

Thèse

Simulations des grandes échelles pour les écoulements turbulents anisothermes

présentée devant
l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Ecole doctorale : MEGA (Mécanique, Energétique, Génie civil et Acoustique)
Spécialité : Energétique et Thermique

par

Sabine HUSSON

Soutenance prévue le 11 juillet 2007 devant la commission d'examen :

BRILLANT Guillaume
CHASSAING Patrick

Ingénieur Chercheur - IRSN, Cadarache
Professeur INPT-ENSEEIH, Toulouse
Chef du Département Mécanique des Fluides - ENSICA
Maître de conférences (HDR) - ELIAUS, Perpignan
Professeur - PROMES, Perpignan
Professeur - CETHIL, Lyon

Rapporteur
Rapporteur
Directeur de Thèse

CLAUDET Bernard
DAUMAS-BATAILLE Françoise
XIN Shihe

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales 2007

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE,</u> <u>ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 72 18 33 83 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME,</u> <u>MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : S. GRENIER	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION</u> <u>POUR LA SOCIETE</u> http://ediis.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.42 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53 ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-</u> <u>SANTE</u> M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.35 72 32 Fax : Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Math IF	<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE</u> <u>FONDAMENTALE</u> M. Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M. Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69 Pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE</u> <u>CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.80 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.62.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
SSED	<u>SCIENCES DES SOCIETES, DE</u> <u>L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT</u> Mme Claude-Isabelle BRELOT Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Claude-Isabelle BRELOT Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr

Remerciements

Ce travail n'aurait jamais été possible sans l'accompagnement et le soutien de ma directrice de thèse, Madame Françoise Daumas-Bataille, Professeur à l'Université de Perpignan. Je la remercie très sincèrement de m'avoir fait bénéficier de ses compétences, de m'avoir conseillée, de m'avoir fait confiance, d'avoir été à l'écoute de mes questions et de mes difficultés et de m'avoir constamment encouragée.

Cette thèse a été réalisée au Centre Thermique de Lyon (CETHIL-UMR5008). J'exprime toute ma gratitude à Madame Dany Escudié, directrice du CETHIL, pour son accueil au sein de ce laboratoire et pour le soutien qu'elle m'a apporté.

Je suis très reconnaissante à Monsieur Patrick Chassaing, Professeur INPT-ENSEEIH et Chef du Département Mécanique des Fluides de l'ENSICA de Toulouse, ainsi qu'à Monsieur Bernard Claudet, Maître de Conférences HDR à l'Université de Perpignan, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit. Je les remercie d'avoir examiné ma thèse avec attention et d'avoir participé par leurs intéressantes remarques à étendre la réflexion autour de la problématique étudiée.

Mes remerciements vont également à Monsieur Shihe Xin, Professeur à l'INSA de Lyon, et à Monsieur Guillaume Brillant, Ingénieur et Chercheur à l'IRSN de Cadarache pour avoir accepté de participer à mon jury.

J'adresse un grand merci aux personnes du CETHIL qui m'ont apporté leur aide et leur soutien durant ces trois années, en particulier à Florence, Agnès et Habiba pour leur efficacité et leur gentillesse, aux informaticiens pour les soins apportés à mon ordinateur, à Cédric pour son humour et à Mathilde pour son soutien, ses conseils et sa bonne humeur. Je remercie également Clarisse et Guillaume qui, même après leur départ du CETHIL, m'ont apporté une aide précieuse.

Cette thèse a été réalisée avec le code Trio_U du CEA de Grenoble. Je tiens à remercier les membres de l'équipe Trio_U, et en particulier Pierre Ledac et Marc Elmo pour leur aide et leur efficacité.

Je remercie aussi les personnes du laboratoire PROMES pour leur accueil et leur aide, surtout Sylvain pour ses relectures attentives.

Enfin, sur un plan plus personnel, je remercie Laurent, ma famille et mes amis pour leur soutien, ainsi que Françoise, Marc, Thalie et Hadrien pour leur chaleureux accueil lors de mes séjours à Perpignan.

Table des matières

Nomenclature	11
Introduction générale	15
1 Les différents types d'écoulements et les équations associées	17
1.1 Introduction	17
1.2 Écoulements compressibles	18
1.2.1 Conservation de la masse	18
1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement	18
1.2.3 Conservation de l'énergie	20
1.2.4 Résumé	21
1.2.5 Adimensionnement	22
1.3 Écoulements à faibles nombres de Mach	23
1.3.1 Conservation de la masse	24
1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement	25
1.3.3 Conservation de l'énergie	25
1.3.4 Re-dimensionnement	25
1.3.5 Résumé	26
1.4 Écoulements dilatables (Boussinesq)	27
1.4.1 Conservation de la masse	28
1.4.2 Conservation de la quantité de mouvement	28
1.4.3 Conservation de l'énergie	29
1.4.4 Résumé	29
1.5 Écoulements incompressibles	30
1.6 Écoulements considérés dans la présente étude et équations associées	30
1.6.1 Pour les faibles écarts de température	31
1.6.2 Pour les forts écarts de température	31

2	Contexte scientifique : la Simulation des Grandes Échelles et les écoulements anisothermes	33
2.1	La Simulation des Grandes Echelles	33
2.1.1	Principe	33
2.1.2	Filtrage passe-bande	36
2.1.3	Décomposition du terme non linéaire dans l'équation de quantité de mouvement	39
2.1.4	Invariance galiléenne par translation	41
2.1.5	Réalisabilité	42
2.1.6	Décomposition du terme non linéaire dans l'équation de l'énergie filtrée	42
2.1.7	Remarque sur la modélisation sous-maille	43
2.1.8	Modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij}	43
2.1.9	Modèles sous-maille pour le flux \mathfrak{S}_j	52
2.1.10	Utilisation des modèles sous-maille en SGE thermique	64
2.1.11	Conclusions sur la modélisation sous-maille	68
2.2	Trio_U, un code de SGE	69
2.3	Travaux les plus proches de notre étude	72
2.3.1	Écoulements ascensionnels anisothermes : couplage avec les effets de la gravité	72
2.3.2	Écoulements supersoniques : couplage avec les effets de compressibilité	73
2.3.3	Des travaux centrés sur les effets des variations des propriétés avec la température	75
2.3.4	Remarques	78
3	Contexte de l'étude : présentation des simulations numériques	81
3.1	Introduction	81
3.2	Présentation des simulations numériques	81
3.2.1	La configuration du canal plan	81
3.2.2	Les simulations des grandes échelles réalisées	82
3.2.3	Dimensions et maillages	89
3.2.4	Conditions aux limites	90
3.2.5	Schémas et modèles	91
3.2.6	Conditions initiales	92
3.3	Étude préliminaire	93
3.3.1	Cas isotherme	94
3.3.2	Cas faiblement anisotherme	96

3.3.3	Cas fortement anisotherme	98
3.3.4	Conclusions	100
4	Étude des paramètres, de la modélisation et de l'adimensionnement	101
4.1	Introduction	101
4.2	Effet des variations de λ et μ	101
4.2.1	Cas faiblement anisotherme	102
4.2.2	Cas fortement anisotherme	104
4.3	Étude de la modélisation sous-maille thermique	107
4.3.1	Cas faiblement anisotherme	108
4.3.2	Cas fortement anisotherme	110
4.4	Remarques sur l'adimensionnement	113
4.5	Conclusions	115
5	Analyse physique de la modification d'un écoulement anisotherme en canal plan turbulent sous l'effet de l'augmentation du rapport de températures	117
5.1	Introduction	117
5.2	Influence de T_2/T_1 sur les profils moyens	118
5.2.1	Pour $Re_\tau \approx 180$	118
5.2.2	Pour $Re_\tau \approx 395$	119
5.2.3	Comparaison avec les résultats d'études similaires	121
5.3	Influence de T_2/T_1 sur les fluctuations de vitesse et de température	121
5.3.1	Pour $Re_\tau \approx 180$	121
5.3.2	Pour $Re_\tau \approx 395$	122
5.3.3	Comparaison avec les résultats d'études similaires	123
5.4	Influence de T_2/T_1 sur les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température	124
5.4.1	Pour $Re_\tau \approx 180$	124
5.4.2	Pour $Re_\tau \approx 395$	125
5.4.3	Comparaison avec les résultats d'études similaires	126
5.5	Mécanisme physique	126
5.6	Effet de l'adimensionnement semi-local	129
5.6.1	Pour $Re_\tau \approx 180$	129
5.6.2	Pour $Re_\tau \approx 395$	131
5.6.3	Conclusion	134
5.7	Impact de la transformation de Van Driest sur les profils de vitesse moyenne	134
5.8	Conclusion	135

Conclusion générale et perspectives	137
Bibliographie	139
Annexes :	149
A Effet des variations de λ et μ : autres adimensionnements	151
A.1 Cas faiblement anisotherme	152
A.1.1 Adimensionnement basé sur $U_{max}, T_2 - T_1$ et y/h	152
A.1.2 Adimensionnement basé sur U_τ^*, T_τ^* et y^*	154
A.2 Cas fortement anisotherme	156
A.2.1 Adimensionnement basé sur $U_{max}, T_2 - T_1$ et y/h	156
A.2.2 Adimensionnement basé sur U_τ^*, T_τ^* et y^*	158
B Étude de la modélisation sous-maille thermique : autres adimensionnements	161
B.1 Cas faiblement anisotherme	162
B.1.1 Adimensionnement basé sur $U_{max}, T_2 - T_1$ et y/h	162
B.1.2 Adimensionnement basé sur U_τ^*, T_τ^* et y^*	164
B.2 Cas fortement anisotherme	166
B.2.1 Adimensionnement basé sur $U_{max}, T_2 - T_1$ et y/h	166
B.2.2 Adimensionnement basé sur U_τ^*, T_τ^* et y^*	168

Nomenclature

Lettres latines

c	Vitesse du son	m.s^{-1}
C_p	Capacité thermique massique à pression constante	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
C_v	Capacité thermique massique à volume constant	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
D_m	Débit massique	kg.s^{-1}
e	Énergie interne massique	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$
g	Accélération de pesanteur	m.s^{-2}
h	Demi-hauteur du canal	m
H	Enthalpie massique	J.kg^{-1}
k	Énergie cinétique massique	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$
P	Pression	Pa
P_{dyn}	Pression dynamique	Pa
P_{thermo}	Pression thermodynamique	Pa
Q_w	Flux de chaleur à la paroi $\left(Q_w = \lambda_w \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \Big _w\right)$	W.m^{-2}
R	Constante spécifique des gaz parfaits	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
S_{ij}	Tenseur des déformations $\left(S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)\right)$	s^{-1}
T	Température	K
T_{ref}	Température de référence	K
T_τ	Température de frottement $\left(T_\tau = \frac{Q_w}{\rho_w C_p U_\tau}\right)$	K
T_τ^*	Température de frottement semi-locale $\left(T_\tau^* = \frac{Q_w}{\langle \rho \rangle (y) C_p U_\tau^*}\right)$	K
t	Temps	s
U_τ	Vitesse de frottement $\left(U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}\right)$	m.s^{-1}
U_τ^*	Vitesse de frottement semi-locale $\left(U_\tau^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}\right)$	m.s^{-1}
U	Composante longitudinale de la vitesse	m.s^{-1}
V	Composante verticale de la vitesse	m.s^{-1}
W	Composante transverse de la vitesse	m.s^{-1}

x	Coordonnée longitudinale	m
y	Coordonnée verticale	m
y^+	Coordonnée adimensionnelle $\left(y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu_w}\right)$	
y^*	Coordonnée adimensionnelle semi-locale $\left(y^* = \frac{yU_\tau^*}{\langle \nu \rangle(y)}\right)$	
z	Coordonnée transverse	m

Lettres grecques

β	Coefficient de compressibilité	K^{-1}
Δ	Longueur de coupure associée au filtre	m
\mathfrak{S}_j	Flux de chaleur sous-maille	$K.m.s^{-1}$
κ	Diffusivité moléculaire $\left(\kappa = \frac{\lambda}{\rho C_p}\right)$	$m^2.s^{-1}$
κ_{sm}	Diffusivité sous-maille	$m^2.s^{-1}$
λ	Conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho}\right)$	$m^2.s^{-1}$
ν_{sm}	Viscosité sous-maille	$m^2.s^{-1}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
τ_w	Contrainte de cisaillement à la paroi $\left(\tau_w = \mu_w \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \Big _w\right)$	Pa
τ_{ij}	Tenseur sous-maille	$m^2.s^{-2}$
Ω_{ij}	Tenseur de rotation $\left(\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)\right)$	s^{-1}

Nombres sans dimension

Fr	Nombre de Froude $\left(Fr = \frac{U^2}{hg}\right)$
Ma	Nombre de Mach $\left(Ma = \frac{U}{c}\right)$
Pe	Nombre de Péclet $\left(Pe = RePr = \frac{\rho C_p U h}{\lambda}\right)$
Pr	Nombre de Prandtl $\left(Pr = \frac{\nu}{\kappa}\right)$
Pr_{sm}	Nombre de Prandtl sous-maille $\left(Pr_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{\kappa_{sm}}\right)$
Re	Nombre de Reynolds $\left(Re = \frac{U h}{\nu}\right)$
Re_τ	Nombre de Reynolds $\left(Re_\tau = \frac{U_\tau h}{\nu_w}\right)$
Ri	Nombre de Richardson $\left(Ri = \frac{g \beta h \Delta}{U^2}\right)$

Indices

1	Relatif à la paroi basse du canal
2	Relatif à la paroi haute du canal
b	Grandeur <i>bulk</i>
c	Valeur au centre du canal
i, j, k	Grandeur projetée selon x ($i = 1$), y ($i = 2$) ou z ($i = 3$)
m	Grandeur moyenne
max	Valeur maximale
ref	Valeur à la température de référence T_{ref}
rms	Grandeur fluctuante
sm	Grandeur sous-maille
w	Grandeur pariétale

Exposants

–	Grandeur filtrée (au sens de Reynolds)
\sim	Grandeur filtrée (au sens de Favre)
'	Grandeur non résolue (au sens de Reynolds)
"	Grandeur non résolue (au sens de Favre)
+	Grandeur adimensionnée

Opérateurs mathématiques

D	Dalembertien
δ	Dirac
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
Δ	Différence
∇	Gradient
∂	Dérivée partielle
*	Convolution
$\langle \rangle$	Moyenne de Reynolds

Sigles et acronymes

DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>
SGE	Simulation des Grandes Échelles
SND	Simulation Numérique Directe

Introduction générale

Les écoulements turbulents soumis à de forts gradients de température se rencontrent dans bon nombre de situations pratiques (réacteurs nucléaires, aéronautique, systèmes solaires,...). Dans le domaine de l'énergie solaire en particulier, des recherches sont en cours concernant le développement de récepteurs solaires à gaz à haute température. De tels récepteurs doivent pouvoir supporter des densités de flux radiatif non uniformes variant parfois brutalement et pouvant être très élevées (atteignant jusqu'à 700 W.m^{-2}). Leur développement nécessite à la fois un travail assez appliqué et une recherche plus fondamentale concernant l'étude de l'influence de forts gradients thermiques sur la turbulence.

Les recherches sur les écoulements turbulents, plus ou moins fortement anisothermes et à faibles nombres de Mach, sont ainsi très importantes. Ces écoulements sont caractérisés par des variations significatives des propriétés du fluide (masse volumique, conductivité, viscosité) qui peuvent avoir une influence non négligeable, notamment lorsque l'écart de températures considéré est important (Chassaing *et al.* (2002, 380 p)). Se pose alors la question de l'effet qualitatif et quantitatif de ces variations sur l'écoulement.

Dans ce domaine, les simulations numériques sont un complément essentiel aux études expérimentales car elles permettent d'accéder à d'autres types d'informations. La Simulation des Grandes Échelles (SGE) est une méthode de simulation numérique intéressante pour l'étude des écoulements turbulents car elle permet d'accéder avec précision aux grandeurs turbulentes pour des temps de calculs relativement modérés. Il y a donc un gros potentiel à exploiter en ce qui concerne l'étude des écoulements turbulents fortement anisothermes avec la SGE. Or les travaux prenant en compte la thermique sont à l'heure actuelle encore peu nombreux en SGE, particulièrement dans le domaine des forts gradients thermiques.

L'objectif de notre étude est d'effectuer un travail avec la SGE sur les écoulements turbulents fortement anisothermes en déterminant, pour un cas académique, l'effet d'une augmentation du gradient thermique sur l'écoulement. Nous considérons plus précisément un écoulement subsonique d'air dans un canal plan horizontal bi-périodique dont les températures pariétales sont imposées. Pour deux nombres de Reynolds de frottement différents (180 et 395), nous étudions alors l'effet d'une augmentation importante de l'écart de températures imposé entre les deux parois (la paroi basse étant toujours maintenue à température ambiante). Pour cela, nous utilisons le code de calcul Trio_U, développé au CEA de Grenoble.

Cette étude nécessite au préalable de s'interroger sur la méthode la mieux adaptée aux écoulements anisothermes à faible nombre de Mach et de faire certains choix relatifs aux maillages, aux schémas, aux modèles et aux variations des propriétés. Nous avons notamment choisi d'utiliser un algorithme de résolution basé sur les équations dites bas Mach qui sont exposées dans

le chapitre 1, ainsi que les autres systèmes d'équations existants. Les hypothèses relatives à chaque système d'équations sont soulignées afin de montrer l'intérêt et le champ d'application de chacun. Nous présentons ensuite dans le chapitre 2 le principe de la Simulation des Grandes Échelles, ainsi qu'une étude bibliographique sur les modèles sous-maille dynamiques et thermiques et sur quelques travaux portant sur les écoulements turbulents perturbés par des variations significatives des propriétés du fluide. La description de notre étude et des différents paramètres importants fait l'objet du chapitre 3. Dans ce chapitre, nous effectuons également des comparaisons de certains de nos résultats avec ceux de Simulations Numériques Directes afin de valider les choix que nous avons effectués. Une deuxième partie de nos résultats est présentée dans le chapitre 4. Il s'agit alors de déterminer l'influence des variations de la conductivité et de la viscosité pour deux jeux de conditions aux limites thermiques correspondant à un cas faiblement anisotherme et un cas fortement anisotherme (rapports de températures entre les parois haute et basse de 1.07 et 2.00) et de comparer deux modèles sous-maille thermiques (nombre de Prandtl sous-maille constant ou calculé dynamiquement). Enfin, dans le chapitre 5, nous analysons nos résultats relatifs à l'impact de l'augmentation du rapport de températures sur les profils moyens, les fluctuations et les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température. Nous expliquons alors le mécanisme physique à l'origine des modifications observées. Nous nous intéressons pour finir aux effets de l'adimensionnement semi-local et de la transformation de Van Driest sur ces profils.

Chapitre 1

Les différents types d'écoulements et les équations associées

1.1 Introduction

Les équations régissant l'écoulement des fluides sont établies, moyennant un certain nombre d'hypothèses, à partir de considérations physiques de base (Chassaing (2001, 450 p); Kaviany (2001, 707 p)) :

- principe de conservation de la masse
- relation fondamentale de la dynamique
- premier principe de la thermodynamique

On peut trouver ces équations sous différentes formes dans la littérature. Nous rappelons ici comment elles sont obtenues, d'abord d'un point de vue très général puis après différents degrés de simplification successifs, afin de bien faire apparaître les hypothèses qui sont faites à chaque fois et de souligner ainsi les limites d'application relatives à chaque système d'équations. Nous dérivons dans un premier temps les équations les plus générales qui sont relatives aux écoulements compressibles. Ensuite, un premier niveau de simplification est appliqué pour obtenir les équations régissant les écoulements à faibles nombres de Mach. Dans une troisième partie, les équations relatives aux écoulements dilatables, appelées communément équations de Bousinesq, sont présentées. Enfin, nous rappelons les expressions des équations incompressibles. À chaque fois, nous introduisons, dans l'ordre, l'équation de continuité, l'équation de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie. Dans une dernière partie, nous précisons quelles équations sont employées dans la présente étude.

On considère pour commencer que le milieu est continu et que l'échelle caractéristique de l'écoulement est grande devant le libre parcours moyen des molécules. Ainsi, les équations sont dérivées à partir d'un volume de fluide élémentaire dV , dont la dimension est très petite devant l'échelle caractéristique de l'écoulement et grande devant le libre parcours moyen des molécules, en utilisant une approche Lagrangienne (Guyon et Hulin (2001, 640 p)). Par la suite, on utilise implicitement la convention d'Einstein de sommation des indices répétés.

1.2 Écoulements compressibles

1.2.1 Conservation de la masse

Cette équation traduit le fait que la matière ne peut être ni créée ni détruite, comme Antoine Laurent de Lavoisier le constata dans son *Traité élémentaire de chimie*, publié en 1789 : "rien ne se crée, rien ne se perd, tout se transforme"¹. Ainsi, en l'absence de source de matière dans le système, on doit avoir :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \Leftrightarrow \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \right) dV = 0 \quad (1.1)$$

En faisant tendre le volume de contrôle vers zéro, on obtient la forme différentielle de l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1.2)$$

En notation indicielle (avec sommation sur l'indice j), elle devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.3)$$

1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

D'après la relation fondamentale de la dynamique, la variation totale de quantité de mouvement dans le volume de contrôle V est égale à la somme des forces volumiques agissant dans V et des forces surfaciques agissant sur la surface A de V . On considère un fluide visqueux et continu soumis à la gravité comme unique force volumique. Les forces surfaciques qui s'exercent sur A sont supposées être dues uniquement à la pression et à la viscosité du fluide et sont exprimées par le tenseur des contraintes σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (1.4)$$

où P est la pression, σ'_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors² :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \vec{U} dV = \int_{A(t)} (-P[I] + [\sigma']) \cdot \vec{n} dA + \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV \quad (1.5)$$

¹Il ne fut toutefois pas le créateur de ce concept, c'est Anaxagore de Clazomènes, philosophe grec de l'Antiquité qui fut le premier à énoncer un tel principe.

²Dans le cas général où s'exercent d'autres forces que la pression, la viscosité et le poids, un terme supplémentaire doit être ajouté au membre de droite.

$$\Leftrightarrow \int_{V(t)} \left(\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\vec{U}\vec{U})}{\partial x_j} \right) dV = \int_{A(t)} (-P[I] + [\sigma']) \cdot \vec{n} dA + \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV \quad (1.6)$$

où $[I]$ est la matrice identité.

Après application du théorème de Gauss-Ostrogradsky au premier terme du membre de droite et en faisant tendre le volume de contrôle vers zéro on obtient :

$$\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{U}\vec{U}) = \nabla \cdot (-P[I] + [\sigma']) + \rho \vec{g} \quad (1.7)$$

Soit, en notation indicielle, pour chaque composante i du vecteur \vec{U} :

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(P\delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (1.8)$$

où j est l'indice de sommation et $\frac{\partial(P\delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_i}$.

On peut développer le membre de gauche et le simplifier comme suit à l'aide de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_i \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} \quad (1.9)$$

$$= \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + U_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} \right) \quad (1.10)$$

$$= \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + 0 \quad (1.11)$$

L'équation (1.8) se simplifie donc en :

$$\rho \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (1.12)$$

On considère un fluide Newtonien (par exemple de l'air). Pour ce type de fluide, le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel au tenseur des déformations S_{ij} :

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(2S_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}S_{kk} \right) + \xi\delta_{ij}S_{kk} \quad (1.13)$$

avec :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.14)$$

μ est la viscosité cinématique du fluide et ξ est le second coefficient de viscosité. Dans le cadre de cette étude, on considère l'hypothèse de Stokes qui est généralement utilisée lorsque le fluide est de l'air. Elle stipule que $\xi \approx 0$ ³.

³En toute rigueur ceci n'est exact que pour les gaz monoatomiques.

Développons le second terme du membre de droite de l'équation (1.12) (j et k étant des indices de sommation) :

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{kk} \right) \right] \quad (1.15)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \quad (1.16)$$

Dans le cas général d'un écoulement anisotherme et pouvant atteindre des vitesses supersoniques, μ n'est pas une constante et ne peut donc pas être extraite des dérivées. L'équation devient alors au final :

$$\rho \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) + \rho g_i \quad (1.17)$$

Cette équation, appelée également équation de Navier-Stokes, fut en fait dérivée par au moins cinq scientifiques différents entre 1823 et 1845, le premier étant Claude Louis Navier et le dernier George Stokes. Cette époque était marquée par les débuts du recours au raisonnement moléculaire ; mathématiciens et ingénieurs ne s'accordaient pas sur l'approche à adopter. Néanmoins, l'équation finale obtenue fut la même à chaque fois, quelle que soit la méthode employée (Darrigol (2002)).

1.2.3 Conservation de l'énergie

L'énergie massique totale d'un système est composée de son énergie massique interne e et de son énergie cinétique massique $k = \frac{1}{2}(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$. La conservation de l'énergie traduit le fait que la variation de l'énergie totale du système doit être égale à la puissance des forces extérieures augmentée de la puissance thermique Q échangée avec l'extérieur. C'est le premier principe de la thermodynamique ($\Delta U + \Delta Ec = W + Q$), qui fut énoncé suite aux expériences de Julius Robert von Mayer puis de James Prescott Joule au début des années 1840. Mais c'est Hermann von Helmholtz qui le fit admettre au monde scientifique en 1847. Il s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho(e + k) dV = \int_{A(t)} (-P[I] + [\sigma']). \vec{U} \cdot \vec{n} dA + \int_{A(t)} -\vec{Q} \cdot \vec{n} dA + \int_{V(t)} \rho \vec{g} \cdot \vec{U} dV \quad (1.18)$$

$$\Leftrightarrow \int_{V(t)} \left(\frac{\partial(\rho(e + k))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(e + k) \vec{U}) \right) dV = \int_{A(t)} \left\{ (-P[I] + [\sigma']). \vec{U} - \vec{Q} \right\} \cdot \vec{n} dA + \int_{V(t)} \rho \vec{g} \cdot \vec{U} dV \quad (1.19)$$

On considère ici un système dans lequel il n'y a pas de réaction chimique ni de machine. \vec{Q} représente donc uniquement le flux conductif à travers la surface A : $Q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$.

L'application du théorème de Gauss-Ostrogradsky au premier terme du membre de droite suivie de la suppression des intégrales en faisant tendre le volume de contrôle vers zéro mène à :

$$\frac{\partial(\rho(e+k))}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho(e+k)U_j) = -\frac{\partial(PU_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial\sigma'_{jk}U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \rho g_j U_j \quad (1.20)$$

où j et k sont des indices de sommation.

Afin d'obtenir une forme plus pratique faisant apparaître la température, on développe les termes représentant des dérivées de produits ($d(uv)=vdu+udv$) et on soustrait à cette équation les 3 équations de quantité de mouvement ayant été au préalable multipliées par la composante du vecteur vitesse qu'elles représentent (par U_1 pour $i = 1$, par U_2 pour $i = 2$, par U_3 pour $i = 3$). On obtient :

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + (\rho U_j)\frac{\partial e}{\partial x_j} + (k+e)\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j}\right) = -P\frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \sigma'_{jk}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \quad (1.21)$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse, le troisième terme du membre de gauche est nul. Il reste donc :

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + (\rho U_j)\frac{\partial e}{\partial x_j} = -P\frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \sigma'_{jk}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \quad (1.22)$$

On peut faire apparaître l'enthalpie $H = e + \frac{P}{\rho}$ dans cette équation. En utilisant alors l'équation de continuité pour effectuer des simplifications supplémentaires on obtient :

$$\rho\frac{\partial H}{\partial t} + (\rho U_j)\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial t} + U_j\frac{\partial P}{\partial x_j} + \sigma'_{jk}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \quad (1.23)$$

En considérant que le fluide étudié est un gaz parfait, on a⁴ : $dH = C_p dT$, ce qui conduit, avec C_p constant (cas du gaz parfait idéal), à :

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial P}{\partial t} + U_j\frac{\partial P}{\partial x_j} + \sigma'_{jk}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \quad (1.24)$$

1.2.4 Résumé

Pour l'écoulement anisotherme d'un fluide visqueux Newtonien, se comportant comme un gaz parfait idéal, soumis à une seule force volumique (la gravité) sans réaction chimique ni machine, les équations de conservation sont :

⁴Pour un gaz réel $dH = C_p dT + (\bar{h} + v)dP$, où $\bar{h} = -T\frac{\partial v}{\partial T}|_P$ est la chaleur latente massique de compression. Pour un gaz parfait $PV = nRT$, ce qui donne $\bar{h} = -v$ et donc $dH = C_p dT$ uniquement.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.25)$$

$$\rho \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) + \rho g_i \quad (1.26)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \sigma'_{jk} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.27)$$

où j et k sont des indices de sommation et i désigne la composante de la vitesse.

On a ainsi un système de cinq équations avec six inconnues (ρ, P, U, V, W, T). On ajoute donc l'équation d'état du fluide, qui dans l'hypothèse du gaz parfait considérée ici est :

$$P = \rho RT \quad (1.28)$$

où R est la constante des gaz parfaits.

1.2.5 Adimensionnement

Il est intéressant de présenter les équations de conservation sous forme adimensionnée. Cette expression sans dimension est notamment nécessaire pour effectuer le développement menant aux équations simplifiées pour les écoulements à faibles nombres de Mach, qui est présenté ci-après. On considère les échelles caractéristiques suivantes afin de réaliser l'adimensionnement des équations :

- x^* pour la longueur,
- c^* (vitesse du son) pour la vitesse,
- $t^* = x^*/U_f$ pour le temps, où U_f est la vitesse caractéristique du fluide,
- ρ^* pour la masse volumique,
- λ^* pour la conductivité thermique,
- μ^* pour la viscosité,
- P^* pour la pression,
- T^* pour la température,
- C_p^* pour la capacité calorifique à pression constante,
- g^* pour l'accélération de la pesanteur.

On définit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{x}{x^*}; t^+ = \frac{t}{x^*/U_f}; \rho^+ = \frac{\rho}{\rho^*}; U^+ = \frac{U}{c^*}; P^+ = \frac{P}{P^*}; \mu^+ = \frac{\mu}{\mu^*}; \lambda^+ = \frac{\lambda}{\lambda^*} \\ T^+ &= \frac{T}{T^*}; C_p^+ = \frac{C_p}{C_p^*}; g^+ = \frac{g}{g^*} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Par définition, on a : $c^* = \sqrt{\gamma RT^*}$, où R est la constante des gaz parfaits, qui vérifie : $R = C_p - C_v$, et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. On pose $P^* = \rho^* RT^*$. On obtient donc : $P^* = \frac{\rho^*(c^*)^2}{\gamma}$.

Une fois adimensionnées, les équations (1.25), (1.26), (1.27) et (1.28) s'écrivent alors sous la forme :

$$\frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + M_a^{-1} \frac{\partial(\rho^+ U_j^+)}{\partial x_j^+} = 0 \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \rho^+ \frac{\partial(U_i^+)}{\partial t^+} + M_a^{-1} \rho^+ U_j^+ \frac{\partial(U_i^+)}{\partial x_j^+} = & - \frac{M_a^{-1}}{\gamma} \frac{\partial P^+}{\partial x_i^+} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^+} \left[\mu^+ \left(\frac{\partial U_i^+}{\partial x_j^+} + \frac{\partial U_j^+}{\partial x_i^+} \right) \right] \\ & - \frac{2}{3Re} \frac{\partial}{\partial x_i^+} \left(\mu^+ \frac{\partial U_j^+}{\partial x_j^+} \right) + \frac{M_a}{Fr} \rho^+ g_i^+ \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \rho^+ C_p^+ \frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \rho^+ C_p^+ U_j^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_j^+} = & \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\partial P^+}{\partial t^+} + M_a^{-1} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} U_j^+ \frac{\partial P^+}{\partial x_j^+} \\ & + \frac{(\gamma - 1)}{Re} \sigma_{jk}^+ \frac{\partial U_k^+}{\partial x_j^+} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x_j^+} \left(\lambda^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_j^+} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$P^+ = \rho^+ T^+ \quad (1.33)$$

avec :

$$Re = \frac{\rho^* U_f x^*}{\mu^*} \quad \text{le nombre de Reynolds,} \quad (1.34)$$

$$Pe = Re Pr = \frac{\rho^* C_p^* U_f x^*}{\lambda^*} \quad \text{le nombre de Péclet,} \quad (1.35)$$

$$Fr = \frac{U_f^2}{x^* g^*} \quad \text{le nombre de Froude,} \quad (1.36)$$

$$M_a = \frac{U_f}{c^*} \quad \text{le nombre de Mach.} \quad (1.37)$$

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, c'est à dire l'importance relative du transfert de quantité de mouvement par convection et par diffusion. Le nombre de Péclet, produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl, traduit l'importance relative des transferts de chaleur par convection et par conduction thermique. Le nombre de Froude sert à comparer les forces d'inertie et de pesanteur. Enfin, le nombre de Mach rapporte la vitesse du fluide à la vitesse du son dans le même milieu. Il permet de déterminer le caractère subsonique, sonique ou supersonique de l'écoulement considéré.

1.3 Écoulements à faibles nombres de Mach

Dans le cas d'un écoulement à petit nombre de Mach mais avec des variations importantes de température, on cherche à éliminer des contraintes dues aux ondes acoustiques, qui sont associées aux équations compressibles. Deux grands types d'approches sont alors couramment utilisés. Le premier consiste à considérer les équations compressibles et à appliquer des méthodes

de préconditionnement bas Mach lors de la résolution numérique de ces équations. D'autres auteurs, comme Paolucci (1982), proposent d'effectuer un développement asymptotique de toutes les variables en fonction de M_a^2 puis de faire des simplifications en tenant compte du fait que M_a est petit, afin de dériver un nouveau système d'équations, libéré des contraintes acoustiques. On peut noter qu'un troisième type d'approche a également été développé. Il s'agit des méthodes hybrides, comme celle proposée par Golanski *et al.* (2004), où les phénomènes de production acoustique et de propagation acoustique sont traités séparément. Une simulation utilisant la même approche que Paolucci (1982) est d'abord utilisée afin de générer un terme source acoustique local. Celui-ci est ensuite introduit dans des équations de propagation acoustique. Golanski *et al.* (2004) ont testé cette méthode dans le cas d'une couche de mélange temporelle anisotherme et ont montré qu'elle est performante mais que la qualité des résultats obtenus se dégrade lorsque le nombre de Mach considéré augmente. C'est la deuxième solution que nous allons utiliser dans la présente étude (Paolucci (1982)). Le développement asymptotique des variables de l'écoulement en fonction de M_a^2 s'écrit alors :

$$U^+ = M_a(U_0 + M_a^2 U_1 + o(M_a^2)) \quad (1.38)$$

$$\rho^+ = \rho_0 + M_a^2 \rho_1 + o(M_a^2) \quad (1.39)$$

$$P^+ = P_0 + M_a^2 P_1 + o(M_a^2) \quad (1.40)$$

$$T^+ = T_0 + M_a^2 T_1 + o(M_a^2) \quad (1.41)$$

$$\lambda^+ = \lambda_0 + M_a^2 \lambda_1 + o(M_a^2) \quad (1.42)$$

$$\mu^+ = \mu_0 + M_a^2 \mu_1 + o(M_a^2) \quad (1.43)$$

$$C_p^+ = C_{p0} + M_a^2 C_{p1} + o(M_a^2) \quad (1.44)$$

où $U_{0,1}$, $\rho_{0,1}$, $P_{0,1}$, $T_{0,1}$, $\lambda_{0,1}$, $\mu_{0,1}$ et $C_{p0,1}$ sont des variables adimensionnelles indépendantes du nombre de Mach. Dans l'équation (1.38) on réajuste l'échelle de vitesse, qui était prise égale à la célérité du son c^* lors de l'adimensionnement des équations compressibles et dont l'ordre de grandeur est en fait la vitesse caractéristique du fluide U_f étant donné que l'on considère un faible nombre de Mach.

On remplace alors les variables par leurs développements asymptotiques dans les équations (1.30) à (1.32). Dans l'hypothèse d'un faible nombre de Mach, on a $M_a \ll 1$. Les termes d'ordre supérieur ou égal à M_a^2 peuvent donc être négligés, et on obtient les équations simplifiées régissant l'écoulement à petit nombre de Mach. Il est généralement admis que ces équations simplifiées sont valables pour des nombres de Mach inférieurs à 0.3.

1.3.1 Conservation de la masse

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à M_a^2 , l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t^+} + \frac{\partial(\rho_0 U_{j0})}{\partial x_j^+} = 0 \quad (1.45)$$

1.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

En raison de la présence du facteur M_a^{-1} devant le terme de pression de l'équation de quantité de mouvement adimensionnée (1er terme du membre de droite de l'équation (1.31)), les termes principaux sont ceux d'ordre M_a^{-1} , c'est à dire :

$$0 = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_0}{\partial x_i^+} \quad (1.46)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P_0}{\partial x_i^+} = 0 \quad (1.47)$$

La pression P_0 est donc constante spatialement. En tenant compte de ceci, si on conserve uniquement les termes d'ordre inférieur à M_a^2 , l'équation de quantité de mouvement simplifiée s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial U_{i0}}{\partial t^+} + \rho_0 U_{j0} \frac{\partial U_{i0}}{\partial x_j^+} = & -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_1}{\partial x_i^+} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x_j^+} \left(\mu_0 \left(\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_j^+} + \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_i^+} \right) \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i^+} \left(\mu_0 \frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j^+} \right) \right] + \frac{\rho_0 g_i^+}{Fr} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Cette fois, c'est le terme de pression d'ordre supérieur P_1 qui intervient. On distingue alors les deux types de pression :

- la pression P_0 qui apparaîtra dans l'équation de conservation de l'énergie (section suivante) et qui est constante spatialement. Cette pression est qualifiée de thermodynamique. C'est cette pression qui intervient dans la loi d'état des gaz parfaits, qui s'écrit alors : $P_0 = \rho_0 T_0$.
- la pression P_1 qui, elle, peut varier spatialement et qui est appelée pression dynamique.

1.3.3 Conservation de l'énergie

En ne conservant que les termes d'ordre inférieur à M_a^2 et en tenant compte du fait que $\frac{\partial P_0}{\partial x_i^+} = 0$, on obtient :

$$\rho_0 C_{p0} \frac{\partial T_0}{\partial t^+} + \rho_0 C_{p0} U_{j0} \frac{\partial T_0}{\partial x_j^+} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{\partial P_0}{\partial t^+} + \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x_j^+} \left(\lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial x_j^+} \right) \quad (1.49)$$

1.3.4 Re-dimensionnement

Pour remettre les équations bas Mach sous forme dimensionnelle, on utilise cette fois U_f comme échelle de vitesse puisque lors de l'approximation bas Mach la vitesse U_o a été réajustée (développement asymptotique (1.38)). De même, dans l'équation de la quantité de mouvement l'échelle de pression est maintenant $\frac{\rho U_f^2}{\gamma}$. En effet, dans cette équation c'est la pression P_1

qui apparaît et celle-ci a été, elle aussi, réajustée par l'intermédiaire du développement asymptotique (1.40).

Une fois remises sous forme dimensionnelle les équations de conservation et d'état pour les écoulements à faibles nombres de Mach deviennent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial P_{thermo}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.51)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) + \rho g_i \quad (1.52)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.53)$$

$$P_{thermo} = \rho R T \quad (1.54)$$

Afin de manipuler la même pression que dans les équations des écoulements dilatables (section 1.4), on décompose la masse volumique au sein du terme de gravité :

$$\rho g_i = \rho_{ref} g_i + (\rho - \rho_{ref}) g_i \quad (1.55)$$

où ρ_{ref} est une constante (valeur de la masse volumique à la température de référence T_{ref}). Le terme $\rho_{ref} g_i$ est alors incorporé au terme de pression : $P' = P_{dyn} + \rho_{ref} g_i x_i$ (pression dynamique + pression hydrostatique), ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = & -\frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \\ & + (\rho - \rho_{ref}) g_i \end{aligned} \quad (1.56)$$

1.3.5 Résumé

L'écoulement anisotherme d'un gaz parfait idéal à faibles nombres de Mach est régit par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.57)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) + (\rho - \rho_{ref}) g_i \quad (1.58)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.59)$$

avec :

$$P_{thermo} = \rho RT, \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial P_{thermo}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.61)$$

et

$$P' = P_{dynamique} + P_{hydrostatique} \quad (1.62)$$

1.4 Écoulements dilatables (Boussinesq)

Lorsque le nombre de Mach est petit et que, de plus, les variations de densité sont faibles (écoulements dits dilatables), on peut utiliser un autre modèle simplifié, dit de Boussinesq. Nous donnons ici les hypothèses simplificatrices permettant d'obtenir directement les équations régissant ces écoulements dilatables à partir du système obtenu précédemment pour les écoulements à faibles nombres de Mach. Ces équations simplifiées sont valides pour des écoulements à bas nombres de Mach, soumis à de faibles écarts de température (typiquement inférieurs à 30 K pour de l'air) et dans des configurations où l'échelle caractéristique de longueur verticale est petite.

On considère un état de référence constant et on décompose les variables thermodynamiques en une partie constante et une petite variation par rapport à cet état de référence :

$$\rho = \rho_{ref} + \rho'' \quad (1.63)$$

$$T = T_{ref} + T'' \quad (1.64)$$

$$P_{thermo} = P_{ref} + P'' \quad (1.65)$$

$$\mu = \mu_{ref} + \mu'' \quad (1.66)$$

$$\lambda = \lambda_{ref} + \lambda'' \quad (1.67)$$

$$(1.68)$$

On introduit ces décompositions dans les équations bas Mach et on effectue des simplifications sachant que les variations des variables thermodynamiques (") sont négligeables par rapport aux valeurs de référence $_{ref}$ et que ces dernières sont des constantes.

1.4.1 Conservation de la masse

L'équation (1.57) se simplifie alors comme suit :

$$\frac{\partial \rho_{ref}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{ref} U_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho''}{\partial t} + \frac{\partial(\rho'' U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.69)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.70)$$

1.4.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation (1.58) devient :

$$\begin{aligned} (\rho_{ref} + \rho'') \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + (\rho_{ref} + \rho'') U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = & - \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu_{ref} + \mu'') \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\mu_{ref} + \mu'') \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \\ & + (\rho_{ref} + \rho'' - \rho_{ref}) g_i \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \rho_{ref} \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \rho_{ref} U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = & - \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \mu_{ref} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{2}{3} \mu_{ref} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} + \rho'' g_i \end{aligned} \quad (1.72)$$

Le terme $\rho'' g_i$ est conservé car le terme $\rho_{ref} g_i$, devant lequel il serait négligeable, a disparu. En convection naturelle, le terme $\rho'' g_i$ est le moteur du mouvement et a donc un rôle très important. Il est alors exprimé en utilisant l'approximation de Boussinesq :

$$\rho = \rho_{ref} [1 - \beta(T - T_{ref})] \quad (1.73)$$

Soit :

$$\rho'' = (\rho - \rho_{ref}) = -\rho_{ref} \beta (T - T_{ref}) \quad (1.74)$$

De plus, d'après l'équation de conservation de la masse (1.70), on a : $\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement se simplifie donc en :

$$\frac{\partial(U_i)}{\partial t} + U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{ref}} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \nu_{ref} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \beta(T - T_{ref})g_i \quad (1.75)$$

où ν_{ref} est la viscosité dynamique :

$$\nu_{ref} = \frac{\mu_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (1.76)$$

1.4.3 Conservation de l'énergie

L'application de la même procédure à l'équation (1.59) donne :

$$\begin{aligned} (\rho_{ref} + \rho'')C_p \left(\frac{\partial(T_{ref} + T'')}{\partial t} + U_j \frac{\partial(T_{ref} + T'')}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial(P_{ref} + P'')}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\lambda_{ref} + \lambda'') \frac{\partial(T_{ref} + T'')}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T''}{\partial t} + U_j \frac{\partial T''}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T''}{\partial x_j^2} \quad (1.78)$$

où κ est la diffusivité thermique définie par :

$$\kappa = \frac{\lambda_{ref}}{\rho_{ref}C_p} \quad (1.79)$$

1.4.4 Résumé

Le système d'équations décrivant l'écoulement anisotherme d'un fluide Newtonien, supposé être un gaz parfait idéal, dans le cadre des hypothèses de Boussinesq est :

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial(U_i)}{\partial t} + U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{ref}} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \nu_{ref} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \beta(T - T_{ref})g_i \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (1.82)$$

1.5 Écoulements incompressibles

On entend ici par fluide incompressible, un fluide dont la masse volumique n'est fonction ni de la température ni de la pression. On considère donc cette fois des conditions telles que les propriétés du fluide (ρ , μ , λ) sont constantes, égales à leur valeur à l'état de référence, et que le gradient de pression thermodynamique est négligeable. Ces hypothèses sont valides à bas nombres de Mach, lorsque les variations de P' et de T sont très faibles.

Après simplification des équations bas Mach ou de Boussinesq, on obtient les équations incompressibles suivantes (pour un gaz parfait idéal) :

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial(U_i)}{\partial t} + U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + g_i \quad (1.84)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (1.85)$$

où ρ , ν et κ sont des constantes, prises à la température de référence de l'écoulement T_{ref} .

Dans ce système simplifié la vitesse et la température sont totalement découplées, on dit que la température se comporte comme un scalaire passif.⁵

1.6 Écoulements considérés dans la présente étude et équations associées

On considère ici uniquement des configurations où le nombre de Mach est faible. Par contre, les gradients thermiques rencontrés varient fortement d'une simulation à l'autre. On utilise donc différents systèmes d'équations en fonction des conditions thermiques imposées, c'est à dire selon que l'écart de température considéré est faible ou fort.

La notion de "limite" entre faibles et forts écarts de température introduite ici est somme toute assez abstraite. Dans la pratique, elle est liée au domaine de validité des différentes équations présentées précédemment. Les écarts de température maximum fixés pour l'utilisation des équations de Boussinesq et incompressibles sont liés à la légitimité de négliger les variations des propriétés du fluide sur une certaine gamme de températures. Lorsqu'on stipule que ces équations sont valides pour des écarts de température inférieurs à 30 K pour de l'air, cela revient à dire que l'erreur commise en supposant les propriétés constantes est acceptable dans cet intervalle. Par exemple, pour de l'air à une température moyenne de 293 K, on a $\frac{\Delta\rho/2}{\rho_{moyen}} \approx 5\%$,

⁵Dans le cas où la gravité peut être négligée les équations dilatables sont identiques aux équations incompressibles et on retrouve le découplage de la vitesse et de la température.

$\frac{\Delta\mu/2}{\mu_{moyen}} \approx 4\%$ et $\frac{\Delta\lambda/2}{\lambda_{moyen}} \approx 4\%$ si $\Delta T = 30 \text{ K}$ ⁶, on tolère donc jusqu'à 5% d'erreur sur les valeurs des propriétés dans les simulations réalisées.

1.6.1 Pour les faibles écarts de température

La majorité des études prenant en compte les transferts de chaleur trouvées dans la littérature se limitent à de faibles variations de température. Dans ce cas les équations considérées sont alors celles de Boussinesq, voire même les équations incompressibles. Les équations de Boussinesq sont notamment beaucoup utilisées dans des problèmes où la convection naturelle et/ou la gravité jouent un rôle moteur : écoulement dans une cavité différentiellement chauffée, écoulement dans une conduite verticale, écoulement autour d'un cylindre chauffé... (Salat *et al.* (2004); Xin *et al.* (1997, 2004)) Les équations incompressibles, quant à elles, sont employées dans des configurations très variées.

Dans la présente étude, les simulations où les écarts de température sont inférieurs à 30 K sont réalisées à partir des équations de bas Mach. Les initiales BM serviront par la suite à identifier les simulations réalisées avec ces équations bas Mach. Celles où le champ thermique n'est pas pris en compte (simulations réalisées à des fins de validation) sont faites en considérant les équations incompressibles (notées par la suite INC).

1.6.2 Pour les forts écarts de température

Dans la littérature, pour l'étude numérique de ce type de configuration, on trouve à la fois des travaux utilisant les équations compressibles (Huang *et al.* (1995); Coleman *et al.* (1995); Morinishi *et al.* (2004); Tamano et Morinishi (2006); Hébrard *et al.* (2004)) et des études à nombres de Mach faibles pour lesquelles il est intéressant de considérer un préconditionnement bas Mach (Dailey *et al.* (2003); Wang et Pletcher (1996); Qin et Pletcher (2006); Lee *et al.* (2004); Xu *et al.* (2004)) ou les équations bas Mach (Nicoud (1998); Nicoud et Poinso (1999); Lessani et Papalexandris (2006); Bae *et al.* (2006)). Dans la présente étude, nous utilisons cette dernière solution : les équations bas Mach (repérées par le symbole BM).

Nous avons ici choisi d'étudier un écoulement en canal plan turbulent à températures imposées, à l'aide de la Simulation des Grandes Échelles. Cette méthode implique un filtrage des équations que nous venons de dériver et la modélisation de termes inconnus apparaissant suite à cette opération de filtrage. La présentation de cette technique de simulation fait l'objet du chapitre suivant.

⁶en utilisant la loi d'état des gaz parfaits pour calculer ρ et les lois de Sutherland pour λ et μ

Chapitre 2

Contexte scientifique : la Simulation des Grandes Échelles et les écoulements anisothermes

2.1 La Simulation des Grandes Echelles

2.1.1 Principe

Plusieurs types d'outils permettent d'étudier numériquement un écoulement turbulent (Lesieur (1994, 262 p)). Le plus "exact" est la Simulation Numérique Directe (SND ou DNS pour *Direct Numerical Simulation*), qui consiste en une résolution complète des équations de l'écoulement. Cette méthode est donc très précise mais très coûteuse en temps de calculs, ce qui la rend difficilement utilisable en-dehors de l'étude de cas relativement simples (nombres de Reynolds modérés, géométries simples).

Un autre type de méthodes, appelé *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS), est très souvent utilisé. Il consiste en une modélisation statistique de l'écoulement. Chaque grandeur turbulente est considérée comme la somme d'une valeur moyenne et d'une valeur fluctuante. Les équations-bilan sont alors moyennées, faisant apparaître un terme inconnu : le tenseur de Reynolds. Plusieurs modélisations existent pour représenter ce terme : modèle de la longueur de mélange, modèle $k-\varepsilon$, ... Cette technique présente l'avantage de nécessiter des temps de calcul beaucoup moins importants. Cependant, la précision obtenue sur les grandeurs fluctuantes est souvent insatisfaisante.

Un bon compromis est offert par la Simulation des Grandes Échelles (SGE ou LES pour *Large Eddy Simulation*) qui, avec des temps de calcul raisonnables, donne des résultats d'une précision supérieure à celle des méthodes RANS et peut traiter des problèmes instationnaires. La différence entre DNS, RANS et LES est représentée schématiquement sur la Figure 2.1.

Il est important de souligner que les 3 méthodes présentées ci-dessus sont les plus répandues mais ne sont pas les seules. Il existe en effet des approches hybrides telles que les méthodes URANS (*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes*), la VLES (*Very Large Eddy Simulation*),

la DES (*Detached Eddy Simulation*), la MILES (*Monotone Integrated Large Eddy Simulation*)... Un aperçu des particularités de certaines de ces méthodes est notamment donné par Spalart (2000) et par Nikitin *et al.* (2000).

La SGE utilise l'idée de séparation entre les grandes échelles et les petites échelles (ou échelles sous-maille) introduite en 1963 par Smagorinsky pour l'étude des mouvements atmosphériques (Smagorinsky (1963)). Comme son nom l'indique, la SGE simule les grandes échelles alors que les échelles sous-maille sont modélisées. Mathématiquement, la séparation d'échelles s'effectue au moyen d'un filtre passe-bas en fréquence (passe-haut en échelles). La limite entre grandes et petites échelles est déterminée par la longueur de coupure $\bar{\Delta}$ qui est associée à la fréquence de coupure k_c dans l'espace spectral. Ce principe est représenté sur le spectre d'énergie cinématique de la figure 2.2. Au niveau des petites fréquences, qui correspondent aux grosses structures de l'écoulement, il y a production d'énergie. Aux fréquences intermédiaires, on trouve une zone dite inertielle où s'effectue un transfert d'énergie des grosses vers les petites structures selon la cascade de Kolmogorov. Enfin, à l'opposé du spectre, les petites structures, qui sont au niveau des hautes fréquences, dissipent l'énergie sous l'action de la viscosité moléculaire. La fréquence de coupure k_c doit se trouver dans la zone inertielle du spectre. Dans la pratique c'est le maillage qui est le filtre et qui fixe ainsi la fréquence de coupure. C'est donc du choix du maillage que découle la séparation entre les échelles qui seront simulées et celles qui seront modélisées.

En Simulation des Grandes Échelles, plusieurs aspects doivent être étudiés avec attention (Lesieur *et al.* (2005, 219 p); Mellen *et al.* (2003); Rodi *et al.* (1997)). Le choix des méthodes et schémas numériques est notamment l'un des paramètres les plus importants pour la qualité des résultats et fait l'objet de beaucoup de travaux en LES. Parmi ces études, certaines sont particulièrement intéressantes dans le cadre des configurations anisothermes comme la nôtre. C'est le cas par exemple des travaux de Châtelain *et al.* (2004) sur les schémas numériques pour l'équation de l'énergie. On trouve également dans la littérature des développements de méthodes numériques adaptées aux algorithmes Bas Mach (Nicoud (1998, 2000); Xu *et al.* (2005); Lessani et Papalexandris (2006)). Une autre problématique capitale en LES est le traitement des conditions aux limites et en particulier des parois solides. De nombreuses études sont par exemple menées sur le traitement des géométries complexes et la génération de maillages adaptés. L'*Immersed Boundary Method* (IMB) par exemple est une technique prometteuse pour les géométries complexes (Iaccarino et Elkins (2005); Moin (2002); Verzicco (2005)). À l'approche d'une paroi, la méthode la plus classique est d'utiliser un maillage irrégulier raffiné près du solide, c'est d'ailleurs la solution que nous utilisons dans nos simulations. Cependant des approches alternatives sont à l'étude, comme celle proposée par Iovieno *et al.* (2004). La dérivation de lois de parois pour le champ dynamique ainsi que pour le champ thermique constitue également un thème de recherche important (Kader (1981); Cabot et Moin (1999); Nicoud et Baggett (1999); Baggett *et al.* (2000); Nicoud *et al.* (2001); Piomelli et Balaras (2002); Châtelain *et al.* (2003); Artal et Nicoud (2005)). Des études sont menées concernant la prédiction du champ thermique en proche paroi dans les cas de transferts de chaleur conjugués, c'est à dire de la prise en compte à la fois de la convection par le fluide et de la conduction dans le solide (Châtelain *et al.* (2003); Chatelain (2004)). Dans certaines configurations, une entrée de fluide turbulente doit être utilisée sur l'une des frontières du domaine. Une telle entrée de fluide

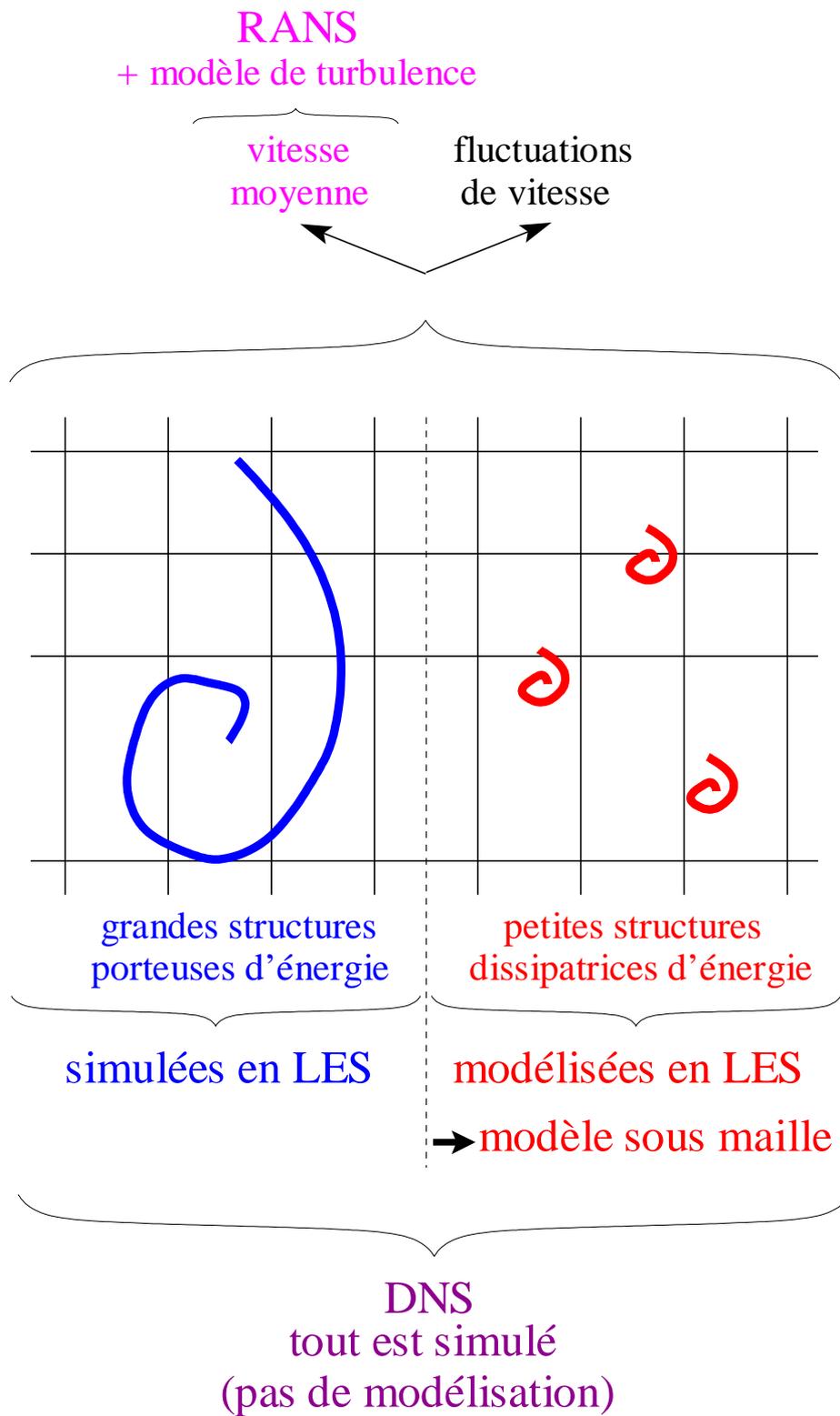


FIG. 2.1 – Représentation schématique de la différence entre DNS, RANS et LES

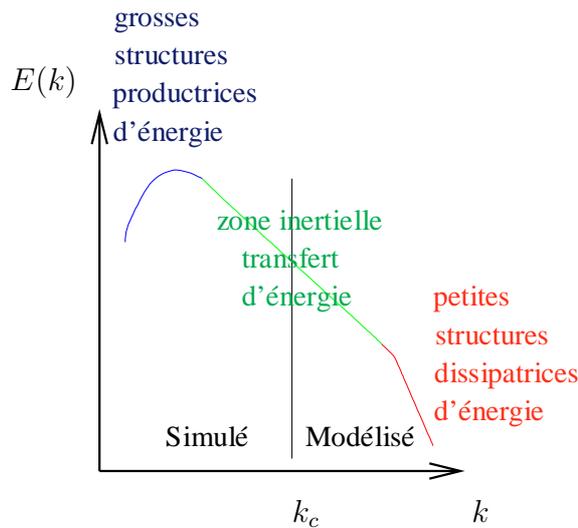


FIG. 2.2 – Représentation schématique de la séparation des échelles en SGE

a une forte influence sur la précision des résultats. Différentes méthodes ont été développées pour générer de telles conditions d'entrée : ajout de fluctuations aléatoires à un profil moyen laminaire (Ducros *et al.* (1996)) ou turbulent (Lee *et al.* (1992); Le *et al.* (1997)), utilisation d'un écoulement parallèle périodique (Kaltenbach *et al.* (1999); Akselvoll et Moin (1996); Brillant (2004)), recyclage (Wu *et al.* (1995); Lund *et al.* (1996)), estimation linéaire stochastique (Maruyama (1999); Péneau *et al.* (2000)),... Ces dernières années, l'adaptation de la LES pour les écoulement réactifs a constitué un sujet de recherche important. Ainsi, des travaux ont porté sur le développement de techniques pour la simulation de problèmes de combustion/de réactions chimiques (Cook et Riley (1994); DesJardin et Frankel (1998); Jaber et James (1998); Colin *et al.* (2000); Zhou et Mahalingam (2002)). Enfin, la modélisation sous-maille revêt une importance fondamentale en LES car son rôle est de représenter l'action des petites échelles qui ne sont pas simulées. Nous nous intéressons plus particulièrement dans cette étude aux modèles sous-maille thermiques, la section 2.1.9 leur est ainsi consacrée. Dans un premier temps, nous allons exposer l'application du filtrage aux équations régissant l'écoulement, afin de faire apparaître les termes sous-maille à modéliser. Ensuite nous donnerons un aperçu des différents types de modèles pour le tenseur sous-maille et nous étudierons en détails la modélisation sous-maille thermique. Enfin, pour illustrer l'utilisation de ces modèles, nous présenterons quelques études réalisées en SGE Thermique.

2.1.2 Filtrage passe-bande

Afin d'appliquer le filtre passe-bas en fréquence, Sagaut (1998, 282 p) propose de formuler le système d'équations-bilan dans l'espace spectral. Le passage de l'espace physique à l'espace spectral se fait au moyen d'une transformée de Fourier :

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \phi(x, t) e^{-i\mathbf{k}x} d^3x \quad (2.1)$$

Il est ainsi possible d'écrire le système d'équations précédent dans l'espace spectral et d'effectuer le filtrage dans cet espace (se référer à Sagaut (1998, 282 p) et Lesieur *et al.* (2005, 219 p) pour plus d'informations sur la LES spectrale).

Si on reste dans l'espace physique, le filtrage homogène et isotrope¹ d'une équation se traduit par un produit de convolution :

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, t) G(\mathbf{x} - \xi, t) d^3\xi \quad (2.2)$$

On le note : $\bar{\phi} = G * \phi(\mathbf{x}, t)$, $G(x, t)$ étant le filtre.

La partie non-résolue de ϕ , notée ϕ' s'écrit : $\phi' = \phi - \bar{\phi} = (\delta_D - G) * \phi$, où δ_D est l'impulsion de Dirac.

Certaines propriétés doivent être imposées au filtre afin de pouvoir l'appliquer aux équations-bilan :

- conservation des constantes :

$$\bar{a} = a$$

- linéarité :

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi}$$

- commutativité avec la dérivation :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial \phi}{\partial s}}$$

Il est important de remarquer que les filtres qui vérifient ces propriétés ne sont pas, en général, des opérateurs de Reynolds, ce qui signifie que pour ces filtres :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\phi}} \neq \bar{\phi} \\ \bar{\phi'} \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

Les filtres homogènes et isotropes les plus utilisés en SGE sont le filtre boîte, le filtre gaussien et le filtre porte. Une description plus détaillée de ces filtres est donnée par Sagaut (1998, 282 p).

Après application du filtrage aux équations de Boussinesq et aux équations Bas Mach, on obtient les systèmes suivants² :

¹Les filtres homogènes et isotropes ont des caractéristiques invariantes par translation ou rotation, ce qui implique que le milieu étudié est non-borné. Comme l'explique Sagaut (1998, 282 p), ce cas idéal est le seul permettant de mener le développement jusqu'au bout. Cependant, lorsqu'on s'intéresse aux zones proches des frontières d'un domaine ou lorsqu'on a besoin de faire varier la longueur de coupure $\bar{\Delta}$ dans l'espace, cette hypothèse n'est plus valable. Dans ce cas il faut revoir la définition du filtrage.

²Le cas des équations incompressibles n'est pas présenté car le filtrage de ces équations est similaire à celui des équations de Boussinesq

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 & (2.5) \\ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{ref}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu_{ref} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial^2 x_j} - \beta(\bar{T} - T_{ref})g_i & (2.6) \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{T} \bar{U}_j}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial^2 x_j} & (2.7) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{U}_j)}{\partial x_j} = 0 & (2.8) \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{U}_i \bar{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} \right) & (2.9) \\ \quad \quad \quad + (\bar{\rho} - \rho_{ref})g_i \\ C_p \left(\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{U}_j \bar{T})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}} \right) & (2.10) \end{cases}$$

En ce qui concerne les équations Bas Mach, la densité étant variable il est pratique d'introduire un autre type de filtrage, basé sur la moyenne de Favre, symbolisée par un $\tilde{}$ et qui permet de s'affranchir des termes triples $\overline{\rho U_i U_j}$ et $\overline{\rho U_j T}$. La moyenne de Favre d'une variable ϕ est définie de la manière suivante :

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}} \quad (2.11)$$

On peut alors, de la même manière qu'avec le filtrage "classique", définir une partie non résolue : $\phi'' = \phi - \tilde{\phi}$.

En utilisant ce filtrage de Favre les équations Bas Mach, deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U}_j)}{\partial x_j} = 0 & (2.12) \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} \right) & (2.13) \\ \quad \quad \quad + (\bar{\rho} - \rho_{ref})g_i \\ C_p \left(\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U}_j \tilde{T})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \bar{P}_{thermo}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}} \right) & (2.14) \end{cases}$$

Dans ces équations filtrées apparaissent des termes non-résolus : $\overline{U_i U_j}$, $\overline{U_j T}$, $\overline{U_i U_j}$ et $\overline{U_j T}$. Pour que les équations puissent être résolues ces termes doivent être exprimés en fonction de

\bar{U} , U' , \bar{T} et T' pour les équations de Boussinesq et de \tilde{U} , U'' , \tilde{T} et T'' pour les équations Bas Mach.

2.1.3 Décomposition du terme non linéaire dans l'équation de quantité de mouvement

En utilisant la décomposition dite double, introduite par Leonard (1974), on obtient l'expression suivante pour le terme $\overline{U_i U_j}$:

$$\overline{U_i U_j} = \overline{(\bar{U}_i + U'_i)(\bar{U}_j + U'_j)} \quad (2.15)$$

$$= \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} + \overline{\bar{U}_i U'_j} + \overline{\bar{U}_j U'_i} + \overline{U'_i U'_j} \quad (2.16)$$

L'équation (2.6) devient alors :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{ref}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu_{ref} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial^2 x_j} + \beta(\bar{T} - T_{ref})g_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

où :

$$\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} \quad (2.18)$$

$$= C_{ij} + R_{ij} \quad (2.19)$$

avec :

$$\begin{cases} C_{ij} = \overline{\bar{U}_i U'_j} + \overline{\bar{U}_j U'_i} \\ R_{ij} = \overline{U'_i U'_j} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

C_{ij} est appelé tenseur des tensions croisées. Il représente les interactions entre grandes et petites échelles. R_{ij} est appelé tenseur de Reynolds. Il prend en compte les interactions entre échelles sous-maille.

Une décomposition alternative, appelée décomposition triple ou décomposition de Léonard, existe. Elle consiste à exprimer le terme $\overline{\bar{U}_i \bar{U}_j}$ comme suit :

$$\overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} = \overline{(\bar{U}_i \bar{U}_j - \bar{U}_i \bar{U}_j)} + \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} \quad (2.22)$$

$$= L_{ij} + \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} \quad (2.23)$$

L_{ij} est appelé tenseur de Léonard et représente les interactions entre grandes échelles.

L'équation (2.6) devient alors :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{ref}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu_{ref} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial^2 x_j} + \beta(\bar{T} - T_{ref})g_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.24)$$

où τ_{ij} est le tenseur sous-maille défini par :

$$\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \overline{\bar{U}_i \bar{U}_j} \quad (2.25)$$

$$= L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (2.26)$$

Les mêmes décompositions peuvent être faites avec le terme non résolu de l'équation de quantité de mouvement bas Mach. On a alors suivant la décomposition double :

$$\widetilde{U}_i \widetilde{U}_j = (\widetilde{U}_i + \widehat{U}_i'')(\widetilde{U}_j + U_j'') \quad (2.27)$$

$$= \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j + \mathfrak{I}_i U_j'' + \mathfrak{J}_j U_i'' + \widehat{U}_i'' U_j'' \quad (2.28)$$

Ce qui permet de transformer l'équation (2.13) en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j)}{\partial x_j} = & - \frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} \right) \\ & + (\bar{\rho} - \rho_{ref}) g_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.29)$$

où :

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} (\widetilde{U}_i \widetilde{U}_j - \widetilde{\widetilde{U}}_i \widetilde{\widetilde{U}}_j) \quad (2.30)$$

$$= \widetilde{C}_{ij} + \widetilde{R}_{ij} \quad (2.31)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{C}_{ij} = \bar{\rho} (\mathfrak{I}_i U_j'' + \mathfrak{J}_j U_i'') \\ \widetilde{R}_{ij} = \bar{\rho} \widehat{U}_i'' U_j'' \end{array} \right. \quad (2.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{C}_{ij} = \bar{\rho} (\mathfrak{I}_i U_j'' + \mathfrak{J}_j U_i'') \\ \widetilde{R}_{ij} = \bar{\rho} \widehat{U}_i'' U_j'' \end{array} \right. \quad (2.33)$$

En effectuant la décomposition triple, c'est à dire en exprimant : $\bar{\rho} \widetilde{\widetilde{U}}_i \widetilde{\widetilde{U}}_j = \bar{\rho} (\widetilde{\widetilde{U}}_i \widetilde{\widetilde{U}}_j - \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j) + \bar{\rho} \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j = \widetilde{L}_{ij} + \bar{\rho} \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j$, l'équation (2.13) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \widetilde{U}_i \widetilde{U}_j)}{\partial x_j} = & - \frac{\partial \bar{P}'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} \right) \\ & + (\bar{\rho} - \rho_{ref}) g_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.34)$$

où le tenseur τ_{ij} s'exprime :

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} (\widetilde{U}_i \widetilde{U}_j - \widetilde{\widetilde{U}}_i \widetilde{\widetilde{U}}_j) \quad (2.35)$$

$$= \widetilde{L}_{ij} + \widetilde{C}_{ij} + \widetilde{R}_{ij} \quad (2.36)$$

2.1.4 Invariance galiléenne par translation

L'une des propriétés mécanique des équations de Navier-Stokes est l'invariance galiléenne par translation, c'est à dire l'invariance par la transformation :

$$\begin{cases} x^\bullet = x + Vt + b \\ t^\bullet = t \end{cases} \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

où V et b ne varient ni dans l'espace ni dans le temps.

Pour que cette propriété soit conservée en Simulation des Grandes Échelles, il faut vérifier l'invariance galiléenne de l'équation de quantité de mouvement filtrée. Il est possible de montrer (Sagaut (1998, 282 p)), que le filtrage conserve l'invariance galiléenne. Si on s'intéresse aux termes non-résolus qui apparaissent suite au filtrage, on doit d'abord exprimer les vitesses filtrées et sous-maille :

$$\begin{cases} U^\bullet = \frac{\partial x^\bullet}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + V = U + V \\ \overline{U^\bullet} = \overline{U} + V \end{cases} \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

$$\begin{cases} U^{\bullet'} = U^\bullet - \overline{U^\bullet} = U - \overline{U} = U' \\ \widetilde{U^\bullet} = \frac{\rho U^\bullet}{\bar{\rho}} = \frac{\rho U}{\rho} + \frac{\rho V}{\rho} = \widetilde{U} + V \end{cases} \quad (2.41)$$

$$(2.42)$$

$$\begin{cases} U^{\bullet''} = U^\bullet - \widetilde{U^\bullet} = U - \widetilde{U} = U'' \end{cases} \quad (2.43)$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} L_{ij}^\bullet = \overline{U_i^\bullet U_j^\bullet} - \overline{U_i^\bullet} \overline{U_j^\bullet} \\ = L_{ij} + \overline{U_i} V_j + \overline{U_j} V_i - V_j \overline{U_i} - V_i \overline{U_j} \\ = L_{ij} - V_j \overline{U_i'} - V_i \overline{U_j'} \end{cases} \quad (2.44)$$

$$(2.45)$$

$$(2.46)$$

$$\begin{cases} C_{ij}^\bullet = \overline{U_i^\bullet U_j^{\bullet'}} + \overline{U_j^\bullet U_i^{\bullet'}} \\ = C_{ij} + V_i \overline{U_j'} + V_j \overline{U_i'} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

$$\begin{cases} R_{ij}^\bullet = \overline{U_i^{\bullet'} U_j^{\bullet'}} \\ = R_{ij} \end{cases} \quad (2.49)$$

$$(2.50)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{L}_{ij}^{\bullet} = \rho(\tilde{U}_i^{\bullet} \tilde{U}_j^{\bullet} - \tilde{U}_i^{\bullet} \tilde{U}_j^{\bullet}) \\ \quad = \tilde{L}_{ij} - V_j \tilde{U}_i'' - V_i \tilde{U}_j'' \\ \tilde{C}_{ij}^{\bullet} = \rho(\tilde{U}_i^{\bullet} U_j^{\bullet''} + \tilde{U}_j^{\bullet} U_i^{\bullet''}) \\ \quad = \tilde{C}_{ij} + V_i \tilde{U}_j'' + V_j \tilde{U}_i'' \\ \tilde{R}_{ij}^{\bullet} = \rho \tilde{U}_i^{\bullet''} U_j^{\bullet''} \\ \quad = \tilde{R}_{ij} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.51) \\ (2.52) \\ (2.53) \\ (2.54) \\ (2.55) \\ (2.56) \end{array}$$

Ainsi, L_{ij} , C_{ij} , $L_{ij} + R_{ij}$, $C_{ij} + R_{ij}$, \tilde{L}_{ij} , \tilde{C}_{ij} , $\tilde{L}_{ij} + \tilde{R}_{ij}$ et $\tilde{C}_{ij} + \tilde{R}_{ij}$ ne sont donc pas invariants. En revanche, R_{ij} , $L_{ij} + C_{ij}$, $L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$, \tilde{R}_{ij} , $\tilde{L}_{ij} + \tilde{C}_{ij}$ et $\tilde{L}_{ij} + \tilde{C}_{ij} + \tilde{R}_{ij}$ sont invariants. En conséquence, la décomposition triple permet de vérifier l'invariance galiléenne alors que la décomposition double ne le permet pas.

2.1.5 Réalisabilité

Le problème de réalisabilité du tenseur sous-maille a initialement été étudié par Schumann (1977). Le tenseur sous-maille τ_{ij} doit être réalisable (ou défini semi-positif), c'est à dire vérifier les relations suivantes :

$$\tau_{\alpha\alpha} > 0, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.57)$$

$$|\tau_{\alpha\beta}| \leq \sqrt{\tau_{\alpha\alpha} \tau_{\beta\beta}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (2.58)$$

$$\det(\tau) > 0 \quad (2.59)$$

Il est possible de montrer que la positivité du filtre (i.e. $G(x, t) > 0, \forall x$ et $\forall t$) est une condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur τ_{ij} soit réalisable.

2.1.6 Décomposition du terme non linéaire dans l'équation de l'énergie filtrée

Le terme $\overline{U_j T}$ peut lui aussi être décomposé. L'équation (2.7) devient alors :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U_j T}}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial^2 x_j} - \frac{\partial \mathfrak{S}_j}{\partial x_j} \quad (2.60)$$

où \mathfrak{S}_j est le flux sous-maille défini comme suit :

$$\mathfrak{S}_j = L_{jT} + C_{jT} + R_{jT} = \overline{U_j T} - \overline{U_j} \overline{T} \quad (2.61)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{jT} = \overline{\overline{U_j T}} - \overline{U_j} \overline{T} \\ C_{jT} = \overline{U_j T'} + \overline{U_j'} \overline{T} \\ R_{jT} = \overline{U_j' T'} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.62) \\ (2.63) \\ (2.64) \end{array}$$

De la même manière l'équation (2.14) peut être transformée en :

$$C_p \left(\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j\tilde{T})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \overline{P_{thermo}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \mathfrak{S}_j}{\partial x_j} \quad (2.65)$$

où $\mathfrak{S}_j = \tilde{L}_{jT} + \tilde{C}_{jT} + \tilde{R}_{jT} = \bar{\rho}C_p(\widetilde{TU}_j - \tilde{T}\tilde{U}_j)$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{L}_{jT} = \bar{\rho}C_p(\widetilde{U}_j\tilde{T} - \tilde{U}_j\tilde{T}) & (2.66) \\ \tilde{C}_{jT} = \bar{\rho}C_p\overline{U_j T''} + \overline{U_j''\tilde{T}} & (2.67) \\ \tilde{R}_{jT} = \bar{\rho}C_p\overline{U_j''T''} & (2.68) \end{cases}$$

2.1.7 Remarque sur la modélisation sous-maille

Une fois le filtrage et les décompositions effectués, il reste à modéliser les interactions faisant intervenir les échelles sous-maille représentées par les termes τ_{ij} et \mathfrak{S}_j .

Comme le souligne Sagaut (1998, 282 p), pour être utilisable un modèle doit satisfaire deux types d'exigences :

- physiques : il doit conserver les propriétés fondamentales de l'équation de départ (comme par exemple l'invariance galiléenne), s'annuler là où il n'existe pas d'échelles sous-maille, induire un effet de même nature que les interactions sous-maille et ne pas perturber la dynamique des échelles résolues.
- numériques : il doit être d'un coût algorithmique acceptable, ne pas déstabiliser la simulation numérique et être discrétisable.

Les paragraphes suivants présentent différentes modélisations possibles pour les termes τ_{ij} et \mathfrak{S}_j .

2.1.8 Modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij}

Il existe de nombreux modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij} . En effet, beaucoup de déclinaisons des modèles de base ont été développées. Le but étant ici d'exposer les principes de la modélisation de τ_{ij} et d'en donner des exemples, nous décrivons dans cette partie les différentes catégories de modèles et seuls quelques modèles sont présentés en détails. Le lecteur pourra trouver des revues plus complètes de modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij} dans Lesieur et Métais (1996), Sagaut (1998, 282 p) et Meneveau et Katz (2000). Dans son ouvrage, Sagaut (1998, 282 p) propose une classification des différentes modélisations de τ_{ij} . C'est à celle-ci que nous nous référons dans la présente étude. Elle est représentée schématiquement sur la Figure 2.3.

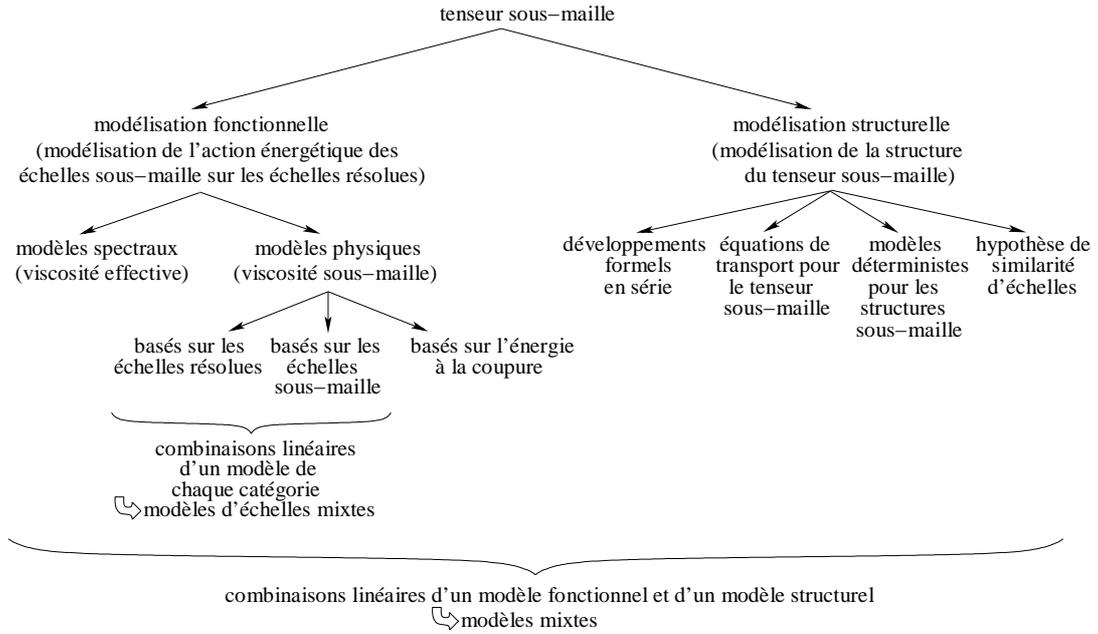


FIG. 2.3 – Représentation schématique de la classification des modèles pour le tenseur sous-maille proposée par Sagaut (1998, 282 p)

Modèles basés sur la viscosité sous-maille (modèles fonctionnels)

Ce type de modèles utilise l'hypothèse de Boussinesq, qui propose de modéliser le terme sous-maille sous une forme analogue à celle du terme visqueux en introduisant une viscosité sous-maille ν_{sm} :

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_{sm}\bar{S}_{ij} \quad (2.69)$$

où \bar{S}_{ij} est le tenseur des déformations filtré :

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.70)$$

Comme seule la partie anisotrope du tenseur sous-maille est modélisée, la partie isotrope de ce tenseur est ajoutée à la pression qui devient alors :

$$P^* = P + \frac{1}{3}\rho\tau_{kk} \quad (2.71)$$

Cette modélisation est basée sur deux hypothèses :

- l'action des échelles sous-maille sur les échelles résolues est essentiellement énergétique,
- on ne considère que la cascade directe d'énergie³, négligeant ainsi la cascade inverse⁴.

1. Modèle de Smagorinsky

Différents modèles proposent des expressions de ν_{sm} . Le plus connu est le modèle de Smagorinsky qui fournit une expression de ν_{sm} en fonction des échelles résolues (Smagorinsky (1963)). ν_{sm} est supposée proportionnelle au produit d'une échelle de longueur caractéristique : $\bar{\Delta}$ et d'une vitesse turbulente caractéristique : $\bar{\Delta}\|\bar{S}\|$, avec $\|\bar{S}\| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$. Pour trouver son expression, on utilise l'analyse dimensionnelle qui donne :

$$\nu_{sm} \propto \tilde{\varepsilon}^{1/3}\bar{\Delta}^{-4/3} \quad (2.72)$$

où $\tilde{\varepsilon}$ est le flux d'énergie à travers la coupure.

Le modèle est développé dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope pleinement développée pour lequel $\tilde{\varepsilon}$ peut être évalué en utilisant la forme du spectre de Kolmogorov : $E(k) = K_o\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$, avec $K_o \sim 1,4$, ainsi que la relation suivante :

$$\langle \|\bar{S}\|^2 \rangle = \langle 2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} \rangle = \int_0^{k_c} 2k^2 E(k) dk \quad (2.73)$$

En faisant de plus l'hypothèse d'équilibre local qui stipule qu'il n'y a pas d'accumulation d'énergie, et donc que le taux d'énergie produite ε_I , le taux d'énergie transférée à

³énergie transférée des grandes échelles vers les petites échelles

⁴faible quantité d'énergie transmise par les petites échelles aux grandes échelles

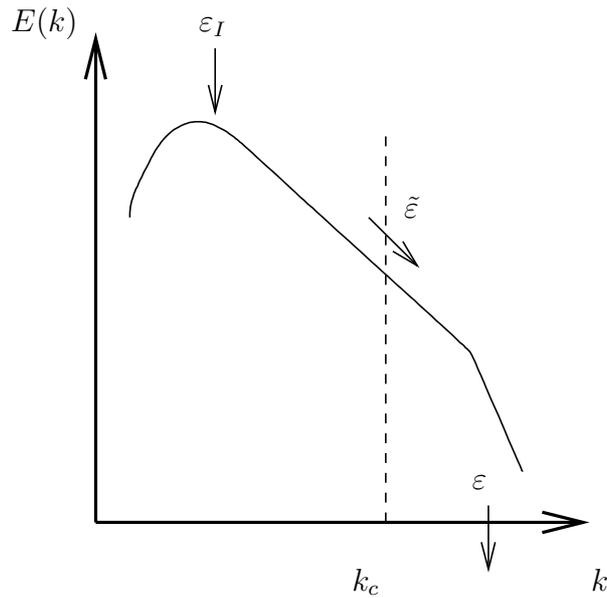


FIG. 2.4 – Transfert d'énergie

travers la coupure $\tilde{\varepsilon}$ et le taux d'énergie dissipée par les effets visqueux ε sont égaux (voir figure 2.4), le modèle de Smagorinsky s'écrit :

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\Delta})^2 \|\bar{S}\| \quad (2.74)$$

où C_s est une constante.

Ce modèle est le plus ancien et le plus simple. Il sert encore souvent de modèle de référence. Cependant il présente plusieurs inconvénients (Germano *et al.* (1991); Meneveau et Katz (2000)) :

- la constante C_s n'est pas universelle, dans la pratique elle doit être adaptée au cas par cas,
- il est trop dissipatif,
- il ne s'annule pas à la paroi,
- il simule mal les régimes de transition laminaire-turbulent,
- il ne peut pas simuler la cascade d'énergie inverse (*backscatter*).

De plus, dans le cadre des faibles nombres de Reynolds les hypothèses menant au spectre de Kolmogorov ne sont plus justifiées et le modèle surestime alors la viscosité sous-maille. Voke (1994) a étudié l'utilisation d'autres formes de spectres plus exactes dans de telles situations. L'allure du spectre peut également être modifiée sous l'effet de mécanismes influant sur la dynamique de la turbulence (intermittence, effets de compressibilité,...). Bataille *et al.* (2005) ont proposé un méthode générale permettant de dériver un modèle sous-maille à partir d'une forme de spectre donnée.

2. Modèle WALE

Nicoud et Ducros (1999) ont proposé le modèle WALE (Wall Adapting Local Eddy), également basé sur les échelles résolues, qui prend en compte à la fois le tenseur des déformations et le tenseur de rotation afin d'améliorer les performances de la LES obtenues avec le modèle de Smagorinsky. Le modèle WALE présente l'avantage d'être invariant par translation ou rotation des coordonnées et d'être utilisable pour des géométries complexes. Sa formulation est :

$$\nu_{sm} = (C_w \bar{\Delta})^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (2.75)$$

où C_w est une constante et $s_{ij}^d = \bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\bar{S}_{mn} \bar{S}_{mn} - \bar{\Omega}_{mn} \bar{\Omega}_{mn})$, $\bar{\Omega}_{ij}$ étant le tenseur de rotation filtré :

$$\bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.76)$$

Les auteurs ont observé les améliorations apportées par ce modèle par rapport au modèle de Smagorinsky dans les cas test de turbulence isotrope et d'un écoulement en canal : la viscosité sous-maille s'annule à la paroi en suivant la loi désirée ($\propto y^3$) et le modèle est capable de simuler les régimes de transition.

3. Modèles de la fonction de structure

Contrairement aux deux précédents, les modèles de cette famille sont basés sur l'évaluation de ν_{sm} à partir de l'énergie à la coupure. L'énergie à la coupure est elle-même exprimée par une fonction de structure notée F_2 :

$$F_2(\vec{x}, \vec{r}, t) = \langle [\bar{U}(\vec{x}, t) - \bar{U}(\vec{x} + \vec{r}, t)]^2 \rangle_{\|\vec{r}\|=\Delta_x} \quad (2.77)$$

Ceci conduit, dans le cas de la turbulence homogène isotrope, à l'expression :

$$\nu_{sm} = 0.105 C_K^{-3/2} \Delta_x [F_2]^{1/2} \quad (2.78)$$

Une description détaillée de ce modèle est donnée par Métais et Lesieur (1992) et Lesieur *et al.* (2005, 219 p).

Des améliorations du modèle de base ont été proposées ultérieurement (Ackermann et Métais (2001); Lesieur *et al.* (2005, 219 p)) :

- modèle de la fonction de structure filtrée,
- modèle de la fonction de structure sélective,
- modèle de la fonction de structure sélective modifiée.

4. Modèles utilisant l'énergie cinétique sous-maille

L'hypothèse de base de ces modèles est que si l'énergie cinétique à la coupure est non nulle, alors il existe une action sous-maille. Comme pour le modèle de Smagorinsky, la viscosité sous-maille est exprimée en fonction d'une échelle de longueur, $\overline{\Delta}$, et d'une échelle de vitesse. Cette dernière est cette fois exprimée en fonction de l'énergie cinétique sous-maille $q_{sm}^2 = \frac{1}{2}\overline{U_i U_j}$.

$$\nu_{sm} = C_m \overline{\Delta} \sqrt{q_{sm}^2} \quad (2.79)$$

où C_m est une constante. q_{sm}^2 est elle-même évaluée à l'aide de son équation d'évolution dans laquelle les termes de diffusion et de dissipation sont modélisés.

5. Modèles d'échelles mixtes

Ces modèles sont obtenus en effectuant une moyenne pondérée d'un modèle basé sur les échelles résolues et d'un autre basé sur l'énergie à la coupure ou l'énergie sous-maille. On considère donc toujours $\overline{\Delta}$ comme étant l'échelle de longueur caractéristique, et, comme échelle de vitesse, on utilise une moyenne pondérée de $\overline{\Delta} \|\overline{S}\|$ et de $\sqrt{q_{sm}^2}$.

Modèles structurels

Les modèles structurels les plus connus sont :

1. Les modèles à équations de transport

Une équation de transport est écrite et résolue pour chaque composante du tenseur sous-maille, après modélisation des différents termes et choix des valeurs des constantes. Cette approche fut initialement proposée par Deardorff dans le cadre de l'étude de la turbulence atmosphérique (se référer à Deardorff (1973) pour une description précise de cette méthode). Un modèle de ce type a récemment été mis au point par Chauat et Schiestel (2005).

2. Les modèles de similarité d'échelles

Ces modèles sont basés sur l'hypothèse de similarité entre la structure des plus grandes échelles sous-maille et celle des plus petites échelles résolues, introduite par Bardina *et al.* (1980). Le tenseur $\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \overline{U_i} \overline{U_j}$ est approximé par $K(\overline{\widehat{U}_i \widehat{U}_j} - \widehat{\overline{U}_i} \widehat{\overline{U}_j})$, où K est une constante et $\widehat{}$ désigne un second filtre, dont la longueur de coupure $\widehat{\Delta}$ est supérieure à la longueur de coupure initiale $\overline{\Delta}$.

Modèles mixtes

Il s'agit d'exprimer le terme sous-maille comme une combinaison linéaire de termes provenant de deux types de modèles différents (un fonctionnel et un structurel). En effet, le point

fort des modèles basés sur une viscosité sous-maille est la reproduction du transfert d'énergie mais ils ne sont pas conçus pour représenter la structure du tenseur sous-maille et souvent ils ne permettent pas la prise en compte du *backscatter*. À l'inverse, les modèles structurels respectent mieux la structure du terme sous-maille et peuvent simuler l'effet de *backscatter* mais sont moins performants en ce qui concerne les transferts d'énergie (ils sont trop peu dissipatifs). Un moyen d'obtenir des modèles qui se comportent correctement dans les deux domaines est donc de combiner un modèle de chaque catégorie (se référer à Sagaut (1998, 282 p) pour des exemples de modèles mixtes).

Amélioration par la méthode dynamique

La méthode dynamique, développée par Germano *et al.* (1991), est basée sur un filtrage multiple, principe proposé par Germano (1992). Elle peut s'appliquer à tous les modèles basés sur la viscosité sous-maille ainsi qu'aux autres modèles faisant apparaître une constante. Elle utilise l'information contenue dans les plus petites échelles résolues pour adapter la valeur de la constante du modèle en chaque point et à chaque pas de temps. Un deuxième filtre (filtre-test, noté $\widehat{\Delta}$) de longueur de coupure $\widehat{\Delta}$ supérieure à $\overline{\Delta}$ est appliqué à l'équation filtrée. On obtient ainsi deux champs de vitesse connus : \overline{U} et \widehat{U} et deux tenseurs sous-maille : τ_{ij} et T_{ij} . Ces derniers sont reliés par le tenseur turbulent résolu \mathcal{L}_{ij} , qui peut être calculé explicitement :

$$\mathcal{L}_{ij} = \overline{U_i U_j} - \widehat{U_i U_j} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij}, \quad (2.80)$$

En supposant que la même forme (même modèle avec la même constante) peut être utilisée pour exprimer T_{ij} et τ_{ij} on obtient une expression permettant de calculer cette constante.

Par exemple, dans le cas du modèle initialement proposé par Germano *et al.* (1991), le modèle de Smagorinsky dynamique, on a :

$$\tau_{ij} = -2C_s^2 \overline{\Delta}^2 \|\overline{S}\| \overline{S}_{ij} \quad (2.81)$$

$$T_{ij} = -2C_s^2 \widehat{\Delta}^2 \|\widehat{S}\| \widehat{S}_{ij} \quad (2.82)$$

soit :

$$\mathcal{L}_{ij} = -2[C_s^2 \widehat{\Delta}^2 \|\widehat{S}\| \widehat{S}_{ij} - (C_s^2 \overline{\Delta}^2 \|\overline{S}\| \overline{S}_{ij})] \quad (2.83)$$

L'équation (2.83) permet d'exprimer la constante C_s si on suppose qu'elle peut être extraite du produit filtré et mise en facteur :

$$\mathcal{L}_{ij} = C_s^2 M_{ij} \quad (2.84)$$

avec :

$$M_{ij} = 2[(\overline{\Delta} \|\overline{S}\| \overline{S}_{ij}) - \widehat{\Delta}^2 \|\widehat{S}\| \widehat{S}_{ij}] \quad (2.85)$$

L'erreur commise est alors : $E_{ij} = \mathcal{L}_{ij} - C_s^2 M_{ij}$. C_s est ensuite calculée en minimisant l'erreur E_{ij} . Cette relation représentant un système d'équations indépendantes, elle donne plusieurs solutions. Afin d'obtenir une solution unique, Germano *et al.* (1991) proposent de contracter E_{ij} avec \overline{S}_{ij} , c'est à dire de résoudre l'équation :

$$\frac{\partial E_{ij} \overline{S}_{ij}}{\partial C_s^2} = 0 \quad (2.86)$$

Cependant des problèmes se posent lorsque \overline{S}_{ij} s'annule. Lilly (1992) propose donc d'utiliser plutôt une minimisation par une approche des moindres carrés :

$$\frac{\partial E_{ij} E_{ij}}{\partial C_s^2} = 0 \quad (2.87)$$

Ceci le conduit à l'expression :

$$C_s^2 = \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{kl} M_{kl}} \quad (2.88)$$

Germano *et al.* (1991) ont testé le modèle de Smagorinsky dynamique pour des écoulements de transition et turbulents en canal. Les résultats obtenus sont plus proches des données de référence calculées par SND que ceux donnés par la méthode de Smagorinsky "statique". Ces tests ont également montré que l'influence du ratio $\alpha = \widehat{\Delta}/\overline{\Delta}$ (seul paramètre ajustable du modèle) sur les résultats n'est pas significative.

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que la constante peut prendre des valeurs négatives et n'est pas bornée, ce qui peut entraîner des instabilités numériques. Afin de remédier à ce problème, il est possible de borner la constante (en la forçant à prendre la valeur 0 lorsqu'elle est négative) et de la moyenner, par exemple spatialement avec les 6 points voisins ou temporellement en chaque point. Germano *et al.* (1991) recommandent d'utiliser un moyennage dans des directions d'homogénéité pour stabiliser la constante. Cette méthode est efficace, cependant elle est limitée au cas des géométries simples qui possèdent une direction d'homogénéité. Ghosal *et al.* (1995) constatent que les instabilités proviennent de l'extraction de C_s du produit filtré (passage de l'équation (2.83) à l'équation (2.84)), ce qui en toute rigueur n'est pas exact. Ils proposent une alternative en modifiant la méthode de calcul de cette constante. Ils minimisent le terme $\int E_{ij}(x) E_{ij}(x) dx$, ce qui les mène à une équation dont la solution n'est pas entachée de problèmes d'instabilité et qui est applicable à tous types d'écoulements. De plus, ils imposent dans la recherche de cette solution la contrainte $C_s > 0$, ce qui évite d'avoir à borner la constante *a posteriori*. Il dérivent deux versions de ce nouveau modèle dynamique, l'une "simple" et l'autre plus complexe, intégrant une équation pour l'énergie cinétique sous-maille afin de permettre le *backscatter*. Meneveau *et al.* (1996) ont quant à eux développé une méthode de stabilisation particulière, dite lagrangienne. Elle consiste à minimiser l'erreur E_{ij} le long de la trajectoire des particules fluides. L'information antérieure sur la particule le long de sa trajectoire est ainsi utilisée pour déterminer la valeur du coefficient C_s au temps présent. La fonction exacte qui est minimisée est alors l'accumulation le long de la trajectoire du carré de l'erreur, pondérée à l'aide d'une fonction $W : \int_{-\infty}^t E_{ij}(z(t'), t') E_{ij}(z(t'), t') W(t - t') dt'$. La fonction de pondération W permet de définir jusqu'à quel point on remonte en arrière le long de la trajectoire et quelle importance est accordée aux événements antérieurs par rapport à l'événement présent. Les auteurs choisissent pour la fonction W une forme exponentielle qui est fonction d'un temps caractéristique T_{lag} , déterminé à partir d'échelles représentatives de l'écoulement. Cette méthode ne permet cependant pas de garantir la positivité de la constante et doit donc être accompagnée de la mise en place de bornes pour limiter C_s .

Autres améliorations

D'autres problèmes posés par les modèles basés sur la viscosité sous-maille peuvent être corrigés en employant :

- des fonctions de sélection,
- la technique d'accentuation,
- des fonctions d'amortissement,
- un filtrage.

Pour une description détaillée de ces méthodes on pourra se référer à Sagaut (1998, 282 p) et Sagaut *et al.* (2000).

Évaluation et comparaison des modèles pour le tenseur sous-maille

Le comportement de différents modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij} lors de simulations des grandes échelles de panaches flottants a été étudié par Worthy (2003). Ses résultats montrent que les différents modèles fonctionnels ont tous une action trop dissipative, l'une des conséquences étant un retard de la transition à la turbulence. L'application de la méthode dynamique lui a permis de mieux représenter la transition et de diminuer l'effet dissipatif. Worthy (2003) a également observé que les modèles structurels permettent de mieux simuler la transition. Dans son étude, les modèles mixtes avec application de la procédure dynamique au terme fonctionnel ont donné de bons résultats, aidant la transition tout en limitant la dissipation.

Vreman *et al.* (1997) ont comparé les performances de six modèles sous-maille pour une couche de mélange temporelle faiblement compressible : le modèle de Smagorinsky et sa version dynamique, le modèle de similarité d'échelles, le modèle du gradient (dérivé du modèle de similarité d'échelles en introduisant des développements de Taylor et en conservant les termes d'ordre le plus petit), un modèle mixte (Smagorinsky et similarité d'échelles) dynamique et un deuxième modèle mixte dynamique (Smagorinsky et gradient). Ils observent que le modèle de Smagorinsky est trop dissipatif, notamment au moment de la transition. Les modèles de similarité d'échelles et du gradient n'apportent pas de nette amélioration, produisant une dissipation insuffisante des petites échelles. Les trois modèles dynamiques donnent de meilleurs résultats. À faible nombre de Reynolds, c'est le modèle mixte dynamique qui est le plus performant et à plus fort nombre de Reynolds, c'est le modèle de Smagorinsky dynamique qui reproduit le mieux le comportement escompté.

Dans leur synthèse des résultats obtenus dans le cadre d'un projet européen sur la SGE de l'écoulement autour d'un profil d'aile, Mellen *et al.* (2003) présentent notamment les conclusions relatives à l'utilisation de différents modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij} . Les simulations réalisées ne permettent pas de mettre en avant la supériorité de l'un des modèles testés (modèle de Smagorinsky avec et sans procédure dynamique, modèle WALE, modèle mixte sélectif, modèle de Smagorinsky avec fonction d'amortissement). La résolution du maillage utilisé étant un paramètre influant très fortement sur la qualité des résultats obtenus, l'effet du modèle sous-maille apparaît insignifiant dans cette étude.

Divers modèles mixtes ont été évalués et comparés au modèle de Smagorinsky par Sarghini *et al.* (1999) dans le cas du canal plan 2D à haut nombre de Reynolds et dans celui d'un écoulement 3D en déséquilibre sous l'effet d'un mouvement transversal de la paroi basse du canal. Les

modèles mixtes se montrent plus précis que le modèle de Smagorinsky dans ces configurations et l'application de la procédure dynamique Lagrangienne apporte une nette amélioration des performances des différents modèles. Le modèle mixte dynamique avec stabilisation Lagrangienne à un coefficient apparaît comme le plus efficace dans cette étude.

Brillant (2004) a comparé des modèles dynamiques avec diverses méthodes de stabilisation de la constante au modèle WALE dans le cas de l'écoulement d'air dans un canal plan turbulent à $Re_\tau \approx 180$. Il constate lui aussi que le choix du modèle sous-maille pour le tenseur τ_{ij} n'influe pas beaucoup sur les résultats. Le modèle dynamique avec la procédure de stabilisation lagrangienne donne des résultats légèrement plus proches de la SND mais seul le modèle WALE permet d'assurer que la viscosité sous-maille suive une loi en y^3 à la paroi.

2.1.9 Modèles sous-maille pour le flux \mathfrak{S}_j

La modélisation sous-maille pour le flux \mathfrak{S}_j (ou modélisation sous-maille thermique) a été moins étudiée que la modélisation sous-maille pour le tenseur τ_{ij} . Depuis quelques années, différents types de modèles sous-maille thermiques ont toutefois été développés. Trois catégories principales se distinguent : les modèles faisant appel à la notion de diffusivité sous-maille algébrique, ceux introduisant une diffusivité sous-maille tensorielle et ceux basés sur la structure du champ de température sous-maille qui n'utilisent pas le concept de diffusivité sous-maille. Les différents modèles thermiques trouvés dans la littérature peuvent être classés selon ces trois familles, comme proposé sur la Figure 2.5. Étant donné que peu de revues sur les modèles sous-maille thermiques ont été réalisées à l'heure actuelle, nous faisons ici une présentation relativement détaillée des modèles trouvés dans la littérature.

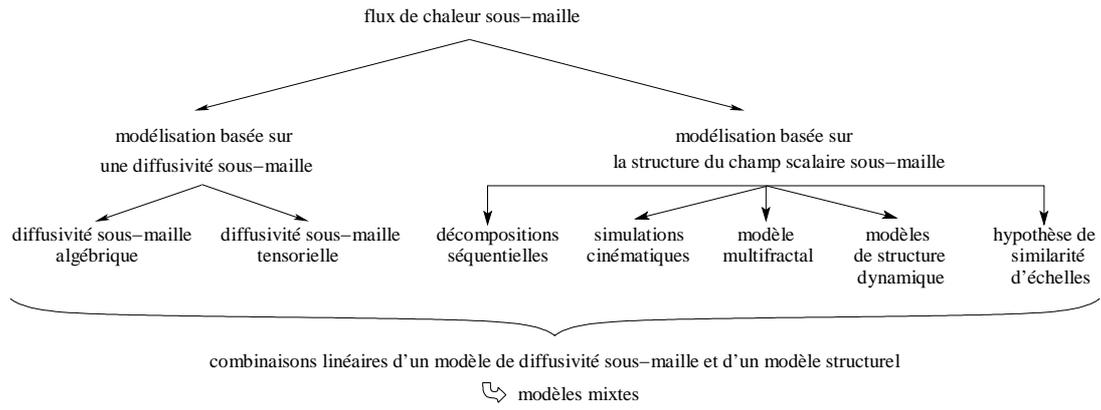


FIG. 2.5 – Proposition de classification des modèles pour le flux de chaleur sous-maille

Modèles basés sur une diffusivité sous-maille algébrique

1. Modèles à nombre de Prandtl sous-maille imposé

Ces modèles peuvent être considérés comme une analogie avec la loi de Fourier (Montreuil (2000)). Ils introduisent une diffusivité sous-maille κ_{sm} pour modéliser le flux sous-maille :

$$\mathfrak{S}_j = -\kappa_{sm} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (2.89)$$

La diffusivité thermique sous-maille κ_{sm} est exprimée en fonction de la viscosité sous-maille ν_{sm} et du nombre de Prandtl sous-maille Pr_{sm} :

$$\kappa_{sm} = \frac{\nu_{sm}}{Pr_{sm}} \quad (2.90)$$

La valeur du nombre de Prandtl sous-maille est fixée (généralement comprise entre 0.6 et 0.9) et l'une des expressions définies dans le paragraphe 2.1.8 est utilisée pour ν_{sm} :

- modèle de Smagorinsky,
- modèle de la fonction de structure,
- etc

Ce modèle est le plus simple, le plus connu et le plus communément utilisé. Cependant, il présente plusieurs inconvénients. Par exemple, il ne peut pas prendre en compte l'anisotropie. De plus, il suppose que κ_{sm} ne dépend que du champ de vitesse résolu et pas du champ de température résolu, hypothèse qui s'avère fautive dans certains types d'écoulements. Comme le montre l'étude menée par Brillant (2004), il ne permet pas à la diffusivité sous-maille d'avoir le bon comportement asymptotique en proche paroi pour certains types de conditions aux limites thermiques. Enfin, l'équation (2.90) impose que ν_{sm} soit nulle lorsque κ_{sm} est nulle et inversement. Ceci signifie que lorsque toutes les échelles thermiques sont résolues, toutes les échelles dynamiques le sont et réciproquement, ce qui en général n'est pas exact (Montreuil (2000)). Bataille *et al.* (2005) ont proposé une méthode générale pour dériver des modèles de diffusivité sous-maille en prenant en compte un spectre de température de forme donnée et une fréquence de coupure thermique indépendante de celle du champ dynamique et donc potentiellement différente de celle-ci.

2. Modèle d'échelles mixtes

Constatant que les modèles à Pr_{sm} constant ne sont pas appropriés dans le cas d'un problème couplé de convection naturelle, Sergent *et al.* (2003, 2000) ont proposé un modèle d'échelles mixtes dérivé du modèle d'échelles mixtes pour la viscosité sous-maille. Dans ce modèle la diffusivité sous-maille κ_{sm} est définie comme la moyenne géométrique de deux termes, l'un basé sur les échelles résolues, l'autre basé sur l'énergie du flux de chaleur sous-maille.

Pour le premier terme il est supposé que $\kappa_{sm} = l_o^2/t_o$ où l_o et t_o sont respectivement l'échelle de longueur et l'échelle de temps caractéristiques. l_o est prise proportionnelle à $\bar{\Delta}$. t_o est exprimée en fonction de la longueur de coupure $\bar{\Delta}$, d'un écart caractéristique de

température $\Delta\theta$ et de $|\overline{T}^2| = 2\overline{T}_{i\theta}\overline{T}_{i\theta}$, où $\overline{T}_{i\theta} = \frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}\overline{S}_{ij}$.

Le second terme est obtenu par analyse dimensionnelle en utilisant l'énergie du flux de chaleur sous-maille Φ_{sm}^2 .

Les auteurs ont ainsi proposé l'expression suivante :

$$\kappa_{sm} = C_a \frac{\overline{\Delta}^{-2\alpha+1}}{\Delta\theta} |\overline{T}^2|^{\alpha/2} |\Phi_{sm}^2|^{(1-\alpha)/2} \quad (2.91)$$

où C_a est une constante et $0 < \alpha < 1$

Ce modèle a été testé pour $\alpha = 1/2$ dans le cas de convection naturelle en cavité bidimensionnelle carrée remplie d'air pour un nombre de Rayleigh de 5.10^{10} (Sergent *et al.* (2003, 2000)). Il a été comparé à un calcul en SND et à un calcul en SGE avec un modèle à Pr_{sm} fixé ($Pr_{sm} = 0.6$). Le modèle mixte a donné des résultats en accord avec ceux de la SND pour les champs moyens de vitesse et de température, les grandeurs turbulentes associées et la localisation de la zone de transition. En comparaison le modèle à Pr_{sm} imposé a donné de moins bons résultats, en particulier dans les zones de recirculation et pour la prédiction de la transition (Sergent *et al.* (2003)).

Modèles basés sur une diffusivité sous-maille tensorielle

1. Modèle basé sur la convection par un tourbillon

Pullin (2000) a proposé un modèle pour le flux sous-maille d'un scalaire passif, valide pour des valeurs du nombre de Schmidt $Sc \ll 1$. Le terme \mathfrak{S}_j est modélisé en considérant qu'il est principalement dû à la convection du champ de température résolu par le champ de vitesse d'un modèle de tourbillon sous-maille à symétrie axiale. L'expression finale obtenue pour \mathfrak{S}_j est :

$$\mathfrak{S}_j = -\frac{\gamma\overline{\Delta}}{2} (q_{sm}^2)^{1/2} (\delta_{jp} - e_j^v e_p^v) \frac{\partial\overline{T}}{\partial x_p} \quad (2.92)$$

où e_j^v et e_p^v sont les cosinus directeurs des axes du tourbillon et γ est une constante (que l'auteur propose égale à l'unité). L'énergie cinétique sous-maille q_{sm}^2 est évaluée à partir du spectre d'énergie sous-maille $E(k)$:

$$q_{sm}^2 = \int_{k_c}^{\infty} E(k) dk \quad (2.93)$$

Avec ce modèle, chaque composante du flux sous-maille dépend des gradients de température dans les trois directions. Ainsi le flux de chaleur sous-maille dans une direction n'est pas forcément nul si le gradient de température dans la direction considérée est nul. Le modèle a été testé dans le cas de turbulence forcée homogène et isotrope en présence d'un gradient de température principal pour un nombre de Schmidt de 0.7. Des calculs ont été faits avec différentes variantes du modèle (obtenues en prenant différents spectres d'énergie) pour $27 < Re'_\lambda < 1540$ (Re'_λ étant le nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor et sur l'écart-type de la vitesse). Les variances de température obtenues

ont des allures proches de celles calculées par SND. L'utilisation du modèle améliore les résultats par rapport à un calcul sans modèle sous-maille thermique, principalement aux nombres de Reynolds élevés. L'étude des dissipations scalaires confirme l'importance d'utiliser un modèle sous-maille thermique pour les nombres de Reynolds élevés : pour $Re'_\lambda > 500$ la quasi totalité de la dissipation provient du terme sous-maille. Cependant les allures de spectre obtenues avec ce modèle laissent penser qu'il est trop dissipatif près de la coupure (Pullin (2000)).

2. Modèles dérivés du modèle GGDH

Pour les méthodes RANS un modèle appelé GGDH (*Generalised Gradient Diffusion Hypothesis*) a été développé par Daly et Harlow (1970). Il exprime la corrélation entre les fluctuations de vitesse et de température $\langle u_i \theta \rangle$ en fonction des gradients de température via la tenseur de Reynolds $\langle u_j u_k \rangle$ et une échelle de temps caractéristique de la turbulence.

Peng et Davidson (2002) proposent de suivre la même idée en formulant :

$$\mathfrak{S}_j = -C_\theta \mathcal{T}_{sm} \tau_{jk} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (2.94)$$

où C_θ est une constante, \mathcal{T}_{sm} est une échelle de temps sous-maille et τ_{jk} est le tenseur sous-maille.

En prenant $\mathcal{T}_{sm} \propto \bar{\Delta}^2 / \nu_{sm}$ et $\tau_{ij} = -2\nu_{sm} S_{ij}$ ils obtiennent :

$$\mathfrak{S}_j = C_t \bar{\Delta}^2 \bar{S}_{jk} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (2.95)$$

où la constante C_t est déterminée par la procédure dynamique décrite précédemment.

Tout comme le modèle précédent, ce modèle présente l'avantage de prendre en compte les gradients de température dans les trois directions pour chaque composante du flux sous-maille.

Ce modèle a été testé dans le cas d'un écoulement dans un canal vertical infini aux parois portées à des températures différentes et avec effets de flottaison pour un nombre de Rayleigh de $5.4 \cdot 10^5$ et un nombre de Prandtl de 0.71 (Peng et Davidson (2002)). Il a été comparé à un modèle à Pr_{sm} imposé et à des calculs en SND. Le modèle de Smagorinsky modifié pour prendre en compte les effets de flottaison a été utilisé pour ν_{sm} . La procédure dynamique a été appliquée pour le calcul des constantes intervenant dans les modèles. Les profils moyens et les fluctuations de vitesse et de température obtenus avec les deux modèles sont similaires et en assez bon accord avec la SND. Cependant, seul le modèle GGDH permet d'obtenir un flux sous-maille longitudinal supérieur au flux sous-maille transversal, comme cela doit être le cas dans la configuration étudiée (Peng et Davidson (2002)).

Worthy (2003) a également proposé deux modèles dérivés du modèle GGDH. L'auteur constate que pour l'écoulement test utilisé, un panache avec effets de flottaison, ces modèles ont un comportement plus satisfaisant que le modèle à Pr_{sm} imposé, notamment en ce qui concerne la simulation de la transition.

3. Modèles vectoriels explicite et implicite

Montreuil *et al.* (1999, 2005) ont proposé deux autres modèles tensoriels basés sur des fermetures utilisées pour les méthodes RANS.

Le premier modèle, appelé modèle explicite, décompose \mathfrak{S}_j en deux parties : une partie isotrope faisant intervenir une diffusivité sous-maille algébrique et une partie anisotrope utilisant une diffusivité sous-maille tensorielle :

$$\mathfrak{S}_j = -\kappa_{sm} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - (\kappa_{sm}^A)_{jk} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (2.96)$$

avec (voir Montreuil (2000), Montreuil *et al.* (1999) et Montreuil *et al.* (2005)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{sm} = C_\kappa \varepsilon_{sm} \left(\frac{q_{sm}^T}{\varepsilon_{sm}^T} \right)^2 \\ (\kappa_{sm}^A)_{jk} = C_1 \varepsilon_{sm} \left(\frac{q_{sm}^T}{\varepsilon_{sm}^T} \right)^3 (C_2 \bar{S}_{jk} + C_3 \bar{\Omega}_{jk}) \end{array} \right. \quad (2.97)$$

$$(2.98)$$

où le taux de dissipation d'énergie cinétique sous-maille ε_{sm} , la variance de température sous-maille q_{sm}^T et la dissipation de variance de température sous-maille ε_{sm}^T , sont donnés par des relations algébriques en fonction de $\bar{\Delta}$ et q_{sm}^2 . On obtient donc au final :

$$\mathfrak{S}_j = -C'_1 \bar{\Delta} \sqrt{q_{sm}^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \bar{\Delta}^2 (C'_2 \bar{S}_{jk} + C'_3 \bar{\Omega}_{jk}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (2.99)$$

Le second modèle, dit modèle implicite, consiste à écrire puis simplifier l'équation d'évolution du flux sous-maille \mathfrak{S}_j , ce qui conduit à :

$$\mathfrak{S}_j = - \left(\frac{C_T}{t_\star} \delta_{ij} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right)^{-1} \tau_{ik} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (2.100)$$

où $t_\star = q_{sm}^2 / \varepsilon_{sm}$ et où la constante C_T est calculée en fonction du nombre de Prandtl et du nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement (se reporter aux références Montreuil (2000) et Montreuil *et al.* (1999) pour plus de détails).

Ces modèles ont été comparés au modèle à Pr_{sm} fixé, à sa variante dynamique et à des modèles mixtes (voir paragraphe suivant) dans le cas d'un écoulement en canal plan pour $Re_b = 5500$ (Montreuil (2000); Montreuil *et al.* (1999)). Le modèle sous-maille choisi pour le tenseur τ_{ij} est un modèle d'échelles mixtes avec fonction de sélection. Les profils moyens de température obtenus avec tous les modèles sont en adéquation avec les calculs de SND utilisés comme référence. Par contre, les grandeurs fluctuantes, les flux sous-maille et les dissipations de variance de température obtenus diffèrent significativement d'un modèle à l'autre. Les auteurs constatent que les modèles explicite et implicite ne sont pas satisfaisants : le modèle implicite est trop dissipatif et ne permet pas à la dissipation de s'annuler à la paroi ; le modèle explicite ne donne pas de bons résultats pour des nombres de Prandtl supérieurs à l'unité.

Modèles basés sur la structure du champ de température sous-maille

1. Modèles utilisant la similarité d'échelles et modèles mixtes

Dans Montreuil *et al.* (1999), Montreuil (2000), Montreuil *et al.* (2005) et Jaber et Colucci (2003) sont proposées des extensions du modèle de similarité d'échelles et du modèle mixte (présentés précédemment pour la modélisation de τ_{ij}) au cas d'un scalaire passif⁵. Le modèle est obtenu en utilisant dans les termes C_{jT} et R_{jT} de l'équation (2.61) les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \overline{AB} \approx \bar{A}\bar{B} & (2.101) \\ \overline{U'_j} \approx \bar{U}_j - \bar{\bar{U}}_j & (2.102) \\ \overline{T'} \approx \bar{T} - \bar{\bar{T}} & (2.103) \end{cases}$$

Le modèle de similarité d'échelles pour le flux sous-maille s'écrit alors :

$$\mathfrak{S}_j = C_{se} \mathcal{L}_{jT} \quad (2.104)$$

où C_{se} est une constante et \mathcal{L}_{jT} est défini par :

$$\mathcal{L}_{jT} = \overline{\bar{U}_j \bar{T}} - \bar{\bar{U}}_j \bar{\bar{T}} \quad (2.105)$$

Le modèle mixte proposé par les mêmes auteurs consiste à combiner le modèle de similarité d'échelles présenté ci-dessus avec un modèle à diffusivité sous-maille algébrique :

$$\mathfrak{S}_j = -\kappa_{sm} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + C'_{se} (\overline{\bar{U}_j \bar{T}} - \bar{\bar{U}}_j \bar{\bar{T}}) \quad (2.106)$$

Les auteurs proposent alors d'appliquer la méthode de calcul dynamique des constantes. Un modèle mixte de ce type a également été proposé par Erlebacher *et al.* (1992) pour la simulation d'écoulements compressibles. Cependant, la dérivation de ce modèle est présentée différemment. En effet, les auteurs partent du constat que le terme L_{jT} est calculable directement et choisissent alors de le laisser tel quel et de modéliser C_{jT} par un terme de similarité d'échelles et R_{jT} en utilisant une diffusivité sous-maille algébrique. Cela donne au final :

$$\mathfrak{S}_j = \rho C_p \left[-\kappa_{sm} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + (\widetilde{\bar{U}_j \bar{T}} - \tilde{\bar{U}}_j \tilde{\bar{T}}) \right] \quad (2.107)$$

Cette expression est identique à (2.106), à deux exceptions près : le filtrage considéré est un filtrage de Favre et un facteur ρC_p est à prendre en compte car les équations compressibles sont considérées.

Jaber et Colucci (2003) ont notamment comparé ces modèles au modèle à Pr_{sm} fixé en prenant des calculs en SND comme référence. Leurs tests ont été effectués pour trois

⁵On rappelle que l'hypothèse de similarité d'échelles consiste à supposer que les plus grandes échelles sous-maille sont du même ordre de grandeur que les plus petites échelles résolues.

types d'écoulements : turbulence homogène isotrope, turbulence homogène cisailée et couches de mélanges pour un nombre de Schmidt de 0.7. Ils montrent que les modèles de similarité d'échelles et mixte apportent une amélioration par rapport au modèle à Pr_{sm} constant.

Lors de leurs tests comparatifs dans le cas du canal plan, Montreuil *et al.* (1999, 2005) ont notamment utilisé deux modèles mixtes. Pour le premier modèle mixte, la constante C'_{se} est prise égale à l'unité et la constante intervenant dans κ_{sm} est calculé dynamiquement. Pour le deuxième, la procédure dynamique est appliquée aux deux constantes. Les auteurs constatent que ces modèles ont une action essentiellement dissipative. L'ajout du terme de type similarité d'échelles n'apporte donc pas les améliorations souhaitées.

Katopodes *et al.* (2000) ont proposé des modèles basés sur le développement en série de Taylor de T et u_j . En introduisant ces développements tronqués au second ordre dans l'équation (2.61) les auteurs obtiennent un modèle du type similarité d'échelles. L'introduction de développements tronqués à des ordres supérieurs leur permet de proposer d'autres modèles plus complexes mais aussi plus précis. Ces modèles présentent l'avantage de ne pas faire intervenir de paramètre à calculer.

Les auteurs ont réalisé des tests a priori de modèles du second, quatrième et sixième ordre dans le cas d'écoulements homogènes cisailés stratifiés à faible nombre de Reynolds (Katopodes *et al.* (2000)). Ces tests montrent que les modèles proposés sont en meilleur accord avec la SND que le modèle à Pr_{sm} fixé. En particulier, plus le modèle est d'ordre élevé plus les résultats obtenus sont proches de ceux calculés en SND.

Jimenez *et al.* (2001b) ont effectué une étude comparative entre les modèles à Pr_{sm} fixé, les modèles de similarité d'échelles et les modèles mixtes dans le cas des couches de mélange avec $Sc = 0.7$ et $Re_T = 300$. Les auteurs ont reporté que, même si a priori le modèle mixte semble être le seul capable de reproduire à la fois les transferts direct et inverse d'énergie, le choix du modèle sous-maille thermique n'a au final qu'une influence très faible sur les résultats. En effet, leurs tests *a posteriori* montrent que c'est le choix du modèle sous-maille pour τ_{ij} qui détermine la qualité des résultats obtenus et que celle-ci est meilleure lorsqu'un modèle mixte est utilisé.

2. Modèle de structure dynamique

Un autre type de modèle sous-maille thermique, applicable à n'importe quel champ se comportant comme un scalaire passif, a été proposé par Chumakov et Rutland (2004, 2005). Ce modèle peut être vu soit comme un cas particulier de modèle de similarité d'échelles, soit comme un modèle proportionnel à la variance scalaire sous-maille θ_v dont la constante est exprimée à l'aide de la méthode dynamique. Selon ce modèle, le flux de chaleur sous-maille est calculé par :

$$\mathfrak{S}_j = \frac{\theta_v}{\Theta_v} \left[\widehat{\overline{U_i T}} - \widehat{\overline{U_i}} \widehat{\overline{T}} \right] \quad (2.108)$$

où $\widehat{\cdot}$ désigne un filtre test et $\Theta_v = \widehat{T\overline{T}} - \widehat{\overline{T}}\widehat{T}$ est la variance scalaire sous-maille de \overline{T} au niveau du filtre test, qui est calculable à partir du champ résolu. La variance scalaire sous-maille de T au niveau du filtre de base, $\theta_v = \overline{T^2} - \overline{T}^2$, est obtenue en résolvant son équation de transport :

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i \theta_v}{\partial x_i} = 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D \frac{\partial \theta_v}{\partial x_i} \right] - \chi - \mathfrak{S}_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} + o(\Delta^4) \quad (2.109)$$

où D est le coefficient de diffusion. Dans cette équation apparaît une forme modifiée du taux de dissipation sous-maille scalaire :

$$\chi = D \left[\overline{\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right] \quad (2.110)$$

que les auteurs proposent de modéliser par :

$$\chi = C_\chi 2D \frac{\theta_v}{\Theta_v} \left[\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} - \frac{\widehat{\partial T}}{\partial x_i} \frac{\widehat{\partial T}}{\partial x_i} \right] \quad (2.111)$$

où C_χ est une constante que les auteurs recommandent de prendre égale à 2.

Des tests *a priori* ont été réalisés dans le cas où la température est un scalaire passif pour une couche de mélange, un écoulement de Couette et un écoulement en canal. Ils ont permis de montrer la robustesse du modèle, c'est à dire sa faible dépendance vis à vis de la taille et de la forme des deux filtres utilisés (la meilleure performance étant obtenue pour $\widehat{\Delta} = \overline{\Delta}$), ainsi que ses bonnes performances en comparaison d'un modèle dynamique et d'un modèle de similarité d'échelles.

Des tests *a posteriori* dans le cas de la couche de mélange incompressible ont montré un bon accord général avec des résultats de SND de référence.

3. Modèles basés sur des décompositions séquentielles

Jaberi et Colucci (2003) ont proposé des modèles basés sur une autre décomposition du terme non linéaire. En redécomposant le terme $\overline{U_j T}$ de l'équation (2.62), les auteurs ont obtenu de nouvelles définitions des tenseurs de Léonard, croisé et de Reynolds composant \mathfrak{S}_j :

$$\mathfrak{S}_j = L'_{jT} + C'_{jT} + R'_{jT} \quad (2.112)$$

avec :

$$\begin{cases} L'_{jT} = \overline{\overline{U_j T}} - \overline{\overline{U_j}} \overline{\overline{T}} & (2.113) \\ C'_{jT} = (\overline{\overline{U_j T'}} - \overline{\overline{U_j}} \overline{\overline{T'}}) + (\overline{\overline{U'_j T}} - \overline{\overline{U'_j}} \overline{\overline{T}}) & (2.114) \\ R'_{jT} = \overline{\overline{U'_j T'}} - \overline{\overline{U'_j}} \overline{\overline{T'}} & (2.115) \end{cases}$$

Les tenseurs C'_{jT} et R'_{jT} sont ensuite à leur tour décomposés en termes de Léonard, croisés et de Reynolds afin de séparer les parties contenant des informations sur le champ résolu

de celles contenant des informations sur le champ non-résolu qui doivent être modélisées. Une fois toutes ces décompositions effectuées, le flux sous-maille s'exprime :

$$\mathfrak{S}_j = \phi_{jT} + \psi_{jT} \quad (2.116)$$

où ϕ_{jT} est l'ensemble des termes connus (calculable directement) et ψ_{jT} regroupe tous les termes inconnus et peut lui-même être décomposé en une partie de Léonard, une partie croisée et une partie de Reynolds.

Deux modélisations sont proposées pour le terme ψ_{jT} : dans la première les termes croisés et de Reynolds de ψ_{jT} sont négligés, dans la seconde ils sont supposés proportionnels au terme de Léonard de ψ_{jT} .

Enfin, les auteurs proposent un troisième modèle qui utilise l'expression (2.112). Ils y négligent plusieurs termes, ne conservant que L'_{jT} et un terme proportionnel à la partie de Léonard de R'_{jT} .

Les constantes de ces modèles sont calculées dynamiquement. Les tests effectués par Jaber et Colucci (2003) dans le cas de turbulence homogène et isotrope, de turbulence homogène cisailée et de couches de mélange montrent que ces modèles permettent d'obtenir des résultats plus proches de ceux calculés par SND que les autres modèles utilisés (modèle à Pr_{sm} constant, modèle de similarité d'échelles et modèle mixte, avec application de la procédure dynamique dans tous les cas).

4. Simulations cinématiques

Flohr et Vassilicos (2000) ont proposé l'utilisation de la simulation cinématique pour modéliser la structure du champ de vitesse qui transporte un champ scalaire sous-maille (comme par exemple la température). Pour cela le champ scalaire est représenté par un nuage de particules transportées par le champ de vitesse. Ainsi l'équation (2.7) est remplacée par :

$$dx = U dt + \sqrt{2\kappa} dW(t) \quad (2.117)$$

où x est la position, $dW(t)$ est un bruit blanc et U est la vitesse Lagrangienne.

Les auteurs utilisent la décomposition $U = \bar{U} + U'$ et approchent U' par un champ de vitesse aléatoire généré en sommant des modes de Fourier :

$$U' \approx U_{KS} = \sum_{n=1}^{N_k} (a_n \cos(k_n x + \omega_n t) + b_n \sin(k_n x + \omega_n t)) \quad (2.118)$$

Le couplage entre les grandes échelles (calculées par SGE) et les petites échelles (calculées par simulation cinématique) s'effectue en assurant l'égalité des taux de dissipation ε_{LES} et ε_{KS} .

5. Modèle multifractal

Burton (2004, 2005) a dérivé et testé un modèle pour le flux de chaleur sous-maille basé sur des constatations antérieures de la structure multifractale du taux de dissipation d'un

scalaire dans la zone inertielle à haut nombre de Reynolds. L'auteur est parti d'une décomposition double et non triple du terme non linéaire de l'équation de l'énergie :

$$\mathfrak{S}'_j = \overline{U_j T} - \overline{\overline{U_j T}} = \overline{\overline{U_j T}'} + \overline{U'_j \overline{T}} + \overline{U'_j T'} \quad (2.119)$$

La modélisation multifractale consiste alors à exprimer les termes U'_j et T' en se basant sur leur structure particulière afin de calculer directement \mathfrak{S}'_j . L'auteur a utilisé pour U'_j une expression dérivée lors d'une étude précédente sur le comportement multifractal du champ de vortacité. Pour T' , il a représenté la distribution spatiale du gradient de T' par deux cascades : une cascade multifractale multiplicative pour la norme du gradient et une cascade de décorrélation pour son orientation. L'expression du champ scalaire sous-maille T' est ensuite obtenue par inversion à l'aide de fonctions de Green. La formulation finale de ce modèle s'écrit :

$$\mathfrak{S}'_j = \mathbf{D} \overline{\overline{U_j T^\Delta}} + \mathbf{B} \overline{U_j^\Delta \overline{T}} + \mathbf{B} \mathbf{D} \overline{U_j^\Delta T^\Delta} \quad (2.120)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{D} sont des coefficients qui sont exprimés en fonction du nombre d'étapes dans la cascade pour le champ sous-maille et qui dépendent peu du nombre de Reynolds considéré. U_j^Δ et T^Δ sont les champs de vitesse et de température associés aux plus petites échelles résolues.

Ce modèle a été testé dans le cadre du mélange d'un scalaire passif en turbulence homogène isotrope avec un gradient scalaire moyen (Burton (2004, 2005)). L'auteur a observé qu'il permet de reproduire correctement la pente du spectre d'énergie scalaire, le renforcement de l'intermittence lorsque le nombre de Reynolds augmente ainsi que l'anisotropie de champ scalaire dans la zone inertielle et dissipative.

Améliorations

1. Méthode dynamique

Moin *et al.* (1991) ont adapté la procédure dynamique proposée par Germano *et al.* (1991) (voir paragraphe 2.1.8) à la modélisation sous-maille thermique dans le cas général des écoulements compressibles. Le principe est le même que pour le tenseur sous-maille τ_{ij} : la constante intervenant dans les modèles basés sur une diffusivité sous-maille est adaptée en tout point et à chaque pas de temps à l'aide de l'information contenue dans les plus petites échelles résolues. Ainsi, dans la pratique, le nombre de Prandtl sous-maille de l'expression (2.90) ne prend plus une valeur fixée mais est calculé dynamiquement en même temps que la constante intervenant dans l'expression de la viscosité sous-maille.

Les auteurs ont choisi d'exprimer ν_{sm} par le modèle de Smagorinsky⁶. En appliquant un filtre-test de longueur de coupure $\widehat{\Delta}$ supérieure à $\overline{\Delta}$ aux équations ils obtiennent deux flux

⁶La procédure dynamique peut cependant être appliquée avec toute autre expression de ν_{sm} .

sous-maille :

$$\mathfrak{S}_j = -2C'^2 \overline{\Delta}^2 \|\overline{S}\| \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} \quad (2.121)$$

$$\mathcal{T}_j = -2C'^2 \widehat{\Delta}^2 \|\widehat{S}\| \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_j} \quad (2.122)$$

où C'^2 regroupe la constante du modèle de Smagorinsky et le nombre de Prandtl sous-maille : $C'^2 = C_s^2 / Pr_{sm}$.

Ils introduisent ensuite le flux turbulent résolu \mathbf{L}_j :

$$\mathbf{L}_j = \mathcal{T}_j - \widehat{\mathfrak{S}}_j = -2 \left[C'^2 \widehat{\Delta}^2 \|\widehat{S}\| \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_j} - (C'^2 \overline{\Delta}^2 \|\overline{S}\| \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}) \right] \quad (2.123)$$

Comme dans le cas de la modélisation de τ_{ij} , la constante C'^2 est extraite du filtrage et mise en facteur. La minimisation de l'erreur ainsi commise permet alors d'estimer C'^2 . Ici encore, Lilly (1992) propose d'utiliser une minimisation du type moindres carrés.

Moin *et al.* (1991) ont calculé les valeurs de $C_s^2(x, y, z, t)$ et $Pr_{sm}(x, y, z, t)$ *a priori* par SND dans trois configurations : turbulence isotrope à faible nombre de Reynolds ($Re_\lambda = 35, 1$ et $Re_\lambda = 50$)⁷, écoulement homogène incompressible cisailé à faible nombre de Reynolds ($Re_\lambda = 26$ et $Re_\lambda = 52$) et écoulement en canal ($Re_b = 3\,300$) pour des nombres de Prandtl variant de 0.1 à 2. L'évolution observée de $Pr_{sm}(x, y, z, t)$ en fonction des paramètres de l'écoulement est conforme à celle obtenue pour le nombre de Prandtl total en SND.

Le modèle a ensuite été appliqué à la SGE dans le cadre de la turbulence isotrope pour des écoulements quasi-incompressibles ($60 < Re_\lambda < 72$) et compressibles. Les résultats obtenus (énergie cinétique turbulente et spectres d'énergie) sont proches des résultats expérimentaux et de ceux calculés en SND. En écoulement compressible à plus haut nombre de Reynolds ($Re_\lambda = 250$) le modèle a été comparé au modèle à Pr_{sm} constant. Contrairement à ce dernier, le modèle dynamique n'a pas produit d'accumulation d'énergie excessive aux nombres d'onde élevés.

Dans les études de Brillant (2004) et Brillant *et al.* (2006) sont proposés des modèles de type dynamique avec adaptation au flux sous-maille des différentes procédures de stabilisation de la constante présentés dans la section 2.1.8 (moyennage sur 6 points, moyennage dans une direction d'homogénéité, moyennage eulérien, moyennage lagrangien). Ils sont comparés au modèle à Pr_{sm} constant et à des calculs en SND dans le cas de l'écoulement d'air dans un canal plan turbulent à $Re_\tau \approx 180$. Les résultats montrent que dans une telle configuration, relativement simple et avec de faibles écarts de température, l'influence du modèle sous-maille thermique n'est pas significative et l'application de la méthode dynamique ne semble pas nécessaire.

La procédure dynamique a également été appliquée à la modélisation de la variance et du taux de dissipation sous-maille d'un scalaire passif par Pierce et Moin (1998) puis Jimenez *et al.* (2001a).

⁷nombre de Reynolds basé sur la micro-échelles de Taylor

2. Prise en compte des effets de flottaison

Peng et Davidson (2002) et Montreuil (2000) soulignent que lorsque la gravité a un effet important il faut, en plus de la prise en compte du terme de pesanteur dans l'équation de Navier-Stokes, utiliser des modèles sous-maille spécifiques prenant en compte le couplage entre la température et la vitesse. En effet, la prise en compte de la gravité modifie l'expression de l'hypothèse d'équilibre local et donc l'expression de la viscosité sous-maille.

Montreuil (2000) en déduit alors une expression modifiée du modèle de Smagorinsky dans laquelle une diffusivité sous-maille algébrique est implicitement utilisée :

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\Delta})^2 \left(\|S\|^2 - \frac{Ri}{Pr_{sm}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right)^{1/2} \quad (2.124)$$

Peng et Davidson (2002) élargissent ce concept en proposant une expression générale de la viscosité sous-maille dans laquelle une expression du flux sous-maille autre que celle choisie par Montreuil (2000) peut-être employée :

$$\nu_{sm} = (C_s \bar{\Delta})^2 \left(\|\bar{S}\|^2 - \frac{g_i \beta}{\nu_{sm}} \mathfrak{S}_j \right)^{1/2} \quad (2.125)$$

Montreuil (2000) présente également une autre méthode pour prendre en compte les effets de flottaison. Des équations d'évolution de τ_{ij} , \mathfrak{S}_j , q_{sm}^T et q_{sm}^2 sont écrites puis simplifiées et/ou approximées.

2.1.10 Utilisation des modèles sous-maille en SGE thermique

Comme nous venons de le voir, diverses études s'attachent à développer de nouveaux modèles sous-maille ou à améliorer les modèles existants. Il est également intéressant de regarder quels modèles sont les plus utilisés en pratique. C'est ce que nous allons maintenant faire en présentant quelques études illustrant les utilisations faites de la SGE thermique et des modèles sous-maille. Pour la plupart, ces études sont réalisées avec les modèles sous-maille de base : modèle de Smagorinsky et modèle à diffusivité sous-maille algébrique, avec souvent application de la procédure dynamique.

On trouve tout d'abord des travaux où le nombre de Prandtl sous-maille est considéré constant, avec divers modèles pour le tenseur sous-maille. Par exemple, suite au test de différents modèles sous-maille et notamment de plusieurs méthodes dynamiques dans le cas d'un canal plan, Brillant (2004) choisit d'utiliser le modèle WALE et l'hypothèse d'un nombre de Prandtl sous-maille constant pour étudier l'effusion anisotherme comme moyen de refroidissement d'une plaque plane. L'impact de l'injection de fluide froid sur l'écoulement principal chaud est globalement bien reproduit par les LES. L'épaississement des couches limites dynamique et thermique, la modification des gradients pariétaux de vitesse et de température, le décollement pour de forts taux d'effusion ainsi que l'élargissement, l'intensification et le décalage vers le centre du canal des fluctuations turbulentes sont ainsi observés.

La même combinaison de modèles sous-maille a servi à Chatelain (2004) pour ses travaux sur le choix du schéma numérique de convection en LES thermique et sur l'estimation des fluctuations de température à la paroi dans le cas des transferts de chaleur couplés fluide/solide. Des simulations effectuées pour de la turbulence homogène et isotrope en décroissance libre et pour un canal plan périodique permettent à l'auteur de conclure qu'il vaut mieux utiliser un schéma numérique décentré avec limiteur de pente pour le terme de convection relatif au champ scalaire afin de capturer correctement à la fois le champ moyen et fluctuant. Deux approches sont également proposées pour modéliser le champ de température fluctuant pariétal et sont testées dans le cas d'un canal plan turbulent bipériodique.

Pour leurs travaux sur les échanges de chaleur turbulents dans un canal en U de section carrée, Murata et Mochizuki (2004a,b) ont effectué des simulations des grandes échelles avec le modèle de Smagorinsky dynamique couplé à la procédure Lagrangienne de Meneveau *et al.* (1996) (procédure de stabilisation de la constante) pour la viscosité sous-maille. Concernant la diffusivité sous-maille ils choisissent de prendre un nombre de Prandtl sous-maille constant égal à 0,5. Ils étudient ainsi les effets du coude à 180° et de la mise en rotation du canal sur les transferts de chaleur (Murata et Mochizuki (2004b)). Ils observent qu'en stationnaire les transferts de chaleur sont accrus dans le coude ainsi que juste après celui-ci. Lors de la mise en rotation du canal, la force de Coriolis crée dans le coude un tourbillon qui perturbe cette distribution des transferts de chaleur. Murata et Mochizuki (2004a) s'intéressent aussi à l'impact de l'ajout de barreaux sur les parois internes du canal. Ils constatent qu'en stationnaire les barreaux intensifient les échanges de chaleur sur les parois où ils sont fixés (parties rectilignes avant et après le coude) mais ne modifient pas les échanges de chaleur dans le coude. De plus l'orientation de ces barreaux influe sur les échanges de chaleur dans les parties rectilignes. En rotation, ils constatent que ce sont les effets de la force de Coriolis et du coude à 180° qui prédominent.

Münch (2005) a étudié les écoulements turbulents en conduits courbes de section rectangulaire chauffés avec le modèle de la fonction de structure sélective et l'hypothèse d'un nombre de Prandtl sous-maille constant. Elle observe que les structures caractéristiques de ce type d'écoulement (tourbillons quasi longitudinaux et flux secondaires constitués de cellules contra-rotatives au niveau de la paroi convexe) sont influencées par la courbure de la conduite. Ces structures jouent un rôle fondamental dans les transferts thermiques lorsqu'une des parois est chauffée. Que ce soit la paroi concave ou la paroi convexe qui est soumise à un flux de chaleur, l'auteur observe que le nombre de Nusselt, qui caractérise les échanges thermiques, varie fortement dans le conduit. L'ajout de rainures sur les parois planes du conduit est envisagé afin de contrôler les transferts de chaleur et notamment de les homogénéiser.

Lessani et Papalexandris (2006) ont proposé un algorithme spécifique à la résolution des équations bas Mach en LES. Il choisissent de le tester dans deux configurations, dont une mettant en jeu des échanges thermiques : un canal plan turbulent avec températures imposées. Ils testent des rapports de température de 1.01, 2 et 8 à un nombre de Reynolds modéré. Le modèle dynamique de Smagorinsky-Lilly est mis en oeuvre pour le tenseur sous-maille et ils considèrent un nombre de Prandtl sous-maille constant. La transformation de Van Driest, qui prend en compte les variations de la masse volumique, leur permet de mieux faire se superposer les profils de vitesse moyenne, sauf en ce qui concerne celui de la paroi froide pour le plus grand écart de température. Les auteurs observent une grande différence entre les gradients de tempé-

rature de la moitié haute et de la moitié basse du canal pour de forts rapports de température.

Plusieurs études utilisent plutôt la combinaison du modèle de Smagorinsky dynamique et du modèle à diffusivité sous-maille algébrique dynamique. C'est notamment le cas de Boersma et Lele (1999), dans le cadre de leur étude sur le bruit émis par les jets turbulents compressibles. Ils obtiennent ainsi des résultats qui sont globalement en bon accord avec les données expérimentales et de SND utilisées comme référence.

Dong et Lu (2004) étudient un canal turbulent thermiquement stratifié avec oscillations de température sur la paroi inférieure. Pour cela, ils utilisent aussi le modèle de Smagorinsky dynamique et le modèle à diffusivité sous-maille algébrique dynamique. Du fait des oscillations de température, le canal est soumis à une force de flottabilité variable dans le temps. Ainsi, lorsque la température de la paroi inférieure est plus faible que celle de la paroi supérieure l'écoulement stratifié est stable, dans le cas contraire il est instable. Leurs résultats mettent en évidence qu'au cours d'un cycle des tendances à la re-laminarisation et au renforcement de la turbulence se succèdent. Ils permettent aussi de montrer que le transfert de chaleur turbulent près des parois est contrôlé par la dynamique de l'écoulement. Les auteurs constatent également qu'un délai est nécessaire pour que l'écoulement reflète les oscillations de température sur la paroi (observation d'un déphasage) et que l'augmentation du nombre de Richardson ou de la période d'oscillation a pour effet d'accentuer les effets de la force de flottabilité sur l'écoulement.

L'influence du nombre de Prandtl et du nombre de Richardson sur l'écoulement et le transfert de chaleur turbulents dans le cas d'un écoulement faiblement stratifié à surface libre en canal est étudiée par Wang et Lu (2005), également à l'aide de modèles sous-maille dynamiques. Ils constatent que la vitesse et la température moyenne suivent une loi logarithmique dont les coefficients diminuent lorsque le nombre de Richardson augmente. La pente du profil de température moyenne semble par contre indépendante du nombre de Prandtl. L'étude du nombre de Nusselt montre que le transfert de chaleur est réduit pour de grands nombres de Richardson. À haut nombre de Prandtl, la stratification influence peu le champ dynamique, à l'inverse de ce qui est observé à faible nombre de Prandtl. Diminuer Pr apparaît donc comme un moyen d'accentuer l'effet de relaminarisation dû à la stratification. Le nombre de Prandtl influence également les échanges thermiques : lorsqu'il augmente, la zone où ces échanges ont lieu est fortement réduite, ainsi, seules les plus petites structures situées tout près de la paroi y participent.

Les modèles dynamiques pour la viscosité et la diffusivité sous-maille ont aussi été utilisés pour simuler un canal plan turbulent avec flux de chaleur imposés aux parois par Dailey *et al.* (2003). Trois cas sont considérés : faible chauffage, fort chauffage et fort refroidissement. Dans les deux derniers, les grandes variations de température induisent de fortes variations des propriétés du fluide et le débit massique est redistribué vers les régions où la densité est la plus importante. Les profils moyens de vitesse et de température sont significativement modifiés dans la zone logarithmique en raison des transferts thermiques. Les contraintes de cisaillement totales sont nettement influencées par le flux de chaleur imposé aux parois, alors que le flux de chaleur total dans le canal y est moins sensible.

Wang et Pletcher (1996) utilisent ces mêmes modèles sous-maille pour étudier un écoulement turbulent avec transferts thermiques significatifs en canal. Leur but est d'étudier les effets de la variation des propriétés du fluide. Pour cela, ils simulent un canal plan chauffé sur une

face et refroidi sur l'autre à faibles nombres de Reynolds et de Mach. Ils testent deux écarts de température. Leurs résultats montrent que pour le plus élevé des deux la vitesse et la température interagissent, l'hypothèse du scalaire passif n'est donc plus valide. Ils mettent également en évidence le fait que plusieurs grandeurs varient significativement lorsque le transfert de chaleur augmente. C'est principalement le cas des écart-types de la vitesse et de la température ainsi que les corrélations vitesse-température.

Lee *et al.* (2004) et Xu *et al.* (2004) s'intéressent eux-aussi aux effets d'une variation significative des propriétés du fluide au sein d'un écoulement mais couplés à ceux de la gravité. Dans ce but ils réalisent la simulation d'un écoulement d'air turbulent compressible en canalisation annulaire verticale avec écoulement ascensionnel pour un faible nombre de Mach. Ils utilisent le modèle dynamique de Smagorinsky-Lilly couplé à un modèle à diffusivité sous-maille algébrique dynamique. Lee *et al.* (2004) testent plusieurs nombres de Reynolds ainsi que différents écarts de température. Ils constatent que le couplage de la gravité et d'un fort transfert de chaleur modifie l'écoulement. En particulier, le maximum de la vitesse se trouve déplacé vers la paroi interne chauffée et les fluctuations de vitesse sont réduites près de la paroi chaude. Les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température sont également modifiées. Xu *et al.* (2004) imposent trois flux de chaleur pariétaux différents et font varier le nombre de Reynolds. Ils observent qu'une laminarisation se produit pour de forts flux de chaleur. Lorsque le transfert thermique augmente, le débit massique de fluide dans la canalisation est redistribué vers le centre et la sous-couche visqueuse s'épaissit.

Qin et Pletcher (2006) ajoutent encore un degré de complexité en étudiant un écoulement en conduit de section carrée à propriétés variables avec effets de gravité et également avec des forces de Coriolis en raison de la mise en rotation du conduit autour d'un axe perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Dans leur étude des modèles dynamiques sont considérés à la fois pour le tenseur et pour le flux de chaleur sous-maille. En isotherme, les cellules contra-rotatives formant l'écoulement secondaire sont modifiées par la mise en place d'un équilibre entre gradient de pression et forces de Coriolis et les auteurs observent une laminarisation à la paroi stable alors que la turbulence est à l'inverse intensifiée du côté instable. Lorsqu'un flux de chaleur constant est imposé aux parois, l'écoulement secondaire influe sur le champ thermique par convection. La température à son tour modifie la dynamique de l'écoulement via la densité et les effets de gravité.

Wang et Lu (2004) proposent d'appliquer la LES à l'étude d'un écoulement incompressible en canal plan avec températures imposées aux parois et oscillant en raison d'un gradient de pression variable. Ils choisissent également d'utiliser les versions dynamiques des modèles de Smagorinsky et à diffusivité sous-maille algébrique. Ils étudient une large gamme de nombres de Prandtl moléculaires et différentes fréquences d'oscillation. Ils observent ainsi qu'à haut nombre de Prandtl l'écoulement semble toujours suivre les lois théoriques et expérimentales établies pour le canal plan turbulent pleinement développé. L'étude des transferts thermiques leur permet de déterminer le comportement asymptotique des flux de chaleur turbulents longitudinal et vertical ainsi que le rôle des différentes structures turbulentes en proche paroi sur le transfert thermique en fonction du nombre de Prandtl moléculaire considéré.

Choi et Suzuki (2005) étudient le rôle des structures tourbillonnaires pariétales sur les transferts de chaleur dans un écoulement turbulent incompressible en canal avec une paroi de forme ondulée pour différentes amplitudes de cette ondulation. À cet effet, ils utilisent la procédure

dynamique pour modéliser le tenseur et le flux de chaleur sous-maille. Ils observent que le transfert de chaleur est accru du fait de la forme ondulée de la paroi et qu'il l'est d'autant plus que l'amplitude de l'ondulation est grande. Les auteurs montrent que ceci est dû au fait que plus de tourbillons longitudinaux se forment dans la zone ascendante des ondulations de la paroi.

À titre d'exemple de travaux utilisant d'autres types de modèles sous-maille, on peut citer Péneau *et al.* (2000, 2003) qui étudient une couche limite soumise à une forte turbulence extérieure avec des modèles sous-maille mixtes dynamiques. Ils observent une plus importante perturbation du champ de température que du champ de vitesse ainsi qu'une corrélation entre le nombre de Stanton et la corrélation $\overline{v\theta}$. Les mêmes modèles sous-maille sont considérés par Tyagi et Acharya (2005) dans leur étude des transferts de chaleur dans un conduit de section carrée en rotation muni de barreaux transversaux. Ils observent que le mécanisme principal du mélange, et donc des échanges de chaleur, est l'entraînement par les grosses structures. Ils montrent aussi que la longueur du domaine doit être égale à plus d'une fois la distance inter-barreaux afin de capturer correctement les structures de l'écoulement et les modes basse fréquence du champ de température. Enfin, en raison des forces de Coriolis, le comportement des fluctuations est nettement différent sur les deux parois.

Il est aussi intéressant de remarquer que certains modèles sous-maille thermiques proposés dans le cadre général du transport de scalaires passifs sont appliqués à d'autres grandeurs que la température. Par exemple, Li et Wang (2002) étudient le mélange turbulent et la dispersion dans les eaux usées. Pour cela ils simulent un écoulement cisailé à surface libre à l'aide de la SGE. Pour la viscosité sous-maille ils choisissent un modèle sous-maille de Smagorinsky avec fonction d'amortissement et pour la concentration (scalaire passif) ils prennent un modèle basé sur une diffusivité⁸ sous-maille algébrique, avec un Pr_{sm} fixé à 0.5.

2.1.11 Conclusions sur la modélisation sous-maille

Comme nous venons de le voir, il existe plusieurs modèles sous-maille pour le tenseur τ_{ij} et le flux \mathfrak{S}_j . Concernant le tenseur sous-maille τ_{ij} , dans le cas de l'écoulement dans un canal plan (configuration simulée dans la présente étude), le modèle WALE est particulièrement intéressant puisqu'il permet de reproduire un comportement en y^3 à la paroi. Nous avons donc choisi ce modèle pour représenter le tenseur sous-maille dans nos simulations des grandes échelles thermiques.

En ce qui concerne la modélisation sous-maille thermique, les études présentées dans ce chapitre qui proposent de tels modèles s'intéressent à des configurations particulières telles que la simulation de la transition à la turbulence, les écoulements compressibles, les écoulements en convection naturelle, les écoulements verticaux où les effets de flottaison sont forts, les couches de mélange,... Mais aucun des modèles présentés ci-dessus ne semble *a priori* particulièrement conçu pour le cas d'un écoulement en canal plan soumis à de forts gradients de température. Nous avons donc choisi de réaliser des simulations avec deux modèles différents.

⁸Il s'agit dans ce cas de la diffusivité moléculaire \mathcal{D} et non plus de la diffusivité thermique κ et, en toute rigueur il s'agit d'un nombre de Schmidt sous-maille et non d'un nombre de Prandtl.

Le premier modèle considéré, le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant, est attractif de par sa simplicité. Cependant, il repose sur l'hypothèse non justifiée *a priori* d'une analogie entre les champs dynamique et thermique. Pour de faibles écarts de température et un nombre de Reynolds modéré, des travaux antérieurs sur un canal plan ont montré que ce modèle est suffisant (Brillant (2004); Brilliant *et al.* (2006)). Quand des écarts de température plus importants vont être considérés, on s'attend par contre à ce que ce modèle soit de moins en moins acceptable et induise des erreurs de plus en plus importantes dans nos simulations. Ce modèle a toutefois été utilisé dans les travaux de Lessani et Papalexandris (2006) sur un canal plan où de grandes différences de température sont en jeu. Le second modèle considéré, consiste à calculer le nombre de Prandtl sous-maille par la méthode dynamique. Il présente l'intérêt de s'adapter localement à l'écoulement et les hypothèses faites lors de sa dérivation (Moin *et al.* (1991)) semblent tout à fait compatibles avec son application à des configurations fortement anisothermes. C'est ce modèle qui a d'ailleurs été choisi par Wang et Pletcher (1996) dans leur étude d'un canal dont les parois sont portées à des températures très différentes. Nous pourrions ainsi déterminer dans la présente étude si, pour la simulation d'un canal avec de forts ratios de température, le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant reste acceptable ou, le cas échéant si le calcul dynamique du nombre de Prandtl sous-maille apporte une amélioration significative.

2.2 Trio_U, un code de SGE

Nos Simulations des Grandes Échelles Thermiques ont été réalisées avec le code de calcul Trio_U, développé principalement au CEA de Grenoble. Ce code, modulaire, basé sur une approche orientée objet et programmé en C++, est destiné à des applications industrielles de thermohydraulique pour des écoulements turbulents mono- bi- ou tri-dimensionnels, stationnaires ou instationnaires. Il propose différents algorithmes de résolution adaptés aux écoulements compressibles, incompressibles, dilatables (hypothèse de Boussinesq) et bas Mach. Trio_U peut travailler avec des maillages structurés et non-structurés, réalisés par le mailleur inclus dans Trio_U ou par un mailleur externe. Dans la présente étude, où la géométrie est très simple, le maillage est constitué d'un ensemble de parallépipèdes rectangles et est généré directement par Trio_U. Le code permet d'utiliser diverses méthodes numériques : volumes finis, différences finies, éléments finis. Nous utilisons ici la partie Volumes Différences Finies (VDF). Avec Trio_U, il est possible d'utiliser une approche RANS avec des modèles de turbulence ($k-\varepsilon, \dots$) ou une approche SGE avec divers modèles sous-maille. Le code offre le choix entre plusieurs schémas numériques et plusieurs solveurs en pression. Pour ce dernier, nous utilisons dans nos simulations uniquement celui basé sur la méthode du gradient conjugué (dont on pourra trouver une présentation dans Quarteroni *et al.* (2000)). Enfin, Trio_U présente l'avantage d'avoir été conçu dès sa création comme une application parallèle. Étant en constant développement, toutes ses fonctionnalités ne sont pas forcément parallélisées mais la majeure partie d'entre elles l'est. Des informations plus détaillées sur le code peuvent être trouvées dans Calvin *et al.* (2002) et Duquennoy et Ledac (2002).

Un point particulièrement important dans nos simulations est le calcul du pas de temps. Dans Trio_U il est déterminé en tenant compte de deux données :

- le pas de temps de convection :

$$\Delta t_{\text{conv}} = \min_{\text{domaine}} \left[\frac{1}{\frac{U}{\Delta X} + \frac{V}{\Delta Y} + \frac{W}{\Delta Z}} \right] \quad (2.126)$$

- le pas de temps de diffusion :

$$\Delta t_{\text{diff}} = \frac{1}{\max_{\text{domaine}} \left[2\nu \left(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta Y^2} + \frac{1}{\Delta Z^2} \right) \right]} \quad (2.127)$$

Au final, le pas de temps est déterminé par :

$$\Delta t = \frac{1}{\frac{1}{\Delta t_{\text{conv}}} + \frac{1}{\Delta t_{\text{diff}}}} \quad (2.128)$$

Dans notre étude, nous résolvons finement l'écoulement en proche paroi (voir chapitre suivant), les mailles près des paroi sont donc de très petites dimensions. Par conséquent, l'expression (2.127) est petite devant l'expression (2.126), ce qui signifie que $\frac{1}{\Delta t_{\text{conv}}} \ll \frac{1}{\Delta t_{\text{diff}}}$ et donc $\Delta t \approx \Delta t_{\text{diff}}$. Le pas de temps de diffusion est donc limitant dans notre étude. De plus, la viscosité ν apparaît au dénominateur de la relation (2.127). Or, ν augmente avec la température, donc le pas de temps de diffusion diminue à haute température. Ceci est un problème de taille pour réaliser des Simulations des Grandes Échelles d'écoulements avec forts écarts de température si on veut travailler avec des températures physiquement réalistes, notamment dans le cadre d'études relatives au nucléaire, au solaire haute température, ... Ainsi la Simulation des Grandes Échelles Thermique est handicapée par les temps de calculs qui sont d'autant plus élevés que l'écoulement atteint de hautes températures.

Le posttraitement des données du calcul peut s'effectuer de diverses manières. Nous utilisons dans cette étude le tracé des statistiques des champs de vitesse et de température calculées dans Trio_U, ainsi que la visualisation des champs instantanés, à l'aide des logiciels Meshtv et Visit, qui sont fournis avec la distribution Trio_U. Nous allons ainsi analyser les grandeurs suivantes :

- Les moyennes des inconnues. On notera $\langle \Phi \rangle$ la moyenne d'une variable Φ . Ainsi $\langle U \rangle$ désigne la vitesse moyenne et $\langle T \rangle$ est la température moyenne. L'écoulement considéré est stationnaire et possède deux directions d'homogénéité (longitudinale et transverse). Par conséquent, dans un premier temps les variables sont moyennées spatialement selon x et z , puis, lorsque ces moyennes spatiales sont statistiquement convergées (oscillations autour d'une valeur), elles sont en plus moyennées temporellement pendant une durée largement supérieure au temps de retournement de la turbulence qu'on évalue par le rapport h/U_τ dans le cas d'un canal plan, h étant sa demi hauteur et U_τ la vitesse de frottement. On obtient donc au final des profils moyens qui ne dépendent plus que de la coordonnée verticale y .
- Les fluctuations des inconnues. Elles sont définies, pour une variable Φ , par : $\phi = \Phi - \langle \Phi \rangle$. u et θ représenteront respectivement les fluctuations de vitesse et de température. Comme nous travaillons sur des grandeurs moyennées et que par définition $\langle \phi \rangle = 0$,

nous allons utiliser les grandeurs *rms* :

$$\Phi_{rms} = \sqrt{\langle \Phi'^2 \rangle} \quad (2.129)$$

$$= \sqrt{\langle (\Phi - \langle \Phi \rangle)^2 \rangle} \quad (2.130)$$

$$= \sqrt{\langle \Phi^2 \rangle - 2 \langle \Phi \rangle \langle \Phi \rangle + \langle \langle \Phi \rangle^2 \rangle} \quad (2.131)$$

$$= \sqrt{\langle \Phi^2 \rangle - \langle \Phi \rangle^2} \quad (2.132)$$

- Les corrélations vitesse-vitesse : $\langle u_i u_j \rangle$ et vitesse-température $\langle u_j \theta \rangle$.
- Les isovaleurs des champs instantanés tracées dans des plans (xOy) , (yOz) ou (zOx) . Cela nous permettra de visualiser les structures dynamiques et thermiques de l'écoulement.
- Les structures tourbillonnaires de l'écoulement. Elles seront étudiées par l'intermédiaire du critère Q , qui est le second invariant du tenseur du gradient de vitesse (Dubief et Delcayre (2000)) :

$$Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (2.133)$$

où S_{ij} est le tenseur des déformations et Ω_{ij} le tenseur de rotation. Les zones où le critère Q est positif sont donc celles où les effets de rotation sont dominants par rapport aux contraintes de déformation. Les isosurfaces de critère Q positif nous permettent donc de repérer les tourbillons. D'autres critères existent : minimum de pression, isovaleurs de la vorticité et minimum de la seconde valeur propre λ_2 de $S^2 + \Omega^2$. Dubief et Delcayre (2000) les ont comparés au critère Q dans des simulations d'une turbulence homogène isotrope, d'une couche de mélange, d'un canal plan et de l'écoulement à l'aval d'une marche. Ils observent que le critère Q et λ_2 sont les plus performants et donnent des tracés similaires mais ceux obtenus avec λ_2 sont légèrement bruités, ce qui est en faveur du critère Q . Le point le plus délicat avec le critère Q est le choix du seuil pour tracer les isovaleurs. Si on le prend trop petit, on visualisera beaucoup de structures et on risque de ne plus rien voir. À l'inverse, si on fixe un seuil trop grand, le tracé sera trop pauvre en structures. De plus, le seuil optimal est fonction de l'écoulement considéré. Le meilleur moyen de le choisir est donc au final de faire de essais successifs avec plusieurs valeurs afin d'obtenir des tracés clairs mais avec suffisamment de structures. Dubief et Delcayre (2000) ont proposé une technique basée sur un échantillonnage conditionnel afin de déterminer une valeur du seuil qui permet de maximiser les fluctuations de vorticité capturées dans les trois directions.

Une remarque concernant les notations s'impose ici. En Simulation des Grandes Échelles, on a uniquement accès aux grandeurs filtrées mais, par souci de simplification et d'allègement des notations, on omet le symbole $\bar{\cdot}$ (ou $\tilde{\cdot}$ en filtrage de Favre). Par exemple, $\langle U \rangle$ et $\langle T \rangle$ sont en fait les moyennes de la vitesse et de la température filtrées puisque nous n'avons pas accès à la vitesse et à la température "totales". De même, u , U_{rms} , θ et T_{rms} représentent en réalité les fluctuations de la vitesse filtrée et de la température filtrée. Ces notations seront utilisées dans les chapitres suivants.

2.3 Travaux les plus proches de notre étude

Les écoulements avec de grandes différences de température sont caractérisés par d'importantes variations des propriétés du fluide puisque la masse volumique, la viscosité et la conductivité sont des fonctions de la température. Ces variations ayant un gros impact sur les champs dynamique et thermique, une connaissance spécifique de la physique des tels écoulements est nécessaire. Dans la littérature, on trouve quelques informations à ce sujet pour des configurations de type canal ou canalisation, c'est à dire assez proches de la nôtre. Ce sont ces travaux, sur lesquels nous pourrions nous appuyer par la suite, que nous allons maintenant présenter. Pour commencer, nous évoquons deux types d'études dans lesquelles les effets de l'anisothermie sont couplés, soit à ceux de la gravité, soit à ceux de la compressibilité (écoulements supersoniques). Ensuite, nous regroupons les résultats de travaux portant plus particulièrement sur le sujet qui nous intéresse ici : les effets des variations des propriétés du fluide dues uniquement à l'anisothermie dans un canal plan turbulent.

2.3.1 Écoulements ascensionnels anisothermes : couplage avec les effets de la gravité

On trouve une série d'études sur le couplage entre les effets des variations des propriétés du fluide et ceux de la gravité. Ezato *et al.* (1999) ont par exemple proposé une extension d'un modèle $k - \varepsilon$ bas Reynolds pour étudier l'écoulement ascensionnel dans une conduite cylindrique verticale aux parois chauffées. Ils ont ainsi observé une diminution du tenseur de Reynolds, du flux de chaleur turbulent de la viscosité turbulente et de l'énergie cinétique turbulente dans la sous-couche visqueuse le long de l'axe longitudinal pour de forts flux de chaleur pariétaux. Ce phénomène est représentatif d'une laminarisation de l'écoulement.

Satake *et al.* (1999) ont étudié la même configuration par des Simulations Numériques Directes et ont constaté que les fluctuations turbulentes décroissent elles aussi dans la direction longitudinale en raison des variations des propriétés lorsqu'un fort flux de chaleur est imposé à la paroi.

Des SND similaires ont été effectuées par Bae *et al.* (2006). Ces derniers imposent un débit massique adimensionnel constant, ce qui entraîne une accélération de l'écoulement le long de la canalisation puisque sa température ne cesse d'augmenter (et donc sa densité diminue) en raison du flux thermique appliqué aux parois. Ils étudient également l'influence de la gravité en effectuant à la fois des simulations de convection forcée (gravité négligée) et de convection mixte (gravité prise en compte). Les profils de vitesse et de température adimensionnels obtenus deviennent de plus en plus dissimilaires à mesure que le flux de chaleur imposé augmente. Les variations de masse volumique n'ont donc pas le même impact sur les champs dynamique et thermique. Là encore une laminarisation apparaît pour un chauffage important. Elle apparaît clairement sur les profils de température moyenne et de débit massique, ce dernier étant redistribué vers le centre du canal. La laminarisation s'observe au niveau des fluctuations de vitesse, du tenseur de Reynolds, de l'énergie cinétique turbulente, du flux de chaleur turbulent et de la vorticité, qui décroissent le long du canal, et ce d'autant plus que le flux de chaleur pariétal est important. Les effets de la gravité varient selon l'intensité du chauffage. Les profils dynamiques

sont d'autant plus modifiés par la gravité que le flux de chaleur imposé augmente. À l'inverse, le transfert thermique est plus affecté par la gravité pour un faible chauffage, c'est à dire lorsque l'écoulement reste significativement turbulent.

Xu *et al.* (2004) ont quant à eux réalisé des Simulations des Grandes Échelles dans cette même configuration pour différents nombres de Reynolds et différents flux de chaleur pariétaux. Tout comme Bae *et al.* (2006), ils constatent une redistribution du débit massique vers le coeur de l'écoulement et une laminarisation le long de la conduite lorsque le flux thermique imposé est fort. Cette perte de la turbulence est visible sur leurs profils de température moyenne ainsi que dans la réduction des fluctuations de vitesse, du tenseur de Reynolds, du flux de chaleur turbulent et de la vorticité.

Lee *et al.* (2004) se sont intéressés aussi à cette problématique d'écoulement ascensionnel avec de fortes variations des propriétés mais dans le cas d'un conduit annulaire. La paroi externe est adiabatique et différents flux de chaleur sont imposés à la paroi interne. La gravité modifie les profils de vitesse dont le maximum est déplacé vers la paroi intérieure. Au niveau de cette dernière, l'augmentation de la viscosité pour de forts flux thermiques implique une diminution des tensions de Reynolds, et donc de l'intensité de la turbulence. Ces auteurs rencontrent donc également des phénomènes de laminarisation. Les niveaux des corrélations vitesse-température sont accrus en présence d'un fort chauffage et des forces de gravité, surtout pour de larges ratios entre le rayon intérieur et le rayon extérieur de la conduite.

Qin et Pletcher (2006) ont étudié ces mêmes phénomènes de gravité et de propriétés variables, auxquels ils ont ajouté les effets de forces de Coriolis en réalisant des SGE d'un canal de section carrée mis en rotation pour divers nombres de Reynolds et de rotation. Ils observent que, sous l'effet de l'équilibre entre les gradients de pression et les forces de Coriolis, les cellules contra-rotatives caractéristiques de l'écoulement secondaire se déplacent quand la rotation s'intensifie. Cela induit un déplacement du maximum de la vitesse vers la paroi instable. Une laminarisation se produit à la paroi stable et, à l'inverse, la turbulence est renforcée près de la paroi instable. L'application d'un chauffage constant aux quatre parois est caractérisée par une influence mutuelle entre les champs dynamique et thermique par l'intermédiaire de la convection et de la gravité. Ainsi, l'écoulement secondaire est modifié par le flux de chaleur et modifie à son tour le champ de température.

2.3.2  coulements supersoniques : couplage avec les effets de compressibilité

Plusieurs travaux prenant en compte les variations de la masse volumique, de la viscosité et de la conductivité avec la température sont basés sur des simulations compressibles d'écoulements supersoniques. Huang *et al.* (1995) ont réalisé des Simulations Numériques Directes d'un écoulement en canal avec des parois très froides (plus froides que l'écoulement)   faible nombre de Reynolds pour deux valeurs du nombre de Mach ($M_a = 1.5$ et 3). Ils ont montré que, dans cette configuration, il y a peu de différences entre les moyennes de Reynolds et de Favre et que l'emploi de cette dernière n'est vraiment nécessaire que pour les termes convectifs. Leurs profils du tenseur des contraintes turbulent, du flux de chaleur turbulent et de l'énergie cinétique turbulente pour les deux nombres de Mach considérés sont proches de ceux obtenus en

incompressible à condition qu'un adimensionnement prenant en compte les valeurs locales de la masse volumique moyenne soit utilisé (adimensionnement semi-local). Ainsi, l'effet principal du nombre de Mach semble bien résider dans les variations de la masse volumique moyenne. Les transferts d'énergie entre l'énergie interne, l'énergie cinétique moyenne et l'énergie cinétique turbulente sont étudiés en détails. Cependant, l'influence des variations des propriétés du fluide avec la température ne fait pas l'objet d'une analyse spécifique.

Coleman *et al.* (1995) ont également étudié cette configuration par des SND. Ils se sont principalement concentrés sur l'influence du nombre de Mach et ont montré que l'hypothèse de Morokovin, qui stipule que si les fluctuations de masse volumique sont négligeables par rapport à la masse volumique moyenne, alors les propriétés statistiques de la turbulence ne sont pas affectées par les effets de compressibilité, est valide. Moyennant un adimensionnement semi-local prenant en compte les variations des propriétés, les profils obtenus pour différents nombres de Mach se superposent. Sous l'effet des gradients des propriétés du fluide dans la direction normale à la paroi la cohérence des *streaks* de proche paroi semble accrue.

Des SND similaires à $Ma = 1.5$ ont été réalisées par Morinishi *et al.* (2004) avec deux jeux de conditions aux limites thermiques différents : température identique imposée aux deux parois dans le premier cas (comme Huang *et al.* (1995) et Coleman *et al.* (1995)) et une paroi isotherme couplée à une paroi adiabatique dans le second. Des simulations comparables sont également faites en incompressible à des fins de comparaison. Les profils de vitesse moyenne compressibles et incompressibles correspondent après application de la transformation de Van Driest. Les courbes de la température moyenne adimensionnée des simulations compressibles sont plus basses que celles des simulations incompressibles et le type de condition imposé à la paroi supérieure (isotherme ou adiabatique) influe fortement sur le profil de la paroi basse isotherme. Concernant les fluctuations turbulentes, l'emploi d'un adimensionnement semi-local permet de faire se superposer tous les différents profils de vitesse fluctuante et des tensions de Reynolds, par contre les profils des fluctuations de température et de densité ainsi que du flux de chaleur turbulent diffèrent d'un cas à l'autre, qu'un adimensionnement pariétal ou local soit utilisé. L'étude des transferts d'énergie montre que le sens des échanges près de la paroi diffère selon la condition limite imposée (isotherme ou adiabatique). Les auteurs se sont aussi intéressés aux structures turbulentes pariétales et on constaté qu'en prenant en compte les variations des propriétés par un adimensionnement semi-local les *streaks* n'apparaissent pas plus cohérents en compressible qu'en incompressible et que leur espacement n'est pas modifié. Les *streaks* à faible vitesse coïncident avec les *streaks* à basse température près d'une paroi isotherme.

Tamano et Morinishi (2006) ont complété l'étude de Morinishi *et al.* (2004) pour clarifier les effets de la condition limite thermique. Ils cherchent en particulier à identifier si les différences observées dans leur étude entre les deux configurations étudiées viennent de la condition adiabatique en elle-même ou de l'élévation de température engendrée par cette condition. À cet effet, ils simulent un canal avec une température élevée imposée à la paroi haute et une faible température à la paroi basse. Dans cette configuration, contrairement à celle avec une paroi adiabatique, un petit pic apparaît sur les profils de température moyenne et fluctuante près de la paroi haute chaude. Le bilan d'énergie interne permet de voir qu'il est dû à un pic de diffusion moléculaire qui apparaît près de la paroi haute, mais uniquement lorsqu'elle est à température imposée. Le transfert d'énergie au niveau de la paroi haute est, tout comme dans le cas de la paroi adiabatique, dans le sens opposé à celui qui a lieu près de la paroi basse. Les auteurs

en concluent donc que ce phénomène, déjà observé par Morinishi *et al.* (2004), est dû à une élévation de température et pas au passage d'une paroi isotherme à une paroi adiabatique.

2.3.3 Des travaux centrés sur les effets des variations des propriétés avec la température

Enfin, on trouve des études où les variations des propriétés avec la température ne sont couplées ni à la gravité, ni aux forces de Coriolis, ni aux effets de compressibilité. Hébrard *et al.* (2004), par exemple, se sont intéressés à un conduit de section carrée chauffé et se sont tournés pour cela vers la Simulation des Grandes Échelles. Initialement la même température est imposée aux quatre parois, puis, un peu après l'entrée de la conduite, une température 2.5 fois plus élevée est subitement fixée sur l'une des quatre parois, les auteurs observent alors l'évolution spatiale de l'écoulement le long du conduit. Le cas d'une géométrie rectiligne est tout d'abord considéré. L'accroissement de la viscosité, dû à l'accroissement de la température, entraîne une augmentation progressive de la taille des structures turbulentes en avançant dans le conduit. Les auteurs observent le développement d'une unique éjection de fluide chaud sur la longueur du domaine, qui s'accompagne d'une amplification de l'écoulement secondaire transverse. La viscosité cause également une atténuation de l'intensité turbulente. Dans un deuxième temps, un conduit en forme de S a été étudié. Le gradient de pression qui apparaît alors entre les parois concave et convexe dans les sections courbes engendre un écoulement secondaire intense constitué de tourbillons contra-rotatifs de Dean près du mur convexe. L'augmentation de la température d'une des parois a pour effet d'intensifier et d'élargir ces tourbillons, ce qui a un impact sur les transferts thermiques dans la conduite. Dans les zones caractérisées par des éjections de fluide chaud, on rencontre de petits gradients de température et donc un transfert de chaleur faible. À l'inverse, dans les zones où du fluide froid vient impacter la paroi plus chaude, les gradients de température sont grands et les transferts thermiques sont importants.

La configuration d'un écoulement en canal plan turbulent avec des propriétés variant significativement a été étudiée par Dailey *et al.* (2003). Un flux de chaleur constant et identique est appliqué aux deux parois. Trois cas sont envisagés : faible chauffage, fort chauffage et fort refroidissement. L'énergie cinétique turbulente est réduite lorsque le chauffage s'intensifie et au contraire accrue dans le cas du refroidissement. Pour le fort chauffage et le fort refroidissement, l'écoulement est caractérisé par de larges variations de la température et donc des propriétés du fluide. Le débit massique est alors redistribué vers la région où la densité est la plus forte, c'est à dire vers le centre du canal dans le cas du chauffage des parois et vers les parois lorsque celles-ci sont refroidies. Les profils moyens de vitesse longitudinale et de température adimensionnés avec les grandeurs pariétales diffèrent des profils incompressibles. Un adimensionnement semi-local permet de les rapprocher mais des écarts subsistent dans la région logarithmique. Les contraintes résolues et sous-maille sont réduites par le chauffage des parois et au contraire augmentent dans le cas d'un refroidissement. Le transfert thermique au sein du canal est lui peu affecté par les conditions aux limites thermiques, seule sa contribution sous-maille diminue sous l'effet d'un fort chauffage des parois. Le nombre de Prandtl sous-maille calculé lors ces simulations a une valeur proche de 0.7 dans la plus majeure partie du domaine, mais près des parois il atteint 0.9.

Les études expérimentales de Wardana *et al.* (1992, 1994) concernent également un canal plan bidimensionnel aux parois chauffées. Les auteurs ont utilisé la vélocimétrie laser Doppler ainsi que des thermomètres à résistance. Une large gamme de flux de chaleur pariétaux a été considérée dans leurs expériences. Contrairement à ce qui a été observé par Dailey *et al.* (2003), les profils de vitesse et de température moyennes ainsi que les fluctuations de température obtenus ne sont pas modifiés sous l'action du chauffage. Par contre, les auteurs observent que l'augmentation du flux de chaleur imposé entraîne une réduction des fluctuations de vitesse et du tenseur de Reynolds dans la région intermédiaire du canal. À la paroi, ils constatent des phénomènes d'éjection de fluide lent et chaud et d'arrivée de fluide rapide et froid.

Enfin, les SND bas Mach de Nicoud (1998) et Nicoud et Poinso (1999), avec les SGE de Wang et Pletcher (1996) et celles de Lessani et Papalexandris (2006) constituent une bonne source de données pour l'écoulement subsonique en canal plan turbulent bi-périodique à nombre de Reynolds modéré ($Re_\tau \approx 180$) avec parois isothermes pour divers rapports de température entre les parois haute et basse ($\frac{T_2}{T_1} = 1.01, 1.02, 2.00, 3.00, 4.00$ et 8.00). Dans ces études, diverses lois de variation sont considérées pour la conductivité et la viscosité. Nicoud (1998) utilise la loi de Sutherland, typique des gaz, Nicoud et Poinso (1999) réalisent certaines simulations avec cette même fonction et d'autres avec des variations en $\frac{1}{\sqrt{T}}$, qui sont plutôt représentatives des liquides. Wang et Pletcher (1996) et Lessani et Papalexandris (2006) choisissent eux une formulation puissance avec un exposant de 0.7 (dite "loi de Sutherland simplifiée").

Dans ces études, pour de grands rapports de température, la vitesse de frottement est plus importante à la paroi chaude qu'à la paroi froide et le nombre de Reynolds de frottement basé sur cette vitesse et sur la viscosité pariétale est lui plus faible au niveau de la paroi chaude qu'au niveau de la paroi froide, en raison des variations de la viscosité. Pour $\frac{T_2}{T_1} = 8.00$, les profils d'énergie cinétique turbulente de Lessani et Papalexandris (2006) laissent même penser que l'écoulement est devenu laminaire sur la moitié haute du canal. De plus, comme le remarquent Wang et Pletcher (1996), le débit massique est alors modifié puisque la masse volumique varie fortement, il est ainsi plus important dans la moitié basse et froide du canal que dans la moitié haute plus chaude.

Nicoud (1998), Wang et Pletcher (1996) et Lessani et Papalexandris (2006) constatent qu'augmenter le rapport de températures entraîne une dissymétrie des profils moyens et des fluctuations. La loi de Sutherland, combinée à la condition de conservation du flux de chaleur, implique en effet un gradient de température plus faible à la paroi chaude qu'à la paroi froide.

Wang et Pletcher (1996) obtiennent des profils de vitesse moyenne adimensionnels qui diffèrent fortement sur les deux moitiés du canal pour $\frac{T_2}{T_1} = 3$. Celui de la paroi froide est bien au-dessus du profil incompressible et celui de la paroi chaude est en-dessous. La transformation de Van Driest leur permet d'obtenir des courbes plus proches mais des différences subsistent dans la zone logarithmique. Les profils de vitesse adimensionnels des deux moitiés du canal de Nicoud (1998) se superposent très bien si la transformation de Van Driest est employée, ils sont alors proches des profils incompressibles, sauf dans la zone logarithmique où ils suivent une droite dont l'ordonnée à l'origine est un peu plus élevée. Les résultats de Nicoud et Poinso (1999) suggèrent même que cette ordonnée à l'origine serait une fonction croissante du coefficient caractérisant le flux de chaleur : $Bq = \frac{q_w}{\rho_w C_p u_\tau T_w}$. Lessani et Papalexandris (2006) étudient

le plus fort ratio de températures ($\frac{T_2}{T_1} = 8.00$) et observent alors que, malgré la transformation de Van Driest, les profils de vitesse moyenne ne correspondent pas sur la moitié basse du canal.

Concernant la température adimensionnée, les profils de Nicoud (1998) s'éloignent de celui obtenu en incompressible, qu'un adimensionnement pariétal ou semi-local soit utilisé, ce dernier permettant tout de même un meilleur accord entre les différentes courbes. Avec une loi de variation des propriétés du fluide différente, Nicoud et Poinot (1999) observent l'inverse : un adimensionnement pariétal permet de superposer les profils de température moyenne des parois hautes et basses pour $\frac{T_2}{T_1} = 2$ et 4 alors qu'un adimensionnement semi-local disperse ces différentes courbes. Cependant, les lois de variation des propriétés qu'ils utilisent sont différentes de celles utilisées par Nicoud (1998), il n'est donc pas surprenant que des effets différents soient observés.

Nicoud (1998) constate que l'adimensionnement semi-local permet de faire se superposer les profils des fluctuations de vitesse des deux parois, alors qu'avec l'adimensionnement pariétal ils diffèrent énormément les uns des autres. Il en conclut que l'effet principal de la forte différence de température réside dans les variations de masse volumique moyenne. Nicoud et Poinot (1999) observent par contre que l'adimensionnement semi-local ne fait se superposer que les fluctuations longitudinales et qu'il permet uniquement de réduire l'écart entre les différentes courbes pour les autres fluctuations de vitesse. Ces dernières sont accrues à la paroi froide et réduites à la paroi chaude lorsque les propriétés varient en $\frac{1}{\sqrt{T}}$, et ce d'autant plus qu'un grand écart de température est imposé. Les SGE de Wang et Pletcher (1996) avec la loi de Sutherland simplifiée leur permettent d'observer que les fluctuations de vitesse adimensionnées sont, à l'inverse, amplifiées près de la paroi chaude et atténuées près de la paroi froide.

Aucun des adimensionnements envisagés par Nicoud (1998) et Nicoud et Poinot (1999) n'arrive à faire correspondre les différents profils des fluctuations de température. Cependant Nicoud et Poinot (1999) obtiennent les profils les plus rapprochés en adimensionnant par $2h|\frac{\partial T}{\partial y}|$ (h étant la demi-hauteur du canal). Wang et Pletcher (1996) constatent, eux, que le profil des fluctuations de température est modifié et devient dissymétrique pour un grand écart de température mais que les niveaux des pics sont peu modifiés.

Le nombre de Prandtl turbulent calculé par Wang et Pletcher (1996) est accru près de la paroi chaude et réduit dans la partie basse du canal lorsque le ratio de températures considéré augmente. Il varie entre une valeur proche de 0.5 au centre du canal et un pic à environ 1.1 en proche paroi. Les résultats de Nicoud (1998) montrent que le profil du nombre de Prandtl turbulent est identique au profil incompressible sur la moitié inférieure du domaine mais pas sur la moitié supérieure. Des effets bas Reynolds près de la paroi haute chaude sont soupçonnés d'être responsables de ces différences. Nicoud et Poinot (1999) estiment de leur côté qu'il est correct de considérer que le nombre de Prandtl turbulent est constant et égal à 0.9 dans cette configuration.

Les corrélations vitesse-température obtenues par Wang et Pletcher (1996) sont amplifiées par le chauffage en haut du canal et réduite en bas du canal. Leurs coefficients de corrélation vitesse-vitesse et vitesse longitudinale-température sont modifiés par le flux de chaleur dans la zone centrale du canal mais le coefficient de corrélation vitesse normale-température y est insensible. Nicoud (1998) observe que sur la moitié basse du domaine, les coefficients de corrélation vitesse-vitesse et vitesse-température sont similaires à ceux obtenus en incompressible, alors

que sur la moitié haute des différences apparaissent. Là encore, des effets bas Reynolds sont invoqués pour expliquer ce phénomène. Nicoud et Poinso (1999) soulignent que la corrélation entre la vitesse longitudinale et la température est très forte près des parois, ce qui implique que le champ thermique présente également des structures de type "streaks".

Les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement calculés par Nicoud (1998) sont eux aussi modifiés par un fort chauffage de la paroi supérieure, ce qui suggère une intensification des mouvements d'éjection et de l'intermittence sur la moitié haute chaude et au contraire une atténuation de ces phénomènes dans la moitié basse. Nicoud et Poinso (1999) confirment cette analyse et précisent que, si la taille des structures turbulentes augmente près de la paroi chaude lorsque la loi de Sutherland est utilisée, cela n'est pas le cas avec une loi de variation des propriétés en $\frac{1}{\sqrt{T}}$. Wang et Pletcher (1996) trouvent eux au contraire que les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement sont peu affectés par l'augmentation de l'écart de température. En visualisant les structures turbulentes, ils constatent que leur cohérence est accrue à la paroi froide.

Des bilans de contraintes et de flux de chaleur sont faits par Wang et Pletcher (1996). La combinaison entre les variations de densité et l'atténuation (respectivement l'amplification) de la corrélation entre les fluctuations turbulentes dynamiques et thermiques à la paroi froide (respectivement chaude) entraîne une dissymétrie des tensions de Reynolds résolues. Leur profil est décalé vers la paroi chaude et leur pic est réduit (respectivement accru) sur la moitié haute (respectivement basse). Les variations des propriétés redistribuent le flux de chaleur entre ses différentes composantes : pour un fort chauffage de la paroi haute le flux de chaleur turbulent est réduit, au profit de la conduction thermique. Dans cette même étude il est montré que les bilans du tenseur des contraintes de Reynolds et de la variance de température sont peu modifiés par le rapport de températures, sauf près de la paroi froide où les termes dominants sont amplifiés.

Comme nous venons de le voir, les écoulements dont les propriétés varient fortement sous l'effet d'une anisothermie significative présentent des particularités intéressantes et une meilleure connaissance de ces écoulements est nécessaire. Les études existantes ne permettent pas d'avoir une connaissance approfondie de la physique fondamentale de ces écoulements, notamment parce qu'elles ne s'accordent pas toujours sur les effets observés.

2.3.4 Remarques

On peut trouver d'autres travaux que ceux présentés ci-dessus à propos des écoulements soumis à de fortes différences de températures, notamment dans le domaine expérimental, si on s'intéresse à des configurations différentes de celle d'un écoulement turbulent en canal ou en conduite. À ce sujet, il nous semble intéressant d'introduire l'étude expérimentale réalisée par Cheng et Ng (1982) sur une plaque plane et dont les conclusions se rapprochent de certaines observations évoquées précédemment. Cheng et Ng (1982) ont utilisé la vélocimétrie laser Doppler et la dispersion de Rayleigh pour l'étude d'une couche limite turbulente au-dessus d'une plaque plane portée à une température élevée. Ils ont constaté que les profils moyens et fluctuants obtenus en utilisant des coordonnées réduites locales sont peu affectés par le chauffage. Seules les tensions de Reynolds sont significativement réduites, montrant ainsi une atténuation

de la turbulence sous l'effet de la haute température de la plaque. Ils ont également observé un développement cyclique des structures thermiques en proche paroi et l'interaction entre une éjection de fluide lent et chaud de la paroi vers l'extérieur et une affluence rapide de fluide froid de la région externe vers la plaque, tout comme Wardana *et al.* (1992, 1994).

Il faut également signaler un fort intérêt à l'heure actuelle pour l'étude des écoulements laminaires à propriétés variables. Pinarbasi *et al.* (2005) ont, par exemple, étudié numériquement un écoulement laminaire en canal avec températures pariétales imposées. Le fluide considéré dans ces simulations a des propriétés variant linéairement avec la température. Les auteurs constatent que le fait de faire varier le gradient de température longitudinal, le nombre de Péclet ou les constantes de proportionnalité exprimant la viscosité et la conductivité du fluide en fonction de la température n'entraîne pas de modifications sur la dynamique de l'écoulement et de faibles modifications sur le champ thermique. Des variations du gradient de pression longitudinal ont par contre une très grosse influence sur l'écoulement.

Hernandez et Zamora (2005) ont quant à eux étudié l'écoulement induit par convection naturelle dans un canal vertical avec un flux de chaleur imposé aux parois. Dans cette configuration, au delà d'une valeur critique du flux pariétal, une augmentation brusque de la température de paroi est observée. Les auteurs ont constaté que cette valeur critique est influencée par le nombre de Rayleigh de l'écoulement et par une distribution non uniforme du flux de chaleur pariétal. Pour certaines conditions de chauffage, les variations des propriétés du fluide augmentent la valeur de la température de paroi maximale et déplacent la position où elle est atteinte.

Des travaux ont également été initiés dans le cadre d'un benchmark sur l'écoulement laminaire de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée avec de forts écarts de température (Le Quéré *et al.* (2005); Paillère *et al.* (2005)). Des résultats de référence ont ainsi été obtenus pour cette configuration.

Les chapitres suivants sont dédiés à la présentation et à l'analyse de nos résultats. Nous avons choisi de scinder cette analyse en trois parties. Tout d'abord, dans le chapitre 3 nous présenterons en détails les simulations réalisées et les validerons sur des cas "classiques" pour lesquels des SND sont disponibles dans la littérature. Ensuite, le chapitre 4 sera consacré à une première analyse. Il permettra d'étudier l'influence de la prise en compte des variations de la conductivité et de la viscosité du fluide ainsi que la modélisation sous-maille thermique. Enfin, le chapitre 5 concernera l'analyse de l'impact du ratio de températures sur la physique de l'écoulement.

Chapitre 3

Contexte de l'étude : présentation des simulations numériques

3.1 Introduction

Nous avons choisi la configuration académique du canal plan horizontal afin d'étudier l'effet de l'anisothermie sur un écoulement turbulent. Dans ce chapitre, la configuration, les différentes simulations effectuées ainsi que les paramètres utilisés sont présentés et expliqués en détails. Des comparaisons avec des résultats de Simulations Numériques Directes existantes sont ensuite effectuées afin de valider nos Simulations des Grandes Échelles.

3.2 Présentation des simulations numériques

3.2.1 La configuration du canal plan

Nous considérons dans la présente étude un écoulement turbulent d'air dans un canal plan horizontal constitué de deux plaques planes parallèles (voir figure 3.1). On appelle h la demi-distance entre ces plaques horizontales. C'est en fonction de ce paramètre que sont définies les dimensions des plaques : $2\pi h$ et πh . Le fluide s'écoule de gauche à droite entre les plaques. Dans les cas anisothermes, la plaque du bas sera la paroi "froide" et celle du haut sera la paroi "chaude".

Cette configuration est couramment utilisée dans les études numériques théoriques et nous permettra ainsi de comparer certains de nos résultats avec ceux d'études existantes. Historiquement, c'est également la première configuration qui fut étudiée en Simulation des Grandes Échelles par Deardorff (1970).

Comme indiqué sur la figure 3.1, l'axe longitudinal x correspond à la direction de l'écoulement, l'axe y est dans la direction normale aux parois et l'axe z est transverse à l'écoulement.

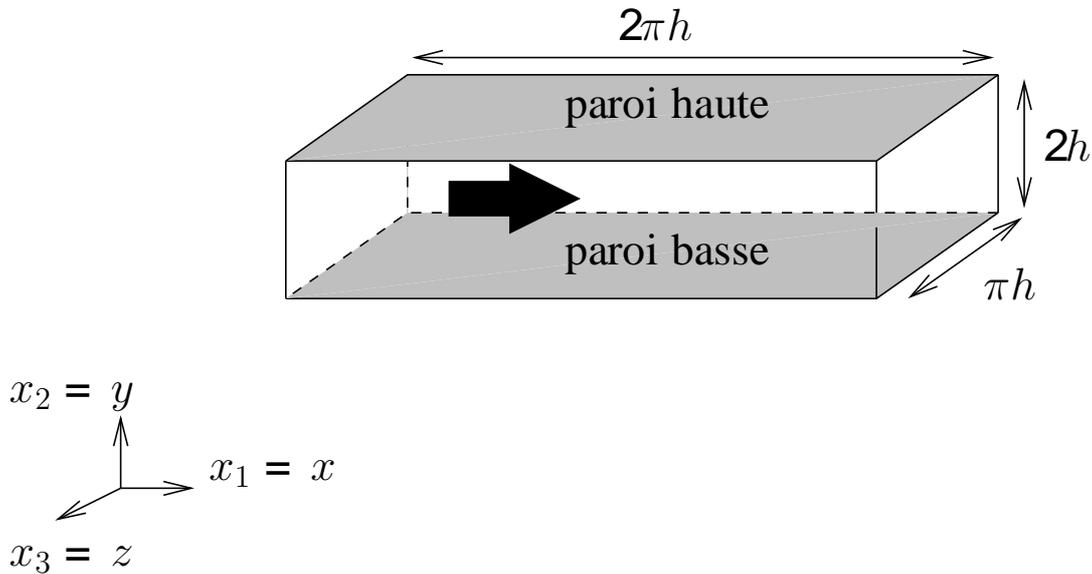


FIG. 3.1 – Configuration du canal plan turbulent

3.2.2 Les simulations des grandes échelles réalisées

Pour caractériser les différentes simulations effectuées, nous utilisons plusieurs vitesses :

- U_c désigne la vitesse au centre du canal
- U_b est la vitesse moyenne de débit, dite vitesse *bulk*, définie comme :

$$U_b = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} \langle U \rangle (y) dy \quad (3.1)$$

- U_τ est la vitesse de frottement qui se calcule à partir du gradient pariétal de vitesse moyenne :

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} = \sqrt{\nu_w \left. \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|_w} \quad (3.2)$$

où τ_w est la contrainte de cisaillement pariétale, ρ_w et ν_w sont les valeurs de la masse volumique et de la viscosité à la paroi et $\left. \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|_w$ est le gradient de vitesse moyenne pariétale. Cette vitesse de frottement est notamment utilisée pour mettre les profils de vitesse sous forme adimensionnelle.

Quatre températures sont également considérées :

- la température moyenne, notée T_m
- la température au centre du canal, notée T_c
- la température *bulk*, T_b , donnée par :

$$T_b = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} \langle T \rangle (y) dy \quad (3.3)$$

– la température de frottement, T_τ , introduite pour l'adimensionnement :

$$T_\tau = \frac{Q_w}{\rho_w C_p U_\tau} = \frac{\lambda_w \left. \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right|_w}{\rho_w C_p U_\tau} \quad (3.4)$$

où l'indice w est relatif aux valeurs pariétales et Q_w est le flux de chaleur à la paroi.

Trois nombres de Reynolds ont été calculés :

– Re_c , basé sur la vitesse au centre du canal et la valeur de la viscosité à la température T_c :

$$Re_c = \frac{U_c h}{\nu_c} \quad (3.5)$$

– Re_b , calculé avec la vitesse *bulk* et la viscosité à la température *bulk* T_b :

$$Re_b = \frac{U_b h}{\nu_b} \quad (3.6)$$

– Re_τ , basé sur la vitesse de frottement et la valeur de la viscosité à la paroi :

$$Re_\tau = \frac{U_\tau h}{\nu_w} \quad (3.7)$$

Deux valeurs de consigne de Re_τ ont été utilisées : 180 et 395. Les valeurs effectivement calculées sur les profils en fin de simulation sont très proches de ces consignes pour l'ensemble des simulations réalisées.

Pour de forts écarts de température, les variations des propriétés impliquent une grosse différence de Re_τ entre les deux parois. Nous avons donc considéré trois valeurs de ce nombre : celle calculée à la paroi inférieure : Re_{τ_1} , celle calculée à la paroi supérieure : Re_{τ_2} et la moyenne de ces deux valeurs : Re_{τ_m} . On constate en effet que, pour les quatre simulations réalisées avec un rapport de températures $T_2/T_1 = 2.00$, le nombre de Reynolds de frottement est bien plus faible que Re_{τ_m} à la paroi haute et bien plus fort à la paroi basse. Pour les simulations où $Re_{\tau_m} \approx 180$, cela devient problématique car on peut alors s'attendre à ce que les résultats soient perturbés par des effets bas Reynolds sur le haut du canal où Re_{τ_2} n'est que de 106 ou 107.

Deux autres nombres sans dimension permettent de caractériser notre écoulement :

– le nombre de Péclet Pe :

$$Pe = Re_b \times Pr \quad (3.8)$$

– le nombre de Richardson :

$$Ri = \frac{Gr}{Re_b^2} = \frac{g\beta\Delta T h}{U_b^2}, \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{T_b} \quad \text{et} \quad \Delta T = T_2 - T_1 \quad (3.9)$$

où Gr est le nombre de Grashof Gr :

$$Gr = \frac{g\beta h^3 \Delta T}{\nu^2} \quad (3.10)$$

Les valeurs calculées pour le nombre de Péclet, qui représente le rapport des transferts de chaleur par advection et par diffusion confirment que dans notre étude les échanges de chaleur sont essentiellement convectifs puisque : $Pe \gg 1$ dans toutes les simulations.

Le nombre de Richardson, rapport entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du fluide, est lui très petit : pour toutes nos simulations $Ri \ll 1$. Ceci confirme, comme on s'y attend dans la configuration étudiée, que la convection forcée est largement dominante.

Concernant les propriétés du fluide, on approxime l'air à un gaz parfait idéal avec une capacité calorifique $C_p = 1005 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\gamma = 1.4$. Pour les simulations à $Re_\tau = 395$, nous avons choisi de prendre un nombre de Prandtl de 0.71, valeur représentative d'un écoulement d'air. Pour les simulations à $Re_\tau = 180$ nous avons fixé $Pr = 0.76$ car c'est la valeur utilisée par Nicoud (1998) ainsi que Nicoud et Poinso (1999) dans leurs Simulations Numériques Directes et nous souhaitons comparer nos SGE avec ces SND. La conductivité λ et la viscosité dynamique μ sont évaluées en utilisant les lois de Sutherland, données ci-dessous :

$$\mu = 1,461.10^{-6} \frac{T^{1.5}}{T + 111} \quad (3.11)$$

$$\lambda = \frac{\mu C_p}{Pr} = \frac{1,468.10^{-3}}{Pr} \frac{T^{1.5}}{T + 111} \quad (3.12)$$

Ces lois de variations sont les relations typiquement utilisées pour de l'air (White (1991)). Elles impliquent que λ , μ et la viscosité cinématique, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, augmentent avec la température. Certaines simulations sont réalisées en supposant λ et μ constantes et uniformes sur le domaine. Dans ce cas, ces propriétés sont évaluées à la température moyenne de l'écoulement, T_m , à l'aide des relations (3.11) et (3.12). Dans les simulations incompressibles et de Boussinesq, la masse volumique est uniforme et constante. Dans les simulations bas Mach, elle est calculée en chaque point et à chaque pas de temps en fonction de la température à l'aide de la loi d'état des gaz parfaits :

$$\rho = \frac{P_{\text{thermo}}}{RT} \quad (3.13)$$

où P_{thermo} est constante et uniforme dans le domaine et vaut 1.10^5 Pa .

Les tableaux 3.1 à 3.4 récapitulent les différentes Simulations des Grandes Échelles réalisées, ainsi que les paramètres caractéristiques de chacune. Dans ces tableaux, l'indice m fait référence aux valeurs moyennes, l'indice 1 aux valeurs à la paroi basse et l'indice 2 aux valeurs au niveau de la paroi haute. Ces SGE ont été numérotées de manière à les identifier assez facilement. Chaque numéro commence par le nombre de Reynolds de frottement de la simulation concernée (180 ou 395) et se poursuit par un chiffre : 0 si l'écoulement est isotherme, 1 si le rapport de températures considéré est faible ($T_2/T_1 = 1.01$ ou 1.07) et 2 si le rapport de températures est élevé ($T_2/T_1 = 2.00$). Pour les cas incompressibles, la numérotation s'arrête là ou comporte une lettre majuscule supplémentaire afin de distinguer le maillage fin (F) et le maillage grossier (G). Pour les autres cas, nous avons ajouté deux lettres minuscules : la pre-

mière indique si λ et μ sont constantes (c) ou variables (v) et la seconde indique si le nombre de Prandtl sous-maille est constant (c) ou dynamique (d).

n°	$Re_{\tau m}$ visé	T_2/T_1	λ, μ	Pr_{sm}	maillage	équations	données de référence
180-0	180	1.00	constantes	\emptyset	fin	INC	Kim <i>et al.</i> (1987)
180-1-cc	180	1.01	constantes	constant	fin	BM	Nicoud et Poinso (1999) Nicoud (1998) Debusschere et Rutland (2004)
180-1-cd	180	1.01	constantes	dynamique	fin	BM	Nicoud et Poinso (1999) Nicoud (1998) Debusschere et Rutland (2004)
180-2-vc	180	2.00	variables	constant	fin	BM	Nicoud et Poinso (1999) Nicoud (1998)
180-2-vd	180	2.00	variables	dynamique	fin	BM	Nicoud et Poinso (1999) Nicoud (1998)
395-0F	395	1.00	constantes	\emptyset	fin	INC	Moser <i>et al.</i> (1999) Kawamura <i>et al.</i> (1999, 2000)
395-0G	395	1.00	constantes	\emptyset	grossier	INC	Moser <i>et al.</i> (1999) Kawamura <i>et al.</i> (1999, 2000)
395-1-cc	395	1.07	constantes	constant	grossier	BM	\emptyset
395-1-vc	395	1.07	variables	constant	grossier	BM	\emptyset
395-2-cc	395	2.00	constantes	constant	grossier	BM	\emptyset
395-2-vc	395	2.00	variables	constant	grossier	BM	\emptyset

TAB. 3.1 – Tableau récapitulatif des différentes simulations réalisées

n°	$U_{\tau m}$ (m.s ⁻¹)	$U_{\tau 1}$ $U_{\tau 2}$ (m.s ⁻¹)	U_c (m.s ⁻¹)	U_b (m.s ⁻¹)	T_c (K)	T_b (K)	T_m (K)	$T_{\tau 1}$ $T_{\tau 2}$ (K)
180-0	0.183	0.183 0.183	3.34 = U_{max}	2.91	∅	∅	∅	∅
180-1-cc	0.184	0.184 0.185	3.36 = U_{max}	2.92	294.5	294	294.5	0.0635 0.0637
180-1-cd	0.185	0.184 0.185	3.36 = U_{max}	2.92	294.5	294	294.5	0.0635 0.0637
180-2-vc	0.312	0.268 0.355	5.74 < U_{max}	4.95	442	443	439.5	5.7622 6.9368
180-2-vd	0.313	0.267 0.358	5.80 < U_{max}	5.00	444	445	439.5	5.7493 6.6930
395-0F	0.397	0.397 0.398	7.46 = U_{max}	6.61	∅	∅	∅	∅
395-0G	0.400	0.400 0.400	8.56 = U_{max}	7.57	∅	∅	∅	∅
395-1-cc	0.429	0.423 0.435	9.22 = U_{max}	8.16	303	302	303	0.3545 0.3482
395-1-vc	0.422	0.414 0.430	9.00 = U_{max}	7.96	303	302	303	0.3553 0.3499
395-2-cc	0.770	0.658 0.881	16.58 < U_{max}	14.66	451	449	439.5	5.1604 5.0563
395-2-vc	0.686	0.563 0.809	14.66 < U_{max}	12.88	459	456	439.5	5.2164 5.0249

TAB. 3.2 – Vitesses et températures caractéristiques des différentes simulations réalisées

n°	$Re_{\tau m}$ effectif	$Re_{\tau 1}$ $Re_{\tau 2}$	Re_c	Re_b	Ri ($\times 10^{-4}$)	Pe
180-0	180	180 180	3279	2859	\emptyset	2173
180-1-cc	179	179 178	3258	2842	1.75	2160
180-1-cd	179	179 179	3258	2842	1.75	2160
180-2-vc	184	262 106	2750	2362	39.52	1795
180-2-vd	184	261 107	2758	2368	38.56	1800
395-0F	390	389 390	7324	6485	\emptyset	4604
395-0G	393	393 392	8396	7429	\emptyset	5275
395-1-cc	396	404 388	8490	7494	1.46	5321
395-1-vc	390	405 375	8283	7329	1.53	5204
395-2-cc	398	477 320	7819	6981	4.44	4957
395-2-vc	396	551 241	6589	5853	5.67	4156

TAB. 3.3 – Nombres sans dimension caractéristiques des différentes simulations réalisées

n°	ρ_1 ρ_2 (kg.m ⁻³)	μ_1 (x10 ⁻⁵) μ_2 (x10 ⁻⁵) (kg.m ⁻¹ .s ⁻¹)	ν_1 (x10 ⁻⁵) ν_2 (x10 ⁻⁵) (m ² .s ⁻¹)	λ_1 λ_2 (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
180-0	1.189	1.8100	1.5210	∅
	1.189	1.8100	1.5210	∅
180-1-cc	1.189	1.8209	1.5315	0.0241
	1.177	1.8209	1.5471	0.0241
180-1-cd	1.189	1.8209	1.5315	0.0241
	1.177	1.8209	1.5471	0.0241
180-2-vc	1.189	1.8137	1.5254	0.0240
	0.595	2.9735	5.0008	0.0393
180-2-vd	1.189	1.8137	1.5254	0.0240
	0.595	2.9735	5.0008	0.0393
395-0F	1.189	1.8100	1.5210	∅
	1.189	1.8100	1.5210	∅
395-0G	1.189	1.8100	1.5210	∅
	1.189	1.8100	1.5210	∅
395-1-cc	1.189	1.8613	1.5654	0.0263
	1.113	1.8613	1.6723	0.0263
395-1-vc	1.189	1.8137	1.5254	0.0256
	1.113	1.9081	1.7144	0.0270
395-2-cc	1.189	2.4453	2.0566	0.0346
	0.595	2.4453	4.1125	0.0346
395-2-vc	1.189	1.8137	1.5254	0.0256
	0.595	2.9735	5.0008	0.0421

TAB. 3.4 – Valeurs des propriétés du fluide aux parois et gradients de vitesse pariétaux

3.2.3 Dimensions et maillages

Les plaques sont espacées de $2h$ et les dimensions longitudinale et transverse sont respectivement de $2\pi h$ et πh , avec $h = 0.014923$ m, soit : $L_x = 0.093764$ m, $L_y = 0.029846$ m et $L_z = 0.046882$ m. Compte-tenu des valeurs de $Re_{\tau m}$ fixées pour les différentes simulations, les dimensions réduites du domaine sont :

$$\text{pour } Re_{\tau m} \approx 180 \begin{cases} L_x^+ \approx 1130 & (3.14) \\ L_y^+ \approx 360 & (3.15) \\ L_z^+ \approx 565 & (3.16) \end{cases}$$

et

$$\text{pour } Re_{\tau m} \approx 395 \begin{cases} L_x^+ \approx 2475 & (3.17) \\ L_y^+ \approx 790 & (3.18) \\ L_z^+ \approx 1240 & (3.19) \end{cases}$$

Ces dimensions ont été choisies afin d'assurer la décorrélation entre les variables des deux frontières dans la direction transverse et de permettre le développement des structures turbulentes dans le sens longitudinal, conformément aux conclusions des travaux de Jimenez et Moin (1991) et de Moin et Kim (1982). En effet, on sait que dans ce type d'écoulement des structures allongées appelées *streaks* se développent dans la couche limite et des dimensions trop petites selon x et z ne permettraient pas de reproduire correctement ce phénomène.

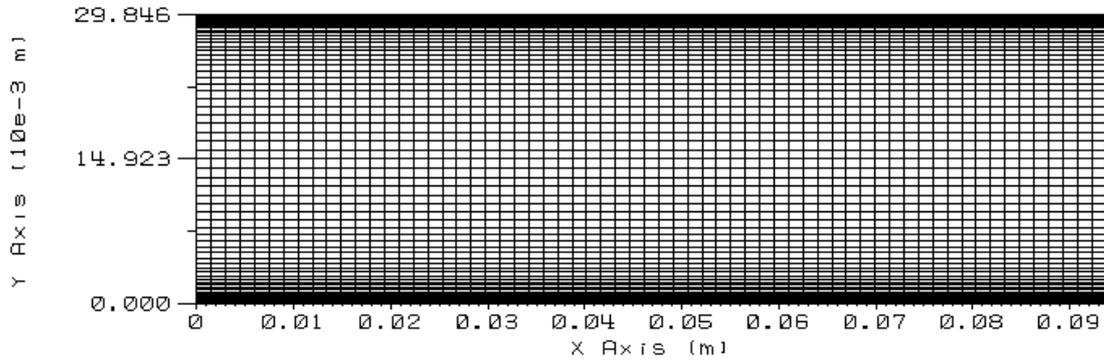
Deux types de maillages ont été considérés, l'un que nous qualifions de "fin" et l'autre que nous qualifions de "grossier" (voir tableau 3.1). Au départ, nous avons utilisé un maillage avec une résolution plutôt fine pour des Simulations des Grandes Échelles : $\Delta x^+ \approx 35$, $\Delta z^+ \approx 15$, $\Delta y^+ \approx 0.5$ au premier noeud et 11 au centre (soit $69 \times 140 \times 85$ noeuds pour $Re_{\tau} = 395$ et $33 \times 66 \times 39$ noeuds pour $Re_{\tau} = 180$). Cependant, à $Re_{\tau} = 395$ un tel maillage représente 821100 noeuds, ce qui devient rédhibitoire compte-tenu de la faiblesse des pas de temps lorsqu'on accroît l'écart de température (voir méthode de calcul du pas de temps à la section 2.2). Nous avons donc choisi de considérer un maillage plus grossier pour les simulations réalisées à ce nombre de Reynolds, afin que les délais de convergence des simulations soient raisonnables. On a alors, avec $64 \times 65 \times 32$ noeuds, $\Delta x^+ \approx 39$, $\Delta z^+ \approx 40$ et $\Delta y^+ \approx 1$ au premier noeud et 25 au centre¹.

Dans les deux cas, le maillage est régulier dans les directions longitudinale (x) et transverse (z). Dans la direction normale aux parois (y), nous avons utilisé un maillage irrégulier, raffiné en proche paroi, afin de pouvoir utiliser une condition de non-glissement tout en limitant le nombre de mailles. Il est déterminé par une transformation en tangente hyperbolique :

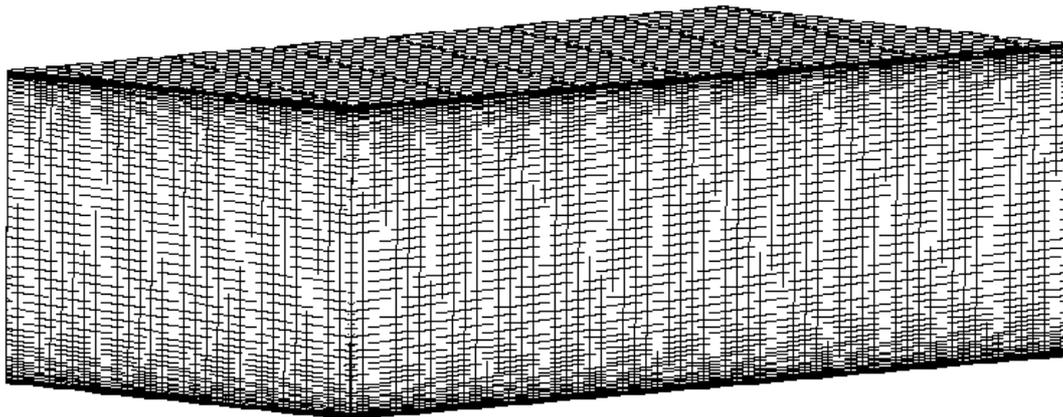
$$y_k = L_y \left\{ 1 + \frac{1}{a} \tanh \left[\left(-1 + \frac{(k-1)}{N_y - 1} \right) \operatorname{atanh}(a) \right] \right\}, \quad k \in [1, N_y] \quad (3.20)$$

¹Toutes ces résolutions adimensionnelles sont calculées avec les valeurs des $Re_{\tau m}$. Ainsi, pour $T_2 \mathbb{1}_1 = 2 \mathbb{00}$, du fait des fortes variations de Re_{τ} d'une paroi à l'autre, elles sont en fait un peu plus grandes à la paroi du bas et un peu plus petites à la paroi du haut.

où N_y est le nombre de noeuds selon l'axe y et a est une constante, fonction de la dilatation du maillage. Le maillage grossier est représenté en projection dans le plan (xOy) et en vue globale sur la figure 3.2.



(a) Plan xOy



(b) Vue globale

FIG. 3.2 – Maillage du domaine pour $Re_\tau = 395$ avec résolution grossière

3.2.4 Conditions aux limites

Afin de simuler l'écoulement entre deux plaques parallèles infinies, des conditions aux limites dynamiques et thermiques périodiques sont appliquées dans les directions longitudinale et transverse. Au niveau des parois, on considère une condition de non-glissement et des températures imposées. La température de la paroi basse, T_1 , est de 293 K et la température de la paroi haute, T_2 , est supérieure ou égale à T_1 selon les cas considérés ($\frac{T_2}{T_1} = 1.00, 1.01, 1.07, 2.00$). Le débit massique d'air ($D_m = L_z \int_{y=0}^{L_y} \rho(y)U(y)dy$) est imposé et maintenu constant par l'ajout d'un terme source dans l'équation de Navier-Stokes afin de compenser les effets du frottement sur les parois. Le débit à fixer pour atteindre un même Re_τ varie d'une simulation à l'autre,

principalement en fonction du rapport de températures et de la prise en compte ou non des variations des propriétés. Il est compris entre $D_m = 0.01100 \text{ kg.s}^{-1}$ et $D_m = 0.02276 \text{ kg.s}^{-1}$ pour les simulations à $Re_\tau = 395$ et entre $D_m = 0.00484 \text{ kg.s}^{-1}$ et $D_m = 0.00554 \text{ kg.s}^{-1}$ pour celles à $Re_\tau = 180$. Ce phénomène se répercute au niveau de la vitesse *bulk*, U_b , de l'écoulement, comme on peut le voir dans le tableau 3.2. L'ensemble des conditions aux limites est représenté schématiquement sur la figure 3.3.

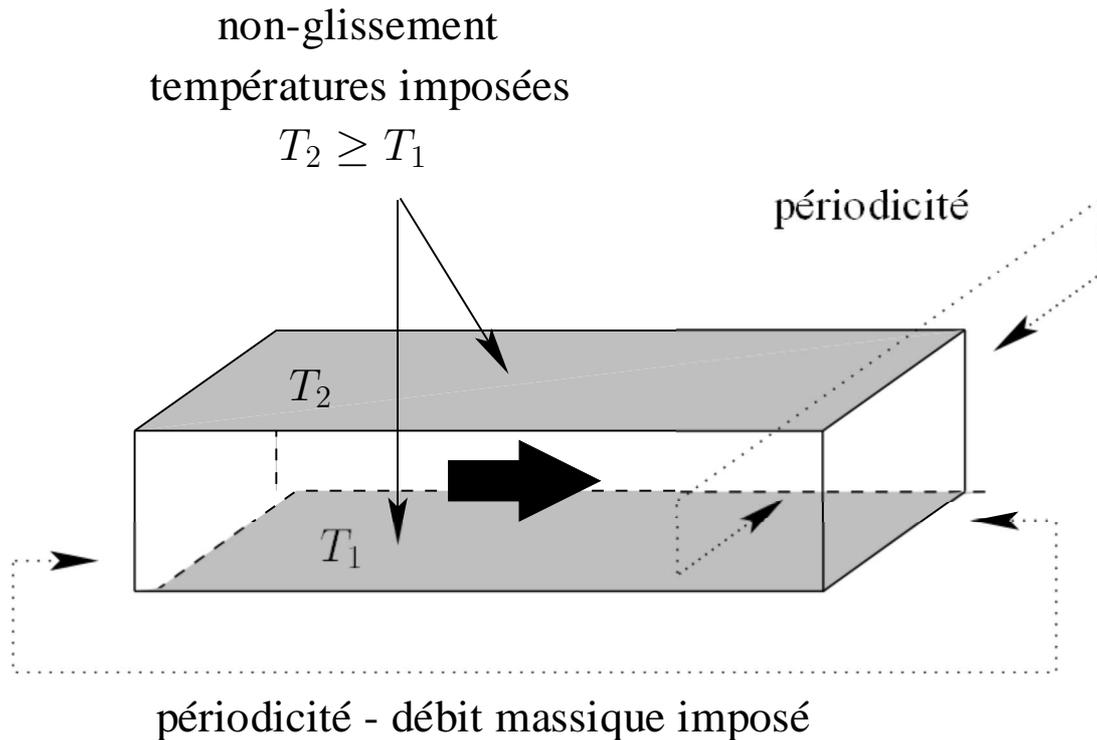


FIG. 3.3 – Conditions aux limites

3.2.5 Schémas et modèles

Brillant (2001) a montré que, parmi les schémas proposés dans Trio_U, dans la présente configuration le schéma Runge-Kutta est le plus précis et le plus stable. L'intégration temporelle est ainsi réalisée avec un schéma Runge-Kutta d'ordre 3 pour une précision optimale (se reporter à Quarteroni *et al.* (2000) pour une description de cette méthode numérique). En ce qui concerne l'intégration spatiale, nous avons utilisé pour la vitesse un schéma de convection centré d'ordre 2 car il est peu dissipatif. Un ordre plus élevé aurait été plus précis mais plus coûteux. De plus, de précédents travaux ont montré que l'utilisation d'un schéma d'ordre 2 permet d'obtenir des résultats satisfaisants (Brillant *et al.* (2004)). Pour la température, nous nous sommes basés sur les conclusions de l'étude menée par Châtelain *et al.* (2004) sur les schémas numériques en SGE thermique. Dans un domaine ne contenant pas de sources de chaleur, la

température à l'intérieur du domaine est bornée par les températures des frontières. Or Châtelain *et al.* (2004) ont montré que l'utilisation d'un schéma centré pour le terme de convection dans l'équation de l'énergie peut conduire à des valeurs de la température qui dépassent les bornes définies par les conditions aux limites thermiques. Afin de remédier à ce problème, les auteurs préconisent l'emploi d'un schéma de type QUICK pour la température. Ils constatent cependant que l'un des désavantages de l'utilisation d'un tel schéma de convection est l'atténuation des fluctuations. Dans notre étude, il nous a semblé plus important de favoriser l'aspect physique plutôt que le niveau des fluctuations. Ainsi, nous avons choisi un schéma QUICK d'ordre 3.

Concernant la modélisation du tenseur sous-maille, comme nous l'avons expliqué dans la section 2.1.11, nous avons opté pour le modèle WALE (Nicoud et Ducros (1999)). En effet, l'emploi d'un maillage raffiné à proximité des parois permet de s'affranchir de l'utilisation de lois de parois mais impose de choisir un modèle qui reproduise correctement le comportement pariétal en y^3 , tel que le modèle WALE. La constante de ce modèle a été fixée à $C_\omega = 0.5$ (valeur optimale déterminée par Nicoud et Ducros (1999) à partir de données de turbulence homogène et isotrope).

Pour le modèle sous-maille thermique, nous avons utilisé deux méthodes différentes, conformément aux conclusions de la section 2.1.11. Un nombre de Prandtl sous-maille constant a été utilisé dans la majorité de nos simulations. Deux d'entre elles ont été réalisées avec un calcul dynamique du nombre de Prandtl sous-maille, selon la méthode développée par Moin *et al.* (1991) (voir tableau 3.1). L'influence de ce choix sera étudiée dans le chapitre 4.

3.2.6 Conditions initiales

Concernant les conditions initiales, trois cas de figure se présentent selon les conditions aux limites thermiques considérées.

Dans les simulations 180-0, 395-0F et 395-0G, on considère l'écoulement isotherme. On utilise alors pour la vitesse un profil initial parabolique sur la composante U auquel sont ajoutées des fluctuations sinusoïdales sur la composante V et des fluctuations aléatoires sur les composantes V et W . La température, quant à elle, est uniforme et constante tout au long du calcul.

Dans les cas où $T_2/T_1 = 1.01$ ou 1.07 (simulations 180-1-cc, 180-1-cd, 395-1-cc et 395-1-vc), on utilise la même condition initiale que celle décrite ci-dessus pour le champ de vitesse. Par contre, pour le champ de température, on impose cette fois comme condition initiale un profil variant linéairement avec y , de T_1 en $y = 0$ à T_2 en $y = L_y$.

Lorsque le ratio de températures est plus important, comme c'est le cas pour les simulations 180-2-vc, 180-2-vd, 395-2-cc et 395-2-vc, le choix des conditions initiales devient très délicat. En effet, de ce choix dépend la rapidité de convergence des simulations, qui est déjà fortement réduite en raison de la faiblesse des pas de temps lorsque la température T_2 est élevée. Nous avons tout d'abord testé trois méthodes :

- profil initial parabolique avec des fluctuations pour la vitesse et profil linéaire pour la température,
- profil initial parabolique avec des fluctuations pour la vitesse et température uniforme constante puis, une fois l'écoulement devenu turbulent, changement des conditions aux limites thermiques,
- reprise à partir des profils convergés d'une simulation à plus faible écart de température, en changeant la température T_2 .

Dans le premier cas, l'écoulement met énormément de temps à devenir turbulent. Dans le second, une fois les conditions aux limites modifiées, le pas de temps chute fortement et demeure faible pendant très longtemps. Dans le troisième cas, on perd la turbulence par le haut du canal et le temps de stabilisation est, lui aussi, conséquent.

Nous avons alors essayé une quatrième méthode, qui nous a permis d'améliorer nettement la rapidité de convergence de nos calculs. Celle-ci consiste à effectuer une reprise à partir d'une simulation à plus faible écart de température, en ayant au préalable "étiré" le profil de température pour qu'il s'étende de T_1 à notre nouvelle température T'_2 , par la transformation suivante :

$$T' = \left[(T - T_1) \frac{(T'_2 - T_1)}{(T_2 - T_1)} \right] + T_1 \quad (3.21)$$

C'est donc avec cette dernière procédure que nous avons lancé les quatre simulations à $T_2/T_1 = 2.00$.

3.3 Étude préliminaire

Il existe peu de Simulations Numériques Directes concernant des écoulements d'air en canal plan fortement anisothermes. À notre connaissance, il n'existe même aucune SND pour un nombre de Reynolds aussi élevé que $Re_\tau = 395$ et un ratio de températures $T_2/T_1 \geq 2.00$.

Compte-tenu des SND disponibles pour la configuration étudiée, nous pouvons toutefois vérifier la validité de nos simulations en considérant :

- les simulations incompressibles sans thermique aux 2 nombres de Reynolds étudiés : $Re_\tau = 180$ et 395 (180-0, 395-0F et 395-0G),
- l'une des simulations bas Mach avec un faible ratio de températures ($T_2/T_1 = 1.01$) à $Re_\tau = 180$ (180-1-cc),
- l'une des simulations bas Mach avec un fort ratio de températures ($T_2/T_1 = 2.00$) à $Re_\tau = 180$ (180-2-vc).

Les SND de Kim *et al.* (1987) nous servent de référence pour la simulation sans thermique à $Re_\tau = 180$. Celles de Moser *et al.* (1999) et Kawamura *et al.* (1999, 2000) sont utilisées pour valider les simulations sans thermique à $Re_\tau = 395$. Pour le cas faiblement anisotherme, nous comparons nos SGE aux SND de Debusschere et Rutland (2004) ainsi qu'aux SND de Nicoud (1998) et Nicoud et Poinso (1999). Enfin, les SND réalisées par Nicoud (1998) et Nicoud et Poinso (1999) à $T_2/T_1 = 2.00$ nous permettent d'effectuer une validation de la simulation fortement anisotherme à $Re_\tau = 180$.

3.3.1 Cas isotherme

Sur les figures 3.4 à 3.9 sont tracés les profils adimensionnels de vitesse moyenne ($\langle U \rangle^+$), des fluctuations de vitesse (U_{rms}^+ , V_{rms}^+ , W_{rms}^+) et de la corrélation vitesse-vitesse ($\langle uv \rangle^+$) obtenus lors de nos SGE isothermes 180-0, 395-0F et 395-0G. Les profils des figures 3.4, 3.6 et 3.8 ont été obtenus à un nombre de Reynolds de frottement de 180 et avec un maillage fin. Les figures 3.5, 3.7 et 3.9 sont relatives aux deux simulations réalisées à un nombre de Reynolds de frottement de 395, l'une avec un maillage fin et l'autre avec un maillage grossier. Les données de SND de Kim *et al.* (1987), Moser *et al.* (1999) et Kawamura *et al.* (1999, 2000) y sont également représentées.

Avec maillage fin, l'accord de nos SGE avec les SND est globalement très bon aux deux nombres de Reynolds. Pour les profils de vitesse moyenne en particulier, nos SGE se superposent bien avec les SND de référence. Une légère différence est observable au niveau des profils des fluctuations et de la corrélation vitesse-vitesse. Les fluctuations de vitesse longitudinale, U_{rms}^+ , sont un peu surestimées par les SGE et, à l'inverse, les fluctuations de vitesse verticale V_{rms}^+ et transverse W_{rms}^+ ainsi que la corrélation $\langle uv \rangle^+$ sont sous-estimées. Ce phénomène est typique d'une redistribution d'énergie de la direction longitudinale vers les autres directions en raison du maillage utilisé. Châtelain *et al.* (2004) ont observé le même petit décalage, avec un maillage équivalent à notre maillage fin. Ils ont montré qu'il est possible de le corriger en raffinant le maillage dans la direction transverse (en doublant le nombre de noeuds). Cependant, cela augmenterait considérablement les temps de calcul, ce qui rendrait inenvisageables des simulations à $T_2/T_1 \geq 2.00$. Considérant de plus le fait que l'écart observé est minime, nous conservons le maillage fin tel quel dans le cadre de notre étude pour $Re_\tau = 180$.

Pour $Re_\tau = 395$, avec le maillage plus grossier, on constate que l'écart avec les SND au niveau des fluctuations de vitesse et de la corrélation $\langle uv \rangle^+$ est accentué. De plus, le profil de vitesse moyenne est légèrement surestimé dans la partie centrale du canal. À ce nombre de Reynolds, la contrainte sur le temps de calcul est encore plus forte qu'à $Re_\tau = 180$. Ainsi, l'utilisation du maillage fin n'est pas envisageable étant donné notre objectif de réaliser des simulations avec un ratio de températures élevé. Nous conservons donc le maillage grossier pour les cas où $Re_\tau = 395$.

Au vu de ces comparaisons, nous pouvons donc valider nos SGE isothermes, qui sont très proche des SND, aux imprécisions dues au maillages près. De plus, si toutes les simulations effectuées à un même nombre de Reynolds sont faites avec le même maillage, elles sont comparables entre elles, ce qui est le point le plus important puisque notre but principal est de voir comment évoluent les profils sous l'effet d'une augmentation du rapport de températures à chaque nombre de Reynolds.

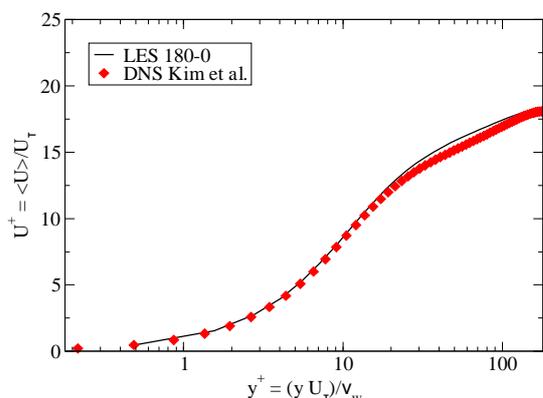


FIG. 3.4 – Vitesse moyenne longitudinale à $Re_\tau = 180$

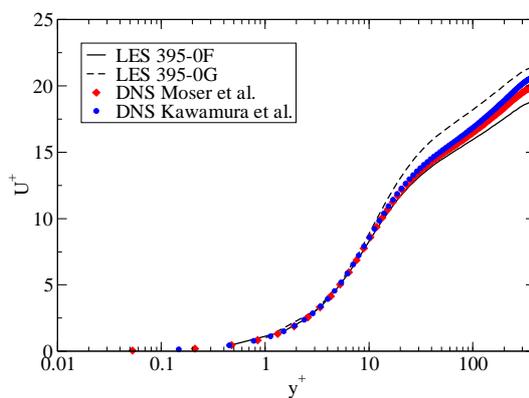


FIG. 3.5 – Vitesse moyenne longitudinale à $Re_\tau = 395$

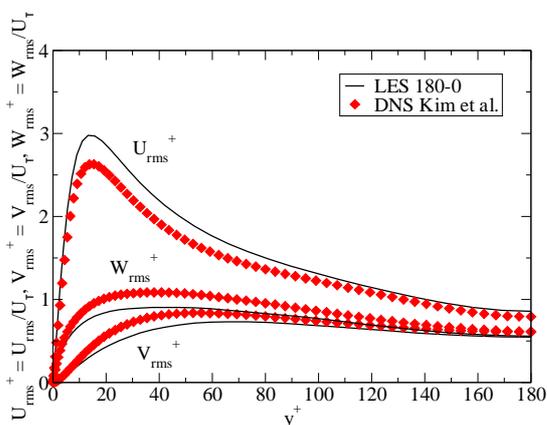


FIG. 3.6 – Écart-types de la vitesse à $Re_\tau = 180$

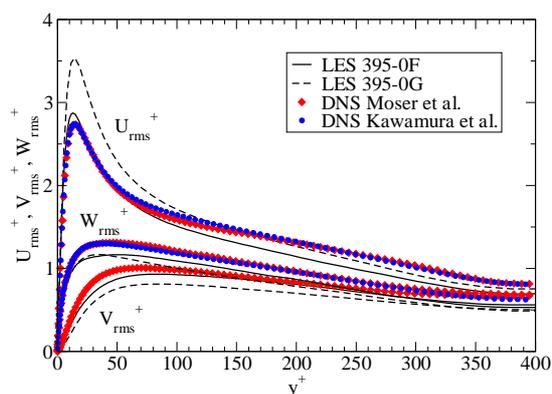


FIG. 3.7 – Écart-types de la vitesse à $Re_\tau = 395$

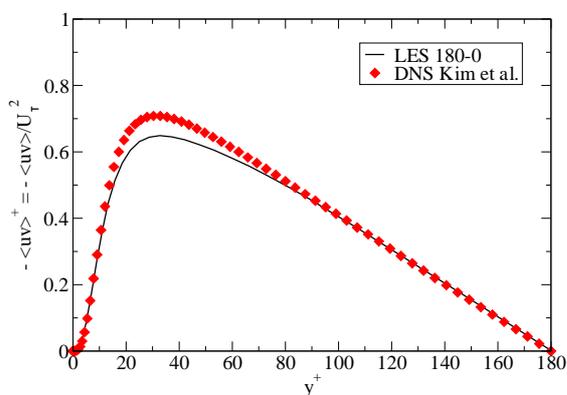


FIG. 3.8 – Corrélation $-\langle uv \rangle$ à $Re_\tau = 180$

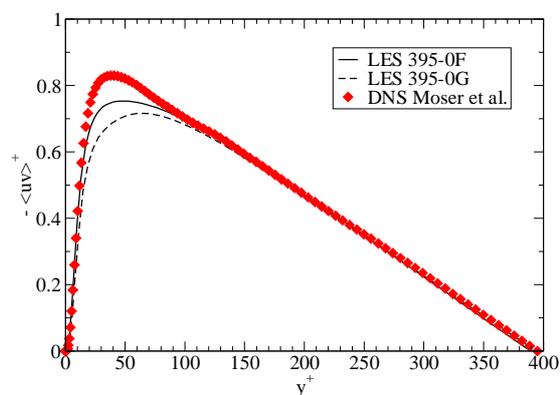


FIG. 3.9 – Corrélation $-\langle uv \rangle$ à $Re_\tau = 395$

3.3.2 Cas faiblement anisotherme

Les profils adimensionnels tracés sur les figures 3.10 à 3.16 sont ceux obtenus lors de la simulation 180-1-cc. Pour cette SGE, le maillage est fin, le nombre de Reynolds de frottement est de 180 et le ratio de températures est $T_2/T_1 = 1.01$. Les profils de SND correspondants (Debusschere et Rutland (2004), Nicoud (1998), Nicoud et Poinso (1999)) sont représentés.

On observe tout d'abord concernant la vitesse moyenne (figure 3.10), les fluctuations de vitesse (figure 3.11) et la corrélation vitesse-vitesse (figure 3.12) les mêmes tendances qu'en isotherme. On a ainsi une très bonne correspondance avec les SND de référence pour le profil de vitesse moyenne. On constate une légère surestimation des fluctuations de vitesse longitudinale et une légère sous-estimation des fluctuations de vitesse verticale et transverse ainsi que de la corrélation $\langle uv \rangle^+$. Là encore, ce petit écart pourrait sûrement être corrigé en utilisant un maillage plus fin dans la direction transverse.

Au niveau de la température moyenne (figure 3.13), notre profil correspond très bien à ceux des SND dans la zone linéaire. Dans la zone logarithmique, il est un peu au-dessus des profils obtenus en SND. Pour les fluctuations de température, on constate sur la figure 3.14 que notre profil est, là aussi, plus proche des résultats de SND près de la paroi (pour $y^+ \leq 60$) que dans la partie centrale du canal. Cependant, dans les deux cas l'accord avec les données de référence reste très satisfaisant et on note, en particulier, que le pic des fluctuations de température est bien reproduit par notre simulation.

Concernant les corrélations vitesse-température, seule la SND de Debusschere et Rutland (2004) nous fournit des données de référence. On peut voir sur la figure 3.16 que notre profil de $\langle v\theta \rangle^+$ se superpose parfaitement à ces données de SND. Pour le profil de la corrélation $\langle u\theta \rangle^+$, l'accord est bon au niveau du pic et de la zone centrale du canal (voir figure 3.15). Dans la zone intermédiaire, on observe une légère surestimation mais l'accord avec la SND est tout de même satisfaisant.

Ainsi, mis à part des petits décalages imputables probablement au maillage, nos résultats de SGE faiblement anisotherme se superposent bien à ceux des SND de Debusschere et Rutland (2004) et de Nicoud (1998) et Nicoud et Poinso (1999). D'autres Simulations des Grandes Échelles ont été réalisées dans le cas du canal plan faiblement anisotherme : Wang et Pletcher (1996), Brillant (2004), Châtelain *et al.* (2004), Lessani et Papalexandris (2006). Dans ces études aussi, l'accord avec des SND de référence est globalement bon malgré quelques petits écarts. Les résultats de ces SGE sont assez similaires aux nôtres mais on peut toutefois remarquer quelques nuances. Sur les profils de T_{rms}^+ de Brillant (2004) et Lessani et Papalexandris (2006) et le profil de $\langle v\theta \rangle^+$ de Châtelain *et al.* (2004), les différences avec les SND apparaissent un peu plus marquées que dans notre étude. À l'inverse, au niveau des profils de T^+ et U_{rms}^+ de Lessani et Papalexandris (2006) et du profil de $\langle uv \rangle^+$ de Brillant (2004), les décalages avec les données de SND sont légèrement moins forts que dans le cas présent.

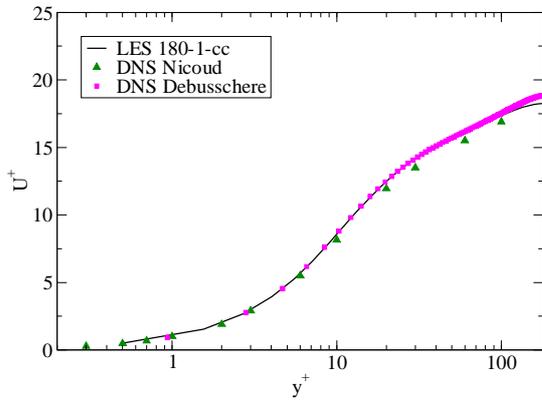


FIG. 3.10 – Vitesse moyenne longitudinale

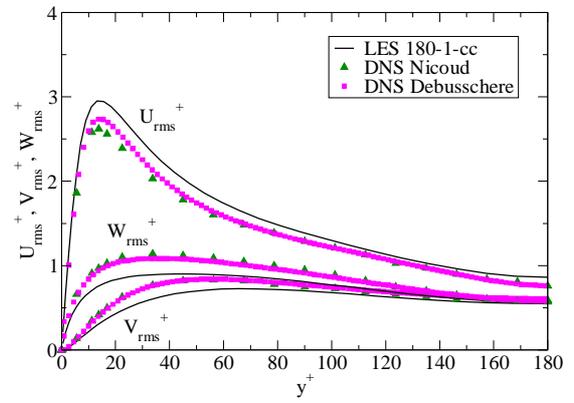


FIG. 3.11 – Écart-types de la vitesse

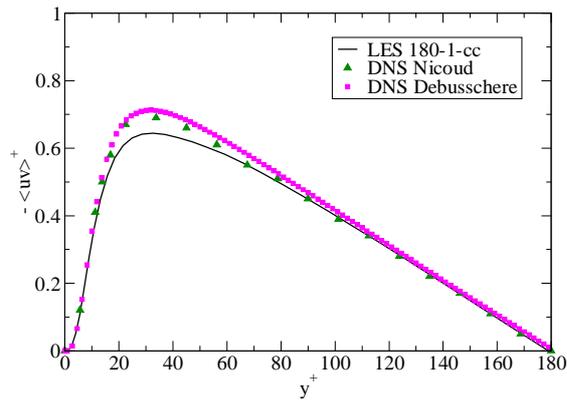


FIG. 3.12 – Corrélation $-\langle uv \rangle$

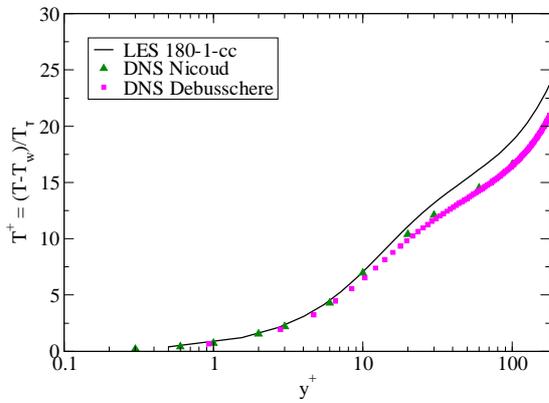


FIG. 3.13 – Température moyenne

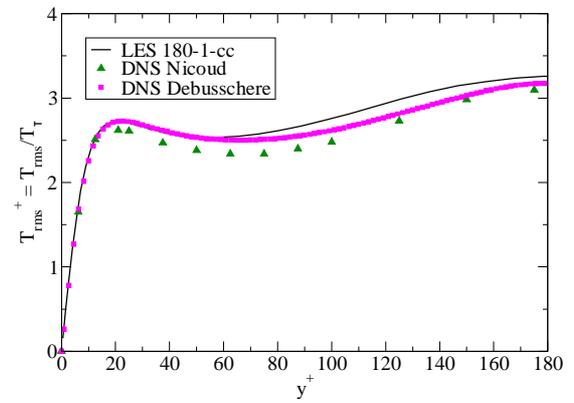
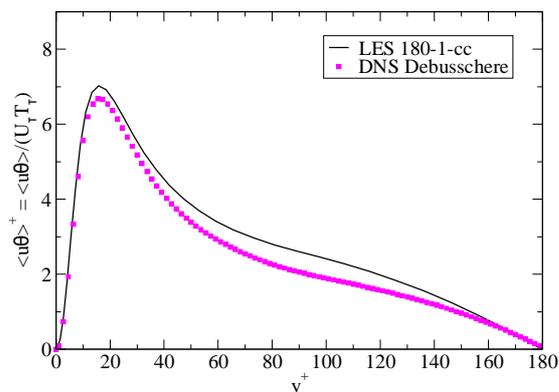
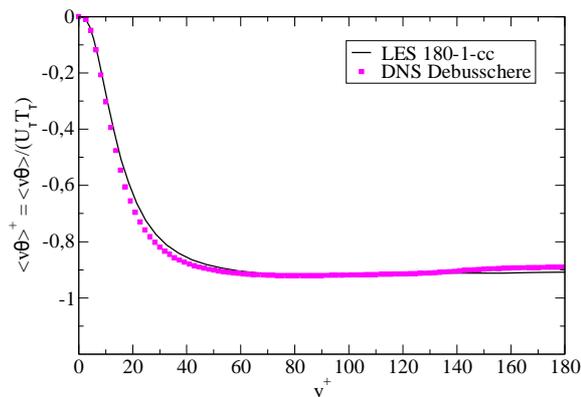


FIG. 3.14 – Écart-type de la température


 FIG. 3.15 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

 FIG. 3.16 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

3.3.3 Cas fortement anisotherme

Dans ce cas de figure, comme nous l'avons souligné précédemment, le nombre de Reynolds de frottement diffère significativement d'une paroi à l'autre. C'est aussi le cas pour la température de frottement (voir tableau 3.2). Les profils, qu'ils soient mis sous forme adimensionnelle ou non, sont également fortement disymétriques (L'analyse de ce phénomène fera l'objet du chapitre 5). C'est pourquoi, dans cette section et par la suite, nous distinguons les profils des moitiés basse et haute du canal pour les simulations réalisées à $T_2/T_1 = 2.00$. Ainsi, sur les figures 3.17 à 3.23 sont représentés les profils adimensionnels de vitesse et de température moyennes, des fluctuations de vitesse et de température ainsi que de la corrélation vitesse-vitesse obtenus près des deux parois du canal avec notre SGE 180-2-vc et avec la SND de référence (Nicoud (1998) et Nicoud et Poinso (1999)).

L'accord de notre simulation avec la SND est excellent en ce qui concerne les profils moyens de vitesse et de température, et ce aussi bien sur la partie basse que sur la partie haute du canal (figures 3.17 et 3.18).

Sur les figures 3.19, 3.20 et 3.21, on retrouve l'écart constaté en isotherme et faiblement anisotherme entre la SGE et la SND. On remarque que celui-ci a tendance à être accentué pour les profils de la moitié basse et atténué pour ceux de la moitié haute. Ceci est tout à fait cohérent avec les variations du nombre de Reynolds de frottement. En effet, celui-ci est plus élevé près de la paroi basse ($Re_{\tau_1} = 262$) et plus faible près de la paroi haute ($Re_{\tau_2} = 106$). Avec notre maillage régulier selon x et z et symétrique par rapport au milieu du canal dans la direction y , la résolution est donc plus fine en haut pour $T_2/T_1 = 2.00$ que dans les cas isotherme et faiblement anisotherme et, à l'inverse, plus grossière en bas. Cette observation tend d'ailleurs à confirmer que les petits écarts observés sur les profils des grandeurs turbulentes en isotherme et faiblement anisotherme proviennent bien principalement du maillage employé.

Concernant les fluctuations de température (figure 3.22), les pics sont bien reproduits en SGE, en particulier près de la paroi basse, le pic situé près de la paroi haute étant lui légèrement sous-estimé. Dans la zone centrale du canal, on constate que le niveau des fluctuations de

température de la SGE est inférieur à celui des SND (sous-estimation d'au maximum 23%). Cependant, l'allure globale du profil des fluctuations de température est similaire à celle obtenue en SND.

Les profils de la corrélation vitesse-vitesse sont présentés sur la figure 3.23. Là aussi, les profils de SGE ont globalement la même allure que les profils de SND, malgré quelques imprécisions : niveaux des pics sous-estimés par la SGE et pics plus larges que ceux de SND.

Malgré les petits écarts constatés au niveau des fluctuations de température et de la corrélation $\langle uv \rangle^+$, les profils de SGE et de SND sont globalement en bon accord, surtout si on tient compte de la résolution de notre maillage et du fait que les valeurs du nombre de Reynolds de frottement obtenues par Nicoud (1998) et Nicoud et Poinot (1999) aux parois diffèrent légèrement des nôtres ($Re_{\tau_1} = 200$, $Re_{\tau_2} \approx 80$).

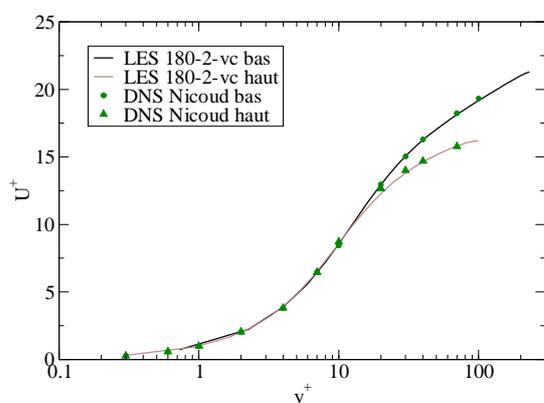


FIG. 3.17 – Vitesse moyenne longitudinale

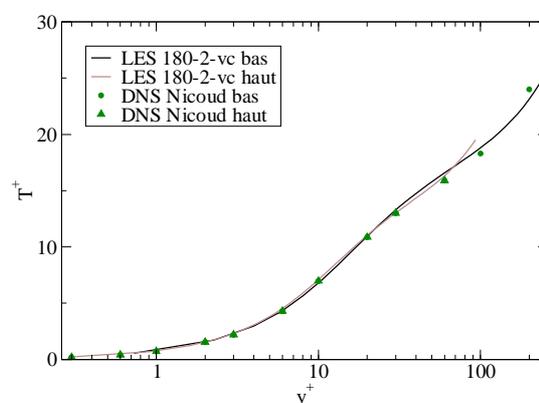


FIG. 3.18 – Température moyenne

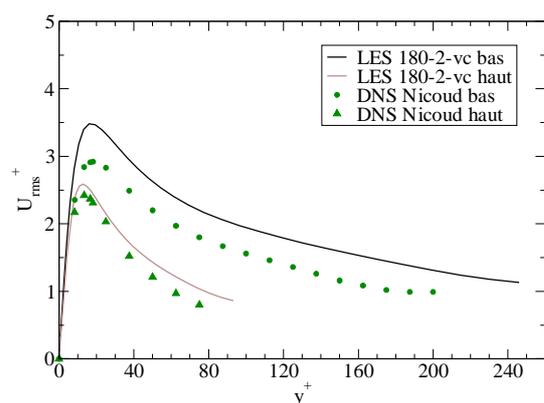


FIG. 3.19 – Écart-type de la vitesse longitudinale

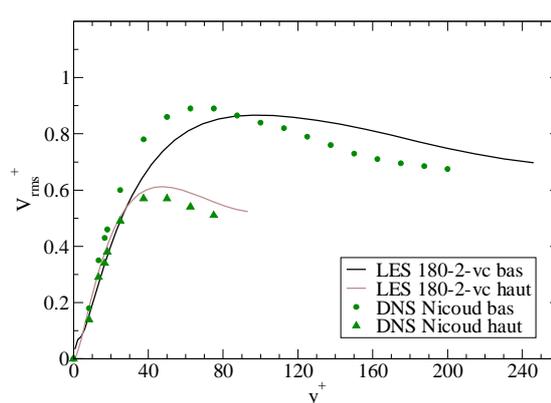


FIG. 3.20 – Écart-type de la vitesse verticale

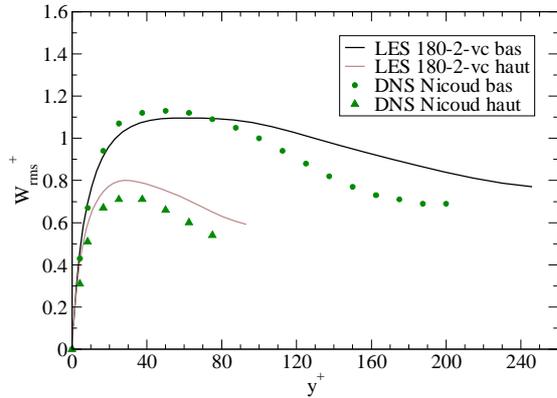


FIG. 3.21 – Écart-type de la vitesse transverse

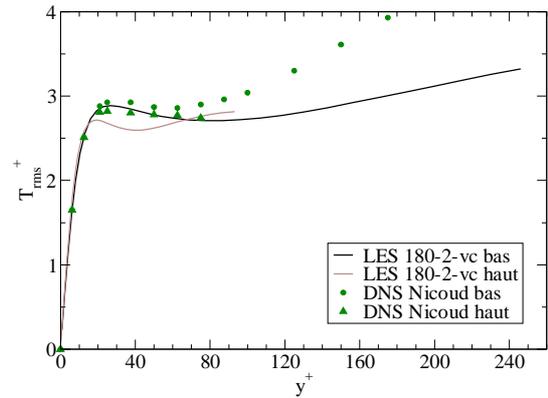


FIG. 3.22 – Écart-type de la température

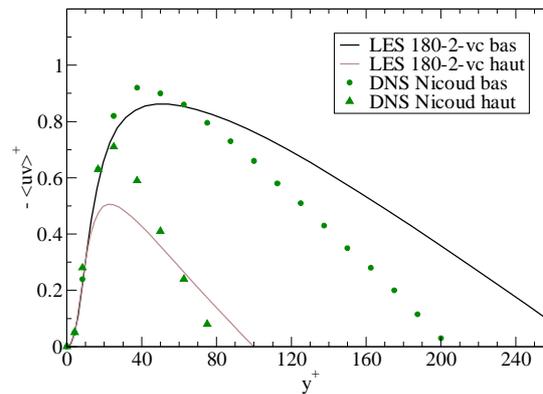


FIG. 3.23 – Corrélation $-\langle uv \rangle$

3.3.4 Conclusions

Étant donné le bon accord général entre nos Simulations des Grandes Échelles et les Simulations Numériques Directes utilisées comme référence, nous pouvons valider nos simulations et notamment confirmer le choix des maillages. Celui-ci se justifie par la recherche du meilleur compromis entre précision et temps de calcul, en tenant compte du fait que notre objectif est d'étudier un rapport de températures élevé ($T_2/T_1 = 2.00$) et, dans un premier temps, de comparer entre elles des simulations réalisées avec un même maillage. Nous avons certes observé quelques écarts par rapport aux résultats de SND, mais le gain au niveau des temps de calculs nous permet d'étudier des cas plus complexes avec la SGE, notamment avec des ratios de températures élevés.

Cette étude préliminaire effectuée, nous allons maintenant nous intéresser aux effets des variations des propriétés du fluide et du modèle sous-maille thermique (chapitre 4), avant d'étudier l'impact du rapport de températures sur l'écoulement (chapitre 5).

Chapitre 4

Étude des paramètres, de la modélisation et de l'adimensionnement

4.1 Introduction

Pour réaliser des simulations des grandes échelles fortement anisothermes, nous devons tout d'abord porter notre attention sur l'impact des variations des propriétés du fluide et de la modélisation sous-maille thermique. En effet, ces paramètres peuvent influencer fortement sur la précision des résultats ainsi que sur les temps de calcul. Il nous semble également important d'évoquer les différents adimensionnements couramment utilisés dans les travaux sur les écoulements turbulents où les propriétés du fluide varient.

Ainsi, dans un premier temps, nous effectuons une analyse comparative des simulations réalisées avec une conductivité et viscosité constantes et des simulations dans lesquelles les variations de ces propriétés sont prises en compte. Ensuite, nous étudions les résultats obtenus avec deux modèles sous-maille thermiques différents. Enfin, nous présentons différents adimensionnements possibles pour nos profils.

4.2 Effet des variations de λ et μ

Dans l'algorithme de résolution des équations bas Mach, la masse volumique, ρ , varie selon la loi d'état des gaz parfaits. Par contre, pour la conductivité du fluide, λ , et sa viscosité, μ , nous pouvons décider si ces propriétés sont constantes ou variables. Dans ce dernier cas, nous pouvons également choisir les lois de variations que nous voulons pour λ et μ . Comme nous considérons que le fluide étudié est de l'air, nous avons choisi pour λ et μ des lois de variations représentatives de ce gaz (voir chapitre 3). L'enjeu est ici de pouvoir limiter les temps de calculs sans nuire à la qualité des résultats. En effet, la prise en compte des variations de la conductivité et de la viscosité avec la température accroît considérablement la durée des simulations, il serait donc avantageux de pouvoir négliger ces variations.

Nous allons étudier pour deux ratios de température (un faible et un assez élevé) s'il est ou non valide de faire l'hypothèse d'une conductivité et d'une viscosité constantes. Cette étude se

réfère aux simulations réalisées avec un nombre de Reynolds de frottement de 395 et pour des rapports de température de 1.07 (cas 395-1-cc et 395-1-vc) et 2.00 (cas 395-2-cc et 395-2-vc). Pour le faible ratio de températures ($T_2/T_1 = 1.07$), l'écart de températures est de 20 K. Or, comme nous l'avons évoqué dans la section 1.6, pour des écarts de températures inférieurs à 30 K, avec de l'air, l'erreur commise en négligeant les variations des propriétés est considérée comme acceptable. En effet, pour $T_2 - T_1 = 20$ K, nous avons $\frac{\Delta\mu/2}{\mu_m} \approx 2.5\%$ et $\frac{\Delta\lambda/2}{\lambda_m} \approx 2.7\%$. On s'attend donc *a priori* à ce que la viscosité et la conductivité puissent être supposées constantes pour $T_2/T_1 = 1.07$. En ce qui concerne le grand rapport de températures ($T_2/T_1 = 2.00$), on a $T_2 - T_1 = 293$ K, soit des rapports $\frac{\Delta\mu/2}{\mu_m}$ et $\frac{\Delta\lambda/2}{\lambda_m}$ d'environ 24%. Il semble donc peu probable dans ce cas que les variations de la viscosité et de la conductivité puissent être négligées.

4.2.1 Cas faiblement anisotherme

Pour un faible ratio de températures, ici $T_2/T_1 = 1.07$, les profils des deux moitiés du canal se superposent, nous considérons donc seulement les courbes de la partie basse du canal pour plus de clarté. Celles-ci sont toutes tracées sous forme adimensionnelles. Sur les figures 4.1 à 4.7, sont ainsi représentés les profils adimensionnels de la vitesse et de la température moyennes, des fluctuations de vitesse et de température et des corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température relatifs aux simulations 395-1-cc et 395-1-vc. Ces deux simulations sont identiques ($Re_\tau \approx 395$, $T_2/T_1 = 1.07$, équations Bas Mach, nombre de Prandtl sous-maille constant), hormis en ce qui concerne λ et μ . Nous avons imposé, à ces propriétés des valeurs constantes dans la simulation 395-1-cc et nous avons pris en compte leurs variations avec la température (équations (3.11) et (3.12)) dans la simulation 395-1-vc.

En ce qui concerne les profils moyens (figures 4.1 et 4.4) et les fluctuations (figures 4.2 et 4.5), on peut constater que les deux simulations donnent des résultats presque parfaitement identiques. Sur ces tracés, on distingue difficilement les deux courbes. Pour les corrélations vitesse-température (figures 4.6 et 4.7), on observe également que les profils relatifs aux deux simulations se superposent. Sur le profil de la corrélation vitesse-vitesse (figure 4.3), l'accord est excellent en proche paroi et dans la zone centrale du canal. On peut voir un léger décalage entre les deux courbes dans la zone intermédiaire, mais celui-ci est relativement faible.

Cette analyse des résultats des simulations 395-1-cc et 395-1-vc nous permet de conclure quant à l'influence des variations des propriétés du fluide à faible écart de température. On peut considérer, d'après ce qui précède, que l'hypothèse d'une conductivité et d'une viscosité constantes est tout à fait valide pour un tel ratio de températures, comme le calcul de $\frac{\Delta\mu/2}{\mu_m}$ et $\frac{\Delta\lambda/2}{\lambda_m}$ nous le laissait supposer.

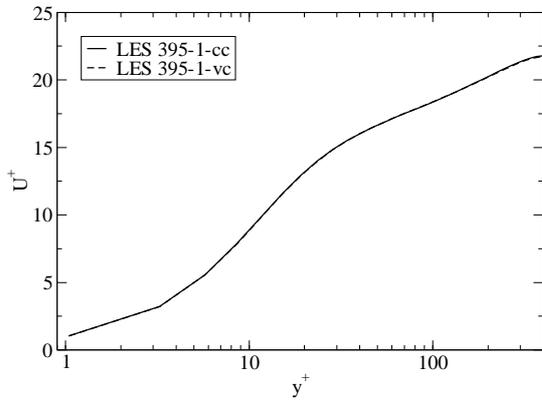


FIG. 4.1 – Vitesse moyenne longitudinale

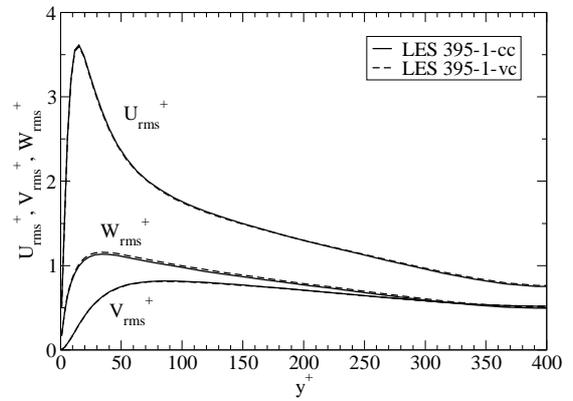


FIG. 4.2 – Écart-types de la vitesse

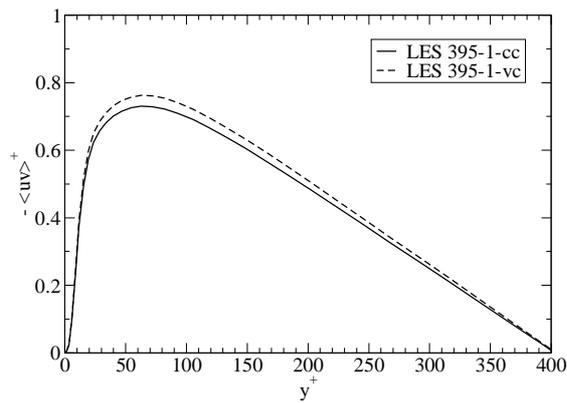


FIG. 4.3 – Corrélation - $\langle uv \rangle$

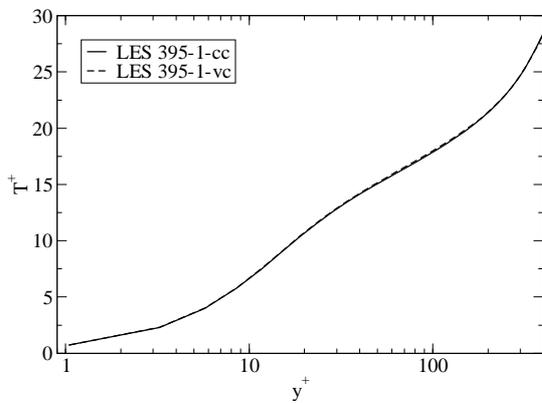


FIG. 4.4 – Température moyenne

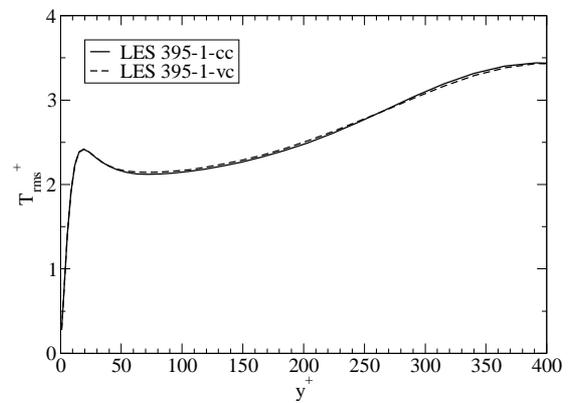


FIG. 4.5 – Écart-type de la température

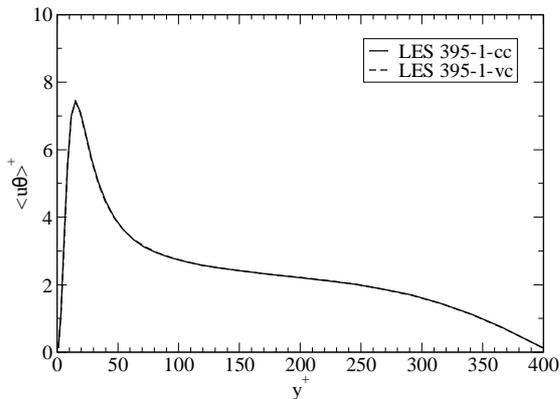


FIG. 4.6 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

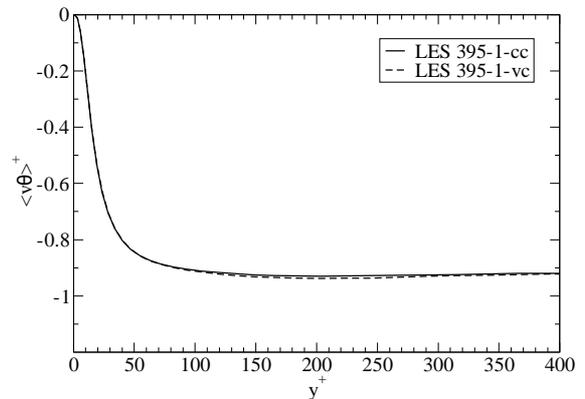


FIG. 4.7 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

4.2.2 Cas fortement anisotherme

Nous nous intéressons maintenant aux simulations 395-2-cc et 395-2-vc, réalisées à un nombre de Reynolds de frottement de 395, avec un nombre de Prandtl sous-maille constant et un rapport de températures $T_2/T_1 = 2.00$. Pour ce fort ratio de températures, les profils des deux parties du canal ne correspondent pas l'un avec l'autre, nous distinguons donc les courbes des moitiés basse et haute du canal sur les figures 4.8 à 4.16 ci-après. Dans la simulation 395-2-cc, λ et μ sont considérées constantes et dans la simulation 395-2-vc, elles varient avec la température selon les équations (3.11) et (3.12).

Sur les figures 4.8 et 4.13 sont tracés les profils moyens. Pour la vitesse moyenne, on voit, sur les deux moitiés du canal, qu'il y a un bon accord entre la simulation à propriétés constantes et celle à propriétés variables, et ce particulièrement dans la zone linéaire. Dans la région logarithmique, on observe un écart entre les courbes des deux simulations mais celui-ci est très léger. En ce qui concerne la température moyenne, les résultats des simulations 395-2-cc et 395-2-vc sont plus éloignés les uns des autres, et ce en bas et en haut du canal. Le fait de négliger les variations des propriétés a pour effet de surestimer le profil de température par rapport au cas où ces variations sont prises en compte. L'écart est particulièrement prononcé vers le centre du canal pour la moitié basse et dans la zone intermédiaire située entre les régions linéaire et logarithmique pour la moitié haute.

Les fluctuations de vitesse longitudinale, verticale et transverse sont présentées sur les figures 4.9 à 4.11. Dans les trois cas, on observe des différences entre les profils relatifs à la simulation 395-2-cc et ceux relatifs à la simulation 395-2-vc. Sur les courbes des fluctuations de vitesse longitudinale, l'écart n'est pas très prononcé. Avec la simulation 395-2-cc, l'intensité de ces fluctuations est un peu atténuée sur la partie basse et, à l'inverse, un peu plus forte sur la partie haute, en comparaison de la simulation 395-2-vc. On observe le même phénomène au niveau des fluctuations de vitesse verticale et transverse : le fait de négliger les variations de λ et μ a pour conséquence de sous-estimer les fluctuations sur le bas du canal et de les surestimer sur le haut du canal. Cette fois, on observe que l'écart entre les résultats des deux simulations

est bien plus marqué. Il est d'autant plus important qu'on s'approche de la partie centrale du canal, et ce en bas comme en haut du canal. Cette augmentation de l'écart entre les courbes des simulations 395-2-cc et 395-2-vc vers le centre du canal, est peut-être due au fait que le niveau des fluctuations de température augmente lui aussi lorsqu'on va vers la partie centrale de canal. En effet, dans la zone centrale du canal, contrairement à ce qui se passe près des parois, les variations de la température moyenne et les variations des fluctuations de température sont à peu près du même ordre de grandeur¹. Ainsi les variations de T_{rms} peuvent influencer sur λ et μ dans cette région. Comme ces fluctuations augmentent pour atteindre leur maximum au milieu du canal, l'effet serait alors bien d'accroître l'écart entre les courbes prenant en compte les variations de ces propriétés et celles les supposant constantes lorsqu'on s'approche du centre du canal. Par ailleurs, on peut constater que les positions des pics des fluctuations de vitesse semblent légèrement décalées lorsqu'on compare les deux simulations. Si on s'intéresse aux fluctuations de température (figure 4.14), on peut voir que les simulations 395-2-cc et 395-2-vc donnent des résultats très similaires en proche paroi ($y^+ \leq 60$). Au delà, un écart apparaît entre les profils relatifs aux deux simulations et celui-ci s'amplifie à mesure que l'on s'approche du centre du canal, sur les moitiés haute et basse. L'effet est inversé par rapport à celui observé sur les fluctuations de vitesse : le fait de négliger les variations de la conductivité et de la viscosité, se traduit par des fluctuations de température plus élevées dans la partie basse du canal et plus faibles dans la partie haute.

Enfin, les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température sont tracées sur les figures 4.12, 4.15 et 4.16. Pour ces dernières, les différences entre les profils des simulations 395-2-cc et 395-2-vc sont globalement modérées. La corrélation $\langle v\theta \rangle$ est juste légèrement surestimée lorsque les propriétés sont constantes sur la partie basse du canal. La corrélation $\langle u\theta \rangle$ est plus influencée, avec un petit décalage au niveau des pics et, surtout, une nette différence dans la zone centrale, vers le haut du canal. Au niveau de la corrélation vitesse-vitesse $\langle uv \rangle$, on constate cette fois un très gros écart entre les profils des deux simulations. Celui-ci apparaît au niveau du pic et devient de plus en plus grand lorsqu'on va vers le centre du canal. Lorsque λ et μ sont constantes, le profil de $\langle uv \rangle$ est bien en-dessous de celui obtenu avec des propriétés variables sur la moitié basse du canal et, au contraire, bien au-dessus sur la moitié haute du canal.

Comme nous venons de le voir, pour le cas fortement anisotherme il y a cette fois des divergences notables entre les résultats obtenus avec une conductivité et une viscosité constantes et ceux obtenus en tenant compte des variations de ces propriétés. Il apparaît clairement, notamment par rapport aux courbes de la section précédente, que cette fois les variations de λ et μ ne peuvent pas être négligées sans nuire significativement à la précision des résultats. Comme nous l'avions supposé d'après les valeurs de $\frac{\Delta\mu/2}{\mu_m}$ et $\frac{\Delta\lambda/2}{\lambda_m}$, la conductivité et la viscosité du fluide ne peuvent donc pas être supposées constantes lorsque le rapport de températures, T_2/T_1 , est de 2.00.

¹Près des parois par contre, les variations des fluctuations de température sont négligeables devant les variations de la température moyenne.

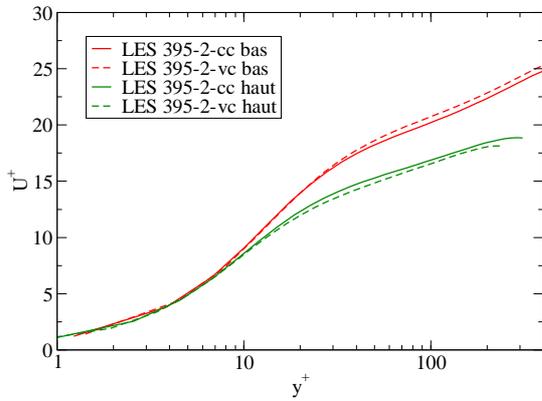


FIG. 4.8 – Vitesse moyenne longitudinale

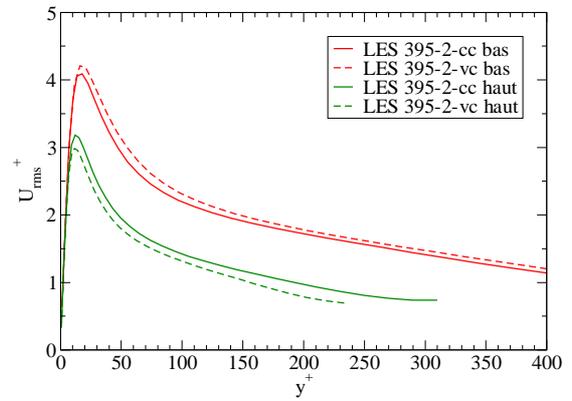


FIG. 4.9 – Écart-type de la vitesse longitudinale

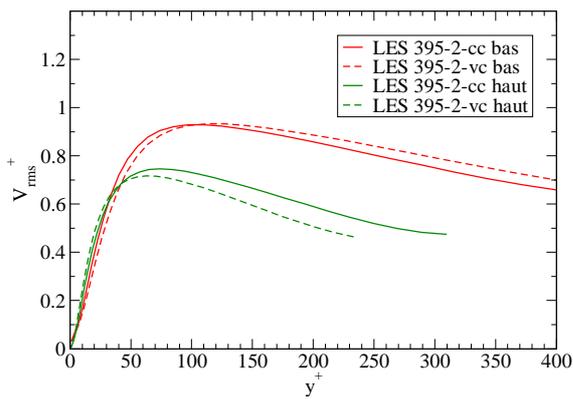


FIG. 4.10 – Écart-type de la vitesse verticale

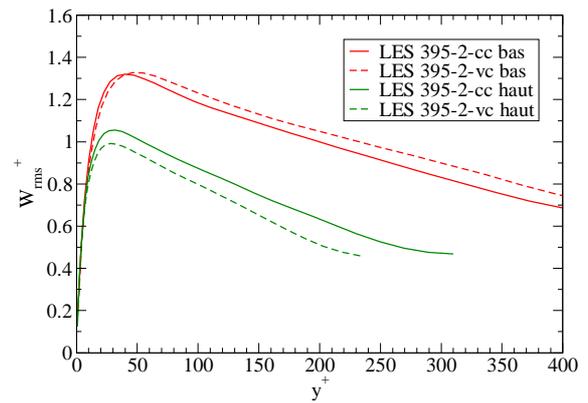


FIG. 4.11 – Écart-type de la vitesse transverse

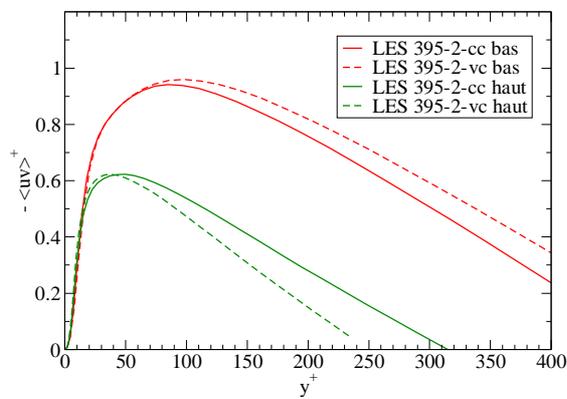


FIG. 4.12 – Corrélation – $\langle uv \rangle$

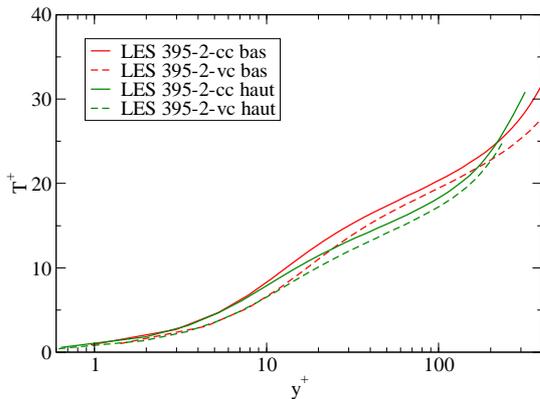


FIG. 4.13 – Température moyenne

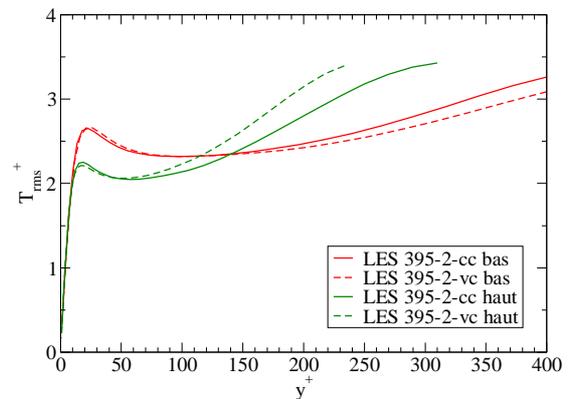


FIG. 4.14 – Écart-type de la température

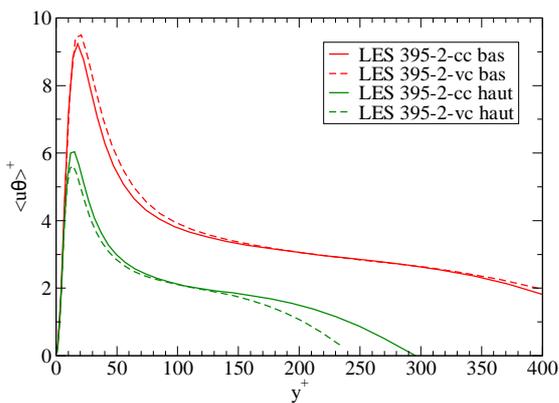


FIG. 4.15 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

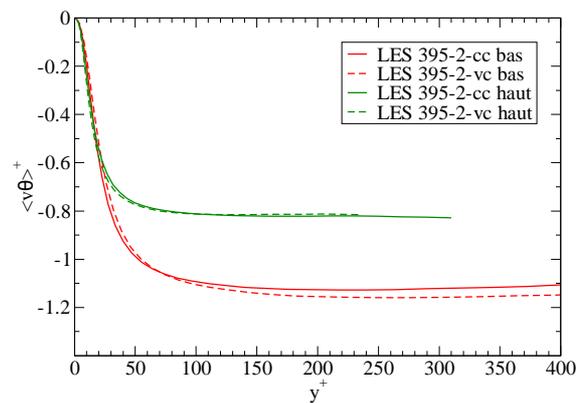


FIG. 4.16 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

4.3 Étude de la modélisation sous-maille thermique

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.1.11, le modèle sous-maille thermique le plus simple, qui consiste à supposer le nombre de Prandtl sous-maille constant, repose sur une analogie théoriquement fautive entre les champs de vitesse et de température. Le modèle basé sur un calcul dynamique du nombre de Prandtl sous-maille semble *a priori* plus à même de représenter l'effet des échelles sous-maille thermiques, moyennant une plus grande complexité et d'avantage de calculs. Nous souhaitons donc voir si, en comparaison de ce modèle dynamique, le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant est ou non satisfaisant, à faible puis à fort écart de température, dans notre configuration. Pour cela, nous comparons les résultats des simulations 180-1-cc et 180-1-cd puis ceux des simulations 180-2-vc et 180-2-vd.

4.3.1 Cas faiblement anisotherme

Sur les figures 4.17 à 4.24 sont tracés simultanément les résultats des simulations 180-1-cc et 180-1-cd, qui ne diffèrent que sur un point : le modèle sous-maille thermique utilisé. Ces simulations ont été réalisées à un nombre de Reynolds de frottement de 180, avec un rapport de températures $T_2/T_1 = 1.01$ et λ et μ constantes.

Les profils moyens de vitesse (figure 4.17) et de température (figure 4.21) des deux simulations sont parfaitement superposés. L'accord des profils des fluctuations de vitesse est également excellent (figure 4.18). Concernant les fluctuations de température (figure 4.22), on note un écart entre les résultats des simulations 180-1-cc et 180-1-cd pour $40 \leq y^+ \leq 150$. Cependant, celui-ci est très léger et les profils coïncident sur tout le reste du canal ($y^+ < 40$ et $y^+ > 150$). Pour les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température (figures 4.19, 4.23 et 4.24), les courbes relatives aux deux simulations correspondent très bien, on distingue à peine les deux tracés. Sur la figure 4.20 sont représentés les profils du nombre de Prandtl sous-maille. Pour la simulation 180-1-cc, nous avons imposé la valeur de 0.9 à ce nombre sur tout le canal, comme on peut le voir sur le tracé. On constate que le nombre de Prandtl turbulent obtenu par un calcul dynamique (simulations 180-1-cd) a plutôt une valeur proche de 1.25, sauf près de la paroi, où il décroît jusqu'à 0 de manière quasi linéaire.

Ces observations nous permettent de conclure qu'à faible ratio de températures, les simulations réalisées avec les deux modèles sous-maille thermiques aboutissent à des résultats quasiment identiques. Le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant est donc satisfaisant pour un faible T_2/T_1 , même si la simulation 180-1-cd montre que le nombre de Prandtl sous-maille n'est ni constant dans la direction verticale, ni proche de 0.9. Au même nombre de Reynolds de frottement, Brillant *et al.* (2006) ont également comparé le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant avec des modèles dynamiques (avec plusieurs procédures de stabilisation de la constante différentes). Ils ont observé que le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant fournit d'aussi bon résultats que les modèles dynamiques pour des écarts de température modérés. Nos conclusions sont donc en accord avec les leurs.

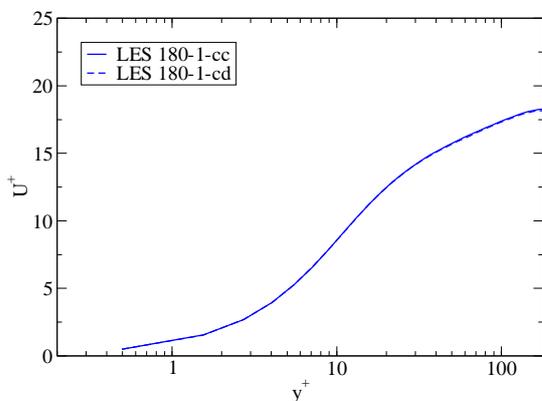


FIG. 4.17 – Vitesse moyenne longitudinale

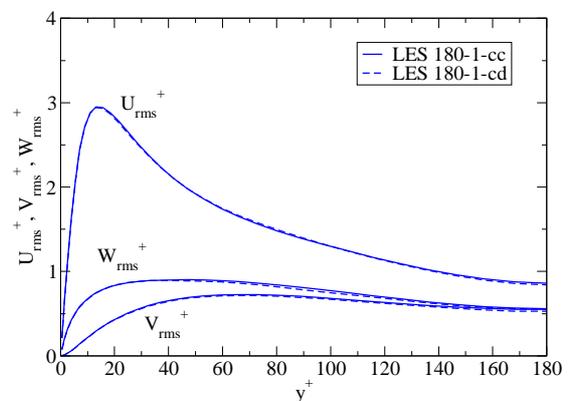


FIG. 4.18 – Écarts-types de la vitesse

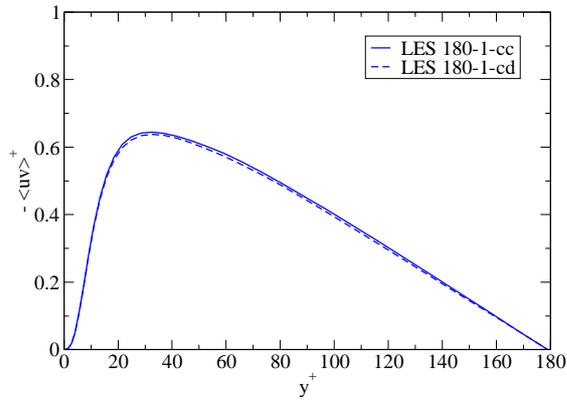


FIG. 4.19 – Corrélation $-\langle uv \rangle$

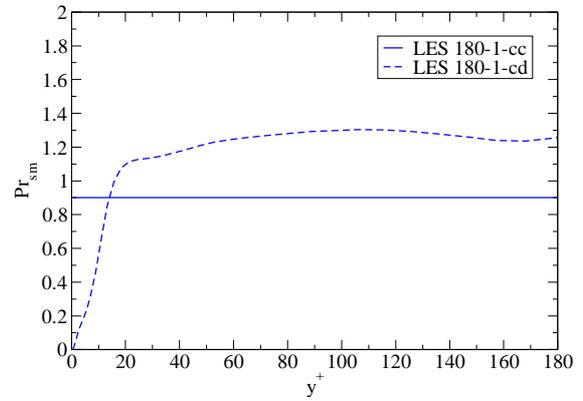


FIG. 4.20 – Nombre de Prandtl sous-maile

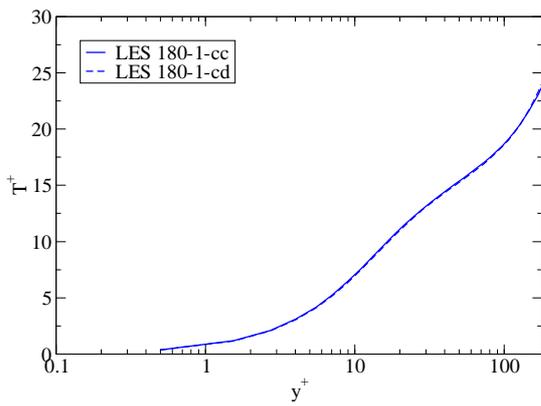


FIG. 4.21 – Température moyenne

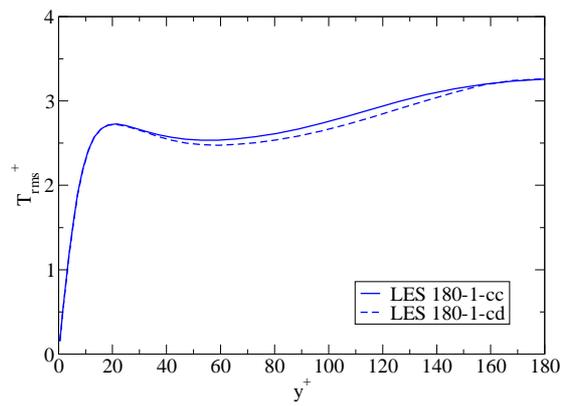


FIG. 4.22 – Écart-type de la température

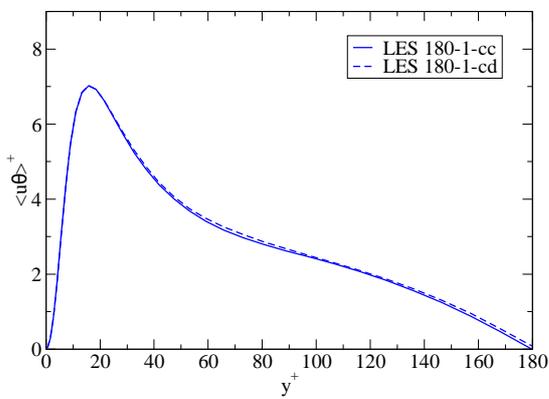


FIG. 4.23 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

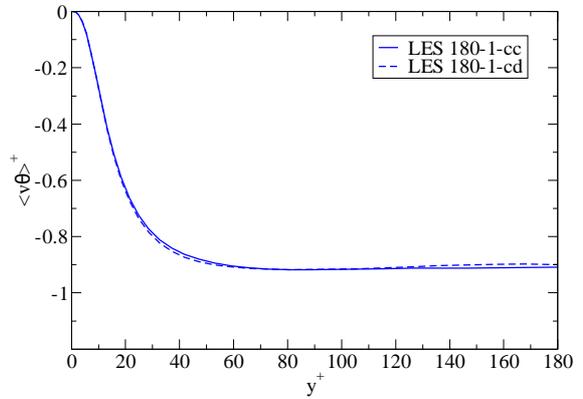


FIG. 4.24 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

4.3.2 Cas fortement anisotherme

Le rapport de températures considéré est maintenant de $T_2/T_1 = 2.00$. Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, pour un tel ratio nous devons distinguer les profils des deux moitiés du canal. Nous comparons donc cette fois les courbes des moitiés basse et haute du canal obtenues lors des simulations 180-2-vc et 180-2-vd, réalisées avec $Re_\tau \approx 180$, λ et μ variables et un nombre de Prandtl sous-maille soit constant (cas 180-2-vc), soit calculé dynamiquement (cas 180-2-vd).

On peut constater, en se reportant aux figures 4.25 et 4.31, que les profils de vitesse moyenne et de température moyenne des deux simulations se superposent presque parfaitement, quelle que soit la région du canal considérée.

Les fluctuations de vitesse longitudinale et de vitesse verticale (figures 4.26 et 4.27) sont également en excellent accord sur les deux moitiés du canal. Au niveau des fluctuations de vitesse transverse, on observe sur la figure 4.28 que la courbe obtenue lors de la simulation 180-2-vd est un peu en-dessous de celle obtenue lors de la simulation 180-2-vc sur la moitié haute du canal. Cette différence est toutefois très petite et l'accord entre les deux simulations est quasiment parfait sur la moitié basse. Les résultats sont un peu plus éloignés les uns des autres en ce qui concerne les fluctuations de température (figure 4.32). Les profils ont bien la même forme dans les deux cas, et les positions des pics sont identiques, mais avec un nombre de Prandtl sous-maille constant, on obtient une intensité plus faible qu'avec un nombre de Prandtl sous-maille dynamique pour ces fluctuations sur l'ensemble du canal. L'écart observé n'étant que de l'ordre de 5%, on ne peut toutefois pas conclure à une nette différence entre les deux modèles sous-maille.

Les profils des corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température sont représentés sur les figures 4.29, 4.33 et 4.34. On constate que les courbes de la corrélation vitesse-vitesse sont identiques avec les deux simulations considérées. De petits écarts apparaissent au niveau des corrélations vitesse-température. Pour $\langle v\theta \rangle$, sur la partie basse du canal, le profil obtenu lors de la simulation 180-2-vd descend légèrement plus bas que l'autre profil pour $30 < y^+ < 120$. Pour $\langle u\theta \rangle$, c'est au niveau des pics qu'on note une différence : ceux-ci sont un peu plus élevés avec la simulation à nombre de Prandtl dynamique qu'avec celle où le nombre de Prandtl sous-maille est constant. Néanmoins, ces écarts sont trop peu importants pour pouvoir remettre en cause le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant.

Sur la figure 4.30, on observe bien que le nombre de Prandtl sous-maille est constant, fixé à une valeur de 0.9, dans la simulation 180-2-vc. Dans l'autre simulation, où ce nombre est calculé dynamiquement en chaque point de l'écoulement à chaque pas de temps, on constate qu'il est plutôt proche de 0.8, sauf à l'approche des parois où il diminue vers 0. On obtient donc deux profils totalement différents pour le nombre de Prandtl sous-maille, mais cela ne semble pas avoir de répercussions sur les autres profils.

En conclusion, il n'y a pas de différence sensible entre les résultats obtenus avec les deux modèles sous-maille thermiques pour un fort rapport de températures. Les profils moyens, ceux des fluctuations et ceux des corrélations sont très proches, et ce même si le profil de Pr_{sm} est

lui bien différent dans les deux cas. Étonnamment, le modèle basé sur un nombre de Prandtl sous-maille constant permet donc d'obtenir d'aussi bons résultats que le modèle calculant dynamiquement le nombre de Prandtl sous-maille à $T_2/T_1 = 2.00$. Il peut y avoir plusieurs explications à ce phénomène. On peut tout d'abord supposer que le maillage utilisé est tellement fin que le modèle sous-maille thermique n'a que peu d'influence dans nos simulations. Nos SGE seraient alors des quasi-SND. Des simulations sans modèle sous-maille thermique et avec ces deux modèles mais en utilisant un maillage plus grossier permettraient de tester cette hypothèse. Il est également possible que le ratio de températures étudié, pourtant déjà assez important, ne soit pas suffisant pour observer une différence entre ces deux modèles. Seules des simulations avec un plus grand rapport de températures, tel que $T_2/T_1 = 5.00$, permettront de savoir si tel est le cas. Le fait que le nombre de Reynolds de ces simulations soit relativement petit pourrait aussi être une explication. Pour étudier ce point, une simulation identique à la simulation 395-2-vc mais avec un nombre de Prandtl sous-maille dynamique serait nécessaire. Enfin, on peut envisager que le modèle basé sur un nombre de Prandtl sous-maille constant soit suffisant, même lorsque les gradients thermiques sont importants, bien que théoriquement il ne soit pas justifié.

Des SGE complémentaires, avec un maillage plus grossier, avec un ratio de températures plus élevé et avec un nombre de Reynolds de frottement de 395 devront donc être réalisées et analysées² afin de pouvoir conclure définitivement quant au choix du modèle sous-maille thermique dans un canal fortement anisotherme.

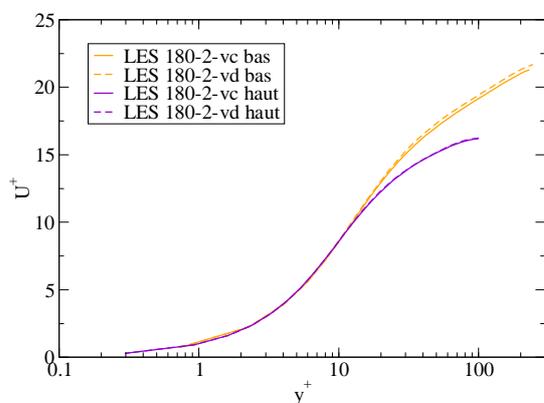


FIG. 4.25 – Vitesse moyenne longitudinale

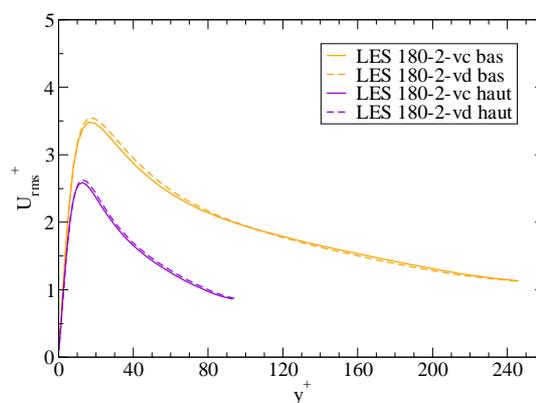


FIG. 4.26 – Écart-type de la vitesse longitudinale

²Ces simulations sont actuellement en cours.

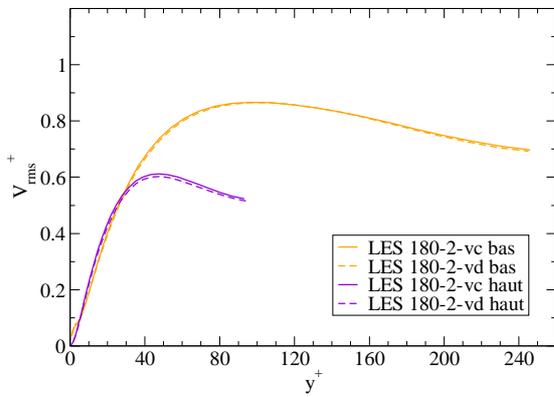


FIG. 4.27 – Écart-type de la vitesse verticale

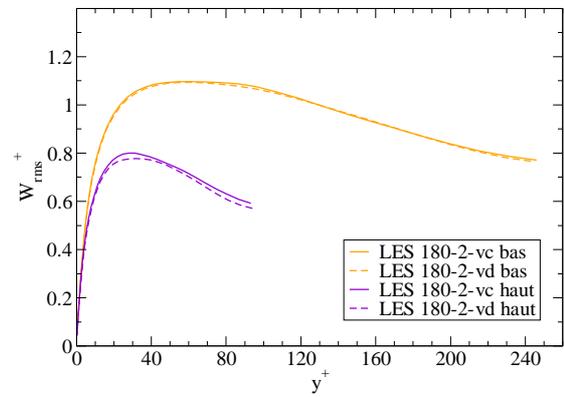


FIG. 4.28 – Écart-type de la vitesse transverse

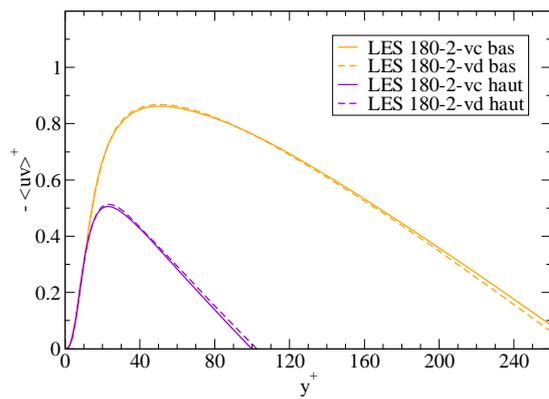


FIG. 4.29 – Corrélation $- \langle uv \rangle$

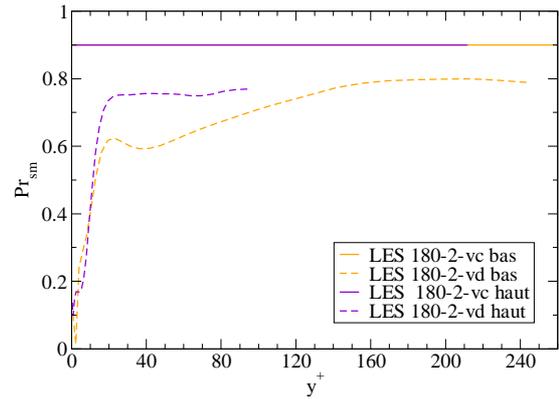


FIG. 4.30 – Nombre de Prandtl sous-maillage

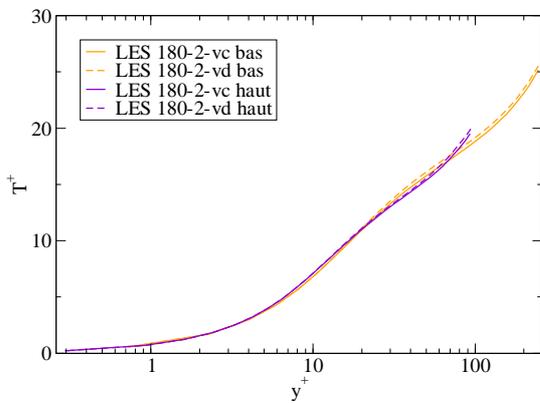


FIG. 4.31 – Température moyenne

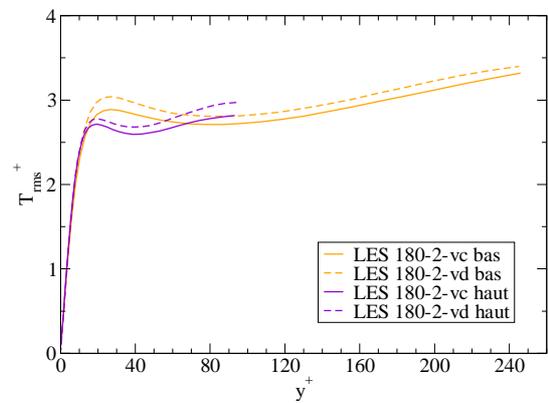
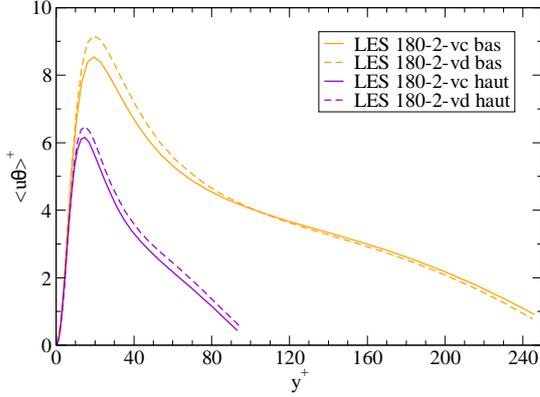
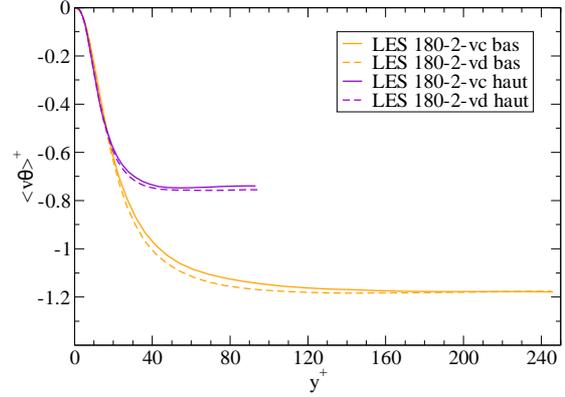


FIG. 4.32 – Écart-type de la température


 FIG. 4.33 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

 FIG. 4.34 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

4.4 Remarques sur l'adimensionnement

Nous avons jusqu'ici tracé les grandeurs dynamiques et thermiques sous forme adimensionnelle en utilisant la vitesse et la température de frottement de chaque paroi, U_τ et T_τ , ainsi que la viscosité à la paroi, ν_w . Cet adimensionnement est très classique, c'est notamment celui employé par les différents auteurs des simulations numériques directes avec lesquelles nous avons comparé nos résultats dans le chapitre précédent.

Il est cependant possible d'adimensionner autrement les profils dynamiques et thermiques. Les trois méthodes les plus fréquemment employées dans des études comme la nôtre sont :

1. L'adimensionnement utilisé jusqu'à présent, basé sur la vitesse et la température de frottement, U_τ et T_τ , ainsi que y^+ (se référer au chapitre précédent pour les définitions de U_τ et T_τ).

La vitesse moyenne et les fluctuations de vitesse de la moitié basse (respectivement haute) du canal sont alors divisées par la vitesse de frottement de la paroi basse (respectivement haute), U_τ :

$$U^+ = \frac{\langle U \rangle}{U_\tau} \quad , \quad U_{rms}^+ = \frac{U_{rms}}{U_\tau} \quad , \quad V_{rms}^+ = \frac{V_{rms}}{U_\tau} \quad , \quad W_{rms}^+ = \frac{W_{rms}}{U_\tau} \quad (4.1)$$

La température moyenne est adimensionnée comme suit :

$$T^+ = \frac{\langle T \rangle - T_w}{T_\tau} \quad (4.2)$$

T_w étant la température pariétale et T_τ la température de frottement correspondant à la moitié du canal considérée. Les fluctuations de température sont, elles, divisées par T_τ :

$$T_{rms}^+ = \frac{T_{rms}}{T_\tau} \quad (4.3)$$

Enfin, la corrélation vitesse-vitesse est adimensionnée par U_τ^2 et les corrélations vitesse-température par $(U_\tau T_\tau)$:

$$\langle uv \rangle^+ = \frac{\langle uv \rangle}{U_\tau^2}, \quad \langle u\theta \rangle^+ = \frac{\langle u\theta \rangle}{U_\tau T_\tau}, \quad \langle v\theta \rangle^+ = \frac{\langle v\theta \rangle}{U_\tau T_\tau} \quad (4.4)$$

Toutes ces grandeurs, désignées par un exposant $^+$, sont tracées en fonction de la coordonnée réduite :

$$y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu_w} \quad (4.5)$$

2. L'adimensionnement à partir de la vitesse maximale U_{max} , de l'écart de température $T_2 - T_1$ et de y/h , h étant la demi-hauteur du canal.

Cette fois, la vitesse moyenne et les fluctuations de vitesse sont adimensionnées par U_{max} , on trace donc :

$$\frac{\langle U \rangle}{U_{max}}, \quad \frac{U_{rms}}{U_{max}}, \quad \frac{V_{rms}}{U_{max}}, \quad \frac{W_{rms}}{U_{max}} \quad (4.6)$$

La température moyenne $\langle T \rangle$ est transformée selon la relation :

$$\frac{\langle T \rangle - T_w}{(T_2 - T_1)} \quad (4.7)$$

et on trace les fluctuations de température divisées par $(T_2 - T_1)$:

$$\frac{T_{rms}}{(T_2 - T_1)} \quad (4.8)$$

Les corrélations sont également adimensionnées à l'aide de U_{max} et $(T_2 - T_1)$, on trace alors :

$$\frac{\langle uv \rangle}{U_{max}^2}, \quad \frac{\langle u\theta \rangle}{U_{max}(T_2 - T_1)}, \quad \frac{\langle v\theta \rangle}{U_{max}(T_2 - T_1)} \quad (4.9)$$

3. L'adimensionnement semi-local, qui utilise U_τ^* , T_τ^* et y^* .

Nous avons évoqué cet adimensionnement dans notre étude bibliographique sur les écoulements à propriétés variables (voir section 2.3). Les grandeurs désignées par l'exposant * tiennent compte des variations de la masse volumique ρ et de la viscosité ν avec la température, et donc avec la coordonnée y . Ainsi, la vitesse de frottement transformée est définie comme suit :

$$U_\tau^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\langle \rho \rangle (y)}} = \sqrt{\frac{\mu_w}{\langle \rho \rangle (y)} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \Big|_w} \quad (4.10)$$

La température de frottement modifiée devient alors :

$$T_\tau^* = \frac{Q_w}{\langle \rho \rangle (y) C_p U_\tau^*} = \frac{\lambda_w \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \Big|_w}{\langle \rho \rangle (y) C_p U_\tau^*} \quad (4.11)$$

Les différents profils sont ainsi adimensionnés de la même manière qu'avec le premier adimensionnement présenté ci-dessus, en remplaçant U_τ et T_τ par U_τ^* et T_τ^* . Ils sont tracés en fonction d'une coordonnée réduite elle aussi transformée :

$$y^* = \frac{yU_\tau^*}{\langle \nu \rangle (y)} \quad (4.12)$$

Il existe également une variante du premier de ces adimensionnement : utilisation des valeurs moyennes $U_{\tau m}$ et $T_{\tau m}$ et non de leurs valeurs au niveau de chaque paroi. Certains de nos résultats ont d'ailleurs déjà été présentés avec cet adimensionnement (Husson *et al.* (2006)).

Nous avons retracé toutes les courbes présentées dans ce chapitre avec l'adimensionnement basé sur U_{max} , $T_2 - T_1$ et y/h et avec l'adimensionnement semi-local. Les figures obtenues sont rassemblées en Annexe (Annexe A pour celles relatives à l'étude de l'impact des variations de λ et μ et Annexe B pour celles relatives à l'étude de l'influence du modèle sous-maille thermique). On constate que les accords/différences entre les profils ne s'observent pas forcément aux mêmes endroits, mais que les conclusions restent identiques : variations des propriétés négligeables pour $T_2/T_1 = 1.07$ mais pas pour $T_2/T_1 = 2.00$ et modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant équivalent au modèle à nombre de Prandtl sous-maille dynamique pour les deux ratios de température considérés. On remarque cependant que l'adimensionnement par la vitesse maximale et l'écart de température semble atténuer les effets constatés, qui sont plus nettement visibles avec les deux autres adimensionnements.

4.5 Conclusions

Conformément aux analyses effectuées dans la première partie de ce chapitre concernant la prise en compte des variations de la conductivité et de la viscosité, nous considérerons par la suite les simulations où ces propriétés sont constantes pour un faible rapport de températures ($T_2/T_1 = 1.01$ ou 1.07) et les simulations où leurs variations avec la température sont prises en compte pour un fort ratio de températures ($T_2/T_1 = 2.00$).

Suite à l'étude menée dans la deuxième partie du présent chapitre, nous allons maintenant utiliser uniquement le modèle sous-maille thermique basé sur un nombre de Prandtl sous-maille constant puisque nous avons montré qu'il donne des résultats extrêmement proches de ceux obtenus lorsque le nombre de Prandtl sous-maille est calculé dynamiquement, tout en étant plus simple et en impliquant moins de calculs. Néanmoins, la question de la modélisation sous-maille thermique n'est pas encore totalement éclaircie et des simulations complémentaires doivent être réalisées et analysées afin de tirer des conclusions définitives.

En ce qui concerne la présentation de nos résultats, nous continuerons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, de distinguer les profils des moitiés basse et haute du canal pour $T_2/T_1 = 2.00$. Les trois adimensionnements présentés dans ce chapitre seront utilisés car, comme nous allons le voir, ils permettent de visualiser différemment les phénomènes induits par une augmentation du rapport de températures.

Nous allons donc maintenant analyser l'effet du ratio de températures T_2/T_1 sur l'écoulement en considérant les simulations réalisées avec un nombre de Prandtl sous-maille constant et

avec des propriétés (λ, μ) constantes pour les faibles rapports de températures et variables pour le fort ratio de températures.

Chapitre 5

Analyse physique de la modification d'un écoulement anisotherme en canal plan turbulent sous l'effet de l'augmentation du rapport de températures

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier, pour les deux nombres de Reynolds de frottement considérés (180 et 395), l'impact de l'augmentation du rapport de températures sur les statistiques de l'écoulement turbulent d'air en canal plan. Pour cela, suivant les conclusions de l'analyse conduite au chapitre précédent, nous considérons les simulations 180-1-cc ($Re_\tau \approx 180$, $T_2/T_1 = 1.01$, λ et μ constantes), 180-2-vc ($Re_\tau \approx 180$, $T_2/T_1 = 2.00$, λ et μ variables), 395-1-cc ($Re_\tau \approx 395$, $T_2/T_1 = 1.07$, λ et μ constantes) et 395-2-vc ($Re_\tau \approx 395$, $T_2/T_1 = 2.00$, λ et μ variables). Nous comparons pour chaque nombre de Reynolds les profils des grandeurs moyennes et turbulentes obtenus à faible et à fort rapport de températures (en distinguant les courbes relatives aux deux moitiés du canal à fort ratio de températures). Nous traçons tout d'abord les courbes avec l'adimensionnement basé sur U_τ , T_τ et y^+ . Celui basé sur U_{max} , $T_2 - T_1$ et y/h est également utilisé, il nous permet de faire ressortir la perte de symétrie des profils de température moyenne lorsque le rapport de températures augmente. Wang et Pletcher (1996), Nicoud (1998), Nicoud et Poinso (1999) et Lessani et Papalexandris (2006) ont également étudié numériquement la configuration du canal plan. Ces travaux diffèrent des nôtres sur certains points, ils sont notamment tous réalisés uniquement à $Re_\tau \approx 180$. De plus, toutes les données que nous analysons ici n'ont pas été étudiées par ces auteurs. Nous pouvons cependant faire quelques comparaisons avec leurs résultats.

Nous exposons ensuite le mécanisme physique sous-jacent aux modifications observées sur les différents profils lorsque T_2/T_1 passe de 1.01 ou 1.07 à 2.00. Nous rendons également compte des effets relatifs des variations de la densité et des variations de la viscosité et de la conductivité.

Enfin, nous utilisons l'adimensionnement semi-local, basé sur U_τ^* , T_τ^* et y^* , car quelques auteurs ont observé, dans des configurations similaires à la nôtre, qu'il permet de rapprocher certains profils obtenus à des rapports de température différents (se référer aux travaux de Dailey *et al.* (2003), Nicoud (1998) et Nicoud et Poinso (1999) présentés dans la section 2.3). La transformation de Van Driest est également utilisée pour essayer d'obtenir un rapprochement des profils de vitesse moyenne.

5.2 Influence de T_2/T_1 sur les profils moyens

5.2.1 Pour $Re_\tau \approx 180$

Les profils de vitesse moyenne et de température moyenne relatifs aux simulations 180-1-cc et 180-2-vc sont représentés sur les figures 5.1 et 5.2 avec l'adimensionnement basé sur U_τ , T_τ et y^+ et sur les figures 5.3 et 5.4 avec l'adimensionnement basé sur U_{max} , $T_2 - T_1$ et y/h .

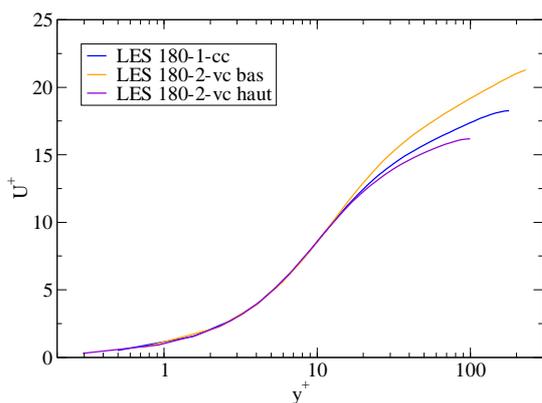


FIG. 5.1 – Vitesse moyenne longitudinale

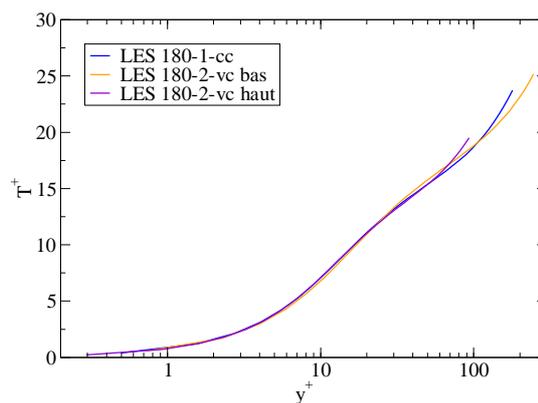


FIG. 5.2 – Température moyenne

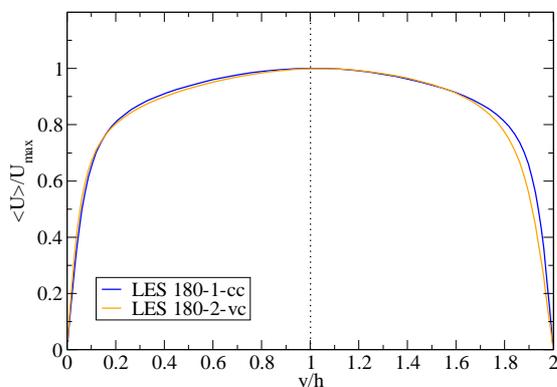


FIG. 5.3 – Vitesse moyenne longitudinale

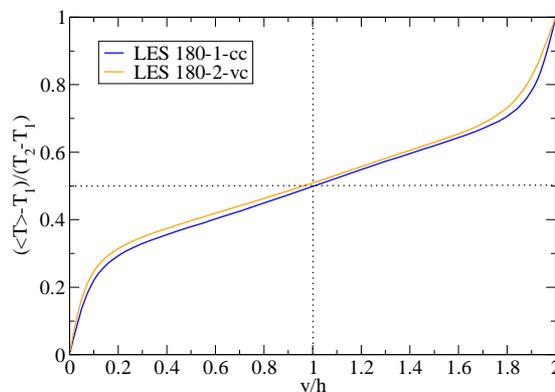


FIG. 5.4 – Température moyenne

On constate sur la figure 5.1 que dans la zone linéaire les trois profils de vitesse moyenne ($T_2/T_1 = 1.01$, $T_2/T_1 = 2.00$ moitié basse et $T_2/T_1 = 2.00$ moitié haute) sont superposés. Par contre, dans la partie logarithmique, on observe que, pour le grand ratio de températures, le profil de la moitié basse est plus élevé que celui obtenu avec un faible rapport de températures et celui de la moitié haute est légèrement plus bas que celui obtenu avec un faible rapport de températures. Le profil de vitesse moyenne semble donc devenir dissymétrique à mesure que T_2/T_1 augmente. Cette dissymétrie par rapport au plan $y = h$ s'observe également sur la figure 5.3 où les tendances sont inversées entre les deux moitiés du canal à fort T_2/T_1 . Dans la partie basse, le profil obtenu pour $T_2/T_1 = 2.00$ est au-dessus de celui obtenu pour $T_2/T_1 = 1.01$ jusqu'à $y/h = 0.2$. Le gradient de vitesse est donc plus élevé dans cette zone lorsque T_2/T_1 est plus grand. Au-delà de $y/h = 0.2$, le profil correspondant à $T_2/T_1 = 2.00$ devient plus bas que celui correspondant à $T_2/T_1 = 1.01$. Ainsi, vers la partie centrale du canal le gradient de vitesse est plus faible lorsque T_2/T_1 est plus grand. Dans la partie haute du canal, les positions relatives des courbes des deux simulations sont inversées et la position à laquelle les deux profils se croisent est plus éloignée de la paroi que sur la moitié basse. Cette déformation du profil de vitesse moyenne entraîne un léger décalage du maximum, qui est atteint un petit peu plus près de la paroi haute pour $T_2/T_1 = 2.00$ que pour $T_2/T_1 = 1.01$. La modification des gradients de vitesse, combinée aux variations des propriétés du fluide, explique le constat effectué au chapitre 3 : la vitesse de frottement et le nombre de Reynolds de frottement, qui sont calculés à partir du gradient de vitesse pariétal, de μ_w et de ρ_w , diffèrent fortement d'une paroi à l'autre lorsque le ratio de température est de 2.00.

Concernant la température, les différents profils sont très proches les uns des autres sur la figure 5.2, sauf dans la zone centrale du canal où on constate un petit écart. Si on considère l'autre adimensionnement (figure 5.4), on voit apparaître plus nettement un décalage entre les courbes obtenues à faible et à fort ratio de températures. Le profil de température du cas fortement anisotherme reste au-dessus de celui relatif à la simulation plus faiblement anisotherme sur tout le canal. Il semble ainsi être étiré vers la paroi basse quand le rapport de températures augmente. Par conséquent, dans le cas fortement anisotherme la température moyenne n'est plus atteinte au milieu du canal, comme c'est le cas en faiblement anisotherme, mais dans la moitié basse (pour $y/h \approx 0.92$). Le profil moyen de température devient donc lui aussi dissymétrique. Les gradients de température ne sont alors plus les mêmes qu'à faible T_2/T_1 et diffèrent d'une moitié à l'autre du canal.

5.2.2 Pour $Re_\tau \approx 395$

De même que pour $Re_\tau \approx 180$, nous avons tracé les profils moyens de vitesse et de température relatifs aux simulations à faible et à fort rapport de température (395-1-cc et 395-2-vc) avec l'adimensionnement basé sur U_τ , T_τ et y^+ (figures 5.5 et 5.6) et avec l'adimensionnement basé sur U_{max} , $T_2 - T_1$ et y/h (figures 5.7 et 5.8).

Sur la figure 5.5, on peut voir que le profil de vitesse moyenne évolue de la même manière qu'à plus faible nombre de Reynolds lorsque le ratio de température considéré augmente. Il reste en effet inchangé dans la zone linéaire puis, dans la zone logarithmique, la courbe relative à la moitié basse du canal apparaît nettement supérieure au profil obtenu pour $T_2/T_1 = 1.07$ et celle relative à la moitié haute est à l'inverse bien inférieure. Le profil de vitesse moyenne devient

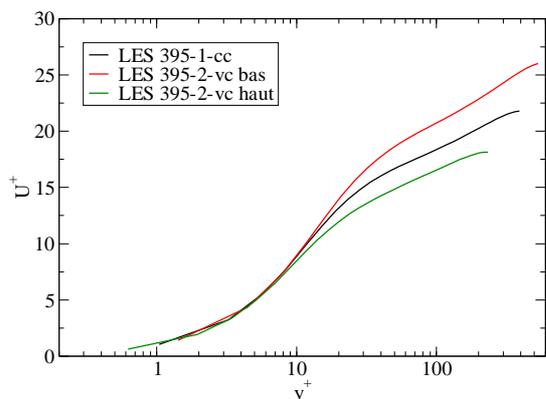


FIG. 5.5 – Vitesse moyenne longitudinale

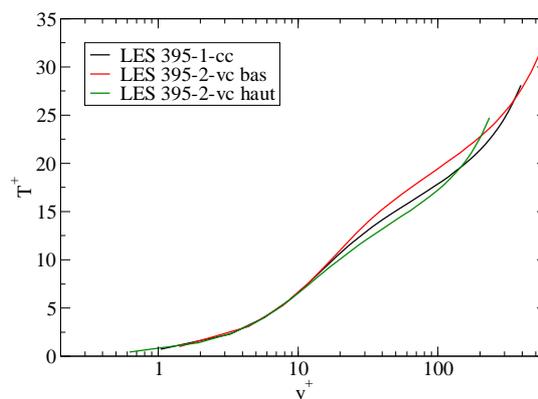


FIG. 5.6 – Température moyenne

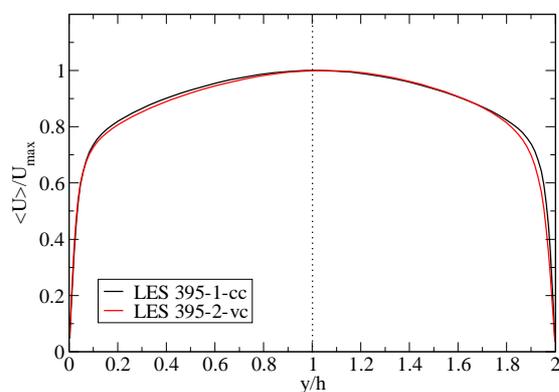


FIG. 5.7 – Vitesse moyenne longitudinale

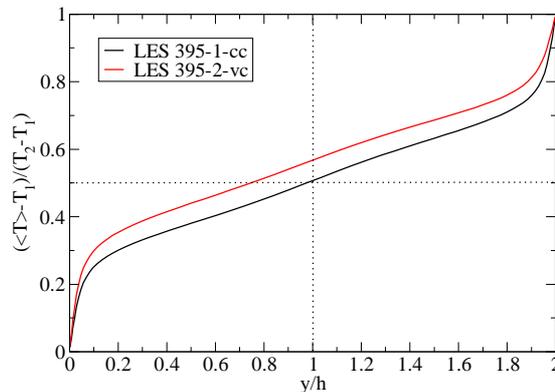


FIG. 5.8 – Température moyenne

donc lui aussi dissymétrique lorsqu'on accroît T_2/T_1 . Cet effet est d'ailleurs plus marqué que pour $Re_\tau \approx 180$. Avec l'autre adimensionnement (figure 5.7), on observe exactement la même déformation du profil moyen de vitesse que pour $Re_\tau \approx 180$. Les gradients de vitesse sont donc là aussi différents d'une moitié à l'autre du canal et différents de ceux obtenus pour un faible rapport de températures. La position à laquelle la vitesse maximale est atteinte est également un peu déplacée vers le haut du canal.

Le profil de température moyenne (figure 5.6) apparaît plus fortement modifié qu'à $Re_\tau \approx 180$ lorsque que T_2/T_1 passe de 1.07 à 2.00. De plus, l'écart entre les courbes se situe cette fois non seulement dans la partie centrale du canal, mais aussi dans toute la zone logarithmique ($20 \leq y^+ \leq 500$). Dans la partie linéaire par contre les trois profils sont quasiment identiques. Au delà de $y^+ = 20$, les profils relatifs au fort ratio de températures s'éloignent de celui relatif au faible rapport de températures, vers le haut au niveau de la moitié basse du canal et d'abord vers le bas, puis vers le haut au niveau de la moitié haute du canal. Sur la figure 5.8, où l'autre adimensionnement est utilisé, on constate, comme à $Re_\tau \approx 180$, que le profil moyen de température semble étiré vers la paroi basse. La température moyenne n'est alors plus atteinte au

milieu du canal lorsque T_2/T_1 augmente, mais en $y^+ \approx 0.75$. Ce décalage entre les courbes relatives aux deux simulations est nettement plus prononcé que pour le plus faible nombre de Reynolds.

On peut se demander si les écarts entre les différentes courbes sont ici plus marqués que pour $Re_\tau \approx 180$ en raison de l'augmentation du nombre de Reynolds de frottement ou en raison du maillage utilisé qui est plus lâche pour les simulations 395-1-cc et 395-2-vc que pour les simulations 180-1-cc et 180-2-vc. Des simulations complémentaires à un nombre de Reynolds de frottement de 180 et avec un maillage plus grossier permettront d'apporter une réponse à cette question.

5.2.3 Comparaison avec les résultats d'études similaires

Les dissymétries que nous avons constatées au niveau des profils moyens correspondent bien aux observations faites par Wang et Pletcher (1996), Nicoud (1998) et Lessani et Papalexandris (2006) dans la configuration du canal plan fortement anisotherme avec températures imposées aux parois. Cependant, Lessani et Papalexandris (2006) ne présentent leurs profils de vitesse moyenne qu'après application de la transformation de Van Driest, il est donc difficile de comparer nos résultats avec les leurs. Nous retiendrons donc surtout que les évolutions que nous avons observées sont du même type que celles obtenues par Wang et Pletcher (1996) et Nicoud (1998).

5.3 Influence de T_2/T_1 sur les fluctuations de vitesse et de température

5.3.1 Pour $Re_\tau \approx 180$

Nous avons tracé les fluctuations de vitesse longitudinale, verticale et transverse, ainsi que les fluctuations de température obtenues lors des simulations 180-1-cc ($Re_\tau \approx 180$, $T_2/T_1 = 1.01$, propriétés constantes) et 180-2-vc ($Re_\tau \approx 180$, $T_2/T_1 = 2.00$, propriétés variables) sur les figures 5.9 à 5.12.

Pour les fluctuations de vitesse, on constate de très fortes différences entre les courbes obtenues à faible et à fort rapport de températures. Cette fois la dissymétrie des profils est flagrante : à $T_2/T_1 = 2.00$, les courbes de la moitié basse du canal sont bien au-dessus de celles relatives à la simulation réalisées à $T_2/T_1 = 1.01$ et les courbes de la moitié haute du canal sont à l'inverse nettement au-dessous. Les positions des pics se décalent aussi légèrement lorsque le ratio de températures augmente. Ceux-ci s'éloignent un peu de la paroi en bas du canal et, au contraire, se rapprochent un peu de la paroi en haut du canal.

Les fluctuations de température sont également modifiées sous l'effet de l'augmentation de T_2/T_1 . Dans la partie basse du canal, la courbe correspondant à la simulation fortement anisotherme (180-2-vc) est d'abord supérieure à celle correspondant à la simulation faiblement anisotherme (180-1-cc), puis, à partir de $y^+ \approx 95$ c'est l'inverse. Dans la partie haute du canal, les courbes relatives aux deux simulations sont quasiment confondues jusqu'à $y^+ \approx 35$, puis

celle correspondant au fort ratio de températures devient supérieure à celle correspondant au faible rapport de températures. En ce qui concerne la position du pic, lorsque T_2/T_1 passe de 1.01 à 2.00, celle-ci est presque inchangée près de la paroi haute mais s'éloigne légèrement de la paroi en bas du canal.

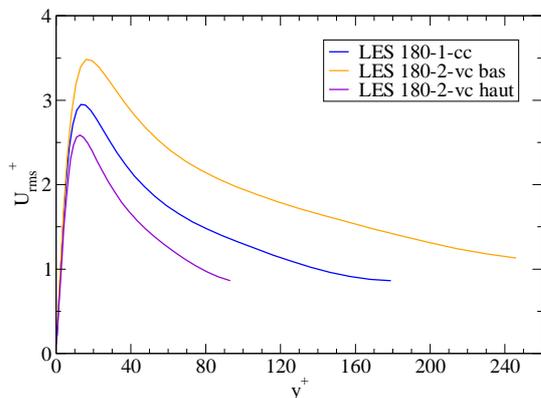


FIG. 5.9 – Écart-type de la vitesse longitudinale

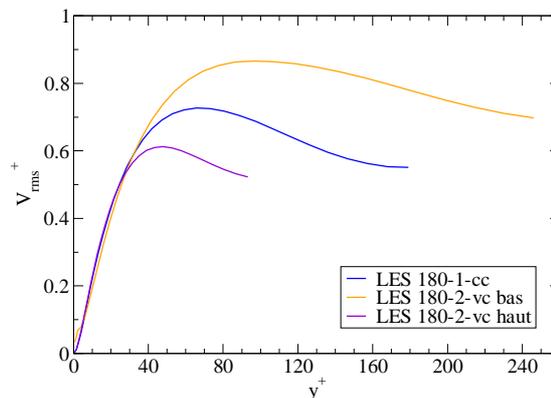


FIG. 5.10 – Écart-type de la vitesse verticale

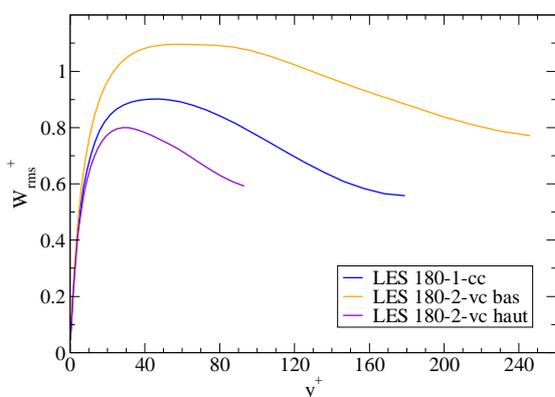


FIG. 5.11 – Écart-type de la vitesse transverse

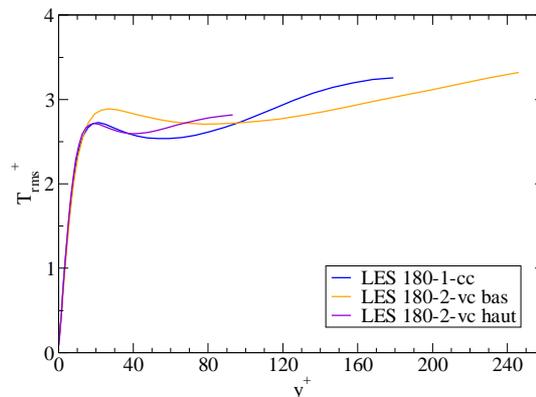


FIG. 5.12 – Écart-type de la température

5.3.2 Pour $Re_\tau \approx 395$

Les profils des fluctuations de vitesse et de température relatifs aux simulations 395-1-cc (faible ratio de températures) et 395-2-vc (fort ratio de températures) sont représentés sur les figures 5.13 à 5.16

En ce qui concerne les fluctuations de vitesse longitudinale, verticale et transverse, on observe exactement le même phénomène qu'avec $Re_\tau \approx 180$ lorsque le rapport de températures augmente, c'est à dire une dissymétrie notable et un décalage des pics. Ces modifications se font dans le même sens qu'avec le plus faible nombre de Reynolds.

Pour les fluctuations de température, on constate en comparant les figures 5.12 et 5.16 qu'à $Re_\tau \approx 395$ les profils obtenus avec $T_2/T_1 = 2.00$ sont plus éloignés du profil obtenu avec $T_2/T_1 = 1.07$ qu'à $Re_\tau \approx 180$. Sur la moitié basse du canal, lorsque le rapport de températures augmente le niveau des fluctuations de température s'accroît près de la paroi (jusqu'à $y^+ \approx 180$) et au contraire diminue au delà de $y^+ \approx 180$. Sur la moitié haute du canal, l'augmentation de T_2/T_1 entraîne au contraire une réduction du niveau des fluctuations de température en proche paroi, puis, à partir de $y^+ \approx 80$ un très fort accroissement de ces fluctuations. La position du pic est cette fois décalée en bas et en haut du canal : elle s'éloigne un peu de la paroi en bas et se rapproche légèrement de la paroi en haut lorsque le ratio de températures augmente.

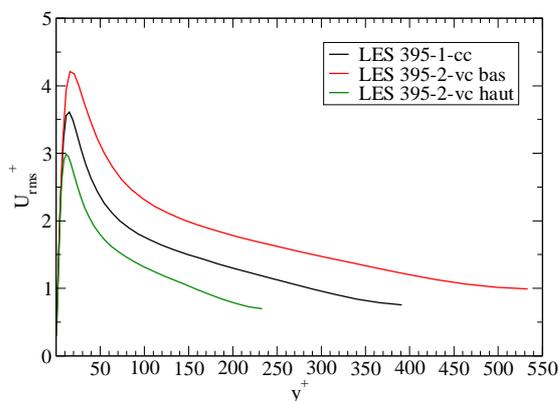


FIG. 5.13 – Écart-type de la vitesse longitudinale

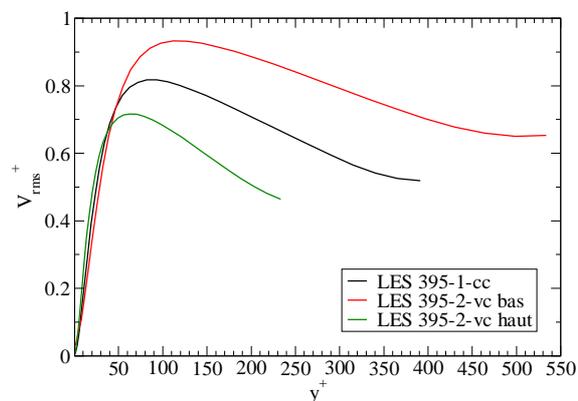


FIG. 5.14 – Écart-type de la vitesse verticale

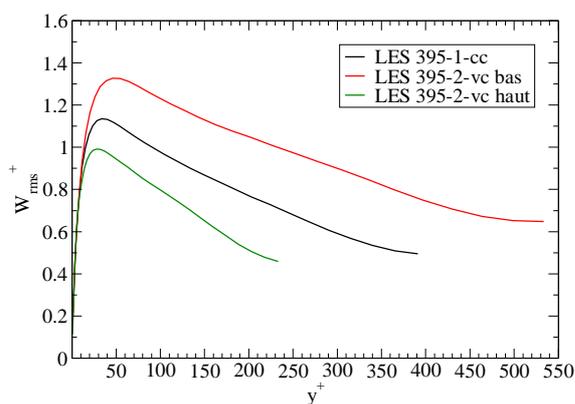


FIG. 5.15 – Écart-type de la vitesse transverse

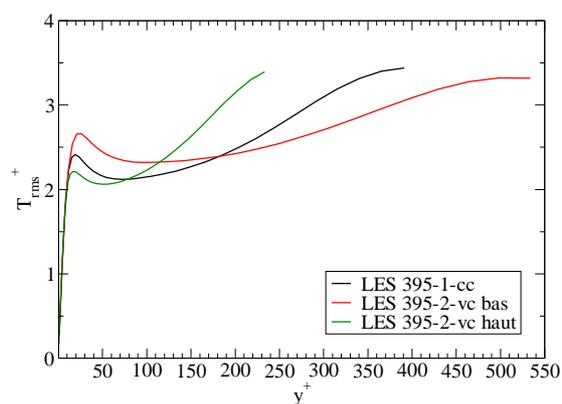


FIG. 5.16 – Écart-type de la température

5.3.3 Comparaison avec les résultats d'études similaires

Les conclusions de Nicoud (1998) concernant la modification des fluctuations de vitesse lorsque T_2/T_1 augmente sont similaires aux nôtres. Nicoud et Poinot (1999) n'ont tracé que

les profils relatifs à la moitié basse du canal pour $T_2/T_1 = 2.00$. Ils observent alors bien un changement dû au rapport de températures, mais dans le sens opposé à celui obtenu dans leur précédente étude ainsi que dans la nôtre. Wang et Pletcher (1996) constatent aussi des modifications de ces profils à fort ratio de températures, mais elles ne se produisent pas toujours dans le même sens que dans la présente étude. Enfin, aucune comparaison ne peut être réalisée avec les résultats de Lessani et Papalexandris (2006) car dans leur étude les fluctuations de vitesse ne sont pas tracées.

Concernant les fluctuations de température, nous ne pouvons comparer nos résultats qu'avec les données de Nicoud (1998). Il n'observe pas les mêmes tendances que nous. Ses résultats montrent qu'à fort T_2/T_1 les profils des deux moitiés du canal sont tout le temps au-dessus du profil obtenu à faible T_2/T_1 .

Ainsi, si les différentes études considérées, y compris la nôtre, s'accordent sur le fait que les profils des fluctuations de vitesse et de température sont modifiés lorsque le rapport de températures augmente, les effets constatés sont à l'évidence assez variés d'un cas à l'autre. Même les résultats des deux Simulations Numériques Directes (Nicoud (1998) et Nicoud et Poinot (1999)) ne sont pas identiques. Il semble donc pour l'instant que la seule chose que nous pouvons assurer est que les profils des fluctuations évoluent significativement sous l'effet d'une augmentation de T_2/T_1 .

5.4 Influence de T_2/T_1 sur les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température

5.4.1 Pour $Re_\tau \approx 180$

Les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température sont représentées sur les figures 5.17, 5.18 et 5.19, sur lesquelles nous avons tracé simultanément les courbes relatives aux simulations 180-1-cc et 180-2-vc. Comme pour les fluctuations, on constate de grandes divergences entre les profils des deux simulations.

En ce qui concerne la corrélation vitesse-vitesse, $\langle uv \rangle$, et la corrélation vitesse longitudinale-température, $\langle u\theta \rangle$, on constate sur les figures 5.17 et 5.18 que l'évolution est la même lorsque T_2/T_1 augmente que pour les fluctuations de vitesse : sur la moitié basse, le profil monte et le pic s'éloigne de la paroi et sur la moitié haute, il diminue et le pic se rapproche de la paroi. Le profil de la corrélation vitesse verticale-température, $\langle v\theta \rangle$, évolue de la même manière si on considère sa valeur absolue : lorsque le rapport de température passe de 1.01 à 2.00, l'intensité de cette corrélation est accrue dans la partie basse du canal et réduite dans la partie haute. Pour le fort ratio de températures, le plateau de ce profil débute plus loin de la paroi qu'à faible rapport de températures sur la moitié basse du canal et plus près de la paroi sur la moitié haute.

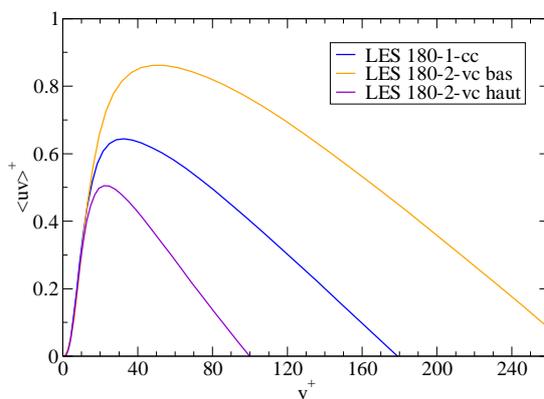


FIG. 5.17 – Corrélation – $\langle uv \rangle$

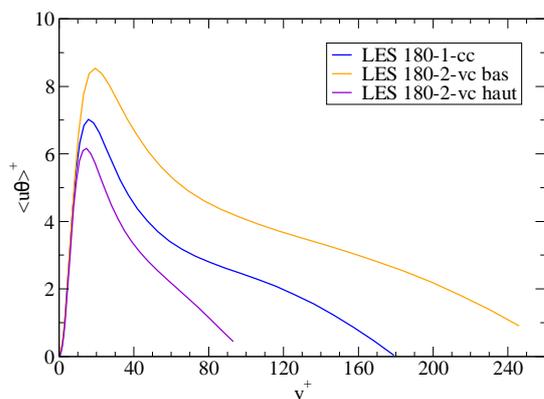


FIG. 5.18 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

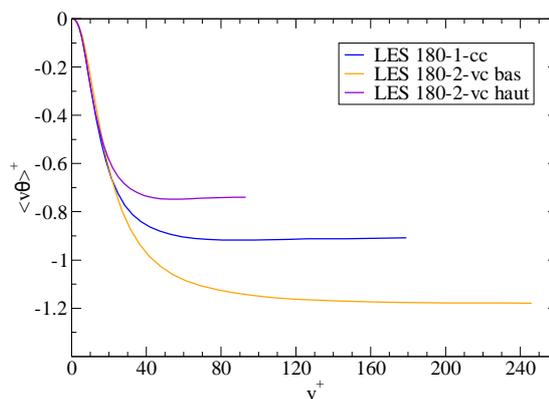


FIG. 5.19 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

5.4.2 Pour $Re_\tau \approx 395$

Sur les figures 5.20, 5.21 et 5.22 sont tracées les corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température obtenues lors des simulations 395-1-cc et 395-2-vc.

Pour ces trois profils, on observe les mêmes évolutions avec T_2/T_1 que pour $Re_\tau \approx 180$. Le niveau de ces corrélations augmente sur la moitié basse du canal et diminue sur la moitié haute (en considérant la valeur absolue du profil $\langle v\theta \rangle$). Les pics de $\langle uv \rangle$ et $\langle u\theta \rangle$ et le début du plateau de $\langle v\theta \rangle$, quant à eux, se décalent vers le centre du canal en bas et vers la paroi en haut.

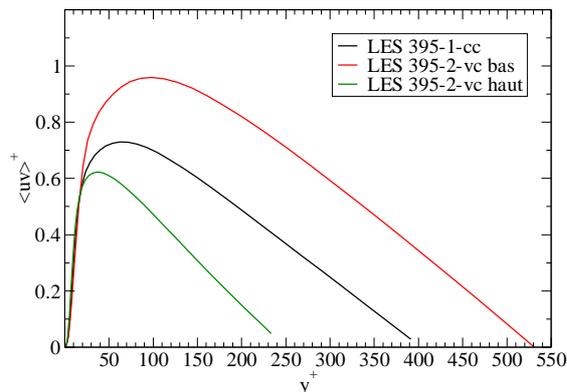


FIG. 5.20 – Corrélation – $\langle uv \rangle$

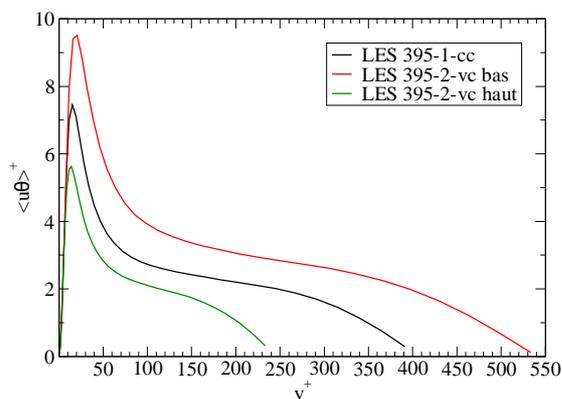


FIG. 5.21 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

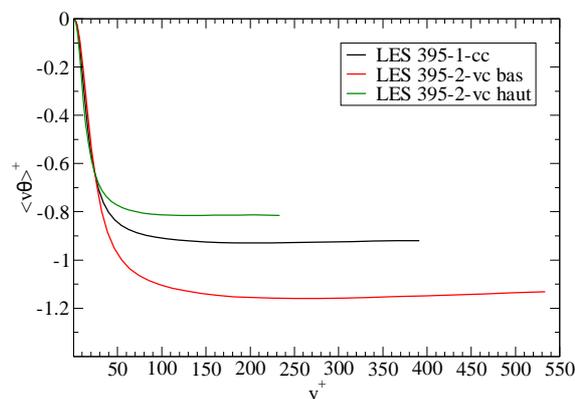


FIG. 5.22 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

5.4.3 Comparaison avec les résultats d'études similaires

Seul Nicoud (1998) a tracé le profil de la corrélation vitesse longitudinale-vitesse verticale. Il observe la même évolution que nous pour ce profil lorsque le ratio de températures augmente.

Concernant les corrélations vitesse longitudinale-température et vitesse verticale-température, elles ne sont tracées que dans l'étude de Wang et Pletcher (1996). Cependant, l'adimensionnement utilisé par ces auteurs n'est pas le même que celui que nous avons employé et il n'est pas clairement explicité, il est donc difficile de comparer nos conclusions avec les leurs.

5.5 Mécanisme physique

Les effets de l'augmentation du rapport de températures sur les profils moyens, les fluctuations et les corrélations étant précisément décrits et discutés, il nous reste maintenant à expliquer

l'origine des modifications observées et la manière dont les transformations des différents profils sont reliées entre elles.

Nous avons schématisé le mécanisme physique entrant en jeu lorsque le ratio de températures considéré augmente sur la figure 5.23. Les deux contraintes physiques qui constituent le point de départ des phénomènes observés sont la conservation du flux de chaleur total lors d'une simulation donnée et la constance du nombre de Reynolds de frottement moyen lorsqu'on passe d'un faible à un fort ratio de températures. Ainsi, lorsque $T_2/T_1 = 2.00$, les fortes variations de la conductivité, λ , et de la masse volumique, ρ , dans la direction verticale entraînent une différence entre les gradients de température des deux moitiés du canal et, par conséquent, une dissymétrie du profil de température moyenne. En parallèle, le passage d'un rapport de températures faible à un rapport de températures plus élevé à $Re_{\tau m}$ constant implique, en raison des variations de la masse volumique, ρ , et de la viscosité, μ , en fonction de la coordonnée y , que les gradients de vitesse ne sont plus les mêmes de part et d'autre du plan $y = h$. Le profil de vitesse moyenne devient donc dissymétrique. Les fluctuations de vitesse et de température, qui dépendent fortement des gradients de vitesse et de température, sont alors modifiées. Les relations entre les fluctuations et ces gradients étant fortement non-linéaires, il n'est *a priori* pas possible de prévoir le sens dans lequel U_{rms} , V_{rms} , W_{rms} et T_{rms} devraient évoluer. La masse volumique étant liée à la température par la loi d'état des gaz parfait, ce profil est à son tour modifié et perd, lui aussi, sa symétrie. Comme l'ont remarqué Wang et Pletcher (1996), les transformations des profils de ρ et de U , impliquent une redistribution du débit massique $D_m = L_y L_z \int_{y=0}^{L_y} \rho(y) U(y) dy$ à travers le canal à fort T_2/T_1 .

Comme nous venons de le voir, les variations de la masse volumique, de la viscosité et de la conductivité jouent un rôle majeur dans les modifications que nous observons quand le ratio de températures augmente. La question qui se pose est alors celle de l'influence relative des variations de ρ par rapport à celles de λ et μ . Pour y répondre, il nous faut examiner à nouveau les figures 4.8 à 4.16 présentées au chapitre 4. Sur ces figures nous avons comparé, pour $Re_{\tau} \approx 395$ et $T_2/T_1 = 2.00$, une simulation effectuée avec une conductivité et une viscosité constantes (395-2-cc) et une autre où les variations de ces propriétés sont prises en compte (395-2-vc). Les figures 5.5, 5.6, 5.13 à 5.16, et 5.20 à 5.22 du présent chapitre permettent quant à elles de voir les effets combinés de la masse volumique, de la conductivité et de la viscosité (simulations 395-1-cc et 395-2-vc). Si on compare ces deux séries de figures, on s'aperçoit que les variations de λ et μ entraînent des modifications relativement faibles sur les profils par rapport aux modifications observées lorsque les variations de l'ensemble des propriétés sont en jeu (λ , μ et ρ). L'influence des variations de la conductivité et de la viscosité est donc bien moindre que celle des variations de la masse volumique. Ainsi, les évolutions constatées lorsque le rapport de températures augmente sont principalement dues aux variations de ρ .

conservation du flux de chaleur total :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w = - \langle \rho v'' T'' \rangle + \langle \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \rangle + \langle \kappa_{sm} \frac{\partial T}{\partial y} \rangle$$

or ρ et λ variant

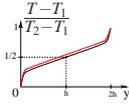
→ gradients de T modifiés

$$Re_{\tau m} = \frac{h}{2} \left[\sqrt{\frac{\rho_b}{\mu_b} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_b} + \sqrt{\frac{\rho_h}{\mu_h} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_h} \right] = cste$$

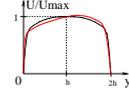
or ρ et μ variant

→ gradients de U modifiés

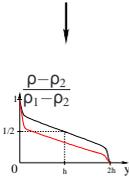
modification de U_{rms} et T_{rms}



dissymétrie du profil $T(y)$: T_m est atteinte plus près de la paroi basse
→ profil de température étiré vers le bas



dissymétrie du profil $U(y)$: U_{max} est atteinte plus près de la paroi haute
→ profil de vitesse déformé



$\rho T = \frac{P_{thermo}}{R} = cte$, donc dissymétrie du profil $\rho(y)$:
 ρ_m est atteinte plus près de la paroi basse
→ profil de masse volumique étiré vers le bas

— allure des courbes pour T_2/T_1 faible
— allure des courbes pour T_2/T_1 fort

FIG. 5.23 – Mécanisme de modification des profils quand T_2/T_1 augmente

5.6 Effet de l'adimensionnement semi-local

Nous allons maintenant voir si, comme l'ont constaté Dailey *et al.* (2003) et Nicoud (1998) dans leurs travaux sur les écoulements turbulents en canal plan faiblement et fortement anisotherme, l'utilisation de l'adimensionnement semi-local permet, par la prise en compte des variations de ρ et μ , de rapprocher certains des profils relatifs aux différentes simulations. Dailey *et al.* (2003) ont en effet observé une meilleure correspondance des profils moyens obtenus lors de simulations avec un faible chauffage, un fort chauffage et un fort refroidissement grâce à cet adimensionnement. Dans l'étude de Nicoud (1998), l'adimensionnement semi-local a permis de faire correspondre un peu mieux les profils de température moyenne et bien mieux les fluctuations de vitesse et la corrélation $\langle uv \rangle$ des simulations à faible et à fort rapport de températures. Par contre, les profils des fluctuations de température obtenus par Nicoud (1998) ne se rapprochent pas lorsque cet adimensionnement est employé.

5.6.1 Pour $Re_\tau \approx 180$

Nous avons représenté sur les figures 5.24 à 5.32 les profils moyens, les fluctuations et les corrélations obtenus lors des simulations 180-1-cc et 180-2-vc en utilisant l'adimensionnement semi-local.

En comparant les figures 5.1 et 5.24, on constate que l'adimensionnement semi-local permet effectivement de faire mieux coïncider les trois profils de vitesse moyenne. En ce qui concerne la température moyenne par contre, cet adimensionnement ne rapproche pas les différentes courbes (voir figures 5.2 et 5.25). Ces profils sont assez proches les uns des autres avec l'adimensionnement basé sur T_τ et y^+ et l'utilisation de celui basé sur T_τ^* et y^* a au contraire tendance à les éloigner.

Les fluctuations de vitesse tracées sur les figures 5.26 à 5.28 correspondent à l'évidence nettement mieux que celles tracées sur les figures 5.9 à 5.11. L'adimensionnement semi-local réduit donc significativement l'écart entre ces différents profils. Ce n'est pas le cas pour les courbes des fluctuations de température, qui sont plus éloignées les unes des autres avec l'adimensionnement basé sur T_τ^* et y^* (figure 5.29) qu'avec l'adimensionnement basé sur T_τ et y^+ (figure 5.12). Cependant, l'adimensionnement semi-local semble avoir pour effet de donner une allure similaire à ces différents profils.

On constate, en examinant les figures 5.17 et 5.30, que pour la corrélation vitesse-vitesse on obtient surtout un rapprochement du profil obtenu sur la moitié basse à fort T_2/T_1 et de celui obtenu à faible T_2/T_1 en employant l'adimensionnement basé sur U_τ^* et y^* . La courbe relative à la moitié haute pour le fort ratio de températures, bien qu'un peu plus proche des deux autres qu'avec l'adimensionnement basé sur U_τ et y^+ , reste tout de même assez éloignée. Pour les corrélations vitesse-température, les courbes obtenues avec un faible et un fort rapport de températures correspondent mieux lorsque l'adimensionnement semi-local est utilisé (figures 5.31 et 5.32). Cet effet est particulièrement visible près des parois ($y^+ \leq 80$ pour $\langle u\theta \rangle$ et $y^+ \leq 50$ pour $\langle v\theta \rangle$). Dans la partie centrale du canal le rapprochement obtenu avec l'adimensionnement basé sur U_τ^* , T_τ^* et y^* est moins important.

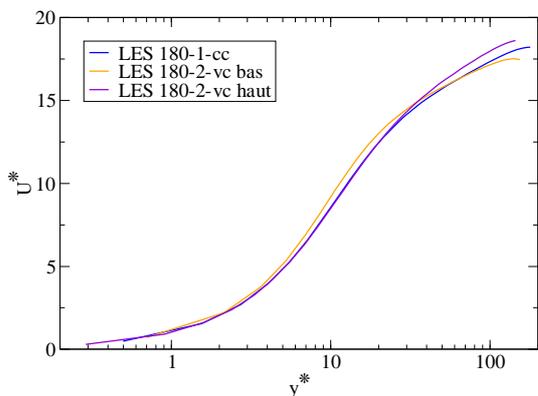


FIG. 5.24 – Vitesse moyenne longitudinale

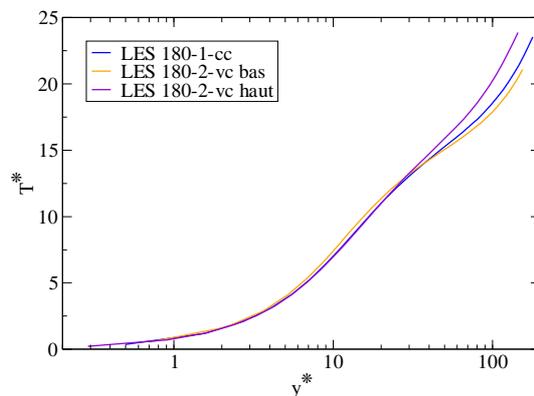


FIG. 5.25 – Température moyenne

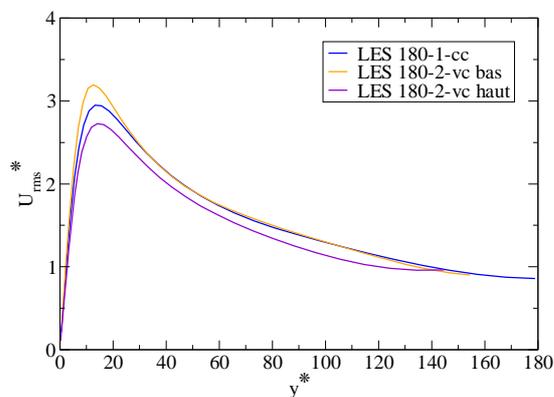


FIG. 5.26 – Écart-type de la vitesse longitudinale

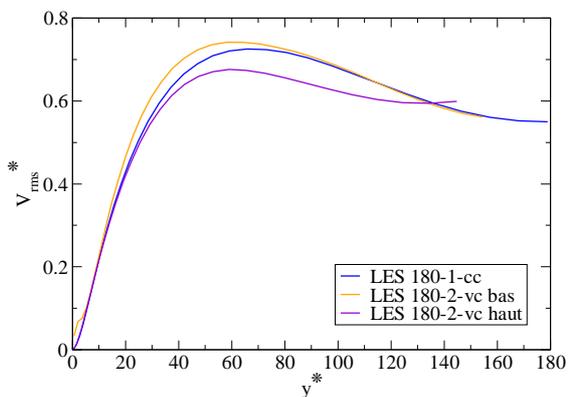


FIG. 5.27 – Écart-type de la vitesse verticale

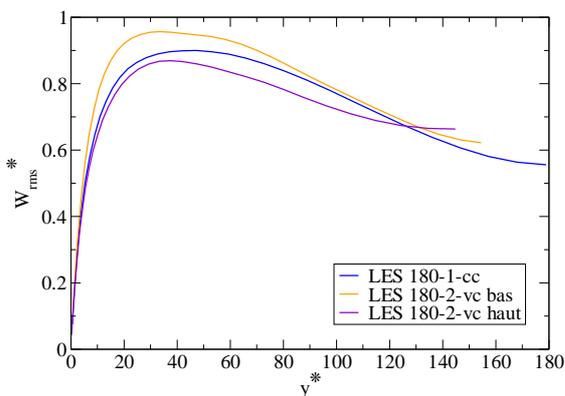


FIG. 5.28 – Écart-type de la vitesse transverse

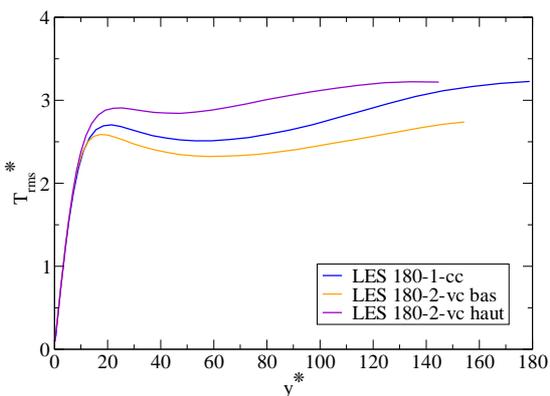


FIG. 5.29 – Écart-type de la température

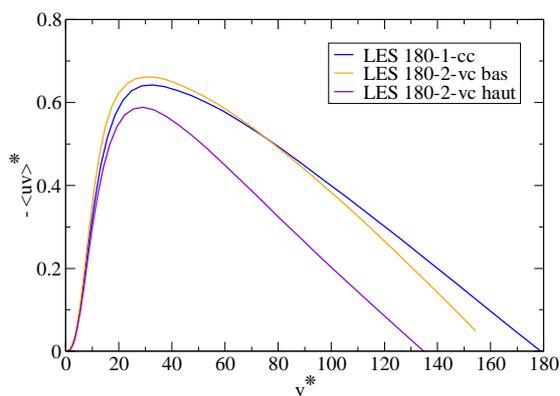


FIG. 5.30 – Corrélation – $\langle uv \rangle$

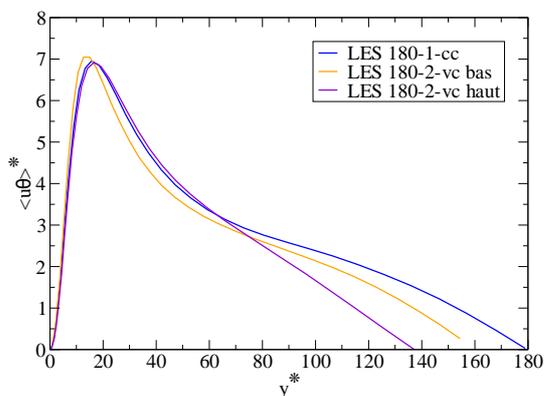


FIG. 5.31 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

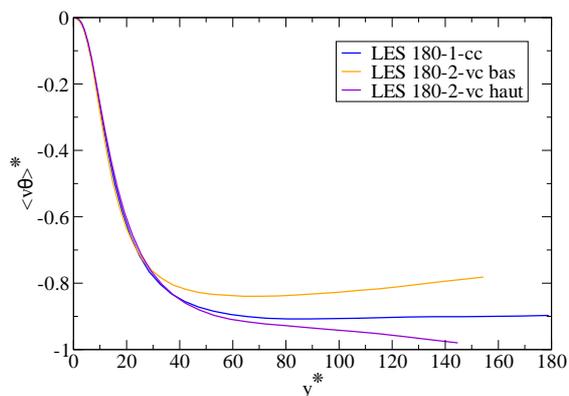


FIG. 5.32 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

5.6.2 Pour $Re_\tau \approx 395$

Les profils des simulations 395-1-cc et 395-2-vc sont tracés avec l'adimensionnement semi-local sur les figures 5.33 à 5.41. La comparaison avec les figures 5.5, 5.6, 5.13 à 5.16, et 5.20 à 5.22 nous permet de voir l'influence de cet adimensionnement.

En ce qui concerne la vitesse moyenne et les fluctuations de vitesse longitudinale, verticale et transverse, on observe sur les figures 5.33 et 5.35 à 5.37, comme à plus faible nombre de Reynolds, que cet adimensionnement fait bien mieux correspondre les profils obtenus à faible et à fort écart de température

Pour les corrélations vitesse-température, là aussi l'effet est le même qu'avec $Re_\tau \approx 180$. On constate une meilleure correspondance des courbes et ce particulièrement en proche paroi ($y^+ \leq 200$ pour $\langle u\theta \rangle$ et $y^+ \leq 100$ pour $\langle v\theta \rangle$) lorsqu'on adimensionne par U_τ^* , T_τ^* et y^* .

En comparant les profils moyens de température représentés sur les figures 5.6 et 5.34, on observe cette fois un léger rapprochement des différentes courbes en utilisant l'adimensionne-

ment semi-local. Cependant, celles-ci sont déjà assez proches avec l'adimensionnement basé sur T_τ et y^+ .

Contrairement à ce qui se passe à plus faible nombre de Reynolds, les pics des fluctuations de température sont rassemblés quand on emploie T_τ^* et y^* au lieu de T_τ et y^+ pour adimensionner ces profils (figures 5.16 et 5.38). Dans la partie centrale du canal, on constate également une réduction notable de l'écart entre les différentes courbes, particulièrement au niveau de la moitié basse.

Les profils de la corrélation vitesse-vitesse sont plus proches lorsque l'adimensionnement semi-local est utilisé (figure 5.39). Le profil de la moitié basse obtenu à fort ratio de températures passe même de l'autre côté du profil obtenu pour un faible rapport de températures lorsqu'on change d'adimensionnement.

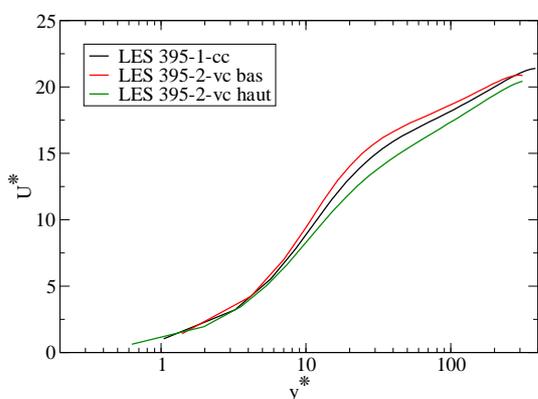


FIG. 5.33 – Vitesse moyenne longitudinale

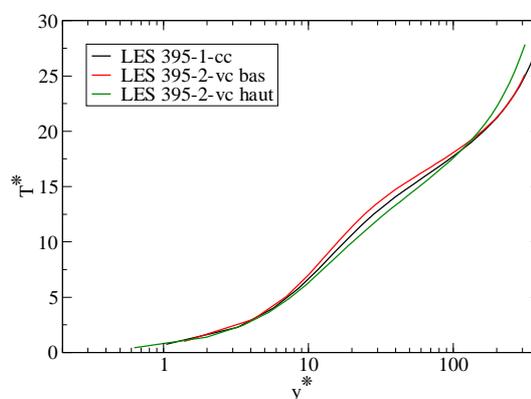


FIG. 5.34 – Température moyenne

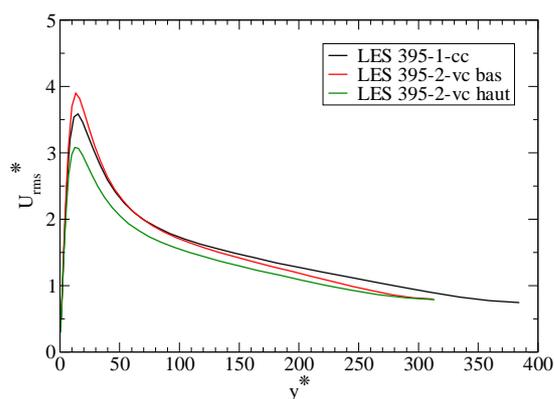


FIG. 5.35 – Écart-type de la vitesse longitudinale

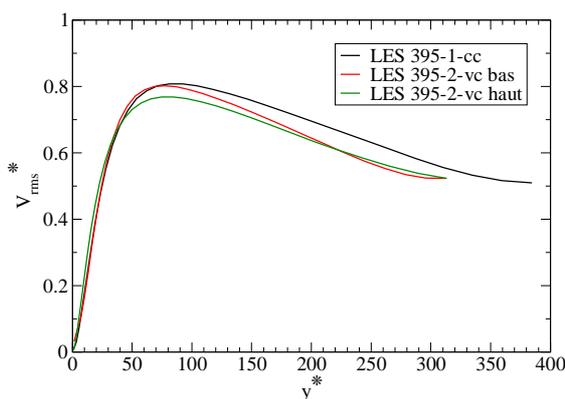


FIG. 5.36 – Écart-type de la vitesse verticale

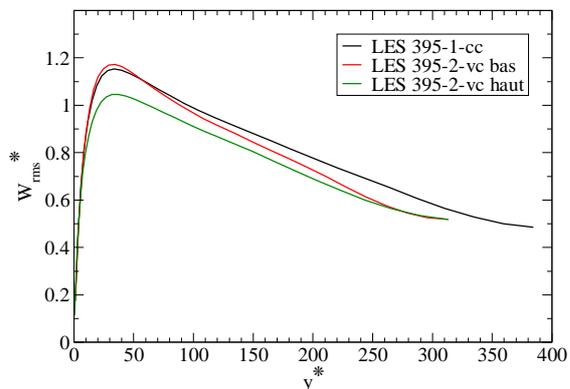


FIG. 5.37 – Écart-type de la vitesse transverse

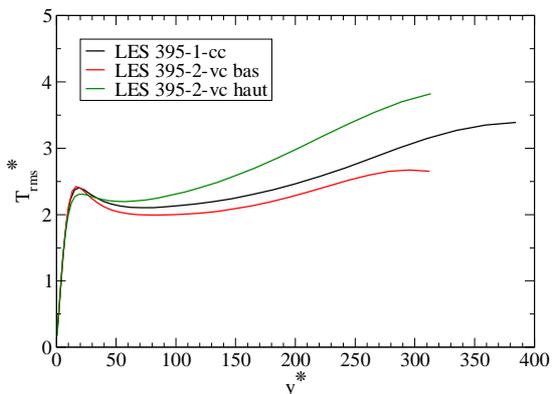


FIG. 5.38 – Écart-type de la température

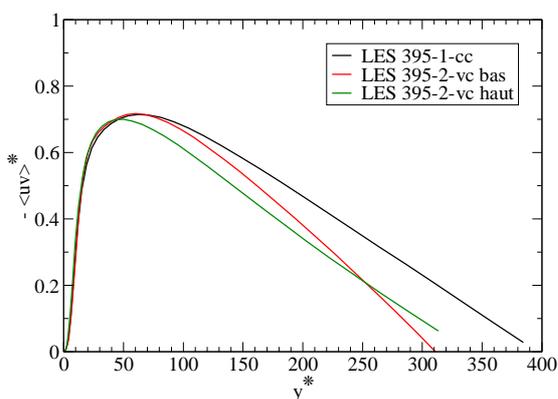


FIG. 5.39 – Corrélation - $\langle uv \rangle$

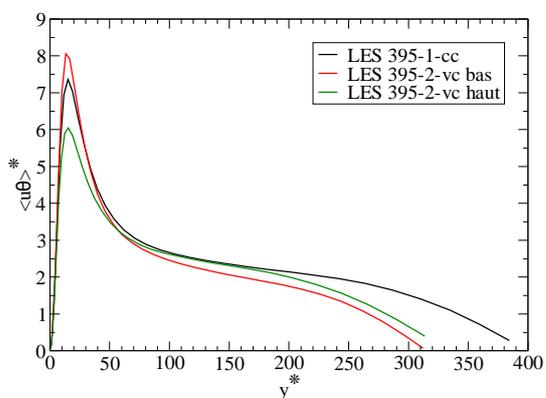


FIG. 5.40 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

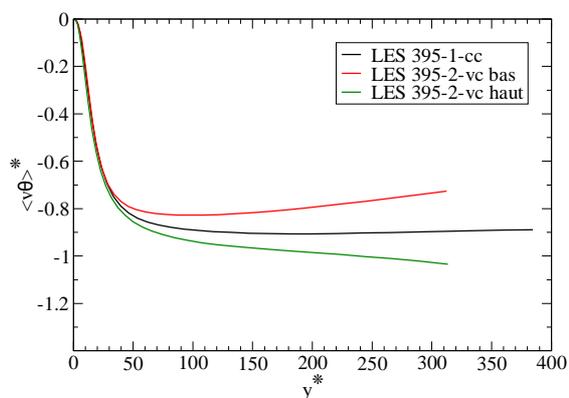


FIG. 5.41 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

5.6.3 Conclusion

L'adimensionnement semi-local permet effectivement d'avoir une bonne correspondance des courbes obtenues à faible et à fort écart de températures en ce qui concerne les profils de la vitesse moyenne, des fluctuations de vitesse et des corrélations vitesse-vitesse et vitesse-température. Pour la température moyenne et les fluctuations de température l'influence de cet adimensionnement est moins évidente.

5.7 Impact de la transformation de Van Driest sur les profils de vitesse moyenne

En ce qui concerne le profil de vitesse moyenne, un autre moyen de rapprocher les profils obtenus pour différents T_2/T_1 est l'utilisation de la transformation de Van Driest. Cette transformation a été mise au point pour permettre de faire correspondre les profils moyens de vitesse compressible avec leurs équivalents incompressibles, en prenant en compte des variations de la masse volumique. Cette transformation permettant de tenir compte des variations de ρ , elle est également intéressante pour les études comme la nôtre où le nombre de Mach est petit mais où il y a de fortes variations des propriétés du fluide en raison de l'anisothermie de l'écoulement. Nicoud et Bradshaw (2000), ont justement dérivé une version spécifiquement adaptée aux écoulements bas Mach de la transformation de Van Driest. Cette transformation s'exprime alors :

$$U_{VD}^+ = \frac{-2}{Pr_t B_q} [\sqrt{1 - Pr_t B_q U^+} - 1] \quad (5.1)$$

où Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent et $B_q = \frac{Q_w}{\rho_w C_p U_\tau T_w} = \frac{T_\tau}{T_w}$.

Nicoud (1998) et Wang et Pletcher (1996) ont pu rapprocher les courbes obtenues à faible et à fort rapport de températures en utilisant la transformation de Van Driest. À l'inverse, dans l'étude de Lessani et Papalexandris (2006) le profil moyen de vitesse de la paroi basse reste éloigné des autres malgré l'application de cette transformation. Cependant le rapport de températures considéré dans cette étude est très élevé ($T_2/T_1 = 8.00$), ce qui peut expliquer qu'ils n'observent pas la même chose que Nicoud (1998) et Wang et Pletcher (1996) qui considèrent des rapports de température de 2.00 et 3.00.

Nous avons appliqué la transformation de Van Driest donnée par l'équation (5.1) à nos profils de vitesse moyenne pour $Re_\tau \approx 180$ et $Re_\tau \approx 395$. Les courbes obtenues sont représentées sur les figures 5.42 et 5.43. On constate que l'accord entre les profils relatifs aux simulations 180-1-cc et 180-2-vc est meilleur lorsque cette transformation est utilisée. La correspondance est même légèrement meilleure qu'avec l'adimensionnement semi-local. Concernant les profils des simulations 395-1-cc et 395-2-vc, si on compare les figures 5.5 et 5.43, on peut voir que la transformation de Van Driest rapproche également les profils. Elle ne donne pas un meilleur accord que l'adimensionnement semi-local mais elle conserve la pente des profils dans la zone logarithmique (ce qui n'est pas le cas lorsque l'adimensionnement semi-local est employé).

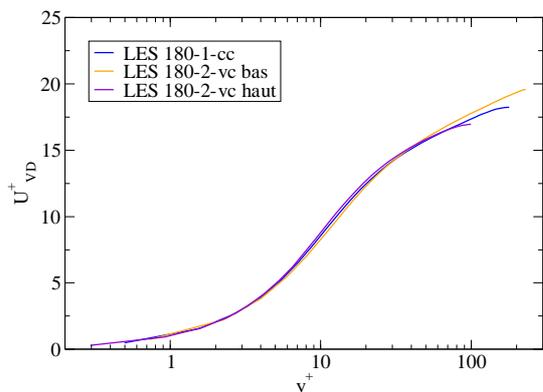


FIG. 5.42 – Vitesse moyenne longitudinale transformée selon la transformation de Van Driest pour $Re_{\tau} \approx 180$

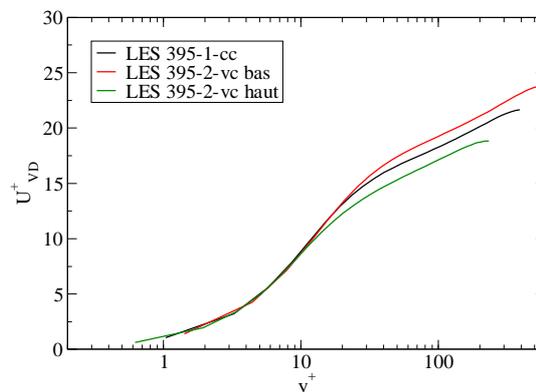


FIG. 5.43 – Vitesse moyenne longitudinale transformée selon la transformation de Van Driest pour $Re_{\tau} \approx 395$

5.8 Conclusion

Nos résultats montrent une perte de symétrie au niveau des profils moyens mais aussi des fluctuations et des corrélations lorsque le rapport de températures augmente. Nous constatons, outre la modification du niveau des profils, qu'un décalage des positions des pics des fluctuations et des corrélations semble s'opérer lorsque le rapport de températures s'élève.

Ces modifications s'expliquent par les effets combinés des variations des propriétés du fluide (masse volumique, viscosité et conductivité), de la conservation du flux de chaleur total et de la constance du nombre de Reynolds de frottement moyen. Ce sont les variations de la masse volumique qui ont l'impact le plus important dans ce phénomène.

Globalement, l'adimensionnement semi-local rapproche les profils obtenus à des ratios de température différents. L'effet est cependant à nuancer pour les profils de température moyenne et les fluctuations de température. La transformation de Van Driest permet de mieux faire correspondre les profils moyens de vitesse. Elle s'avère même un peu plus efficace que l'adimensionnement semi-local pour les simulations à $Re_{\tau} \approx 180$ (180-1-cc pour $T_2/T_1 = 1.01$ et 180-2-vc pour $T_2/T_1 = 2.00$).

Des simulations avec des rapports T_2/T_1 plus élevés doivent maintenant être réalisées pour voir si les évolutions observées s'accroissent lorsque l'anisothermie est plus importante. Des simulations à $Re_{\tau} \approx 180$ avec un maillage grossier seront également à réaliser afin de pouvoir comparer les effets obtenus pour les deux nombres de Reynolds de frottement.

Conclusion générale et perspectives

L'utilisation de la Simulation des Grandes Échelles avec un algorithme basé sur les équations bas Mach (code Trio_U) nous a permis d'étudier un écoulement turbulent anisotherme subsonique en canal plan bi-périodique avec températures pariétales imposées. Nous avons réalisé des simulations pour des nombres de Reynolds de frottement de 180 et 395, en isotherme ($T_2 = T_1$), avec des ratios de températures faibles ($T_2/T_1 = 1.01$ et $T_2/T_1 = 1.07$) et avec un ratio de températures élevé ($T_2/T_1 = 2.00$).

Dans un premier temps, nous avons comparé certains de nos résultats avec des données de simulations numériques directes. Ce qui ressort de ces comparaisons est le fait que, malgré quelques écarts, nos résultats sont satisfaisants compte-tenu du gain en temps de calcul de nos SGE par rapport à des SND, ce qui nous permet d'envisager plusieurs simulations avec des rapports de températures élevés. Nous avons donc ainsi pu valider les différents paramètres que nous avons choisis : schémas, modèles et maillages.

Nous nous sommes intéressés à l'impact des variations de la conductivité et de la viscosité. Nous avons montré qu'à faible rapport de températures ($T_2/T_1 = 1.07$), on peut les supposer constantes sans détériorer visiblement les profils. Par contre, avec un ratio de températures élevé ($T_2/T_1 = 2.00$), les variations de ces propriétés avec la température doivent être prises en compte, sinon les résultats sont significativement altérés.

En ce qui concerne la modélisation sous-maille thermique, nos résultats laissent penser que le modèle à nombre de Prandtl sous-maille constant donne des résultats similaires au modèle basé sur un calcul dynamique du nombre de Prandtl sous-maille. Cependant, des simulations complémentaires, avec un maillage plus lâche, à un nombre de Reynolds plus élevé et avec des rapports de températures plus grands, seront nécessaires afin de pouvoir définitivement conclure quant à l'influence du modèle sous-maille thermique.

Nous avons ensuite analysé les modifications des profils lorsque le ratio de températures considéré est plus fort. Nous avons vu, pour les deux nombres de Reynolds de frottement étudiés (180 et 395), que lorsque T_2/T_1 augmente tous les profils deviennent dissymétriques. De plus, les positions et les niveaux des pics des fluctuations et des corrélations sont modifiés.

Le mécanisme physique responsable de ces transformations a été présenté : ce sont les variations des propriétés, et surtout celles de la masse volumique qui, couplées aux contraintes de conservation du flux de chaleur total et du nombre de Reynolds de frottement moyen, engendrent ces modifications.

Enfin, nous avons utilisé l'adimensionnement semi-local et la transformation de Van Driest et montré que ces méthodes permettent de faire correspondre certains profils obtenus à faible et

fort ratio de températures.

Ce travail offre de nombreuses perspectives dans le domaine des écoulements turbulents fortement anisothermes. Tout d'abord, à partir des simulations déjà réalisées, on pourra analyser les champs de vitesse et de température instantanés pour voir si les *streaks* et les tourbillons sont modifiés lorsque le rapport de températures croît et observer les phénomènes d'éjection de fluide chaud et d'arrivée de fluide froid près des parois décrits par plusieurs auteurs. Une analyse comparative des spectres à faible et à fort écart de température sera également intéressante pour voir si la turbulence est fondamentalement modifiée par le gradient thermique. Une étude de la modification de la production d'entropie lorsque l'anisothermie est plus forte pourra aussi être envisagée.

D'autres simulations sont à conduire pour compléter et poursuivre cette étude. Premièrement, deux simulations à $Re_\tau \approx 180$ et $T_2/T_1 = 2.00$ avec maillage grossier pour les deux modèles sous-maille thermiques considérés (nombre de Prandtl sous-maille constant et dynamique) et une simulation à $Re_\tau \approx 395$ et $T_2/T_1 = 2.00$ avec maillage grossier et nombre de Prandtl sous-maille dynamique permettront d'approfondir la question de la modélisation sous-maille thermique et de comparer l'effet de l'augmentation du ratio de température pour les deux nombres de Reynolds. Une fois ces points éclaircis, ce travail doit être prolongé par l'étude de rapports de températures plus élevés afin de voir si les évolutions constatées quand T_2/T_1 passe de 1.01 ou 1.07 à 2.00 s'accroissent lorsque T_2/T_1 augmente davantage. Les résultats de ces simulations plus fortement anisothermes seront également utiles pour compléter l'étude de l'impact du modèle sous-maille thermique. Il serait aussi intéressant de tester d'autres conditions aux limites thermiques (parois à flux imposé/adiabatique) car, comme l'ont montré Brillant *et al.* (2006), le comportement asymptotique à l'approche des parois diffère selon le type de conditions aux limites thermiques employé, ce qui pourrait avoir un impact sur les phénomènes observés et notamment sur l'effet du modèle sous-maille thermique. Un autre point important sera la réalisation de simulations couplant les transferts convectifs et radiatifs. Pour se rapprocher de configurations pratiques, il faudra peut-être s'intéresser au couplage de la convection avec la conduction dans les parois solides. Enfin, le contexte pratique nécessitera peut-être d'étudier des fluides différents (influence du nombre de Prandtl moléculaire et des lois de variation des propriétés du fluide avec la température) et/ou des géométries plus complexes. Certaines de ces simulations sont en cours actuellement.

Enfin, à plus long terme il serait intéressant de réaliser des Simulations Numériques Directes avec de forts rapports de températures pour avoir des données de référence. Cela nécessitera de se doter de moyens de calcul importants.

Bibliographie

- Ackermann, C. et Métais, O., *A modified selective structure function subgrid-scale model*, Journal of Turbulence, **2(11)**, pp. 1–26, 2001.
- Akselvoll, K. et Moin, P., *Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets*, Journal of Fluid Mechanics, **315**, pp. 387–411, 1996.
- Artal, L. et Nicoud, F., *Direct numerical simulation of reacting turbulent multi-species channel flow*, dans *6th Direct and Large-Eddy Simulation Conference*, ERCOFTAC Workshop, Université de Poitiers, France, 2005.
- Bae, J. H., Yoo, J. Y., Choi, H., et McEligot, D. M., *Effects of large density variation on strongly heated internal air flows*, Physics of Fluids, **18**, pp. 075102–1–075102–25, 2006.
- Baggett, J. S., Nicoud, F., Mohammadi, B., Bewley, T., Gullbrand, J., et Botella, O., *Sub-optimal control based wall models for les including transpiration velocity*, Center for Turbulent Research, Proceedings of the Summer Program, Stanford, CA : Center for Turbulence Research, pp. 331–342, 2000.
- Bardina, J., Ferziger, J., et Reynolds, W., *Improved subgrid scale models for large eddy simulation*, AIAA Journal, **80**, p. 1357, 1980.
- Bataille, F., Rubinstein, R., et Hussaini, M. Y., *Eddy viscosity and diffusivity modeling*, Physics Letters A, **346**, pp. 168–173, 2005.
- Boersma, B. J. et Lele, S. K., *Large eddy simulation of compressible turbulent jets*, Annual research briefs, Center for Turbulence Research, 1999.
- Brillant, G., *Simulation des grandes échelles sur une plaque plane soumise à de l'effusion*, Mémoire du DEA de Thermique et Energétique de l'INSA de Lyon, Lyon, 2001.
- Brillant, G., *Simulations des grandes échelles thermiques et expériences dans le cadre d'effusion anisotherme*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2004.
- Brillant, G., Bataille, F., et Ducros, F., *Large-eddy simulation of a turbulent boundary layer with blowing*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, **17(5-6)**, pp. 433–443, 2004.
- Brillant, G., Husson, S., et Bataille, F., *Subgrid-scale diffusivity : wall behaviour and dynamic methods*, ASME Journal of Applied Mechanics, **73(3)**, pp. 360–367, 2006.

- Burton, G. C., *Large-eddy simulation of passive scalar mixing using multifractal subgrid-scale modeling*, Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs, pp. 145–156, 2004.
- Burton, G. C., *Large-eddy simulation of passive-scalar mixing using multifractal subgrid-scale modeling*, Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs, pp. 211–222, 2005.
- Cabot, W. et Moin, P., *Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high reynolds number flow*, Flow, Turbulence and Combustion, **63**, pp. 269–291, 1999.
- Calvin, C., Cueto, O., et Emonot, P., *An object-oriented approach to the design of fluid mechanics software*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **36(5)**, pp. 907–921, 2002.
- Chaouat, B. et Schiestel, R., *A new partially integrated transport model for subgrid-scale stresses and dissipation rate for turbulent developing flows*, Physics of Fluids, **17(6)**, pp. 065106–1–065106–19, 2005.
- Chassaing, P., *Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours*, Cépaduès, Toulouse, 2001, 450 p.
- Chassaing, P., Antonia, A., Anselmet, F., Joly, L., et Sarkar, S., *Variable Density Fluid Turbulence*, Kluwer Academics, Dordrecht, 2002, 380 p.
- Chatelain, A., *Simulation des Grandes Echelles d'écoulements turbulents avec transferts de chaleur*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- Châtelain, A., Ducros, F., et Métais, O., *Les of conjugate heat-transfer using thermal wall-functions*, dans B. G. R. Friedrich et O. M. eds., réds., *Proceedings of the D-LES 5 ERCOF-TAC Workshop*, pp. 307–314, Munich, 2003.
- Châtelain, A., Ducros, F., et Métais, O., *Les of turbulent heat transfer : proper convection numerical schemes for temperature transport*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **44(9)**, pp. 1017–1044, 2004.
- Cheng, R. K. et Ng, T., *Some aspects of strongly heated turbulent boundary layer flow*, Physics of Fluids, **25(8)**, pp. 1333–1341, 1982.
- Choi, H. S. et Suzuki, K., *Large eddy simulation of turbulent flow and heat transfer in a channel with one wavy wall*, International Journal of Heat and Fluid Flow, **26**, pp. 681–694, 2005.
- Chumakov, S. et Rutland, C. J., *Dynamic structure models for scalar flux and dissipation in large eddy simulation*, AIAA Journal, **42(6)**, pp. 1132–1139, 2004.
- Chumakov, S. G. et Rutland, C. J., *Dynamic structure subgrid-scale models for large eddy simulation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **47**, pp. 911–923, 2005.
- Coleman, G. N., J., K., et Moser, R. D., *A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow*, Journal of Fluid Mechanics, **305**, pp. 159–183, 1995.
- Colin, O., Ducros, F., Veynante, D., et Poinso, T., *A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion*, Physics of Fluids, **12(7)**, pp. 1843–1863, 2000.

- Cook, A. W. et Riley, J. J., *A subgrid model for equilibrium chemistry in turbulent flows*, Physics of Fluids, **6(8)**, pp. 2868–2870, 1994.
- Dailey, L. D., Meng, N., et Pletcher, R. H., *Large eddy simulation of constant heat flux turbulent channel flow with property variations : Quasi-developed model and mean flow results*, Journal of Heat Transfer (ASME), **125**, pp. 27–38, 2003.
- Daly, B. J. et Harlow, F. H., *Transport equations in turbulence*, Physics of Fluids, **13(11)**, pp. 2634–2649, 1970.
- Darrigol, O., *Between hydrodynamics and elasticity theory : the first five birth of the navier-stokes equation*, Archive for History of Exact Sciences, **56**, pp. 95–150, 2002.
- Deardorff, J. W., *A numerical study of three-dimensionnal turbulent channel flow at large reynolds numbers*, Journal of Fluid Mechanics, **41**, pp. 453–480, 1970.
- Deardorff, J. W., *The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence*, Journal of Fluids Engineering (ASME), pp. 429–438, 1973.
- Debusschere, B. et Rutland, C. J., *Turbulent scalar transport mechanisms in plane channel and couette flows*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **47**, pp. 1771–1781, 2004.
- DesJardin, P. E. et Frankel, S. H., *Large eddy simulation of a nonpremixed reacting jet : Application and assessment of subgrid-scale combustion models*, Physics of Fluids, **10(9)**, pp. 2298–2314, 1998.
- Dong, Y.-H. et Lu, X.-Y., *Large eddy simulation of a thermally stratified turbulent channel flow with temperature oscillation on the wall*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **47**, pp. 2109–2122, 2004.
- Dubief, Y. et Delcayre, F., *On coherent-vortex identification in turbulence*, Journal of Turbulence, **1**, pp. 1–21, 2000.
- Ducros, F., Comte, P., et Lesieur, M., *Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plane*, Journal of Fluid Mechanics, **236**, pp. 1–36, 1996.
- Duquennoy, C. et Ledac, P., *Manuel de la formation développeur trio_u/priceles*, Rap. tech., CS SI, CEA, Grenoble, 2002.
- Erlebacher, G., Hussaini, M. Y., Speziale, C. G., et Zang, T. A., *Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows*, Journal of Fluid Mechanics, **238**, pp. 155–185, 1992.
- Ezato, K., Shehata, A. M., Kunugi, T., et McEligot, D. M., *Numerical prediction of transitional features of turbulent forced gas flows in circular tubes with strong heating*, Journal of Heat Transfer (ASME), **121**, pp. 546–555, 1999.
- Flohr, P. et Vassilicos, J. C., *A scalar subgrid model with flow structure for large-eddy simulations of scalar variances*, Journal of Fluid Mechanics, **407**, pp. 315–349, 2000.

- Germano, M., *Turbulence : the filtering approach*, Journal of Fluid Mechanics, **238**, pp. 325–336, 1992.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., et Cabot, W., *A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model*, Physics of Fluids A, **3(7)**, pp. 1760–1765, 1991.
- Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P., et Akselvoll, K., *A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows*, Journal of Fluid Mechanics, **286**, pp. 229–255, 1995.
- Golanski, F., Prax, C., Lamballais, E., Fortuné, V., et Valière, J.-C., *An aeroacoustic hybrid approach for non-isothermal flows at low mach number*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **45**, pp. 441–461, 2004.
- Guyon, E. et Hulin, J.-P., *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences/CNRS Editions, Les Ulis, 2001, 640 p.
- Hébrard, J., Métais, O., et Salinas-Vasquez, M., *Large-eddy simulation of turbulent duct flow : heating and curvature effects*, International Journal of Heat and Fluid Flow, **25**, pp. 569–580, 2004.
- Hernandez, J. et Zamora, B., *Effects of variable properties and non-uniform heating on natural convection flow in vertical channels*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **48**, pp. 793–807, 2005.
- Huang, P. G., Coleman, G. N., et Bradshaw, P., *Compressible turbulent channel flows : Dns results and modelling*, Journal of Fluid Mechanics, **305**, pp. 185–218, 1995.
- Husson, S., Knikker, R., et Bataille, F., *Simulations des grandes échelles pour les configurations fortement anisothermes*, dans *SFT 2006 - Défis thermique dans l'industrie nucléaire, île de Ré*, tm. 1, pp. 283–288, Société Française de Thermique, Paris, 2006.
- Iaccarino, G. et Elkins, C. J., *Rapid techniques for measuring and modeling turbulent flows in complex geometries*, dans W. Rodi et M. Mulas, réds., *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 6, ERCOFTAC, ETMM6 - Sardinia, Italy, 23-25 May 2005*, pp. 3–16, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- Iovieno, M., Passoni, G., et Tordella, D., *A new large-eddy simulation near-wall treatment*, Physics of Fluids, **16(11)**, pp. 3935–3944, 2004.
- Jaberi, F. A. et Colucci, P. J., *Large eddy simulation of heat and mass transport in turbulent flows. part2 : Scalar field*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **46**, pp. 1827–1840, 2003.
- Jaberi, F. A. et James, S., *A dynamic similarity model for large eddy simulation of turbulent combustion*, Physics of Fluids, **10(7)**, pp. 1775–1777, 1998.
- Jimenez, C., Ducros, F., Cuenot, B., et Bedat, B., *Subgrid scale variance and dissipation of a scalar field in large-eddy simulations*, Physics of Fluids, **13(6)**, pp. 1748–1754, 2001a.

- Jimenez, C., Valino, L., et Dopazo, C., *A priori and a posteriori tests of subgrid scale models for scalar transport*, *Physics of Fluids*, **13(8)**, pp. 2433–2436, 2001b.
- Jimenez, J. et Moin, P., *The minimal flow unit in near-wall turbulence*, *Journal of Fluid Mechanics*, **225**, pp. 213–240, 1991.
- Kader, B. A., *Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **24(9)**, pp. 1541–1544, 1981.
- Kaltenbach, H.-J., Fatica, M., Mittal, R., Lund, T. S. ., et Moin, P., *Study of the flow in a planar asymmetric diffuser using large-eddy simulation*, *Journal of Fluid Mechanics*, **390**, pp. 151–185, 1999.
- Katopodes, F. V., Street, R. L., et Ferziger, J. H., *Subfilter-scale scalar transport for large-eddy simulation*, dans *14th Symposium on Boundary Layers and Turbulence*, pp. 472–475, American Meteorological Society, Washington, 2000.
- Kaviany, M., *Principles of convective heat transfer*, Springer, New York, 2001, 707 p.
- Kawamura, H., Abe, H., et Matsuo, Y., *Dns of turbulent heat transfer in channel flow with respect to reynolds and prandtl number effetc*, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **20**, pp. 196–207, 1999.
- Kawamura, H., Abe, H., et Shingai, K., *Dns of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions*, dans Y. Nagano, K. Hanjalic, et T. Tsuji, réds., *3rd International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Aichi Shuppan, Tokyo, pp. 15–32, 2000.
- Kim, J., Moin, P., et Moser, R., *Turbulence statistics in fully developed channel flow at lox reynolds number*, *Journal of Fluid Mechanics*, **177**, pp. 133–166, 1987.
- Le, H., Moin, P., et Kim, J., *Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step*, *Journal of Fluid Mechanics*, **330**, pp. 349–374, 1997.
- Le Quéré, P., Weisman, C., Paillère, H., Vierendeels, J., Dick, R., Becker, R., Braack, M., et Locke, J., *Modelling of natural convectionflows with large temperature differences : a benchmark problem for low mach number solvers. part 2. reference solutions*, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **39(3)**, pp. 609–616, 2005.
- Lee, J. S., Xu, W., et Pletcher, H., *Large eddy simulation of heated vertical annular pipe flow in fully developed turbulent mixed convection*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **47**, pp. 437–446, 2004.
- Lee, S., Sanjiva, S. K., et Moin, P., *Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of taylor’s hypothesis in compressible flows*, *Physics of Fluids A*, **4(7)**, 1992.
- Leonard, A., *Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows*, *Advances in Geophysics*, **18A**, pp. 237–248, 1974.
- Lesieur, M., *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1994, 262 p.

- Lesieur, M. et Métais, O., *New trends in large-eddy simulations of turbulence*, Annual Reviews of Fluids Mechanics, **28**, pp. 45–82, 1996.
- Lesieur, M., Métais, O., et Comte, P., *Large-Eddy Simulations of Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, 219 p.
- Lessani, B. et Papalexandris, M. V., *Time-accurate calculation of variable density flows with strong temperature gradients and combustion*, Journal of Computational Physics, **212**, pp. 218–246, 2006.
- Li, C. W. et Wang, J. H., *Large eddy simulation of dispersion in free surface shear flow*, Journal of Hydraulic Research, **40(3)**, pp. 351–358, 2002.
- Lilly, D., *A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method*, Physics of Fluids A, **4(3)**, pp. 633–635, 1992.
- Lund, T., Wu, X., et Squires, K., *On the generation of turbulent inflow conditions for boundary layer simulations*, Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs, pp. 281–295, 1996.
- Maruyama, T., *On the influence of turbulence characteristics at an inler boundary for large eddy simulation of a turbulent boundary layer*, dans W. Rodi et D. Laurence, réds., *Engineering turbulence modeling and experiments - 4*, pp. 217–226, Elsevier Science Ltd., Amsterdam, 1999.
- Mellen, C. P., Frölich, J., et Rodi, W., *Lessons from lesfoil project on large-eddy simulation of flow around an airfoil*, AIAA Journal, **41(4)**, pp. 573–581, 2003.
- Meneveau, C. et Katz, J., *Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation*, Annual Reviews of Fluids Mechanics, **32**, pp. 1–32, 2000.
- Meneveau, C., Lund, T. S., et Cabot, W. H., *A lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence*, Journal of Fluid Mechanics, **319**, pp. 353–385, 1996.
- Métais, O. et Lesieur, M., *Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably stratified turbulence*, Journal of Fluid Mechanics, **239**, pp. 157–194, 1992.
- Moin, P., *Advances in lerge eddy simulation methodology for complex flows*, International Journal of Heat and Fluid Flow, **23**, pp. 710–720, 2002.
- Moin, P. et Kim, J., *Numerical investigation of turbulent channel flow*, Journal of Fluid Mechanics, **118**, pp. 341–377, 1982.
- Moin, P., Squires, K., Cabot, W., et Lee, S., *A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport*, Physics of Fluids, **3(11)**, pp. 2746–2757, 1991.
- Montreuil, E., *Simulations numériques pour l'aérothermique avec des modèles sous-maille*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2000.

- Montreuil, E., Labbé, O., et Sagaut, P., *Assessment of non-fickian subgrid-scale models for passive scalar in a channel flow*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **49**, pp. 75–98, 2005.
- Montreuil, E., Sagaut, E., Labbé, O., et Cambon, C., *Assessment of non-fickian subgrid-scale models for passive scalar in channel flow*, dans L. K. P. Voke, N. Sandham, réd., *Direct and Large Eddy Simulation III*, pp. 189–200, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1999.
- Morinishi, Y., Tamano, S., et Nakabayashi, K., *Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flow between adiabatic and isothermal walls*, Journal of Fluid Mechanics, **502**, pp. 273–308, 2004.
- Moser, R. D., Kim, J., et Mansour, N. N., *Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $re_\tau = 590$* , Physics of Fluids, **11(4)**, pp. 943–945, 1999.
- Münch, C., *Simulations des Grandes Échelles d'écoulements turbulents compressibles en conduit courbe chauffé*, Thèse de doctorat, INPG, 2005.
- Murata, A. et Mochizuki, S., *Effect of rib orientation and channel rotation on turbulent heat transfer in a two-pass square channel with sharp 180° turns investigated by using large eddy simulation*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **47**, pp. 2599–2618, 2004a.
- Murata, A. et Mochizuki, S., *Large eddy simulation of turbulent heat transfer in a rotating two-pass smooth square channel with sharp 180° turns*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **47**, pp. 683–698, 2004b.
- Nicoud, F., *Conservative high-order finite-difference schemes for low-mach number flows*, Journal of Computational Physics, **158**, pp. 71–97, 2000.
- Nicoud, F. et Baggett, J., *On the use of the optimal control theory for deriving wall models for les*, Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs, pp. 329–341, 1999.
- Nicoud, F., Baggett, J. S., Moin, P., et Cabot, W., *Large eddy simulation wall-modeling based on suboptimal control theory and linear stochastic estimation*, Physics of Fluids, **13(10)**, pp. 2968–2984, 2001.
- Nicoud, F. et Bradshaw, P., *A velocity transformation for heat and mass transfer*, Physics of Fluids, **12(1)**, pp. 237–238, 2000.
- Nicoud, F. et Ducros, F., *Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor*, Flow, Turbulence and Combustion, **62**, pp. 183–200, 1999.
- Nicoud, F. et Poinso, T., *DNS of a channel flow with variable properties*, dans B. S. et J. E. Eaton, réds., *1st International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena.*, pp. 697–702, Santa Barbara, USA, 1999.
- Nicoud, F. C., *Numerical study of a channel flow with variable properties*, Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs, pp. 289–309, 1998.

- Nikitin, N. V., Nicoud, F., Wasistho, B., Squires, K. D., et Spalart, P. R., *An approach to wall modeling in large-eddy simulations*, Physics of Fluids, **12(7)**, pp. 1629–1632, 2000.
- Paillère, H., Le Quéré, P., Weisman, C., Vierendeels, J., Dick, E., Braack, M., Dabbene, F., Becantini, A., Studer, E., Kloczko, T., Corre, C., Heuveline, V., Darbandi, M., et F., H. S., *Modelling of natural convection flows with large temperature differences : a benchmark problem for low mach number solvers. part 2. contributions to the june 2004 conference*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **39(3)**, pp. 617–621, 2005.
- Paolucci, S., *On the filtering of sound from the navier-stokes equations*, Rap. tech. SAND82-8257, SANDIA National Labs., Livermore, CA (USA), 1982.
- Péneau, F., Boisson, H., et Djilali, N., *Large-eddy simulation of the influence of high free-stream turbulence on a spatially evolving boundary layer*, International Journal of Heat and Fluid Flow, **21**, pp. 640–647, 2000.
- Péneau, F., Boisson, H., Kondjoyan, A., et Djilali, N., *Analysis of the transition to turbulence of a boundary layer subjected to free-stream turbulence*, dans *11th Annual Conference of Computational Fluid Dynamics*, Vancouver, BC, Canada, 2003.
- Peng, S.-H. et Davidson, L., *On a subgrid-scale heat flux model for large-eddy simulation of turbulent thermal flow*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **45**, pp. 1393–1405, 2002.
- Pierce, C. et Moin, P., *A dynamic model for subgrid scale variance and dissipation rate of a conserved scalar*, Physics of Fluids, **10(12)**, pp. 3041–3044, 1998.
- Pinarbasi, A., Ozalp, C., et Duman, S., *Influence of variable thermal conductivity and viscosity for nonisothermal fluid flow*, Physics of Fluids, **17**, pp. 038109–1–038109–4, 2005.
- Piomelli, U. et Balaras, E., *Wall-layer models for large-eddy simulations*, Annual Reviews of Fluids Mechanics, **34**, pp. 349–374, 2002.
- Pullin, D. I., *A vortex-based model for the subgrid flux of a passive scalar*, Physics of Fluids, **12(9)**, pp. 2311–2319, 2000.
- Qin, Z. et Pletcher, R. H., *Large eddy simulation of turbulent heat transfer in a rotating square duct*, International Journal of Heat and Fluid Flow, **27**, pp. 371–390, 2006.
- Quarteroni, A., Sacco, R., et Saleri, F., *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, Springer-Verlag, France, 2000.
- Rodi, W., Ferziger, J. H., Breuer, M., et Pourquié, M., *Status of large eddy simulation : Results of a workshop*, Journal of Fluids Engineering (ASME), **119**, pp. 248–262, 1997.
- Sagaut, P., *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements incompressibles*, Springer, Berlin, 1998, 282 p.
- Sagaut, P., Comte, P., et F., D., *Filtered subgrid-scale models*, Physics of Fluids, **12(1)**, pp. 233–236, 2000.

- Salat, J., Xin, S., Joubert, P., Sergent, A., Penot, F., et Le Quéré, P., *Experimental and numerical investigation of turbulent natural convection in a large air-filled cavity*, International Journal of Heat and Fluid Flow, **25**, pp. 824–832, 2004.
- Sarghini, F., Piomelli, U., et Balaras, E., *Scale-similar models for large-eddy simulations*, Physics of Fluids, **11(9)**, pp. 1596–1607, 1999.
- Satake, S., Kunugi, T., Shehata, A. M., et McEligot, D. M., *Direct numerical simulation on laminarization of turbulent forced gas flows in circular tubes with strong heating*, dans Banerjee, réd., *1st Symposium of Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Santa Barbara, CA, 1999.
- Schumann, U., *Realizability of reynolds-stress turbulence models*, Physics of Fluids, **20(5)**, pp. 721–725, 1977.
- Sergent, A., Joubert, P., et Le Quéré, P., *Development of a local subgrid diffusivity model for large-eddy simulation of buoyancy-driven flows : application to a square differentially heated cavity*, Numerical Heat Transfer, Part A, **44**, pp. 789–810, 2003.
- Sergent, A., Joubert, P., Le Quéré, P., et Tenaud, C., *Extension du modèle d'échelles mixtes à la diffusivité sous-maille*, Computational Fluid Mechanics, **328(série II b)**, pp. 891–897, 2000.
- Smagorinsky, J., *General circulation experiments with the primitive equations*, Monthly Weather Review, **91(3)**, pp. 99–164, 1963.
- Spalart, P. R., *Strategies for turbulence modelling and simulations*, International Journal of Heat and Fluid Flow, **21**, pp. 252–263, 2000.
- Tamano, S. et Morinishi, Y., *Effect of different thermal wall boundary conditions on compressible turbulent channel flow at $m=1.5$* , Journal of Fluid Mechanics, **548**, pp. 361–373, 2006.
- Tyagi, M. et Acharya, S., *Large eddy simulations of flow and heat transfer in rotating ribbed duct flows*, Journal of Heat Transfer (ASME), **127**, pp. 486–498, 2005.
- Verzicco, R., *Large-eddy-simulation of complex flows using the immersed boundary method*, dans W. Rodi et M. Mulas, réds., *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 6, ETMM6- Sardinia, Italy, 23-25 May 2005*, pp. 17–30, ERCOFTAC, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- Voke, P. R., *Low-reynolds-number subgrid-scale models*, Rap. tech., Department of Mechanical Engineering, University of Surrey, Guildford GU2 5XH, United Kingdom, 1994.
- Vreman, B., Geurts, B., et Kuerten, H., *Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer*, Journal of Fluid Mechanics, **339**, pp. 357–390, 1997.
- Wang, L. et Lu, X.-Y., *An investigation of turbulent oscillatory heat transfer in channel flows by large eddy simulation*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **47**, pp. 2161–2172, 2004.

- Wang, L. et Lu, X.-Y., *Large eddy simulation of stably stratified turbulent open channel flows with low- to high-prandtl number*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **48**, pp. 1883–1897, 2005.
- Wang, W. et Pletcher, R., *On the large eddy simulation of a turbulent channel flow with significant heat transfer*, Physics of Fluids, **8(12)**, pp. 3354–3366, 1996.
- Wardana, I. N. G., Uead, T., et Mizomoto, M., *Effect of strong wall heating on turbulence statistics of a channel flow*, Experiments in Fluids, **18**, pp. 87–94, 1994.
- Wardana, I. N. G., Ueda, T., et Mizomoto, M., *Structure of turbulent two-dimensional channel flow with strongly heated wall*, Experiments in Fluids, **13**, pp. 17–25, 1992.
- White, F. M., *Viscous Fluid Flow, 2nd Ed.*, McGraw-Hill, New York, 1991.
- Worthy, J., *Large Eddy Simulation of buoyant plumes*, Thèse de doctorat, School of Mechanical Engineering, Cranfield University, UK, 2003.
- Wu, X., Squires, K. D., et Lund, T. S., *Large-eddy simulation of a spatially-developping boundary layer*, dans *ACM/IEEE Supercomputing Conference*, pp. 1–18, San Diego, 1995.
- Xin, S., Duluc, M.-C., Lusseyran, F., et Le Quéré, P., *Numerical simulations of natural convection around a line-source*, Int. Journal of Num. Meth. for Heat and Fluid Flow, **14(7)**, pp. 830–850, 2004.
- Xin, S., Quéré, L., et O., D., *Natural convection in a differentially heated horizontal cylinder : Effects of prandtl number on flow structure and instability*, Physics of Fluids, **9(4)**, pp. 1014–1033, 1997.
- Xu, X., Lee, J. S., et Pletcher, R. H., *A compressible finite volume formulation for large eddy simulation of turbulent pipe flows at low mach number in cartesian coordinates*, Journal of Computational Physics, **203**, pp. 22–48, 2005.
- Xu, X., Lee, J. S., Pletcher, R. H., Shehata, A. M., et McEligot, D. M., *Large eddy simulation of turbulent forced gas flows in vertical pipes with high heat transfer rates*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **47**, pp. 4113–4123, 2004.
- Zhou, X. et Mahalingam, S., *A flame surface density based model for large eddy simulation of turbulent nonpremixed combustion*, Physics of Fluids, **14(11)**, pp. L77–L80, 2002.

Annexes

Annexe A

Effet des variations de λ et μ : autres adimensionnements

Cette annexe rassemble des figures relatives au chapitre 4. Elles permettent de compléter l'étude de l'influence de la prise en compte des variations de la conductivité, λ , et de la viscosité, μ , du fluide en présentant les courbes obtenues avec deux autres adimensionnements que celui utilisé dans le chapitre 4. Dans un premier temps sont présentées les figures relatives aux simulations à faible ratio de températures : 395-1-cc et 395-1-vc (nombre de Reynolds de frottement de 395, nombre de Prandtl sous-maille constant, $T_2/T_1 = 1.07$, propriétés constantes pour 395-1-cc et variables pour 395-1-vc). Ensuite, nous donnons les profils des simulations à fort ratio de températures : 395-2-cc et 395-2-vc (nombre de Reynolds de frottement de 395, nombre de Prandtl sous-maille constant, $T_2/T_1 = 2.00$, propriétés constantes pour 395-2-cc et variables pour 395-2-vc). À chaque fois, les résultats sont d'abord tracés avec l'adimensionnement basé sur U_{max} , $T_2 - T_1$ et y/h et ensuite avec l'adimensionnement basé sur U_τ^* , T_τ^* et y^* (adimensionnement semi-local).

A.1 Cas faiblement anisotherme

A.1.1 Adimensionnement basé sur U_{\max} , $T_2 - T_1$ et y/h

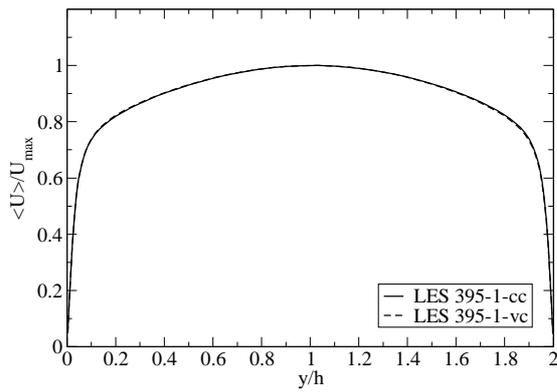


FIG. A.1 – Vitesse moyenne longitudinale

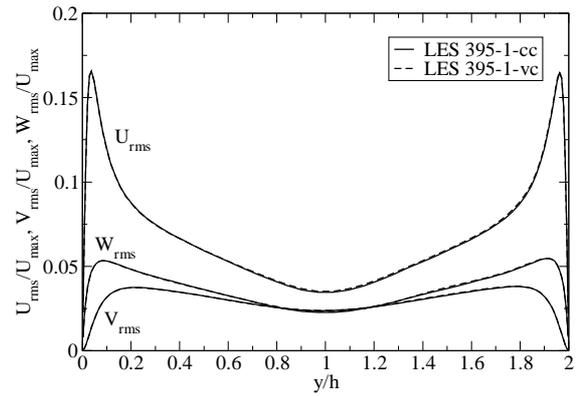


FIG. A.2 – Écart-types de la vitesse

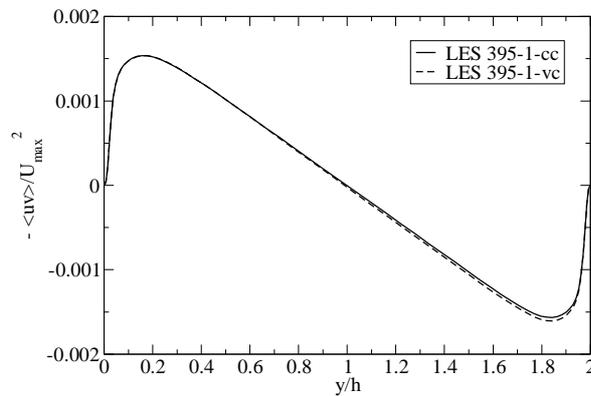


FIG. A.3 – Corrélation $-\langle uv \rangle$

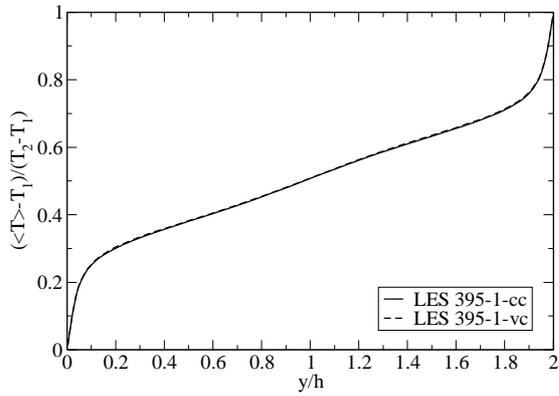


FIG. A.4 – Température moyenne

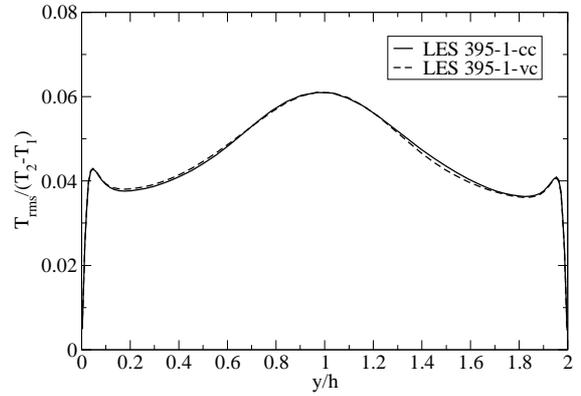


FIG. A.5 – Écart-type de la température

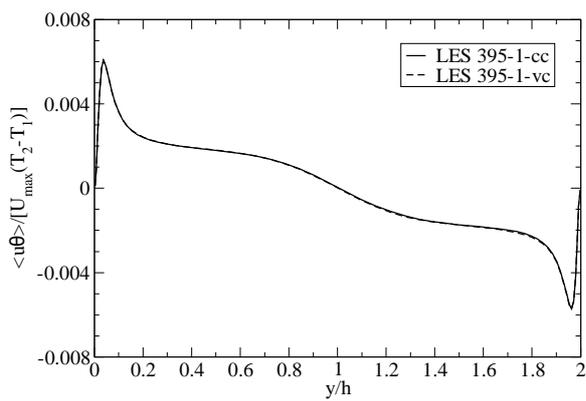


FIG. A.6 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

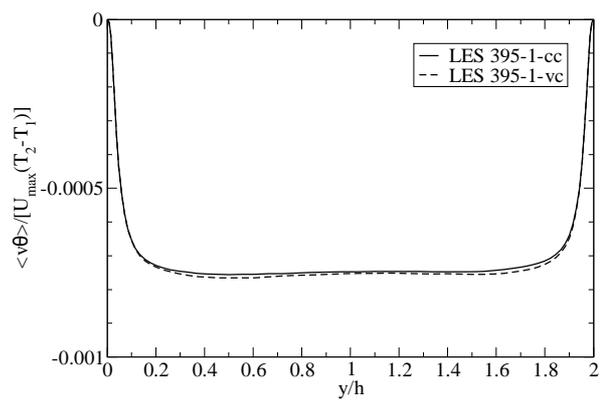


FIG. A.7 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

A.1.2 Adimensionnement basé sur U_{τ}^* , T_{τ}^* et y^*

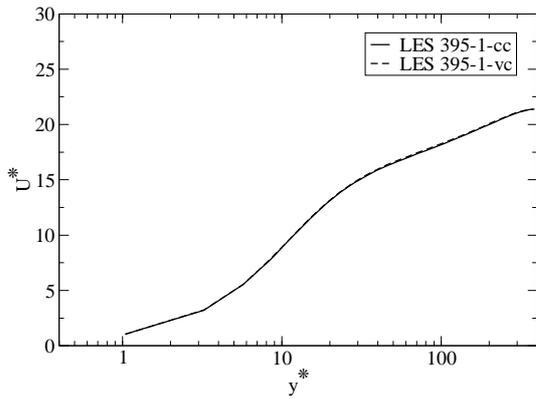


FIG. A.8 – Vitesse moyenne longitudinale

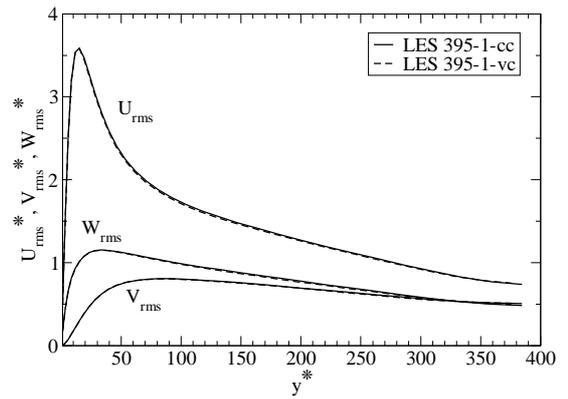


FIG. A.9 – Écart-types de la vitesse

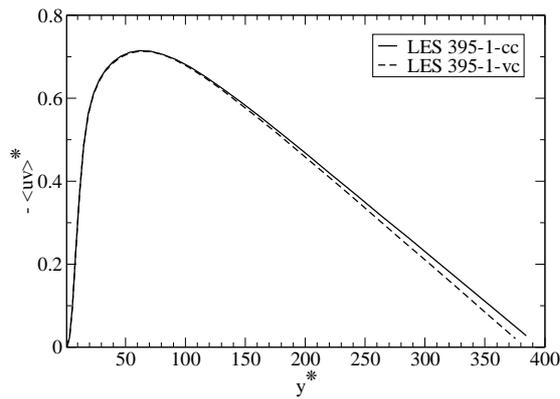


FIG. A.10 – Corrélation - $\langle uw \rangle$

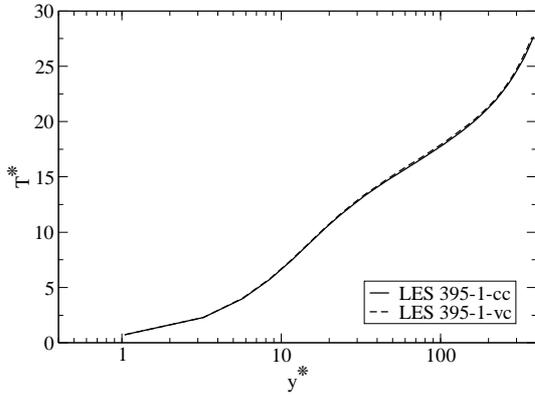


FIG. A.11 – Température moyenne

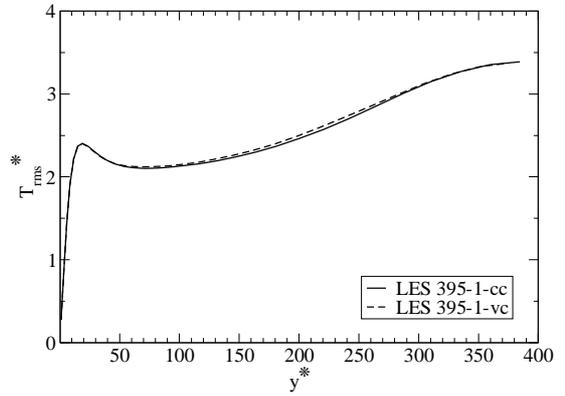


FIG. A.12 – Écart-type de la température

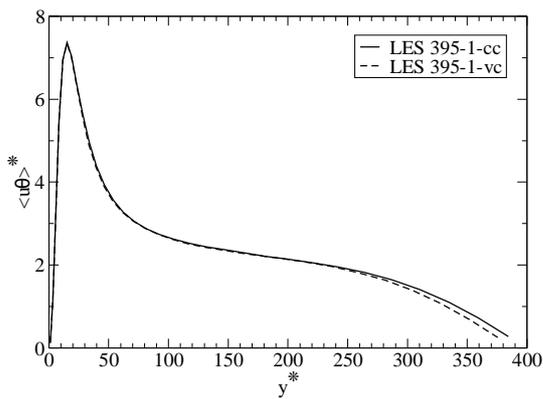


FIG. A.13 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

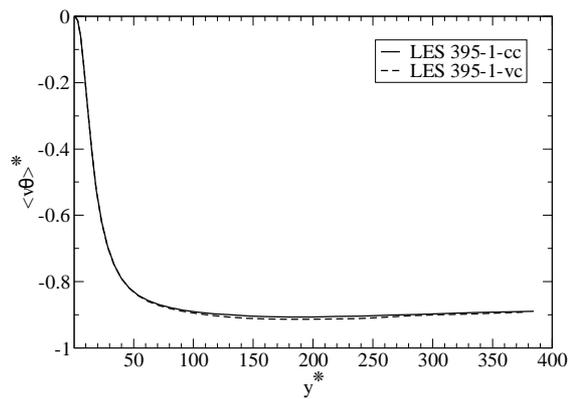


FIG. A.14 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

A.2 Cas fortement anisotherme

A.2.1 Adimensionnement basé sur U_{\max} , $T_2 - T_1$ et y/h

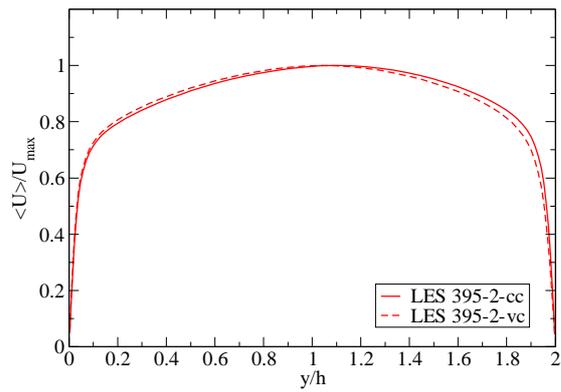


FIG. A.15 – Vitesse moyenne longitudinale

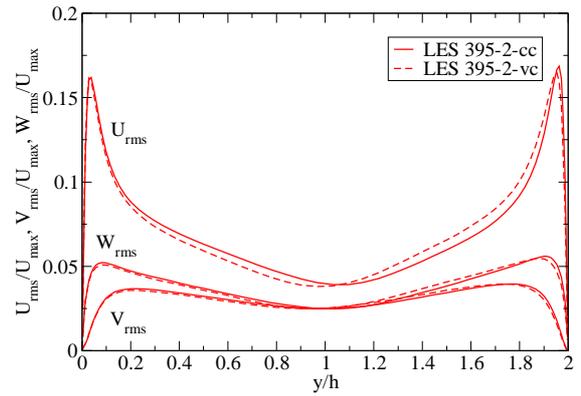
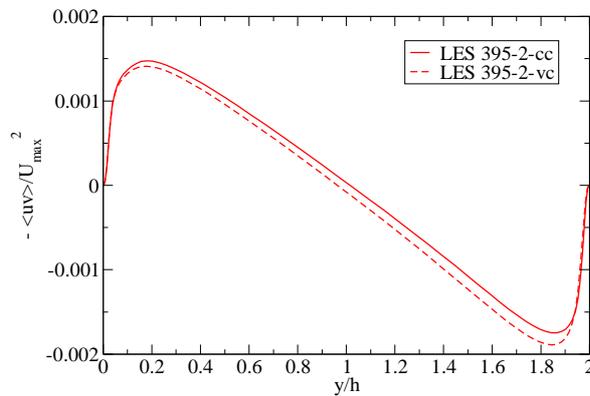


FIG. A.16 – Écart-types de la vitesse

FIG. A.17 – Corrélation $-\langle uv \rangle$

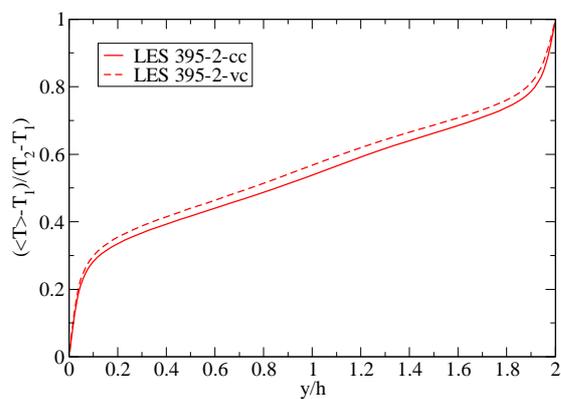


FIG. A.18 – Température moyenne

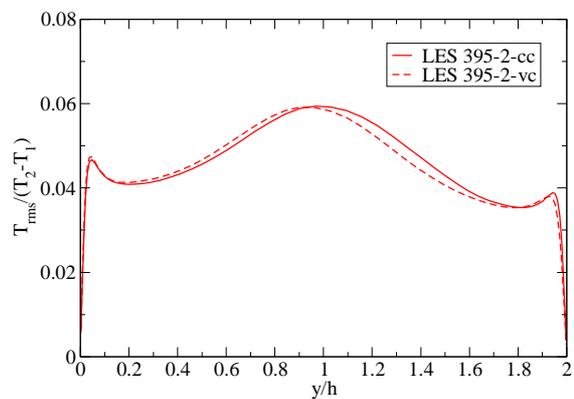


FIG. A.19 – Écart-type de la température

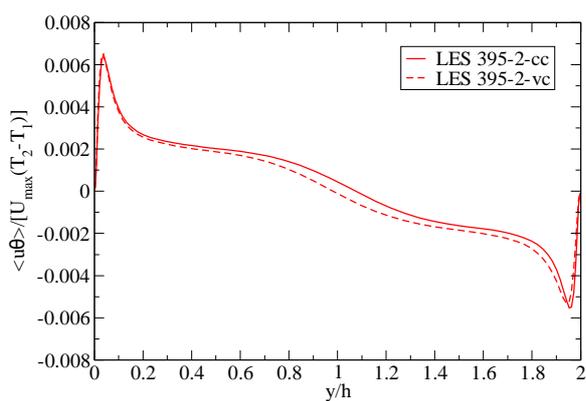


FIG. A.20 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

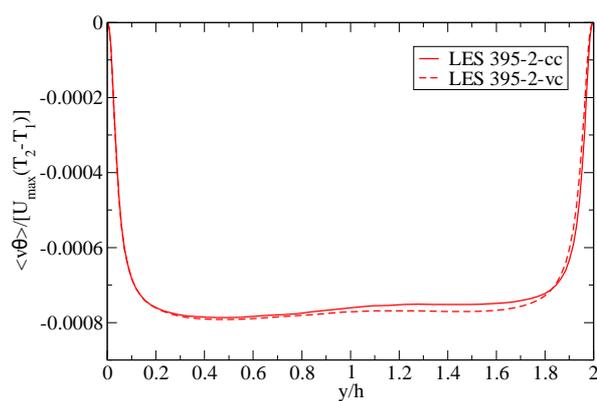


FIG. A.21 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

A.2.2 Adimensionnement basé sur U_{τ}^* , T_{τ}^* et y^*

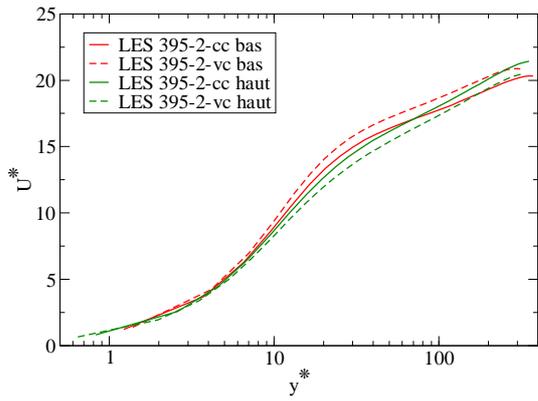


FIG. A.22 – Vitesse moyenne longitudinale

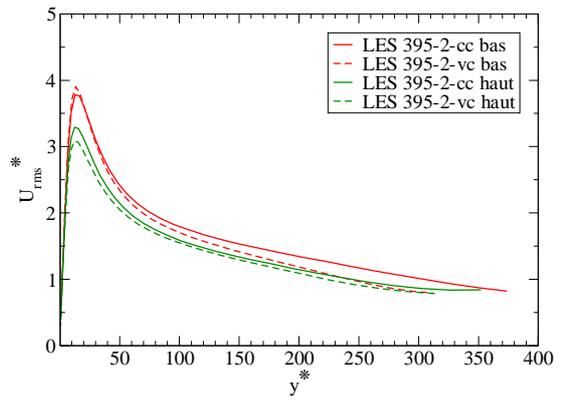


FIG. A.23 – Écart-type de la vitesse longitudinale

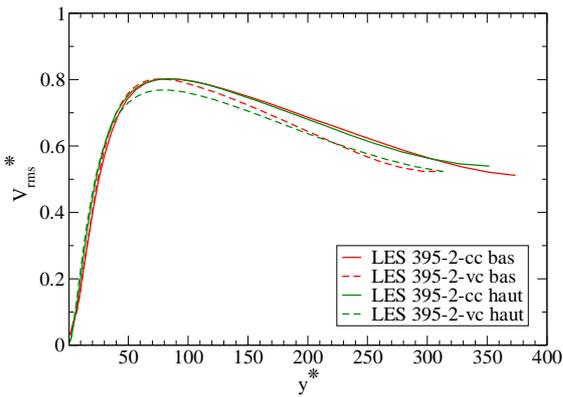


FIG. A.24 – Écart-type de la vitesse verticale

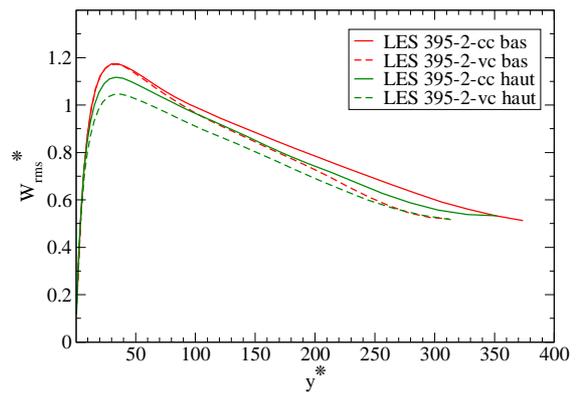


FIG. A.25 – Écart-type de la vitesse transverse

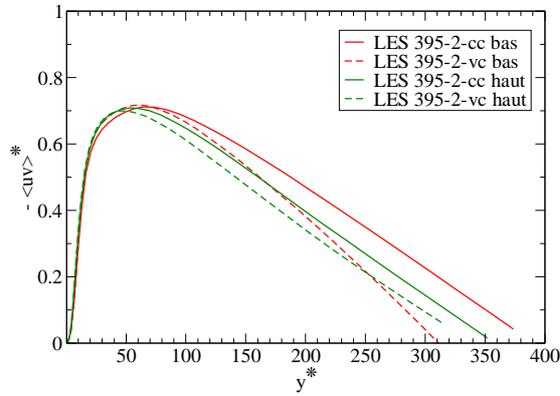


FIG. A.26 – Corrélation – $\langle uv \rangle$

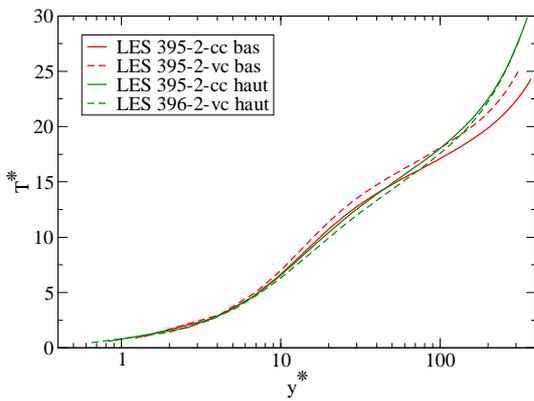


FIG. A.27 – Température moyenne

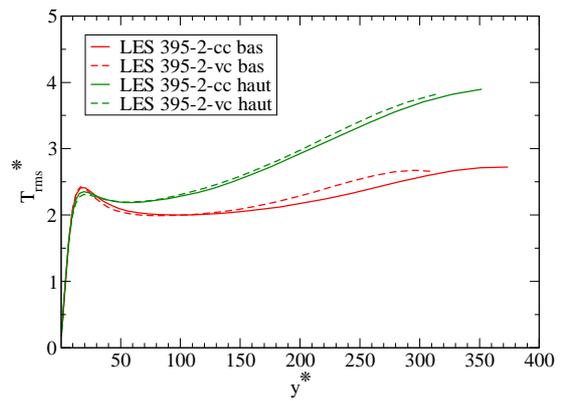


FIG. A.28 – Écart-type de la température

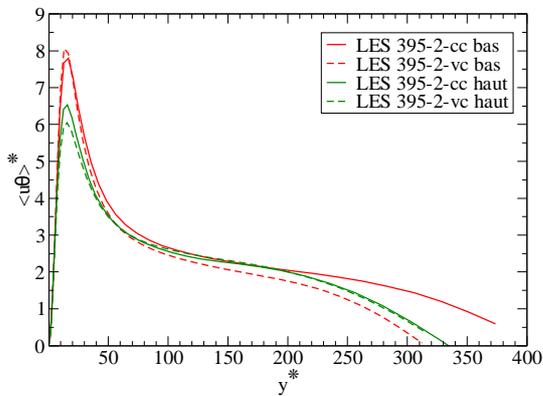


FIG. A.29 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

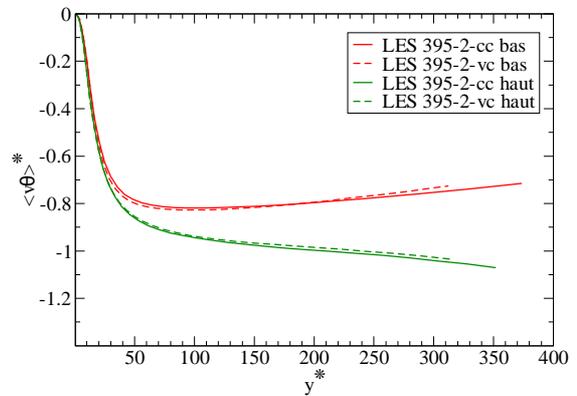


FIG. A.30 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

Annexe B

Étude de la modélisation sous-maille thermique : autres adimensionnements

Nous regroupons dans cette annexe des figures complémentaires relatives au chapitre 4. Les courbes relatives à l'étude de la modélisation sous-maille thermique y sont tracées avec deux adimensionnements différents de celui utilisé dans le chapitre 4. Nous présentons dans un premier temps les figures obtenues lors des simulations 180-1-cc et 180-1-cd, réalisées à un nombre de Reynolds de frottement de 180, avec un faible rapport de températures ($T_2/T_1 = 1.01$), avec une conductivité et une viscosité constantes et avec un nombre de Prandtl sous-maille constant (simulation 180-1-cc) ou dynamique (simulation 180-1-cd). Dans un deuxième temps, nous donnons les courbes relatives aux simulations 180-2-vc et 180-2-vd où le nombre de Reynolds de frottement est de 180, le ratio de températures est élevé ($T_2/T_1 = 2.00$), les propriétés du fluide sont variables et le nombre de Prandtl sous-maille est soit constant (cas 180-2-vc), soit dynamique (180-2-vd). À chaque fois, les résultats sont d'abord tracés avec l'adimensionnement basé sur U_{max} , $T_2 - T_1$ et y/h et ensuite avec l'adimensionnement basé sur U_τ^* , T_τ^* et y^* (adimensionnement semi-local).

B.1 Cas faiblement anisotherme

B.1.1 Adimensionnement basé sur U_{\max} , $T_2 - T_1$ et y/h

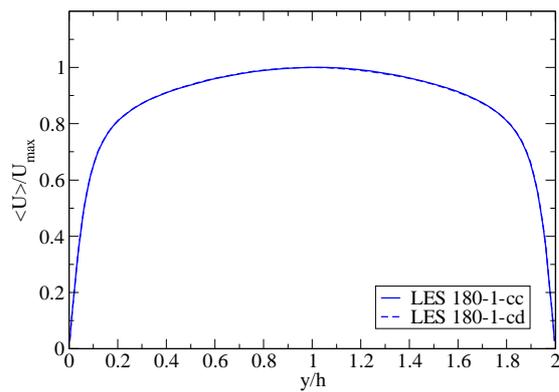


FIG. B.1 – Vitesse moyenne longitudinale

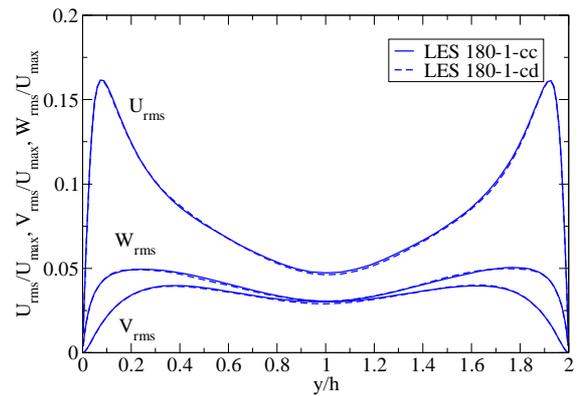


FIG. B.2 – Écart-types de la vitesse

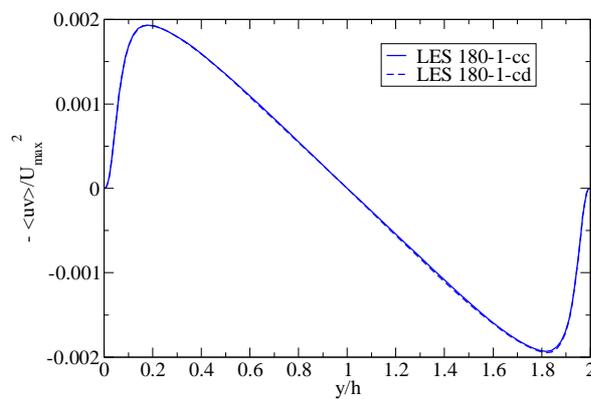


FIG. B.3 – Corrélation $-\langle uv \rangle$

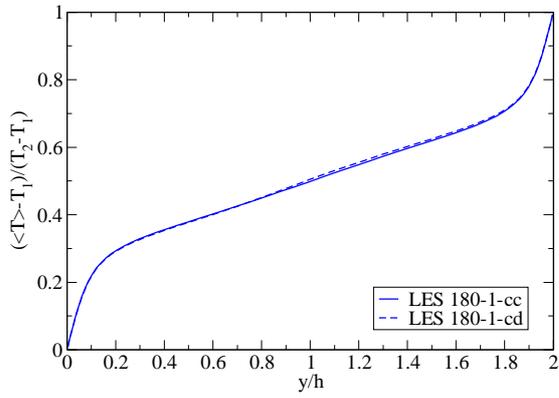


FIG. B.4 – Température moyenne

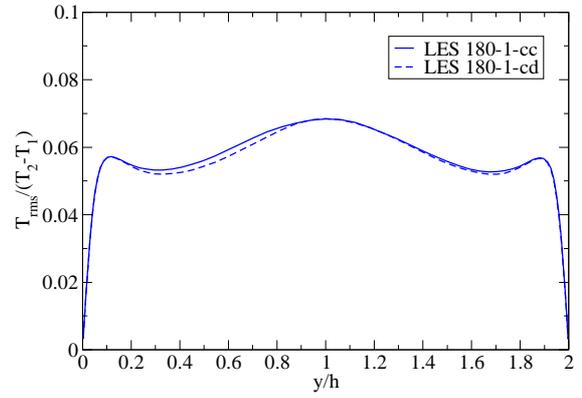


FIG. B.5 – Écart-type de la température

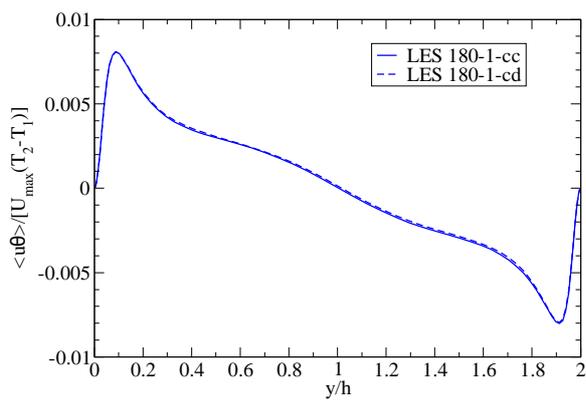


FIG. B.6 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

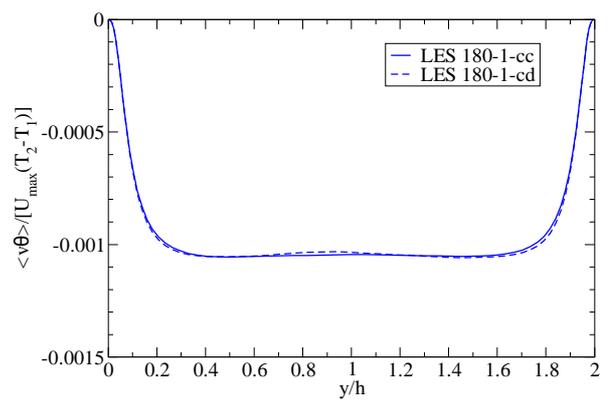


FIG. B.7 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

B.1.2 Adimensionnement basé sur U_T^* , T_T^* et y^*

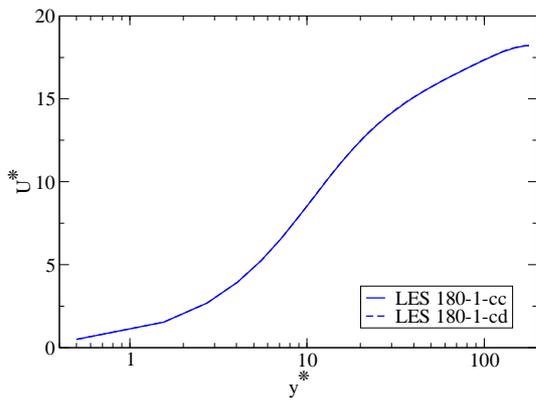


FIG. B.8 – Vitesse moyenne longitudinale

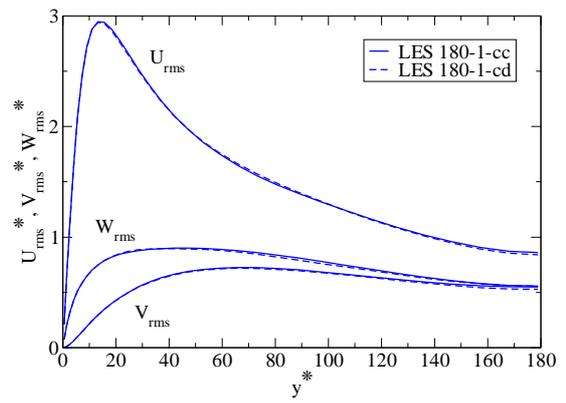


FIG. B.9 – Écart-types de la vitesse

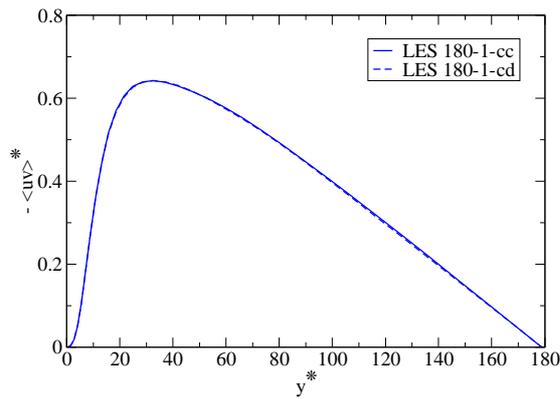


FIG. B.10 – Corrélation - $\langle uv \rangle$

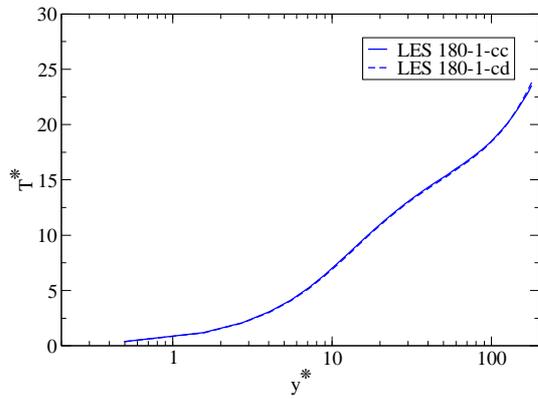


FIG. B.11 – Température moyenne

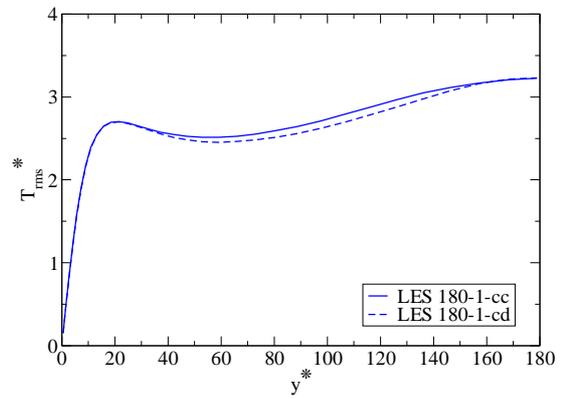


FIG. B.12 – Écart-type de la température

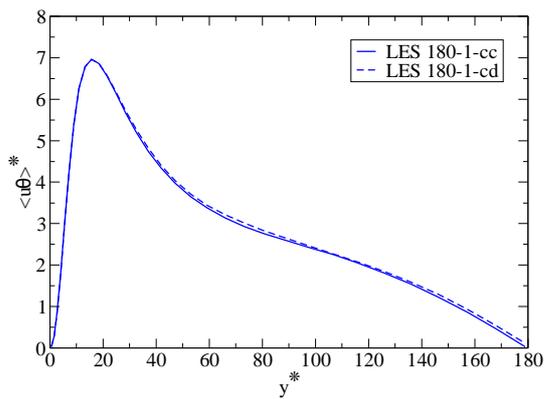


FIG. B.13 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

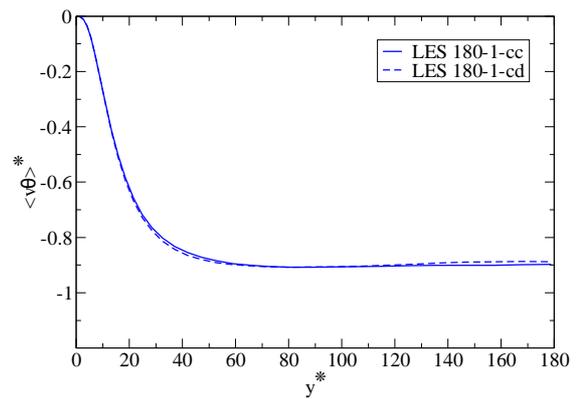


FIG. B.14 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

B.2 Cas fortement anisotherme

B.2.1 Adimensionnement basé sur U_{\max} , $T_2 - T_1$ et y/h

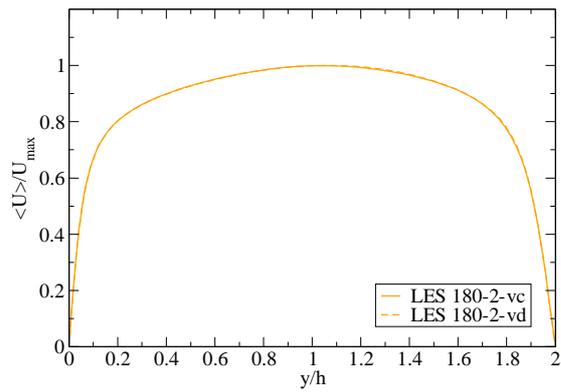


FIG. B.15 – Vitesse moyenne longitudinale

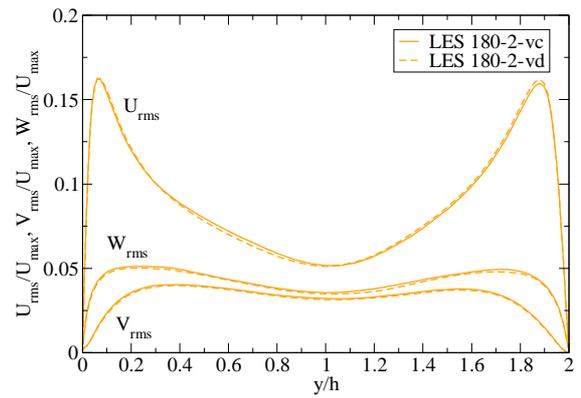


FIG. B.16 – Écart-types de la vitesse

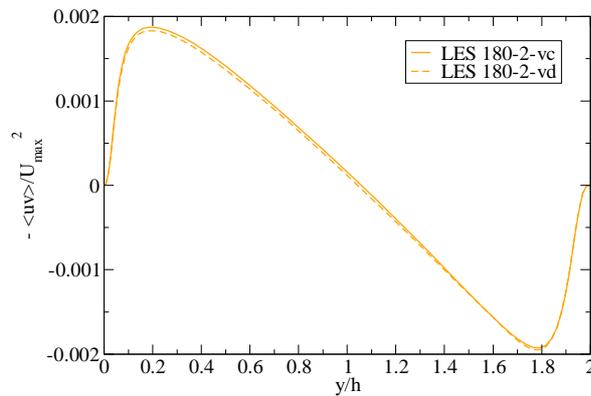


FIG. B.17 – Corrélation $-\langle uv \rangle$

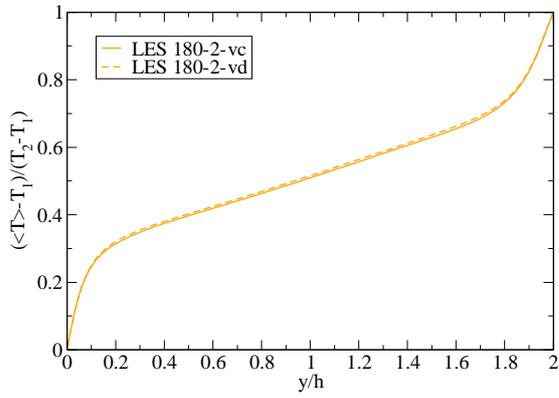


FIG. B.18 – Température moyenne

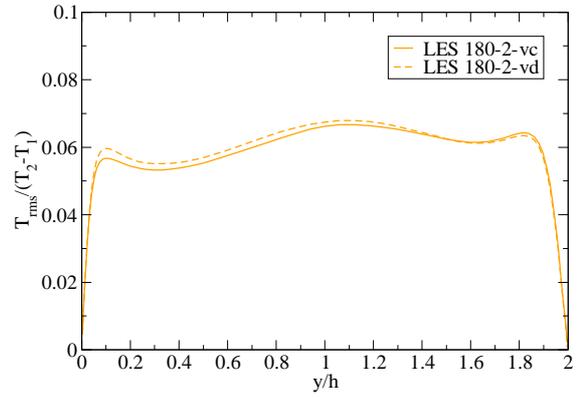


FIG. B.19 – Écart-type de la température

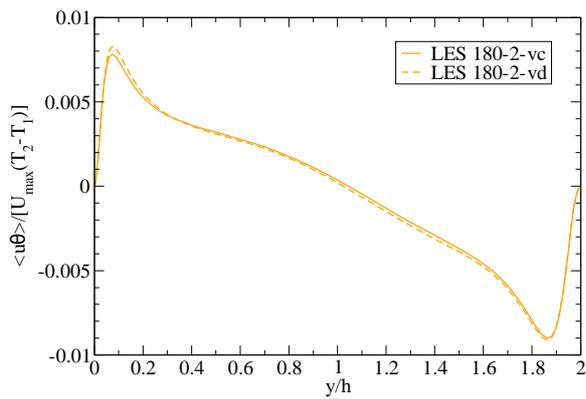


FIG. B.20 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

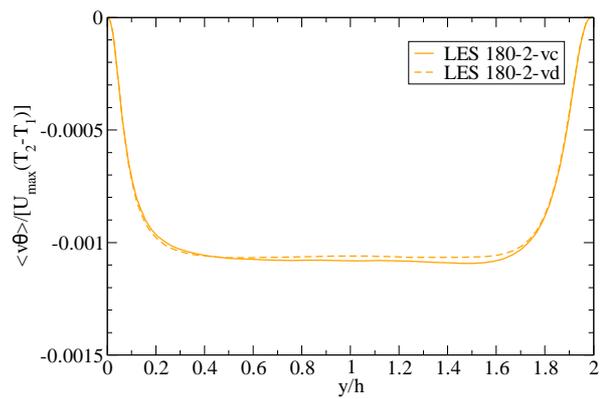


FIG. B.21 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

B.2.2 Adimensionnement basé sur U_T^* , T_T^* et y^*

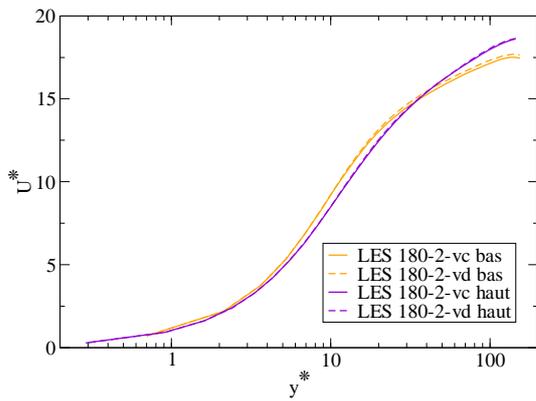


FIG. B.22 – Vitesse moyenne longitudinale

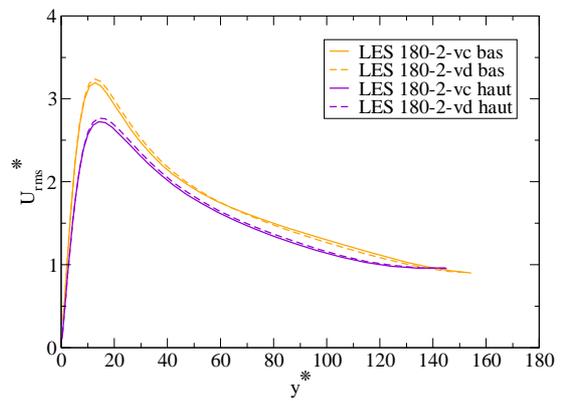


FIG. B.23 – Écart-type de la vitesse longitudinale

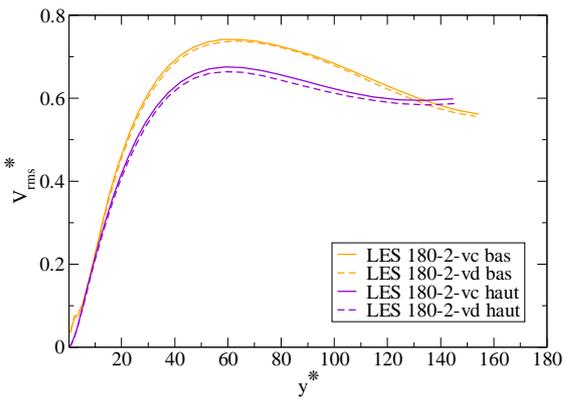


FIG. B.24 – Écart-type de la vitesse verticale

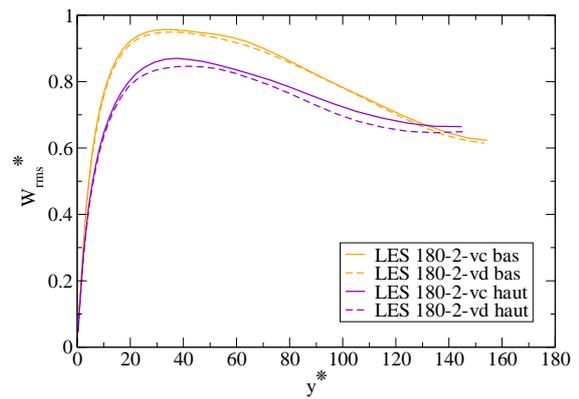


FIG. B.25 – Écart-type de la vitesse transverse

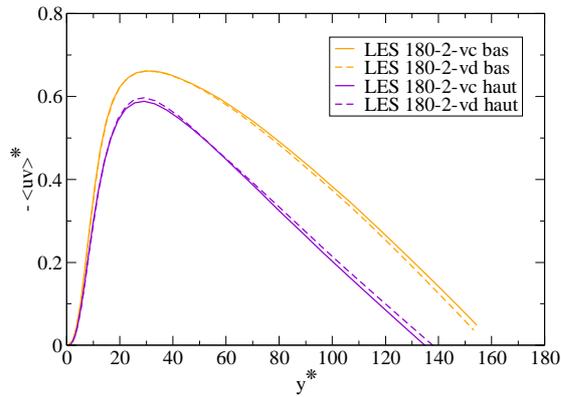


FIG. B.26 – Corrélation – $\langle uv \rangle$

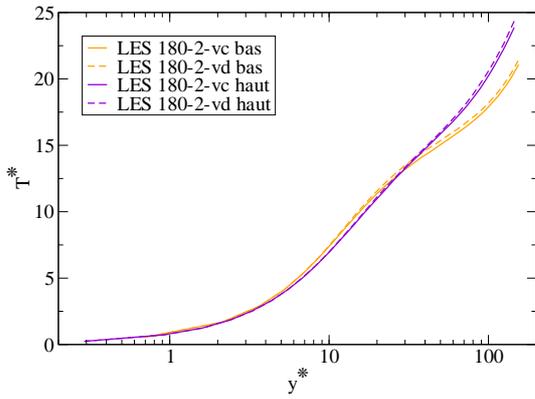


FIG. B.27 – Température moyenne

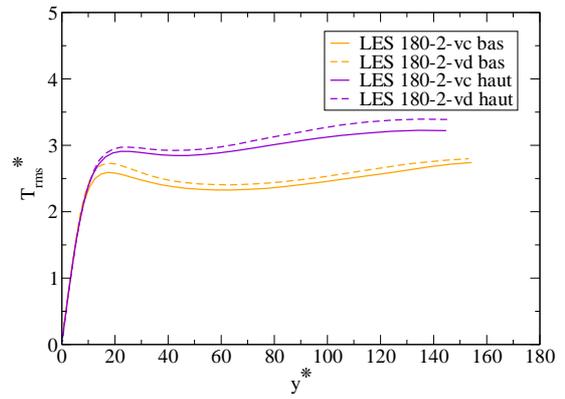


FIG. B.28 – Écart-type de la température

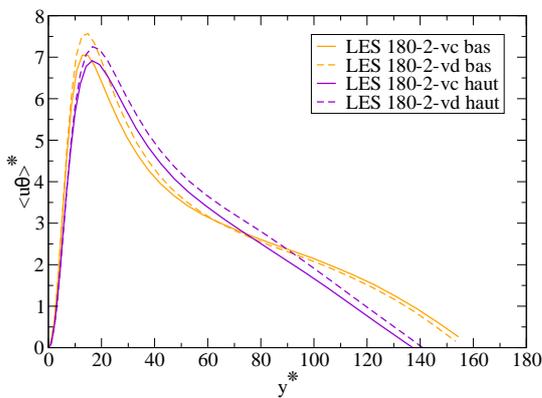


FIG. B.29 – Corrélation $\langle u\theta \rangle$

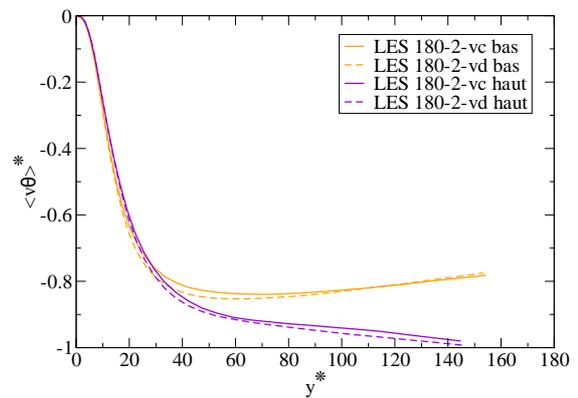


FIG. B.30 – Corrélation $\langle v\theta \rangle$

Résumé

L'objectif de cette étude est d'analyser l'impact d'un gradient thermique sur un écoulement turbulent subsonique dans un canal plan bi-périodique avec températures pariétales imposées pour des nombres de Reynolds de frottement de 180 et 395. Pour ce type d'écoulement, caractérisé par des variations de température qui peuvent être importantes et donc des variations significatives des propriétés du fluide, nous utilisons la Simulation des Grandes Échelles avec un algorithme basé sur les équations bas Mach. Dans un premier temps, nous comparons certains de nos résultats avec des données de simulations numériques directes et validons ainsi les choix effectués. Nous étudions ensuite l'influence des variations de la conductivité et de la viscosité et montrons que celle-ci est négligeable pour un cas faiblement anisotherme mais pas lorsque l'anisothermie est forte. La question de la modélisation sous-maille thermique est ensuite abordée. Nos résultats ne montrent pas de différence significative entre les modèles à nombre de Prandtl sous-maille constant et dynamique. Nous analysons l'effet d'une augmentation du rapport de températures et observons une perte de symétrie des profils. Le mécanisme physique sous-jacent est expliqué. Enfin, nous employons l'adimensionnement semi-local et la transformation de Van Driest et observons alors un rapprochement des profils obtenus à faible et à fort ratios de températures.

Mots clés : simulation des grandes échelles thermique, canal plan, écoulement turbulent anisotherme, propriétés variables, modélisation sous-maille thermique, équations bas Mach, Trio_U.

Abstract

The aim of this work is to study the impact of thermal gradients on a turbulent channel flow with imposed wall temperatures and friction Reynolds numbers of 180 and 395. In this configuration, temperature variations can be strong and induce significant variations of the fluid properties. We consider the low Mach number equations and carry out large eddy simulations. We first validate our simulations thanks to comparisons of some of our LES results with DNS data. Then, we investigate the influence of the variations of the conductivity and the viscosity and show that we can assume these properties constant only for weak temperature gradients. We also study the thermal subgrid-scale modelling and find no difference when the subgrid-scale Prandtl number is taken constant or dynamically calculated. The analysis of the effects of strongly increasing the temperature ratio mainly shows a dissymetry of the profiles. The physical mechanism responsible of these modifications is explained. Finally, we use semi-local scaling and the Van Driest transformation and we show that they lead to a better correspondence of the low and high temperature ratios profiles.

Keywords : thermal large-eddy simulation, plane channel, anisothermal turbulent flow, variable properties, thermal subgrid-scale modelling, low Mach number equations, Trio_U.