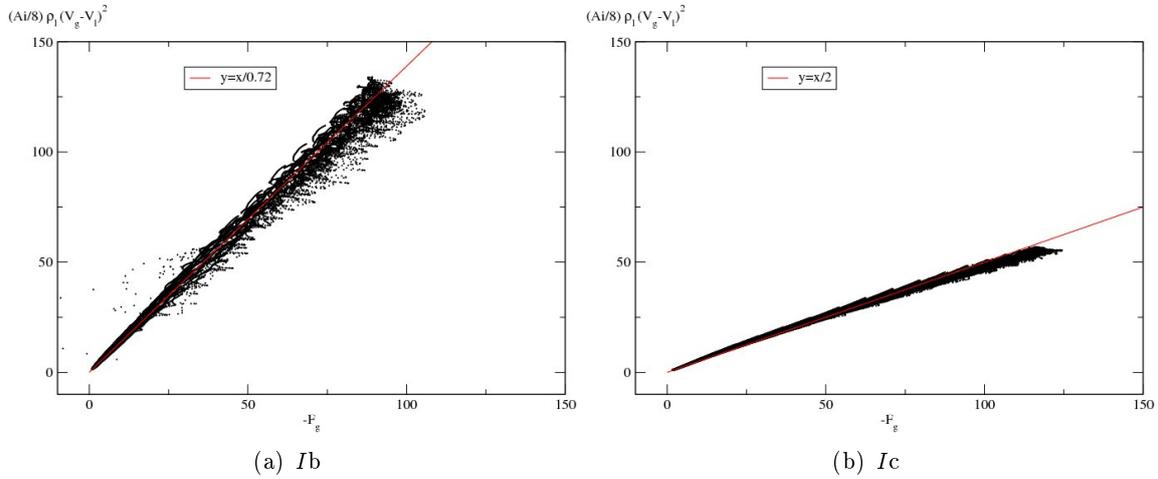


FIGURE 9.10 – Corrélation entre les termes $-F_g$ et $A_i \frac{\rho_l}{8} (V_g - V_l)^2$

Dans les configurations d'écoulement étudiées, les forces qui agissent principalement sont la force de traînée et les forces de masse ajoutée. Si on s'intéresse plus particulièrement au fluide situé loin des conditions aux limites d'entrée et de sortie, il ne reste majoritairement que la force de traînée. Celle-ci s'exprime en fonction des grandeurs moyenne au travers de la relation

$$F'_l = -F'_g = C_D A_i \frac{\rho_l}{8} (V_l - V_g)^2 \quad (9.10)$$

où C_D est le coefficient de traînée. Celui-ci est exprimé par une corrélation empirique comme celle de Mei *et al.* [90] donnée à l'équation 8.3. Dans la suite de ce travail, nous considérons pour les cas Ia, Ib et Ic que les champs de pressions phasiques sont peu perturbés. On en déduit simplement que $F_k \approx F'_k$.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux deux configurations monodisperses. Ainsi, sur les figures 9.10(a) et 9.10(b) est tracée la grandeur $A_i \frac{\rho_l}{8} (V_g - V_l)^2$ en fonction de $-F_g$. On s'aperçoit que les points sont regroupés autour d'une droite dans les deux cas. Ces droites sont tracées dans les deux configurations Ib et Ic et correspondent respectivement aux équations $y = x/0,72$ et $y = x/2$. On en déduit les valeurs des coefficients de traînée C_D^I . Ceux-ci sont regroupés dans le tableau suivant et confrontés aux coefficients théoriques et mesurés dans le cas d'une inclusion isolée (Cf. paragraphe 8.1.3).

	type	configuration	bulle quasi-sphérique	bulle ellipsoïdale
C_D^{mes}	mesuré	bulle isolée	1,8	0,54
C_D^{theo}	théorique	bulle isolée	2,0	0,59
C_D^I	mesuré	essaims de bulles	2,0	0,72

Comme les coefficients C_D^{mes} et C_D^{theo} se rapportent à la situation d'une bulle isolée alors que C_D^I est associé au cas d'un essaim de plusieurs inclusions, il n'est pas étonnant de trouver des différences. La concordance des résultats est cependant extrêmement satisfaisante, vue la méthode de mesure indirecte.

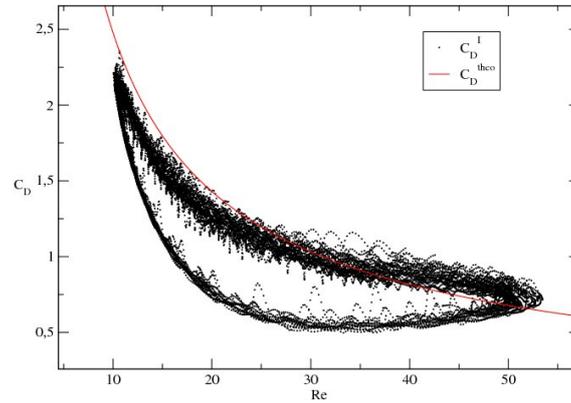


FIGURE 9.11 – Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds dans le cas *Ia*. En rouge, la corrélation proposée par Mei *et al.* [90]

De la même manière, nous allons maintenant nous intéresser au cas *Ia* qui se rapporte au cas d'un essaim de bulles bidisperse. Dans cette configuration, la dispersion de l'essaim de bulles varie au cours du temps. Le coefficient de traînée est donc tracé, sur la figure 9.11, en fonction du nombre de Reynolds d'essaim, Re_e défini comme suit :

$$Re_e = \frac{\rho_l d_{32} |V_g - V_l|}{\mu_l} = \frac{6 \rho_l R_g |V_g - V_l|}{A_i \mu_l} \quad (9.11)$$

On remarque sur la figure 9.11 qu'une partie des points est très proche de la courbe théorique alors que certains autres semblent en suivre une autre. Cette différence de comportement s'explique par le fait qu'une même valeur du nombre Re_e , défini à l'équation 9.11, ne correspond pas à un seul essaim de bulles. De même, un coefficient de traînée peut correspondre à plusieurs types d'essaim.

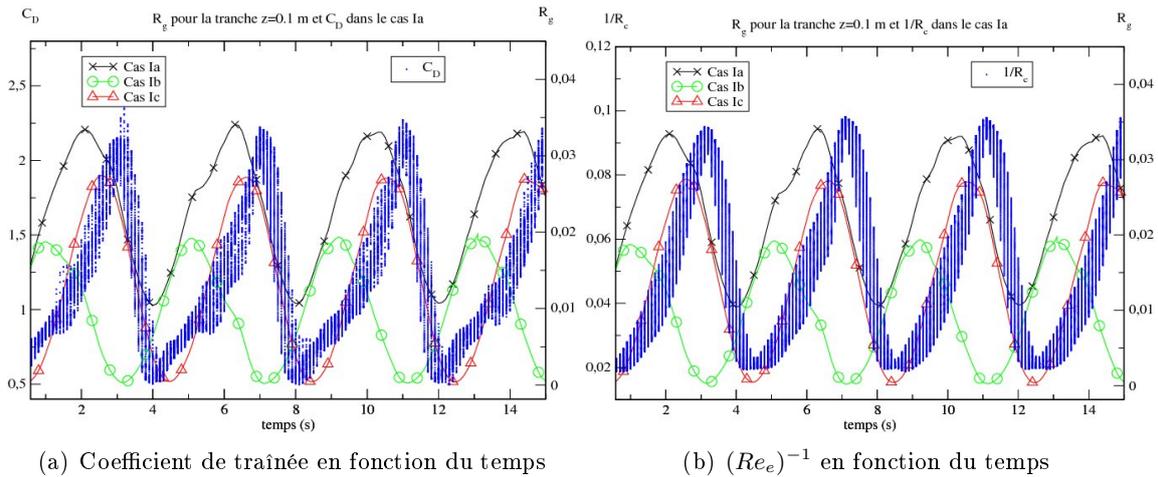


FIGURE 9.12 – Évolution temporelle de C_D^I et de $(Re_e)^{-1}$ dans le cas *Ia*

Afin de mettre en évidence cette propriété, les évolutions temporelles des C_D^I et de $(Re_e)^{-1}$ sont tracées sur les figures 9.12(a) et 9.12(b). Celles-ci sont confrontées aux évolutions temporelles des taux de vide associées à chacun des essaims de bulles pour une tranche située à la côte

9.2. BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$z = 0, 1$ m. On remarque ainsi que les fluctuations temporelles de C_D^I et de $(Re_e)^{-1}$ suivent celles de R_g et de A_i . Plus précisément, on remarque que les évolutions temporelles de C_D^I et de $(Re_e)^{-1}$ suivent principalement celle du taux de vide de l'essaim c . On note aussi qu'il existe un très léger déphasage entre les courbes représentant l'évolution temporelle de C_D^I et de $(Re_e)^{-1}$. Ceci explique l'existence de deux comportements sur la figure 9.11. Cet effet est principalement lié à la polydispersion de l'écoulement Ia .

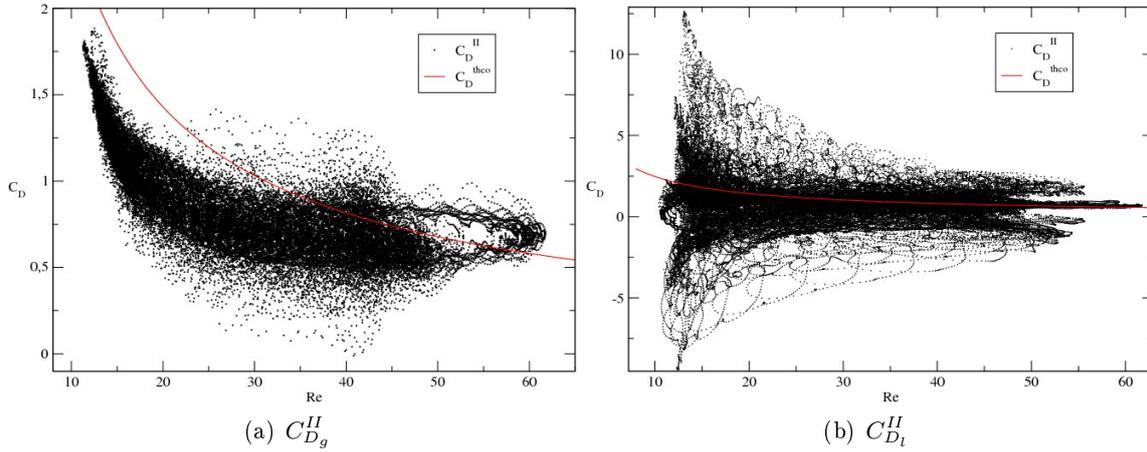


FIGURE 9.13 – Corrélation entre les termes $C_{D_k}^{II}$ et Re_e dans le cas IIa

Comme nous l'avons constaté précédemment, les deux forces F_k ne sont pas l'opposé l'une de l'autre dans le cas IIa . Contrairement aux situations I , il n'est donc pas possible de construire un unique coefficient de traînée. Pour cette raison, nous allons mesurer deux coefficients $C_{D_k}^{II}$ associés à chacun des F_k :

$$C_{D_g}^{II} \triangleq -\frac{8 F_g}{A_i \rho_l (V_g - V_l)^2} \quad (9.12)$$

$$C_{D_l}^{II} \triangleq \frac{8 F_g}{A_i \rho_l (V_g - V_l)^2} \quad (9.13)$$

Ces deux coefficients sont tracés en fonction des valeurs de Re_e sur les figures 9.13(a) et 9.13(b). En ce qui concerne $C_{D_g}^{II}$, on note que les points sont regroupés de façon équivalente au cas Ia (Cf. figure 9.12(a)). De façon rassurante, on retrouve donc le même coefficient de traînée que dans le cas Ia . Ceci implique que les effets de la recirculation ne sont pas ressentis par la phase gazeuse et que $F_g \approx F'_g$. En d'autres termes, les effets dynamiques associés aux recirculations n'affectent pas les écoulements internes aux bulles. À l'inverse, sur la figure 9.13(b), les points ne sont pas regroupés de façon équivalente au cas Ia et sont même, pour certains, extrêmement éloignés de C_D^{theo} . Comme par définition $F'_l = -F'_g$, ce dernier constat implique que $F_l \neq F'_l$. Autrement dit, F_l correspond à la somme de F'_l et d'autres termes qui ne sont pas pris en compte dans cette démarche. Ces résultats confirment donc que $F_g \neq -F_l$ dans la configuration IIa comme cela a été évoqué au paragraphe précédent à l'aide de la figure 9.9(b). De plus, la différence observée entre F_l et $-F_g$ est principalement due à une mauvaise prise en compte des effets dynamiques dans la phase dispersée. Le terme qui n'est pas pris en compte a donc principalement un effet dans l'équation de quantité de mouvement de la phase liquide.

En conclusion, la formulation du bilan de quantité de mouvement proposée à l'équation 7.39b n'est pas complète. En particulier, elle ne permet pas de rendre compte de certains effets liés

à la dynamique de la phase continue de l'écoulement dans les cas turbulents. Dans les autres situations plus simples, l'égalité entre $-F_g$ et F_l conduit à penser que l'équation 7.39b rend correctement compte de l'écoulement.

Dans l'ensemble des cas, nous avons obtenu un coefficient de traînée proche de celui donné par la corrélation de Mei *et al.* [90]. De plus, les effets de la polydispersion se font principalement sentir sur la loi de fermeture de C_D . En particulier, la définition du nombre de Reynolds utilisé (équation 9.11) ne permet pas d'obtenir un coefficient de traînée adapté. Ainsi, dans certains cas, l'erreur commise sur C_D peut dépasser 100%.

9.3 Équation de bilan d'aire interfaciale volumique

Nous venons d'étudier les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement. Une autre équation importante de la description des écoulements polyphasiques est l'équation d'évolution d'aire interfaciale volumique. Celle-ci permet de tenir compte des variations de surface d'interface (et donc du diamètre moyen). Ces variations sont généralement décomposées en deux parties : la première qui se rapporte au transport de A_i et la seconde relative aux sources d'interface dans l'écoulement. Ce terme source est associé aux variations d' A_i consécutives aux déformations, coalescences et changement de phase (par exemple quand une bulle condense, sa surface diminue). D'après l'équation 7.39c, celui-ci s'écrit :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \langle \overline{\delta_\sigma w_z} \rangle}{\partial z} = \langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) \rangle \quad (9.14)$$

9.3.1 Avec la vitesse matérielle des interfaces

Nous avons vu dans ce qui précède que la partie tangentielle de la vitesse des interfaces n'a pas d'importance sur le déplacement de celles-ci. Seule la composante normale de la vitesse sert au déplacement de l'interface géométrique. Ainsi, pour calculer les termes du bilan d'aire interfaciale volumique, on choisit naturellement la vitesse matérielle des interfaces : ceci correspond à $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$.

Les résultats concernant les cas *Ia*, *IIa*, *Ib*, *Ic* sont présentés respectivement sur les figures 9.14(a), 9.14(b), 9.15(a), 9.15(b). Comme précédemment, on retrouve les variations associées aux conditions aux limites dans les cas *I*. Néanmoins, comme pour le bilan de masse, les variations temporelles des grandeurs moyennes sont très bruitées dans le cas *IIa*. De plus, elles ne correspondent pas aux conditions aux limites du fait des recirculations dans le domaine d'études.

De façon analogue à ϵ_{R_g} , on remarque que ϵ_{A_i} est plus faible dans le cas *Ib* (figure 9.15(a)) que dans le cas *Ic* (figure 9.15(b)). On note, de la même manière, que les variables moyennes sont plus régulières dans le cas *Ic* que dans le cas *Ib*.

Pour l'ensemble des configurations étudiées, on remarque que le terme $\frac{\partial A_i}{\partial t}$ est compensé par la somme de $-\frac{\partial \langle \overline{\delta_\sigma w_z} \rangle}{\partial z}$ et de $\langle \overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w})} \rangle$. On remarque aussi que ces deux termes sont du même ordre de grandeur. Autrement dit, avec le choix $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$, le terme source $\langle \overline{\delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w})} \rangle$ intervient directement dans le transport. Afin de comprendre l'influence du choix de \mathbf{w} sur l'équation d'aire interfaciale volumique, nous allons maintenant nous intéresser à la moyenne de \mathbf{w} pondérée par la surface d'interface.

9.3.2 Influence de la vitesse microscopique

Pour les écoulements monodisperses de bulles indéformables, on s'attend assez naturellement à ce que les vitesses des centres de gravité du volume de gaz et de l'interface soient identiques.

9.3. ÉQUATION DE BILAN D'AIRE INTERFACIALE VOLUMIQUE

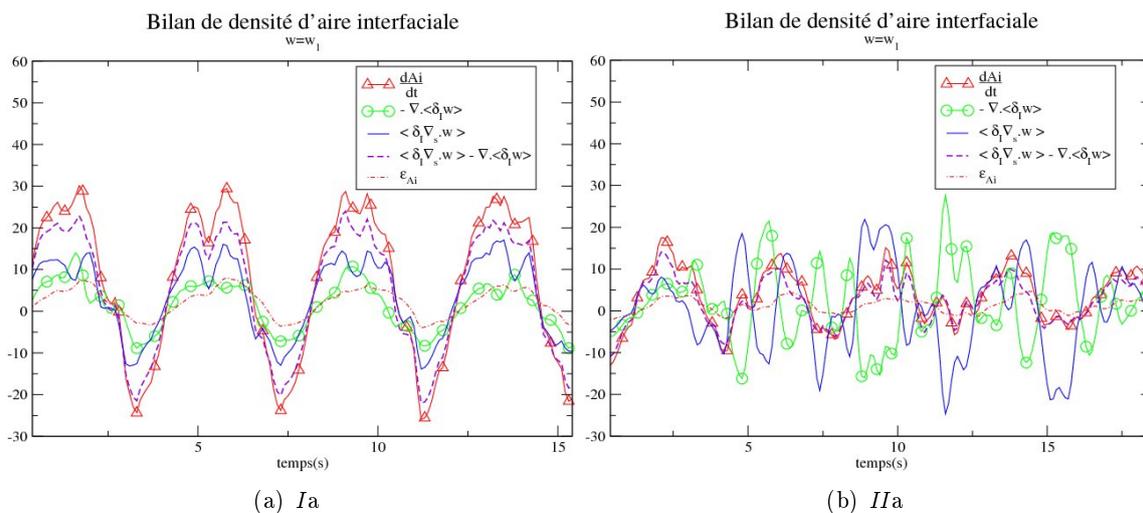


FIGURE 9.14 – Termes de l'équation de bilan d'aire interfaciale volumique avec $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$: essais bidisperses

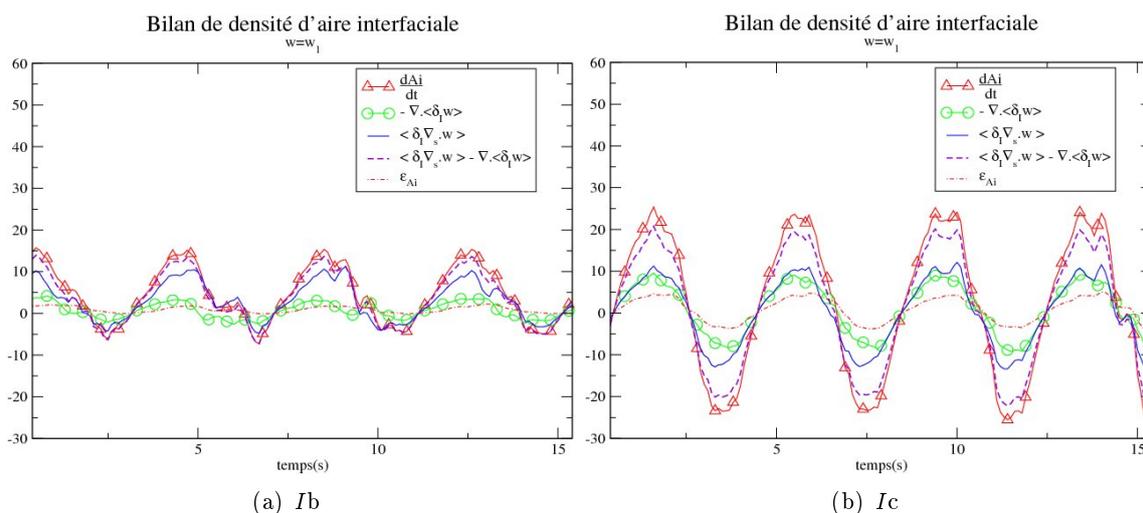


FIGURE 9.15 – Termes de l'équation de bilan d'aire interfaciale volumique avec $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$: essais monodisperses

Une hypothèse de modélisation, dans l'approximation des bulles indéformables, consiste alors à supposer que $\langle \overline{\delta_\sigma \mathbf{w}} \rangle = A_i \mathbf{V}_g$. Nous allons donc chercher à comparer \mathbf{V}_g et $\langle \overline{\delta_\sigma \mathbf{w}} \rangle / A_i$ dans les cas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$. Les résultats sont présentés sur les figures 9.16(a), 9.16(b), 9.17(a), 9.17(b).

Afin d'alléger les notations, dans la suite de cet exposé nous appellerons

$$V_{i1} = \frac{\langle \overline{\delta_\sigma \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{e}_z} \rangle}{A_i} \quad (9.15)$$

et,

$$V_{i2} = \frac{\langle \overline{\delta_\sigma \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{e}_z} \rangle}{A_i} \quad (9.16)$$

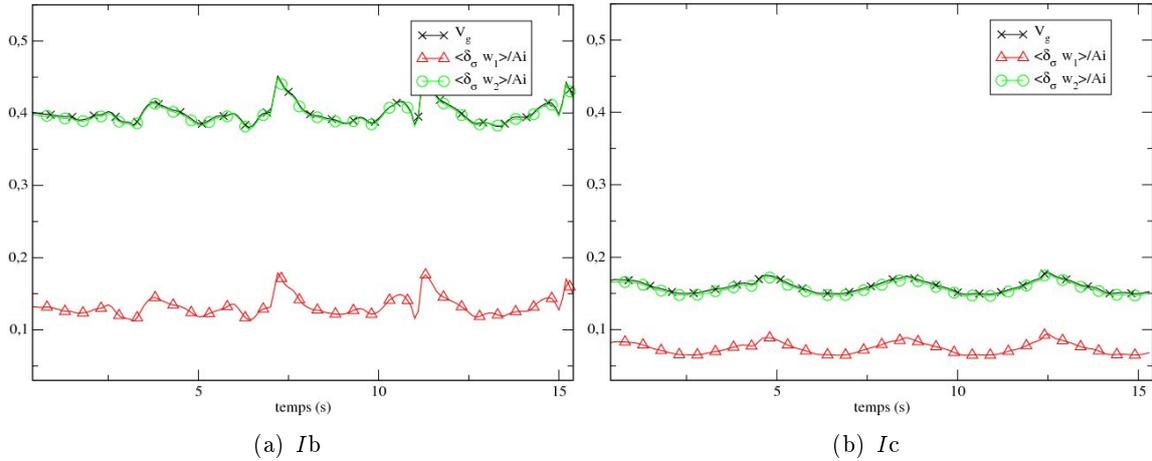


FIGURE 9.16 – Comparaison des vitesses moyennes : essais monodisperses

Sur les deux configurations monodisperses Ib et Ic (figures 9.16(a) et 9.16(b)), on peut remarquer que $V_{i_1} \neq V_g$ et que $V_{i_2} \approx V_g$. On retrouve ainsi le résultat démontré au paragraphe 7.1 pour une bulle unique.

On note aussi que V_g est plus petite que la vitesse terminale des inclusions isolées (Cf. paragraphe 8.1.2). Ce résultat s'explique par le fait que la descente du liquide est gênée par la présence des inclusions. En d'autres termes, la section de passage du liquide est d'autant plus réduite que le taux de vide est élevé. Ce phénomène est particulièrement marqué dans le cas Ic pour lequel on peut distinguer les variations de vitesse moyenne associées à la condition aux limites de taux de vide.

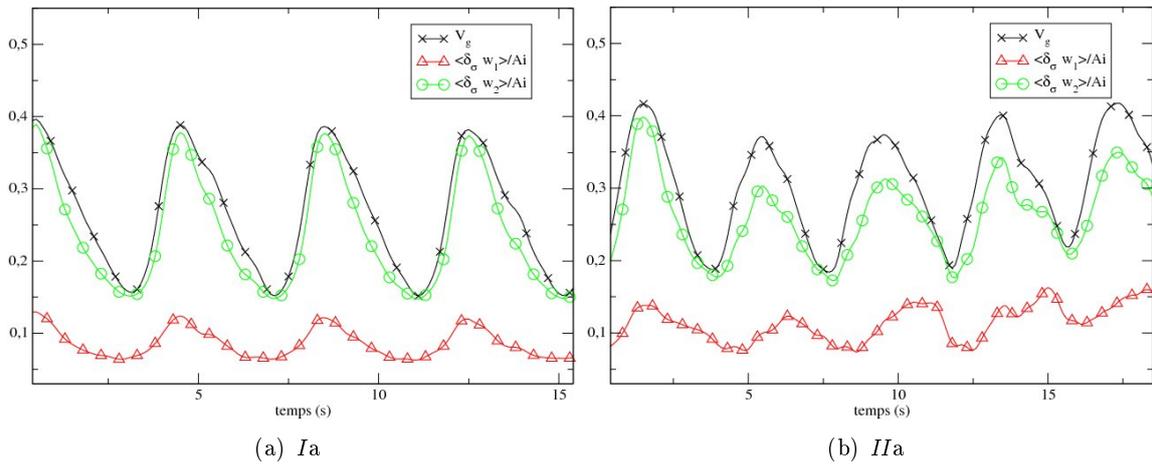


FIGURE 9.17 – Comparaison des vitesses moyennes : essais bidisperses

Dans les deux cas bidisperses (figures 9.17(a) et 9.17(b)), on note que la vitesse moyenne du gaz varie fortement au cours du temps car la taille, et donc la vitesse des inclusions présentes dans le domaine, fluctue par l'intermédiaire de la condition aux limites d'entrée du gaz. De façon identique à ce qui précède, on trouve que la vitesse V_{i_1} est très différente de V_g . On remarque aussi que plus un type de bulles représente une majorité dominante dans le domaine et plus la différence entre V_g et V_{i_2} est faible ce qui est cohérent puisque l'on tend vers un

9.3. ÉQUATION DE BILAN D'AIRE INTERFACIALE VOLUMIQUE

cas monodisperse. En particulier, dans le cas *Ia*, la vitesse V_g oscille entre les valeurs vitesses correspondantes aux cas *Ib* et *Ic*. À l'inverse, quand les deux types d'inclusions sont présentes en proportion équivalente, cette différence de vitesse est plus importante.

Cette comparaison des vitesses moyennes nous a permis de constater que le choix de la partie tangentielle de la vitesse microscopique de déplacement des interfaces a une grande influence sur la vitesse moyenne du centre d'aire. En particulier, si on choisit la vitesse matérielle comme vitesse microscopique alors, on trouve pour l'ensemble des configurations, que V_{i_1} est très différente de V_g . À l'inverse, en prenant $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$, on trouve dans les cas monodisperses que V_{i_2} est très proche de V_g . Dans les deux configurations bidisperses, il est plus difficile de conclure car la différence de vitesse terminale entre les deux familles de bulles implique nécessairement que les centres d'aire et de volume ne se déplacent pas à la même vitesse.

9.3.3 Avec la vitesse modifiée

Nous venons de montrer que le choix $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ ne conduit pas à une égalité des vitesses moyennes du gaz et des interfaces dans les cas monodisperses. Ceci explique que le terme source de l'équation d'aire interfaciale volumique construite à partir de \mathbf{w}_1 participe en partie au transport. En d'autres termes, on n'est plus capable de différencier les variations d' A_i liées au transport de celles qui sont liées aux déformations. Ceci est d'autant plus problématique que l'une des applications de notre démarche serait de renseigner les modèles de coalescence et de fragmentation.

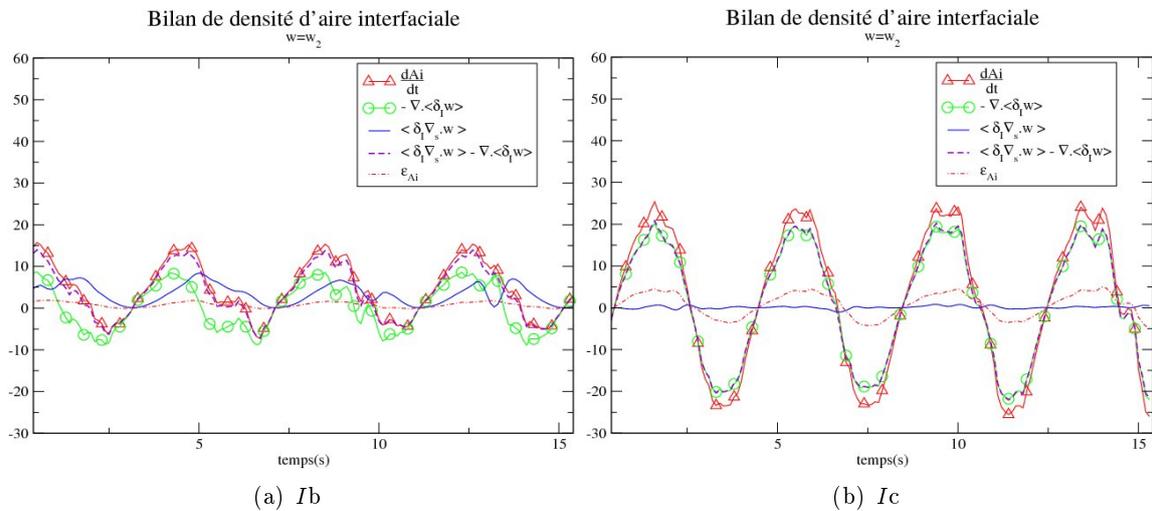


FIGURE 9.18 – Termes de l'équation de bilan d'aire interfaciale volumique avec $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$: essais monodisperses

Afin de résoudre ce problème, nous avons la possibilité de modifier la partie tangentielle de \mathbf{w} . Il convient alors de déterminer s'il existe un choix de \mathbf{w}_t qui permet de dissocier les effets de transport et de déformation. En particulier on souhaite que dans un cas monodisperse la moyenne de cette vitesse soit égale à V_g . Dans ce qui précède nous avons déjà trouvé une vitesse qui satisfait ces conditions. Celle-ci correspond au choix $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$.

Nous avons donc réalisé les mêmes mesures sur l'équation 7.39c qu'au paragraphe 9.3.1 en choisissant, cette fois-ci, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$. Ainsi, les résultats sont présentés sur les figures 9.18(a), 9.18(b), 9.19(a), 9.19(b). Pour l'ensemble des configurations, on remarque que le terme source $\langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) \rangle$ a une importance moindre qu'avec le choix $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$. En particulier, dans le cas

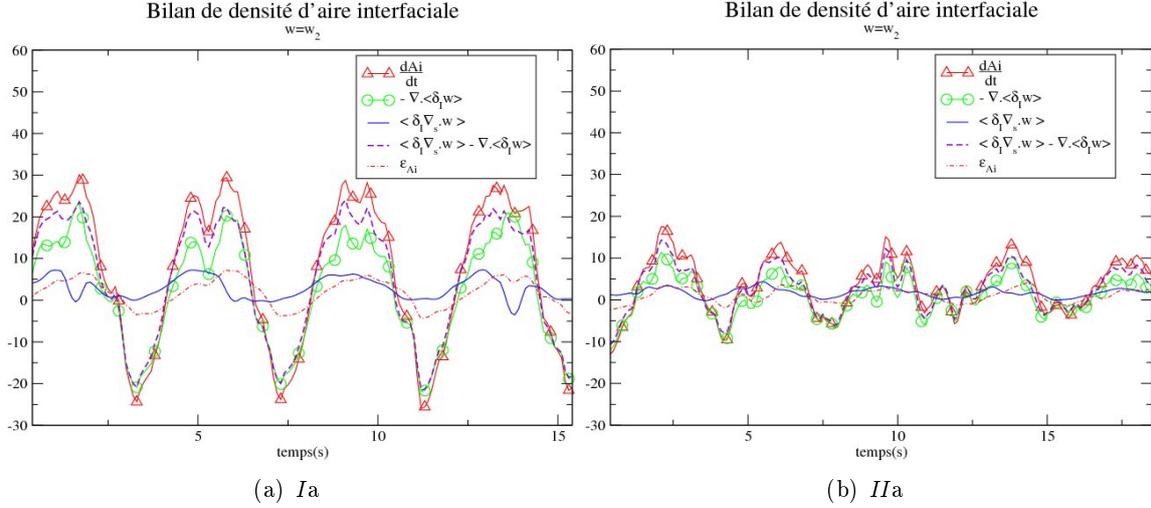


FIGURE 9.19 – Termes de l'équation de bilan d'aire interfaciale volumique avec $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$: essais bidisperses

Ic dont les résultats sont présentés à la figure 9.18(b), on remarque que ce terme est très proche de zéro. En effet, la valeur du nombre d' $E\ddot{o}$ associé aux bulles sphériques est très inférieur à 1, on s'attend donc à ce que le terme source qui traduit les déformations soit faible. À l'inverse, dans la configuration Ib (figure 9.18(a)), ce terme n'est pas nul. Ainsi, les bulles ellipsoïdales qui sont plus déformables conduisent à un terme source plus grand. Cela est d'autant plus vérifié que la coalescence de ces bulles provoque la formation de bulles plus volumineuses qui sont très déformables. Comme le nombre de coalescences est approximativement proportionnel au nombre de bulles (et donc à R_g), le terme source $\langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) \rangle$ varie comme le taux de vide sur la figure 9.18(a).

En ce qui concerne les configurations bidisperses Ia et IIa , on remarque sur les figures 9.19(a) et 9.19(b), comme pour le cas Ib , que le terme source de l'équation d'aire interfaciale volumique varie avec R_g . La difficulté est alors de modéliser correctement le terme source $\langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) \rangle$. Ce terme est généralement fermé à l'aide de modèles basés sur l'analyse physique des phénomènes de coalescence et de fragmentation. Ces phénomènes sont principalement pilotés par les effets de drainage de film lorsque deux portions d'interfaces se rapprochent l'une de l'autre. Comme notre méthode Front-Tracking ne permet pas, pour l'instant, de modéliser ces effets, nous n'aborderons pas ce point dans ce travail. Il est cependant envisageable par la suite d'introduire des modèles afin à l'échelle SND/ISS afin de renseigner les lois de fermetures associées au terme source $\langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) \rangle$.

9.3.4 Flux décorrélé

La vitesse du centre d'aire n'est pas connue et nécessite une fermeture. L'hypothèse classiquement utilisée [92] consiste à modéliser V_{i2} par V_g . Cette approximation est vérifiée dans les cas monodisperses, comme nous l'avons montré précédemment. Néanmoins, à partir du moment où l'écoulement présente une polydispersion importante, il devient nécessaire de tenir compte de la différence de vitesse $V_{i2} - V_g$. On réécrit donc le bilan d'aire interfaciale volumique (équa-

tion 7.39c) dans cette optique :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i V_g}{\partial z} = \langle \delta_\sigma \nabla_s \cdot (\mathbf{w}) \rangle + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (A_i (V_g - V_{i_2}))}_{\text{Flux décorrélé}} \quad (9.17)$$

Il apparaît dans l'équation précédente un terme sous-maille appelé flux décorrélé qui provient de la différence entre la vitesse du centre d'aire et celle du centre de volume. Dans le cas des écoulements monodisperses, l'équation précédente se simplifie, car le terme de flux décorrélé est nul. On ne s'intéresse donc ici qu'aux situations *Ia* et *IIa* dont les résultats sont présentés sur les figures 9.20(a) et 9.20(b).

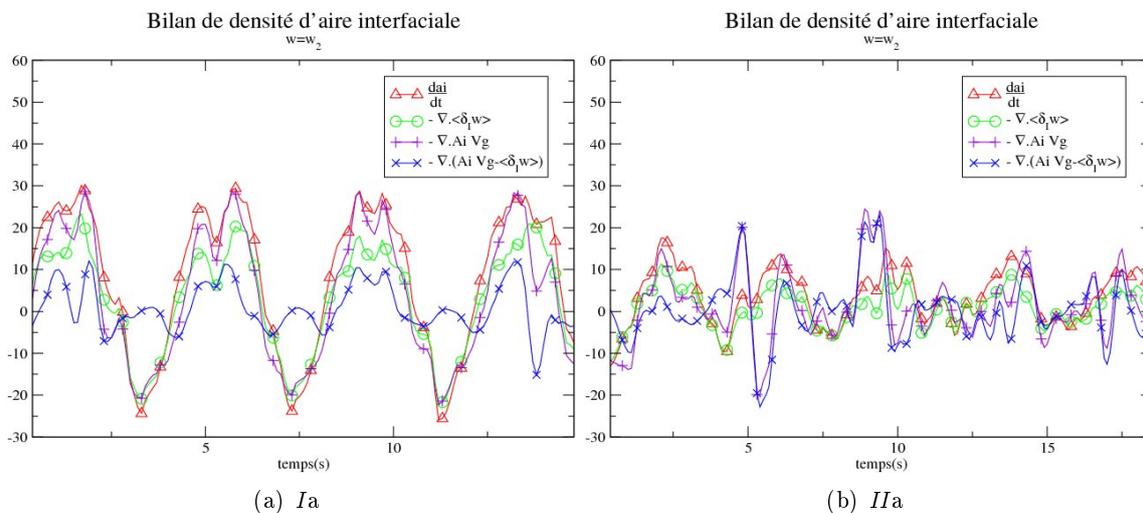


FIGURE 9.20 – Termes de l'équation de bilan d'aire interfaciale volumique avec $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$: mise en évidence de l'importance du flux décorrélé dans les cas des essais bidisperses

Dans les deux cas, le flux décorrélé est non négligeable : il ne peut plus être négligé pour modéliser correctement les écoulements fortement polydisperses. En effet, dans la configuration *Ia* le flux décorrélé représente jusqu'à un tiers de $\frac{\partial A_i}{\partial t}$. Il est principalement dû à la polydispersion dans l'écoulement induite par la condition aux limites d'entrée. Dans le cas *IIa*, le flux décorrélé a une grande influence et représente jusqu'à deux fois $\frac{\partial A_i}{\partial t}$. On remarque qu'il est fortement dépendant des fluctuations de vitesse sous-maille associées à la recirculation : on atteint ici les limites de la modélisation monodimensionnelle !

La modélisation du flux décorrélé est donc extrêmement difficile car ce terme dépend de la polydispersion et des fluctuations de vitesse sous-maille. On atteint donc ici les limites de l'approche monodisperse. En effet dans le cas des écoulements polydisperses, ce type d'approche conduit à une mauvaise prise en compte du transport de A_i . Il en résulte une erreur sur A_i qui est une grandeur essentielle pour la bonne prise en compte des échanges aux interfaces.

9.4 Conclusions

Ce travail a pour objectif de tester le modèle diphasique moyenné représenté par le système d'équations 7.39 dans les cas des écoulements prototypes présentés au chapitre 7. En particulier, nous avons cherché à vérifier la validité de la formulation utilisée et à confronter les lois de fermeture aux termes sous-maille associés. Afin de donner une conclusion exhaustive de ce travail,

nous proposons de discuter de la pertinence de ce modèle dans chacun des cas étudiés.

Les deux configurations Ib et Ic se rapportent à des essais monodisperses et sont donc équivalentes. Ainsi, on observe dans ces deux cas que le bilan de masse est bien respecté (*i.e.* ϵ_{R_g} faible). Les grandeurs moyennes sont plus ou moins bruitées suivant le nombre et la nature des inclusions présentes dans l'écoulement. En ce qui concerne le bilan de quantité de mouvement, nous avons observé que les deux gradients de pressions phasiques sont égaux, de sorte qu'il est possible de créer un champ de pression unique pertinent égal à \mathcal{P}_l ou à \mathcal{P}_g . La formulation du bilan de quantité de mouvement rend correctement compte de l'écoulement puisque l'on trouve que $F_l \approx -F_g$ et que les coefficients de traînée mesurés sont proches de la corrélation de Mei *et al.* [90]. En ce qui concerne l'équation d'aire interfaciale volumique, la fermeture associée à V_i ($V_i = V_g$) est bien vérifiée. Le terme source correspondant à l'essai Ic est nul et est donc bien représenté. À l'inverse, le terme source correspondant au cas Ib nécessite une loi de fermeture qui n'a pas été étudiée ici.

La configuration Ia apporte un niveau de complexité supplémentaire puisqu'elle se rapporte à une situation pleinement bidisperse. En ce qui concerne le bilan de masse, on retrouve les mêmes bonnes propriétés de conservation que dans les deux configurations Ib et Ic . De même, l'hypothèse de champ de pression unique n'est pas influencée par la polydispersion et reste satisfaisante même si les gradients de pressions phasiques sont moins bien corrélés. Là encore, la formulation du bilan de quantité de mouvement est satisfaisante puisque l'on retrouve $F_l \approx -F_g$. L'influence de la polydispersion sur le bilan de quantité de mouvement se fait principalement ressentir sur la loi de fermeture du coefficient de traînée. En particulier, le calcul du nombre de Reynolds qui sert dans l'expression de la corrélation de Mei *et al.* est plus complexe. Ainsi, l'utilisation de Re_e est problématique puisque les points du graphique $C_D^I = f(Re_e)$ ne sont pas regroupés sur une unique courbe. Finalement, le bilan d'aire interfaciale volumique est directement influencé par la polydispersion. En effet, en plus du terme source, il apparaît un terme sous-maille associé à la différence de vitesse $V_g - V_i$. Celui-ci nécessiterait alors l'emploi d'une loi de fermeture difficile à construire car le flux décorréolé dépend directement de la dispersion de l'essai de bulles considéré. En effet le modèle revient à résoudre une équation pour un essai de bulles de diamètre moyen d_{32} , le flux décorréolé peut donc être interprété comme un terme qui rend compte de la différence entre cet essai "moyen" et l'essai réel.

Le cas IIa est le plus complexe à cause de la présence de recirculations dans l'écoulement et du caractère bidisperse de l'essai. Dans cette situation, le bilan de masse est, comme précédemment, correctement vérifié. Néanmoins, on s'aperçoit que l'évolution temporelle de R_g est fortement influencée par la présence des recirculations. En ce qui concerne le bilan de quantité de mouvement, on constate que les effets dynamiques perturbent le champ de pression de la phase continue si bien que les gradients de pressions phasiques ne sont plus corrélés. Nous n'avons donc pas été en mesure de définir un champ de pression unique dans cette configuration. De la même manière, le bilan de quantité de mouvement est influencé par ces effets dynamiques puisque l'on ne retrouve plus $F_l \approx -F_g$. Autrement dit, il existe physiquement un terme supplémentaire qui n'est pas pris en compte par l'équation 7.39b et qui a une influence non négligeable dans le cas de la phase continue. Ce terme serait, d'après nous, soit lié aux effets dynamiques de la pression soit associé aux erreurs de commutations entre les opérateurs de moyenne et les opérateurs de dérivation. Dans la mesure où cet effet n'influence que très faiblement le bilan de quantité de mouvement de la phase dispersée, nous avons été en mesure de déterminer le coefficient de traînée. Le comportement de ce dernier est analogue au cas Ia . Il existe, ici aussi, une difficulté liée à la définition du nombre de Reynolds qui sert dans la corrélation de Mei *et al.*. Concernant

9.4. CONCLUSIONS

l'équation d'aire interfaciale volumique, on constate que le terme source n'est pas prépondérant dans cette situation. À l'opposé, le flux décorrélé est le terme de plus forte importance. Aussi la modélisation précise de celui-ci paraît indispensable afin de déterminer de façon correcte l'aire interfaciale volumique.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Cette thèse s'inscrit dans un projet à très long terme qui vise à renseigner les modèles moyennés diphasiques grâce à la simulation numérique directe (SND). Notre démarche est réellement originale car elle ne consiste pas à étudier une loi de fermeture, un terme en particulier ou à comprendre un phénomène physique mais à réaliser un test *a priori* sur le système d'équations complet. Comme il s'agit d'une première mise en œuvre de notre démarche, nous nous sommes limités au cas des écoulements isothermes sans changement de phase.

La méthode de SND utilisée est précise (respect du bilan de masse, discrétisation des termes de tension superficielle sans courant parasite) mais son coût d'un point de vue algorithmique et numérique est relativement important. Les améliorations que nous avons apportées concernent d'une part, les conditions aux limites (entrée, sortie, bords) de la phase dispersée et d'autre part, la limitation du recours aux algorithmes de gestion du maillage (lors du transport des interfaces et des changements topologiques).

Afin de réduire le coût numérique de nos simulations, nous avons mis en place une méthode analogue aux modèles de type SGE pour les écoulements diphasiques. Ainsi, nous avons, dans un premier temps, exposé les développements théoriques qui conduisent au modèle ISS. Celui-ci présente l'avantage de correspondre à un problème discontinu grâce à l'utilisation de la méthode des DAR. Il est possible de le mettre en œuvre à partir de notre méthode de SND diphasique. Dans un deuxième temps, nous avons implémenté le modèle ISS dans la plateforme de développement Trio_U, puis nous avons réalisé différents cas tests de validation. On montre ainsi que le modèle ISS est particulièrement adapté aux écoulements turbulents dans lesquels l'échelle de Kolmogorov est très petite devant le rayon de courbure des interfaces. Dans notre situation laminaire, une sous-résolution d'un facteur trois (par rapport à une solution de type SND) avec le modèle ISS conduit à une solution satisfaisante. Au-delà de ce rapport trois, les fermetures ne permettent plus de reconstruire complètement les fluctuations sous-maille. Il est alors nécessaire (c'est notre cas) d'optimiser le modèle dans une situation particulière en modifiant les préfacteurs des fermetures.

Dans le cadre de ces travaux, nous nous sommes intéressés aux écoulements dispersés à bulles. En particulier, nous avons étudié différentes configurations laminares qui se rapportent à des essaims de bulles monodisperses et bidisperses. Le processus de moyenne utilisé correspond à une moyenne composite (moyenne temporelle et moyenne sur la section) qui conduit à un modèle monodimensionnel. Ce choix a été principalement guidé par les impératifs de séparation d'échelles entre les variations des champs moyens (à basse fréquence) et les fluctuations liées à l'intermittence diphasique (à haute fréquence). Néanmoins, cette démarche a aussi pour vocation de renseigner les modèles tridimensionnels comme ceux de NEPTUNE CFD.

Nous nous sommes volontairement restreints, dans ce travail, à l'étude d'un modèle moyenné simple (deux pressions, pas de prise en compte de la polydispersion, une équation d'AIV) dans une configuration peu complexe (écoulement isotherme sans changement de phase). Cette démarche est cependant utilisable pour n'importe quel modèle.

Nous avons montré que l'une des difficultés de la démarche proposée est de définir toutes les grandeurs moyennes à partir des grandeurs microscopiques. En particulier, certaines hypothèses réalisées directement sur les grandeurs moyennes doivent être traduites au niveau local. Ainsi, on définit une vitesse microscopique des interfaces qui permet de vérifier la condition sur les grandeurs moyennes : $V_g = V_i$ pour un écoulement monodisperse. À l'inverse, nous n'avons pas trouvé de pression "modifiée" qui, une fois moyennée, conduit à l'égalité des pressions : $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_g$. Pour cette raison, nous nous sommes intéressés à un modèle à deux pressions. Cependant, dans les configurations les plus simples (*Ia*, *Ib* et *Ic*), nous avons trouvé que $-R_g \frac{\partial \mathcal{P}_g}{\partial z} \approx -R_g \frac{\partial \mathcal{P}_l}{\partial z}$. L'hypothèse de pression unique est donc valable dans ces cas.

En ce qui concerne le cas *IIa*, on note que les effets dynamiques sous-maille de la phase continue ne sont pas correctement pris en compte par le système d'équations 7.39. Il devient alors nécessaire de revoir certaines hypothèses simplificatrices (différences entre \mathcal{P}_l et \mathcal{P}_l^I , erreurs de commutation). À l'inverse, on montre que le modèle proposé, qui n'est pas fermé, rend bien compte des écoulements *Ib*, *Ic*. Comme nous n'utilisons pas de modèle de polydispersion, on trouve dans les cas *Ia* et *IIa* que le flux décorréolé dans l'équation d'AIV nécessite une fermeture. De plus, le coefficient de traînée est surestimé par la loi de fermeture utilisée. À ce sujet, il est intéressant de noter que cette erreur ne provient pas de la corrélation de Mei *et al.* [90] mais de son utilisation. En particulier, le nombre de Reynolds utilisé (Re_e) ne semble pas adéquat.

Perspectives

Les suites à donner à ce travail sont extrêmement nombreuses. Nous proposons ici de présenter celles qui nous paraissent raisonnablement envisageables à moyen terme.

Il nous semble important d'apporter de nouvelles améliorations au modèle de SND utilisé. Ainsi, l'ajout de la prise en compte des effets de drainage de film, une gestion plus fine des remaillages (sans destruction, reconstruction de l'interface) et une meilleure prise en compte des effets de tension superficielle quand deux portions d'interface sont proches, pourraient permettre de renseigner plus spécifiquement les modèles de coalescence et de fragmentation. Cela nous semble d'autant plus important que ceux-ci sont à la base de la plupart des méthodes de polydispersion, que ce soit la méthode des classes ou celles des moments.

Afin de réduire davantage le coût numérique de nos simulations et d'avoir accès à un plus grand nombre de configurations, il serait intéressant d'implémenter la prise en compte de frontières périodiques pour les interfaces. De même, les recherches portant sur les méthodes de raffinement dynamique font des progrès importants [93]. Ce type d'approche est très bien adapté aux problèmes diphasiques pour lesquels les forts gradients se situent en proche interface. Comme celles-ci sont mobiles, les zones de forts gradients sont *a priori* inconnues.

Avant de s'intéresser à des modèles moyens plus complexes, il nous semble important de chercher à comprendre les raisons des différences observées entre F_l et F_g dans le cas *IIa*. De même, afin de renseigner les modèles à une pression (qui constituent la cible de ce travail), il paraît primordial de trouver la définition de la pression modifiée microscopique qui conduit à l'égalité $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_g$. Après cela, l'extension aux écoulements anisothermes et avec changement de phase

nous paraît naturelle. Il serait ainsi possible de s'intéresser à l'équation d'énergie. Pour cela, le travail de thèse de Guillaume Bois permettra une extension du modèle ISS à ces situations et devrait permettre de reproduire notre démarche dans de tels cas.

D'un point de vue général, une utilisation pertinente de notre démarche consisterait à isoler une situation simple pour laquelle les modèles moyennés sont peu efficaces, à réaliser une simulation de celle-ci et à tester *a priori* le modèle utilisé. Selon nous, l'idéal serait de coupler une approche expérimentale à un modèle moyenné et à une simulation de type SND/ISS.

Annexe

Annexe A

Modèle d'estimation d'erreur

DANS le but d'obtenir une solution de référence de type SND par un processus de convergence en maillage, il convient de quantifier la vitesse de convergence. Pour cela, nous avons utilisé aux chapitres 5 et 8 le modèle d'erreur qui est décrit dans cette annexe. Grâce à une extrapolation de Richardson [94], nous pouvons aussi accélérer la convergence de notre méthode numérique.

A.1 Estimation de l'ordre de convergence

Soit Y une quantité à prédire, $Y(\Delta_x)$ est alors l'approximation de Y sur le maillage régulier de pas d'espace Δ_x . Dans le régime de convergence asymptotique, l'erreur de troncature domine l'entière production d'erreur numérique. Aussi, pour une méthode numérique d'ordre de convergence p , on déduit que :

$$Y = Y(\Delta_x) + \beta \Delta_x^p + O(\Delta_x^{p+1}) \quad (\text{A.1})$$

À partir de trois solutions associées à trois discrétisations telles que $\Delta_{x_f} < \Delta_{x_m} < \Delta_{x_g}$, on donne trois approximations de Y :

$$Y \approx Y(\Delta_{x_g}) + \beta \Delta_{x_g}^p \quad (\text{A.2})$$

$$Y \approx Y(\Delta_{x_m}) + \beta \Delta_{x_m}^p \quad (\text{A.3})$$

$$Y \approx Y(\Delta_{x_f}) + \beta \Delta_{x_f}^p \quad (\text{A.4})$$

En cherchant à éliminer Y et β , on trouve

$$\frac{Y(\Delta_{x_m}) - Y(\Delta_{x_g})}{Y(\Delta_{x_f}) - Y(\Delta_{x_m})} = R_2^p \frac{1 - R_1^p}{1 - R_2^p} \quad (\text{A.5})$$

où $R_1 = \frac{\Delta_{x_g}}{\Delta_{x_m}}$ et $R_2 = \frac{\Delta_{x_m}}{\Delta_{x_f}}$. L'expression précédente permet de déduire p de façon non linéaire (grâce à la méthode du point fixe par exemple). Dans le cas particulier où $R_1 = R_2$, on en déduit une expression de p :

$$p = \frac{\log\left(\frac{Y(\Delta_{x_m}) - Y(\Delta_{x_g})}{Y(\Delta_{x_f}) - Y(\Delta_{x_m})}\right)}{\log(R)} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Accélération de la convergence

Nous souhaitons maintenant utiliser les résultats précédents afin de déterminer une solution de référence plus proche de Y . Ainsi, à l'équation A.1, on remarque que β est indépendant de

Δ_x . Il est donc possible d'utiliser les solutions Δ_{x_f} , Δ_{x_m} afin de l'éliminer :

$$Y = \frac{R_2^p Y(\Delta_{x_f}) - Y(\Delta_{x_m})}{R_2^p - 1} + O(\Delta_x^{p+1}) \quad (\text{A.7})$$

On obtient donc une solution avec une erreur de troncature en $O(\Delta_x^{p+1})$. Celle-ci est plus précise que $Y(\Delta_{x_f})$ dont l'erreur est en $O(\Delta_x^p)$. De cette manière, nous avons accéléré la convergence en maillage de notre méthode.

Au final, cette démarche nous permet de trouver l'ordre de convergence de notre méthode numérique et de déterminer une solution convergée à moindre coût.

Bibliographie

- [1] R. Clift, J. Grace, and M. E. Weber, *Bubbles, drops and particles*. Academic Press, 1978.
- [2] K. Lunde and R. J. Perkins, “Observations on wakes behind spheroidal bubbles and particles,” *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Vancouver, Canada*, 1997.
- [3] C. Brücker, “Structure and dynamics of the wake of bubbles and its relevance for bubble interaction,” *Physics of Fluids*, vol. 11, pp. 1781–1796, 1999.
- [4] A. W. G. de Vries, A. Biesheuvel, and L. V. Wijngaarden, “Notes on the path and wake of a gas bubble rising in a pure water,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 28, pp. 1823–1835, 2002.
- [5] K. Ellingsen and F. Risso, “On the rise of an ellipsoidal bubble in water : oscillatory paths and liquid-induced velocity,” *J. Fluid Mech.*, vol. 440, pp. 235–268, 2001.
- [6] G. Mougin and J. Magnaudet, “The generalized Kirchoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 28, pp. 1837–1851, 2002.
- [7] G. Mougin and J. Magnaudet, “Path instability of a rising bubble,” *Phys. Rev. Letter*, vol. 88, pp. 1–4, 2002.
- [8] J. S. Hadamard, “Mouvement permanent lent d’une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux,” *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences*, vol. 152, pp. 1735–1738, 1911.
- [9] W. Rybczynski, “Über die fortschreitende Bewegung einer flussigen Kugel in einem Zahenmedium,” *Bulletin of the Academic of Science, Cracovie, Series A*, vol. 1, pp. 40–46, 1911.
- [10] J. M. Delhay, *Thermohydraulique des réacteurs*. EDP Sciences, 2008.
- [11] G. F. Hewitt and D. Roberts, *Studies of two-phase flow patterns by simultaneous X-ray and flash photography*. AERE-M2159, 1969.
- [12] A. W. Bennett, G. F. Hewitt, H. A. Kearsy, R. K. F. Keeys, and P. M. C. Lacey, “Flow visualization studies of boiling at high pressure,” *Inst Mech. Eng.*, vol. 180, pp. 260–270, 1965.
- [13] Y. Taitel, D. Barnea, and A. E. Dukler, “Modeling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes,” *AIChE Journal*, vol. 26, pp. 47–55, 1980.
- [14] G. Tryggvason, J. Lu, S. Biswas, and A. Esmaeeli, “Studies of bubbly channel flows by direct numerical simulations,” *Conference on Turbulence and Interactions, Porquerolles, France*, 2006.
- [15] Q. Song, R. Luo, X. Y. Yang, and Z. Wang, “Phase distributions for upward laminar dilute bubbly flows with non-uniform bubble sizes in a vertical pipe,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 27, pp. 379–390, 2001.
- [16] J. J. Wylie and D. Kock, “Particle clustering due to hydrodynamical interactions,” *Physics of Fluids*, vol. 12, no. 5, pp. 964–970, 2000.

- [17] M. Uhlmann, “Investigating turbulent particulate channel flow with interface-resolved DNS,” *Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF’07), Leipzig, Germany*, 2007.
- [18] A. Esmarelli and G. Tryggvason, “Direct numerical simulations of bubbly flows-Part2. Moderate Reynolds number arrays,” *J. Fluid Mech.*, vol. 385, pp. 325–358, 1998.
- [19] A. Esmarelli and G. Tryggvason, “A direct numerical simulation study of the buoyant rise of bubbles at $O(100)$ Reynolds number,” *Physics of Fluids*, vol. 17, no. 9, 2005. 093303.
- [20] G. Riboux, *Hydrodynamique d’un essaim de bulles en ascension*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007.
- [21] M. Lance and J. Bataille, “Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air-water flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 222, pp. 95–118, 1991.
- [22] A. Larue de Tournemine, *Étude expérimentale de l’effet du taux de vide en écoulement diphasique à bulles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2001.
- [23] D. Jamet, *Etude des potentialités de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Paris, 1998.
- [24] D. M. Anderson, G. B. McFadden, and A. A. Wheeler, “Diffuse-interface models in fluids mechanics,” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 30, pp. 139–165, 1998.
- [25] J. Delhay, “Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 1, pp. 395–409, 1974.
- [26] I. Kataoka, “Local instant formulation of two-phase flow,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 12, no. 5, pp. 745–758, 1986.
- [27] M. Ishii, *Thermo-fluid Dynamics Theory of Two-phase Flow*. Eyrolles, 1975.
- [28] J. Magnaudet, “Simulation d’écoulements en présence d’interfaces,” in *Lecture Notes, École de Printemps de Mécanique des Fluides Numérique*, 1997.
- [29] C. Duquenois, *Développement d’une approche de simulation numérique directe de l’ébullition en paroi*. Thèse de Doctorat, INP Toulouse, 2000.
- [30] D. Legendre and J. Magnaudet, “The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 368, pp. 81–126, 1998.
- [31] D. Legendre, J. Magnaudet, and G. Mougin, “Hydrodynamic interactions between two spherical bubble rising side by side in a viscous liquid,” *J. Fluid Mech.*, vol. 497, pp. 133–166, 1998.
- [32] Benkenida, *Développement et validation d’une méthode de simulation d’écoulement diphasique sans reconstruction d’interfaces*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1999.
- [33] T. Bonometti, *Développement d’une méthode de simulation d’écoulements à bulles et à gouttes*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [34] J. Li, “Calcul d’Interface Affine par Morceaux,” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, vol. 320, pp. 391–396, 1995.
- [35] J. Sethian, *Level Set Methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [36] D. Lakehal, M. Meier, and M. Fulgosi, “Interface tracking towards the direct simulation of heat and mass transfer in multiphase flows,” *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, vol. 23, pp. 242–257, 2002.
- [37] S. O. Unverdi and G. Tryggvason, “A front-tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows,” *J. Comput. Phys.*, vol. 100, pp. 25–37, 1992.

-
- [38] “Trio_U code.” <http://www-trio-u.cea.fr>.
- [39] B. Mathieu, *Etude physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques*. Thèse de Doctorat, Université de Provence, 2003.
- [40] B. Mathieu, “Demonstration of a 3d parallel implementation of the Front-tracking method : Simulation of fluid mixing with a moving boundary and a free surface,” in *Proceedings of Advances in the Modeling Methodologies of Two-Phase Flows Meeting*, (Lyon, France), 24-26 november 2004.
- [41] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Springer, 1979.
- [42] U. Brackbill, D. Kothe, and C. Zemach, “A continuum method for modelling surface tension,” *J. Comput. Phys.*, vol. 100, pp. 335–354, 1992.
- [43] J. Bardina, *Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows*. Thèse de doctorat, Stanford University, 1983.
- [44] P. Sagaut, *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer Verlag, 2003.
- [45] M. Germano, “Differential filters of elliptic type,” *Physics of Fluids*, vol. 29, no. 6, pp. 1757–1758, 1986.
- [46] J. Smagorinsky, “General circulation experiments with the primitive equations, i. the basic experiment,” *Monthly Weather Review*, vol. 91, pp. 99–164, 1963.
- [47] A. Leonard, “Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows,” *Adv. in Geophys. A*, vol. 18, pp. 237–248, 1974.
- [48] S. Liu, C. Meneveau, and J. Katz, “On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet,” *J. Fluid Mech.*, vol. 275, pp. 83–119, 1994.
- [49] C. D. Pruett, J. S. Sochaki, and N. A. Adams, “On Taylor-series expansions of residual stresses,” *Physics of Fluids*, vol. 13, no. 9, pp. 2578–2589, 2001.
- [50] K. Horiuti, “The role of the Bardina model in large eddy simulation of turbulent channel flow,” *Physics of Fluids*, vol. 1, no. 2, pp. 426–428, 1989.
- [51] J. P. Boris, F. F. Grinstein, E. S. Oran, and R. L. Kolbe, “New insights into large-eddy simulation,” *Fluid Dyn. Res.*, vol. 10, pp. 199–228, 1992.
- [52] C. Fureby and F. Grinstein, “Monotonically integrated Large-Eddy Simulation of free shear flows,” in *AIAA Journal* 37, vol. 5, 1999.
- [53] F. Grinstein and C. Fureby, “Recent progress on MILES for high Reynolds-number flows,” in *AIAA Paper 2002-0134*, 2002.
- [54] J. K. Eaton and J. R. Fessler, “Preferential concentration of particles by turbulence,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 16, no. 1, pp. 169–209, 1994.
- [55] K. Squires and J. K. Eaton, “Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence,” *Physics of Fluids*, vol. 2, no. 7, pp. 1191–1203, 1990.
- [56] O. Vermorel, B. Bedat, O. Simonin, and T. Poinsot, “Numerical study and modelling of turbulence modulation in a particle laden slab flow,” *J. Turb.*, vol. 4, 2003.
- [57] D. Lohse, S. Luther, J. Rensen, T. van den Berg, I. Mazzitelli, and F. Toschi, “Turbulent bubbly flow,” *Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF’04)*, Yokohama, Japan, 2004.
- [58] S. Lain, D. Brüder, M. Sommerfeld, and M. F. Göz, “Modelling hydrodynamics and turbulence in a bubble column using the Euler-Lagrange procedure,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 28, no. 8, pp. 1381–1407, 2002.
- [59] D. Lakehal, B. L. Smith, and M. Milelli, “Large-eddy simulation of bubbly turbulent shear flows,” *Journal of Turbulence*, vol. 3, p. 025, 2002.

- [60] L. Shen and D. K. P. Yue, "Large-eddy simulation of free surface turbulence," *J. Fluid Mech.*, vol. 440, pp. 75–116, 2001.
- [61] P. Liovic and D. Lakehal, "Multi-physics treatment in the vicinity of arbitrarily deformable gas-liquid interfaces," *J. Comput. Phys.*, vol. 222, pp. 504–535, 2007.
- [62] P. Lubin, S. Vincent, S. Abadie, and J. P. Caltagirone, "Three-dimensional Large Eddy Simulation of air entrainment under plunging breaking waves," *Coastal Engineering*, vol. 53, pp. 631–655, 2006.
- [63] A. Toutant, *Modélisation physique des interactions entre interfaces et turbulence*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006. <http://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00000503>.
- [64] A. Toutant, M. Chandesris, D. Jamet, and O. Lebaigue, "Jump conditions for filtered quantities at an under-resolved discontinuous interface : Part I and part II," *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 35, no. 12, December 2009.
- [65] E. Labourasse, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, S. Vincent, O. Lebaigue, J. Caltagirone, and P. Sagaut, "Towards Large Eddy Simulation of isothermal two-phase flows: governing equations and *a priori* tests," *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 33, no. 1, pp. 1–39, 2007.
- [66] S. Vincent, J. Larocque, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, and P. Sagaut, "Direct Numerical Simulation of phase separation and *a priori* two-phase LES filtering," *Computers and Fluids*, vol. 37, no. 7, pp. 898–906, 2008.
- [67] A. Toutant, E. Labourasse, O. Lebaigue, and O. Simonin, "DNS of the interaction between a deformable buoyant bubble and a spatially decaying turbulence: *a priori* tests for LES two-phase flow modelling," *Computers and Fluids*, vol. 37, no. 7, pp. 877–886, 2008.
- [68] C. Fouillet, *Généralisation à des mélanges binaires de la méthode du second gradient et application à la simulation numérique directe de l'ébullition nucléée*. Thèse de Doctorat, Univ. Paris 6, 2003.
- [69] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, Boston, 1989.
- [70] Y. Zang, R. Street, and J. Koseff, "A dynamic mixed subgrid-scale model and its applications to turbulent recirculating flows," *Physics of Fluids*, vol. 5, no. 12, pp. 3186–3196, 1993.
- [71] M. Terracol, *Méthodes multiniveau pour la simulation des grandes échelles des écoulements turbulents compressibles*. Thèse de doctorat, Université de Paris nord, 2001.
- [72] M. Germano, "A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier-Stokes equations," *Physics of Fluids*, vol. 29, no. 7, pp. 2323–2324, 1986.
- [73] F. Nicoud and F. Ducros, "Subgrid-scale stress modelling based on the square of velocity gradient tensor," *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 62, pp. 183–200, 2001.
- [74] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*. Kluwer, 1990.
- [75] G. Taylor, "Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube," *J. Fluid Mech.*, vol. 10, pp. 161–165, 1961.
- [76] F. P. Bretherton, "The motion of long bubbles in tubes," *J. Fluid Mech.*, vol. 10, pp. 166–188, 1961.
- [77] P. Aussillous and D. Quéré, "Quick deposition of a fluid on the wall of a tube," *Physics of Fluids*, vol. 12, pp. 2367–2371, 2000.
- [78] T. Lundgren, "Linearly forced isotropic turbulence," *Annual Research Briefs*, vol. 59, pp. 461–473, 2003.
- [79] C. Rosales and C. Meneveau, "Linearly forcing in numerical simulations of isotropic turbulence : Physical space implementations and convergence properties," *Phys. Fluids*, vol. 17 (095106), pp. 509–529, 2005.

- [80] P. Chassaing, *Turbulence en mécanique des fluides*. Cepadues-Editions, 2000.
- [81] M. Ishii and T. Hibiki, *Thermo-fluid Dynamics Theory of Two-phase Flow*. Springer, 2006.
- [82] C. Morel, *Modélisation multidimensionnelle des écoulements diphasiques gaz-liquide. Application à la simulation des écoulements à bulles ascendants en conduite verticale*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Paris, 1997.
- [83] M. Ishii, “Two-fluid model for two-phase flow,” *Multiphase Science and Technology*, vol. 5, pp. 1–58, 1990.
- [84] C. Morel, “On the surface equations in two-phase flows and reacting single-phase flows,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 33, no. 10, pp. 1045–1073, 2007.
- [85] S. Lo, “Application of the musig model to bubbly flows,” *AEAT-1096, AEA Technology*, 1996.
- [86] T. Frank, “Adances in computational fluid dynamics (CFD) of 3-dimensional gas liquid multiphase flows,” *NAFEMS Seminar : Simulation of complex flows (CFD), Niedernhausen/Wiesbaden*, 25-26 April 2005.
- [87] A. Kamp, A. Chester, C. Colin, and J. Fabre, “Bubble coalescence in turbulent flows : A mechanistic model for turbulence-induced coalescence applied to microgravity bubbly pipe flow,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 27, pp. 1363–1396, 2001.
- [88] O. Desjardins, R. Fox, and P. Villedieu, “A quadrature-based moment method for dilute gas-particule flows,” *Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF’07), Leipzig, Germany*, 2007.
- [89] C. Truesdell and R. Toupin, *The classical field theories. Handbuch der Physik, III/3*. Springer, 1960.
- [90] R. Mei, J. Klausner, and C. Lawrence, “A note on the history force on a spherical bubble at finite Reynolds number,” *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 1, pp. 418–120, 1994.
- [91] J. A. Nelder and R. Mead, “A simplex for function minimization,” *Computer J.*, vol. 7, pp. 308–313, 1965.
- [92] W. Yao and C. Morel, “Volumetric interfacial area prediction in upward bubbly two-phase flow,” *Int. J. of Heat and Mass Transfert*, vol. 47, pp. 307–328, 2004.
- [93] S. Veys, *Extension dans Trio_U de la méthode des éléments joints aux problèmes thermo-hydrauliques et à différentes discrétisations*. Diplôme de recherche technologique, Université Joseph Fourier, 2009.
- [94] L. F. Richardson, “The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 210, pp. 307–357, 1911.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans un projet à long terme qui vise à renseigner les modèles moyennés diphasique grâce à la simulation numérique directe (SND) et se décompose en deux étapes. La première consiste à construire un équivalent de la simulation aux grandes échelles (SGE) pour les écoulements diphasiques (appelé modèle ISS). Après avoir présenté les développements théoriques qui mis en œuvre, un ensemble de tests de validation est utilisé afin de caractériser le modèle et de déterminer son potentiel à fournir une solution pertinente à faible coût. La seconde étape se rapporte à l'utilisation de ce modèle afin de réaliser des simulations d'écoulements dispersés à bulles contenant plusieurs centaines d'inclusions. Nous nous sommes intéressés à différents cas se rapportant à des essaims monodisperses et bidisperses. Les résultats de ces simulations permettent de calculer les grandeurs moyennes relatives aux bilans de masse, de quantité de mouvement et d'aire interfaciale volumique (AIV). Celles-ci constituent le système d'équations qui régit l'écoulement moyen monodimensionnel, nous procédons ainsi à un test *a priori* du modèle complet. Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à démontrer la fiabilité de nos mesures en vérifiant les bilans de masse et d'AIV. Ensuite, nous avons montré que l'une des difficultés de ce travail réside dans la définition des grandeurs moyennes à partir des grandeurs locales. Puis, nous avons montré que les hypothèses classiquement introduites sont valides pour des écoulements simples mais ne sont plus justifiées dans les cas plus complexes pour lesquels il est nécessaire d'ajouter des modèles supplémentaires. Enfin, nous avons confronté une corrélation usuelle de coefficient de traînée à nos mesures. Nous avons ainsi montré que cette corrélation donne de bons résultats dans les configurations monodisperses. À l'inverse, son utilisation dans les configurations bidisperses conduit à une surestimation des forces de traînée par le modèle moyenné testé.

Abstract

This work is a part of a long term project that aims at using two-phase Direct Numerical Simulation (DNS) in order to give information to averaged models. For now, it is limited to isothermal bubbly flows with no phase change. It could be subdivided in two parts :

Firstly, theoretical developments are made in order to build an equivalent of Large Eddy Simulation (LES) for two-phase flows called Interfaces and Sub-grid Scales (ISS). After the implementation of the ISS model in our code called Trio_U, a set of various cases is used to validate this model. Then, special tests are made in order to optimize the model for our particular bubbly flows. Thus we showed the capacity of the ISS model to produce a cheap pertinent solution.

Secondly, we use the ISS model to perform simulations of bubbly flows in column. Results of these simulations are averaged to obtain quantities that appear in mass, momentum and interfacial area density balances. Thus, we proceeded to an *a priori* test of a complete one-dimensional averaged model. We showed that this model predicts well the simplest flows (laminar and monodisperse). Moreover, the hypothesis of one pressure, which is often made in averaged model like CATHARE, NEPTUNE and RELAP5, is satisfied in such flows. At the opposite, without a polydisperse model, the drag is over-predicted and the uncorrelated A_i flux needs a closure law. Finally, we showed that in turbulent flows, fluctuations of velocity and pressure in the liquid phase are not represented by the tested averaged model.

Mots clés : ISS, diphasique, dispersés, SND, SGE, moyenné, Front-Tracking, thermohydraulique.

Keywords : ISS, two-phase flow, bubbly, DNS, LES, RANS, up-scaling, Front-Tracking, thermal-hydraulics.