



THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité

Analyse Numérique

présentée par

Sébastien HEIB

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

Nouvelles discrétisations non structurées
pour des écoulements de fluides
à incompressibilité renforcée

soutenue le 15 janvier 2003

devant le jury composé de :

M. F. HECHT	Président
M. J.M. THOMAS	Rapporteur
M. R. TOUZANI	Rapporteur
M. O. PIRONNEAU	Directeur de thèse
M. C. BERNARDI	Examinateur
M. G. FAUCHET	Encadrant

BUPMC MR P6/P7



D

314 140443 2

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité

Analyse Numérique

présentée par

Sébastien HEIB

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

Nouvelles discrétisations non structurées
pour des écoulements de fluides
à incompressibilité renforcée

soutenue le 15 janvier 2003

devant le jury composé de :

M. F. HECHT	Président
M. J.M. THOMAS	Rapporteur
M. R. TOUZANI	Rapporteur
M. O. PIRONNEAU	Directeur de thèse
M. C. BERNARDI	Examinateur
M. G. FAUCHET	Encadrant

A Danièle et Jean-Claude, mes parents,
A Séverine, ma petite sœur,
A Caroline,

pour leurs encouragements,
et leur soutien . . .

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Développements en Thermohydraulique Avancée du CEA Grenoble et au sein du Laboratoire Jacques Louis Lions de l'université Pierre et Marie Curie. Je remercie Monsieur Christian Chauliac de m'avoir accueilli au sein du Service d'Etudes et de Modélisation en Thermohydraulique ainsi que Monsieur François de Crecy, chef du Laboratoire de Thermohydraulique Avancée et Monsieur Fabien Boulanger, chef du Laboratoire de Développements en Thermohydraulique Avancée, de m'avoir accueilli dans leur laboratoire.

Je remercie Monsieur Olivier Pironneau, directeur de thèse, pour avoir supervisé cette thèse depuis la capitale. De par sa hauteur de vue, il a souvent contribué à relancer mon travail.

Je remercie également les membres du Jury pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail, en particulier Messieurs Jean-Marie Thomas et Rachid Touzani, rapporteurs, ainsi que Madame Christine Bernardi et Monsieur Frédéric Hecht, Président du Jury.

Je remercie l'ensemble des personnes que j'ai côtoyé durant ces trois années, qui ont fait de cette expérience professionnelle une expérience humaine très enrichissante. En particulier, je tiens à remercier les membres de l'équipe Trio U/PRICELES, pour leur aide, leur patience, leur gentillesse, leur sympathie et la bonne ambiance qu'ils ont apportée au sein de l'équipe : Monsieur Christophe Calvin, Monsieur Ulrich Bieder, Monsieur Gauthier Fauchet, Monsieur Bernard Menant et Monsieur Emile Garré, ainsi que les thésards et stagiaires rencontrés : Mademoiselle Caroline Ackermann, Mademoiselle Sylvie Betin, Monsieur Christophe Duquennoy, Monsieur Arnaud Caillaux, Monsieur Guillaume Dehais. Merci également à Mesdames Françoise Gignoux et Marinette Wurstein pour leur soutien constant. Un merci général à mes amis aitapiens pour cette belle aventure.

Je tiens également à remercier tout particulièrement Madame Olga Cueto sans qui cette thèse n'aurait tout simplement pas été. Enfin, je remercie chaleureusement Monsieur Philippe Emonot, sans qui cette thèse n'aurait pas été *cette* thèse, pour ses idées (même celles du vendredi soir), ses leçons de Go et sa vision des sciences.

Les derniers remerciements (dans le cadre de ma thèse ...) vont aux membres de ma famille, qui m'ont toujours soutenu : à mes parents et à ma sœur qui ont jour après jour fait de moi ce que je suis, amené jusqu'ici, et à Caroline, pour son amour et ses encouragements constants.

Table des matières

Introduction	9
1 Modélisation Physique et Mathématique	11
1.1 Écriture des équations de conservation	11
1.2 Équations de Navier-Stokes	15
1.3 Le problème de Stokes	16
1.4 Étude d'un problème abstrait	17
1.5 Retour sur le problème de Stokes continu	19
2 Discrétisation du problème de Stokes	23
2.1 Mode parasite sur la pression	23
2.2 Le problème discret sous forme abstraite	24
2.3 Application à l'élément de Crouzeix Raviart	29
2.4 Formulation VEF	31
2.5 Formulation VEF du problème de Stokes	31
2.6 Problèmes liés à l'élément de Crouzeix-Raviart	34
3 Nouvelles Discrétisations	37
3.1 Présentation du nouvel élément	37
3.2 Formulation EF et résultats	38
3.3 Description du système VEF	41
3.4 Comparaison des deux formulations	43
3.5 Résultats de convergence	46
3.6 Discussions	47
3.7 Résultats numériques	50
4 Amélioration des nouvelles discrétisations	53
4.1 Problème lié à la bulle	53
4.2 Une nouvelle discrétisation $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0$	56
4.3 Condition inf-sup non optimale pour le $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$	63
4.4 Consistance de l'espace V_h	65
4.5 Modification de l'élément de Taylor Hood	70
5 Extension au problème de Navier-Stokes	73
5.1 Equations de Navier Stokes avec turbulence	73
5.2 Aspects diffusifs	77
5.3 Aspects Convectifs	85
5.4 Bilan de l'extension au problème de Navier-Stokes	90

6 Résultats numériques	91
6.1 Cavité à paroi défilante	91
6.2 Ecoulement autour d'un obstacle	93
6.3 Exemples d'utilisation pour des calculs plus complexes	97
6.4 Bilan des tests numériques	100
7 Conclusions et Perspectives	103
A Calcul des différentes formes	109
A.1 Notations	109
A.2 Calculs des formes gradient et divergence	109

Introduction

De nos jours, beaucoup de codes de simulation numérique d'écoulements de fluides incompressibles utilisent encore des maillages structurés. Les raisons de cette affection sont multiples :

- Maillages aisés à construire dans le cas de géométries simples.
- Méthodes numériques simples à mettre en oeuvre et néanmoins très robustes.

Cependant, les simulations sur maillages structurés présentent des limitations. Les possibilités de zoom locaux, ou de raffinements locaux, sont assez rares et souvent complexes à mettre en oeuvre. L'utilisation de maillages structurés "adaptés" en géométrie complexe est donc assez peu fréquente. Les maillages non structurés à base de triangle en dimension 2 et de tétraèdre en dimension 3 se prêtent, quant à eux, très bien aux problèmes de maillage posés par les géométries complexes et aux raffinements locaux. La difficulté des simulations sur ce type de maillage réside dans le choix de méthodes numériques, stables et robustes, à l'image de celles utilisées en maillages structurés, pour un coût de calcul raisonnable.

Au cours de ce travail, nous nous intéressons à la discrétisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes modélisant l'écoulement de fluides incompressibles sur des maillages non structurés en dimension 2 ou 3. Nous utilisons des maillages composés de triangle en dimension 2 et de tétraèdres en dimension 3. Les développements effectués et les calculs menés durant ces travaux de thèse se font avec le code PRICELES (Plateforme Rapide Industrielle Cea Edf pour la LES (Large Eddy Simulation se traduisant en français par Simulation des Grandes Echelles) développé en collaboration par le CEA (Commissariat à l'Energie Atomique) et des laboratoires universitaires (LMFA-ECL Lyon, LEGI-INPG Grenoble, Laboratoire JLL - Université Pierre et Marie Curie Paris VI, UMIST Manchester). C'est un code à vocation industrielle qui présente l'intérêt de pouvoir réaliser des simulations sur des maillages structurés ou non structurés. La méthode de résolution utilisée est une méthode de Volumes Finis. Nous distinguons deux méthodes sur les deux types de maillage :

- Sur maillages structurés, la méthode de résolution se décline en une méthode de Volumes Différences Finies (VDF). Les équations sont discrétisées et résolues sur des volumes de contrôle définies à l'aide du maillage et les différents flux et autres opérateurs de différentiation sont calculés au moyen de Différences Finies.
- Sur maillages non structurés, la méthode de résolution se décline en une méthode de Volumes Elements Finis (VEF). Les équations sont également discrétisées et résolues sur des volumes de contrôle définies à l'aide du maillage mais les flux et les opérations de différentiation sont calculés au moyen de méthodes d'éléments finis. Nous verrons que pour tous les éléments finis utilisés dans le code PRICELES, cette méthode de VEF peut être vue comme une méthode d'Eléments Finis.

L'élément fini présent au début de la thèse a révélé plusieurs défauts. Partant de ce constat, nous avons proposé d'améliorer cette discrétisation en apportant des modifications à l'élément. Ce travail de thèse propose donc des améliorations à l'élément existant mène une analyse théorique des nouveaux éléments introduits. Parallèlement aux ana-

lyses théoriques, les nouvelles discrétisations sont implémentées pour pouvoir les tester numériquement et confirmer ainsi les analyses théoriques.

Plan du mémoire Le premier chapitre présente la modélisation physique et mathématique que nous utilisons au cours de ce travail. A cet effet, nous établissons les équations auxquelles nous nous intéressons, à savoir les équations de Stokes et de Navier-Stokes. Le cadre théorique de l'analyse mathématique y est également présenté durant ce chapitre.

Le deuxième chapitre traitera plus particulièrement de la discrétisation des équations de Stokes. Dans un premier, nous utilisons le formalisme présenté au chapitre précédent, puis nous présentons plus en détail la méthode de résolution de VEF, en nous appuyant sur l'élément fini initialement présent dans le code PRICELES. Nous concluons ce chapitre en évoquant les différents défauts de cet élément fini.

Le troisième chapitre présente une première tentative d'amélioration de cet élément fini. Elle conduit à la proposition d'un nouvel élément fini que nous présentons en détail. Ceci est fait tout d'abord dans le cadre EF, puis dans le cadre VEF. Nous montrons à cette occasion que la méthode des VEF basée sur ce nouvel élément peut être vue comme une méthode purement EF, et réciproquement, la méthode EF basée sur cet élément peut être vue comme une méthode de VEF. Nous présentons l'analyse théorique de ce nouvel élément et nous donnons les différents résultats de convergence. En fin de chapitre, des résultats numériques viendront appuyer les résultats des analyses, en particulier que la nouvelle discrétisation ne nous donne pas entière satisfaction.

L'analyse du problème rencontré avec la nouvelle discrétisation nous mène à la modifier légèrement. Cette modification est présentée au chapitre 4. Nous procédons, pour montrer l'équivalence des formulations EF et VEF, comme au chapitre précédent. L'analyse théorique de cette nouvelle discrétisation nous donne cette fois tous les résultats de convergence que nous escomptions. Dans certains cas particuliers, nous montrons même que cette discrétisation présente des propriétés de super convergence. Quelques résultats numériques viennent illustrer les résultats théoriques obtenus. Enfin nous concluons en présentant une extension de la méthode employée pour améliorer la discrétisation initiale de PRICELES, à un autre élément fini.

Nous abordons dans le chapitre 5, l'étude et la discrétisation des équations de Navier-Stokes. Nous verrons que l'étude des équations de Navier-Stokes filtrées, utilisées dans le cadre de Simulation des Grandes Echelles, nous amène à porter une attention toute particulière à la discrétisation des termes diffusifs. Ensuite, c'est aux termes convectifs que nous nous intéressons. Dans un premier temps, nous comparerons les effets des termes convectifs dans les deux discrétisations présentes dans PRICELES, la discrétisation initiale et l'amélioration présentée au chapitre 4. Dans un second temps, nous présentons et analysons brièvement la méthode que nous avons mis en oeuvre. Enfin, nous verrons que la prise en compte de conditions aux limites de type Neumann avec la nouvelle discrétisation présente des propriétés intéressantes.

Le chapitre 6 présente les différentes simulations réalisées. Trois calculs sont présentés et analysés. Les deux premiers nous permettent d'évaluer le comportement de la discrétisation initiale et de la nouvelle discrétisation du code PRICELES.

Nous conclurons ce travail en faisant le bilan de la nouvelle discrétisation proposée et en exhibant certains liens entre cette dernière et d'autres méthodes de résolution.

Chapitre 1

Modélisation Physique et Mathématique

A partir des lois de conservation que nous rappelons dans la première section (1.1), nous établissons les équations des problèmes auxquelles nous nous intéressons, à savoir, les problèmes de Stokes et de Navier-Stokes (1.2-1.3). Nous donnons ensuite un aperçu de l'analyse du problème de Stokes dans le cadre continu (1.4-1.5). A cet effet, nous établissons la formulation abstraite du problème de Stokes et nous introduisons la condition inf-sup à laquelle nous nous intéresserons dans les chapitres suivants.

Pour plus de détails concernant cette section, le lecteur pourra se référer à [Duv90].

1.1 Écriture des équations de conservation

1.1.1 Lois de conservation

1.1.1.1 Conservation de la masse

L'équation de continuité exprime le principe fondamental de conservation de la masse que doit vérifier tout écoulement. Soit $\rho(\vec{x}, t)$ la masse volumique au point \vec{x} , à l'instant t , la masse d'un domaine $\omega_m(t)$ s'écrit :

$$M(t) = \int_{\omega_m(t)} \rho(\vec{x}, t) dV$$

Le principe de conservation de la masse impose :

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0$$

Ceci s'écrit d'après la formule de dérivation d'une intégrale dépendant de la quantité dérivée :

$$\int_{\omega_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\gamma_m(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (1.1)$$

où $\gamma_m(t) = \partial\omega_m(t)$ est le bord de $\omega_m(t)$.

Nous introduisons la formule d'Ostrogradski que nous utiliserons ensuite pour écrire la conservation de la masse sous forme d'équations aux dérivées partielles :

Théorème 1.1.1 (Ostrogradski). *Soient V un volume et S la surface l'entourant. L'intégrale de la divergence d'une fonction F sur le volume V est égale à l'intégrale sur la surface S de la projection de la fonction F sur la surface S . Ce que l'on écrit :*

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot F dV = \int_S (F \cdot \vec{n}) ds \quad (1.2)$$

En appliquant cette formule à l'équation (1.1), nous obtenons :

$$\int_{\omega_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\omega_m(t)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0$$

Ceci étant vrai pour tout domaine $\omega_m(t)$, le principe de conservation de la masse sous forme d'équation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.3)$$

où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée particulaire définie par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.4)$$

1.1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

La loi fondamentale de la dynamique dit qu'il existe une chronologie (dite galiléenne) et un référentiel (dit galiléen) tels que, à tout instant et pour toute partie $\omega_{qdm}(t)$ d'un système, la dérivée particulaire du torseur des quantités de mouvement est égale au torseur des efforts extérieurs. Notons $[K]$ le torseur des quantités de mouvement d'un domaine $\omega_{qdm}(t)$, constitué de la quantité de mouvement \vec{K} et de son moment $\vec{\mathcal{M}}_0(K)$:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{u} dV \\ \vec{\mathcal{M}}_0(K) &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \vec{x} \wedge \rho \vec{u} dV \end{aligned}$$

et $[F]$ le torseur des forces extérieures constitué de la force \vec{F} et de son moment $\vec{\mathcal{M}}_0(F)$:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{f}_V dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \vec{f}_S ds \\ \vec{\mathcal{M}}_0(F) &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{x} \wedge \vec{f}_V dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \vec{x} \wedge \vec{f}_S ds \end{aligned}$$

$\rho \vec{f}_V$ est une densité de force volumique, \vec{f}_S est une densité de force surfacique.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d[K]}{dt} = [F]$$

En détaillant alors l'écriture de l'équation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} ds &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{f}_V dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \vec{f}_S ds \\ \int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \cdot \vec{n} ds &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{x} \wedge \vec{f}_V dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \vec{x} \wedge \vec{f}_S ds \end{aligned}$$

L'hypothèse de Cauchy nous donne :

$$\vec{f}_S = \boldsymbol{\sigma}(\vec{n})$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est appelé le tenseur des contraintes.

Nous nous intéressons à la seconde équation :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \, dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \, dV \\ &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \vec{x} \wedge \rho \vec{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right) \, dV \\ &\quad + \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \right) \, dV \end{aligned}$$

Le premier terme est nul dès que l'équation de conservation de la masse est satisfaite.

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \frac{d}{dt} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \, dV &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \left[\frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{u} + \vec{x} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} \right] \, dV \\ &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{x} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} \, dV \end{aligned}$$

puisque pour tout champ de vecteurs \vec{v} , $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Après ces simplifications, la seconde équation s'écrit donc :

$$\int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{x} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} \, dV = \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{x} \wedge \vec{f}_V \, dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \vec{x} \wedge \sigma \vec{n} \, ds$$

Pour continuer, nous introduisons le tenseur antisymétrique ϵ_{ijk} vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\epsilon_{123} = 1$
- $\epsilon_{iik} = 0$

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} peut alors s'exprimer à l'aide de ce tenseur ϵ_{ijk} :

$$\left(\vec{A} \wedge \vec{B} \right)_i = \epsilon_{ijk} \vec{A}_j \vec{B}_k$$

En utilisant cette écriture pour le produit vectoriel, la seconde équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{du_k}{dt} \, dV &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} x_j f_k \, dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l \, ds \\ \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{du_k}{dt} \, dV &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} x_j f_k \, dV + \int_{\omega_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} \frac{\partial \sigma_{kl} x_j}{\partial x_l} \, dV \\ \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \epsilon_{ijk} x_j \frac{du_k}{dt} \, dV &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} x_j f_k \, dV + \int_{\omega_{qdm}(t)} \left[\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + \epsilon_{ijk} \sigma_{kl} \delta_{jl} \right] \, dV \\ \int_{\omega_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} x_j \left[\rho \frac{du_k}{dt} - f_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right] \, dV &= \int_{\omega_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \, dV \end{aligned}$$

Nous voyons apparaître entre les crochets du premier terme, la première équation de conservation de la quantité de mouvement. Par conséquent, nous obtenons :

$$\forall \omega_{qdm}(t), \int_{\omega_{qdm}(t)} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \, dV = 0$$

ce qui est équivalent à affirmer que σ est un tenseur symétrique.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc sous forme conservative :

$$\int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} \, dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{f}_V \, dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \sigma \cdot \vec{n} \, ds \quad (1.5)$$

avec un tenseur des contraintes σ symétrique.

Pour obtenir le principe de conservation de la quantité de mouvement sous forme d'une équation aux dérivées partielles, nous appliquons une nouvelle fois la formule d'Ostrogradski (1.2) aux intégrales sur $\gamma_{qdm}(t)$:

$$\int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{\omega_{qdm}(t)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV = \int_{\omega_{qdm}(t)} \rho \vec{f}_V dV + \int_{\omega_{qdm}(t)} \vec{\nabla} \cdot \sigma dV$$

où \otimes désigne le produit tensoriel ($(\vec{u} \otimes \vec{v})_{ij} = u_i v_j$).

Ceci étant vrai pour tout domaine $\omega_{qdm}(t)$, on obtient le principe de conservation de la quantité de mouvement sous sa forme d'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{f}_V + \vec{\nabla} \cdot \sigma \quad (1.6)$$

Nous nous limiterons dans notre étude à ces deux équations de conservation. Il faut cependant noter qu'il existe une troisième équation de conservation correspondant au premier principe de la Thermohydraulique, l'équation de conservation de l'énergie.

1.1.2 Lois de comportement

Un fluide est un milieu continu isotrope où la loi de comportement s'exprime par : $\sigma = f(\mathbf{S})$. \mathbf{S} est le tenseur de vitesse des déformations et est défini par

$$\mathbf{S}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\text{grad} \vec{u} + \text{grad} \vec{u}^T).$$

La propriété d'isotropie implique que $\sigma = f_0 \mathbf{I}_d + f_1 \mathbf{S} + f_2 \mathbf{S}^2$ où f_α est une fonction des trois invariants de \mathbf{S} .

1.1.2.1 Fluides incompressibles

Un fluide incompressible est tel que $\text{div} \vec{u} = 0$. La condition d'incompressibilité a pour conséquence que $\frac{d\rho}{dt} = 0$, c'est-à-dire que la masse volumique est constante le long des lignes de courant.

1.1.2.2 Fluides Newtoniens

Un fluide est dit newtonien si σ est de premier ordre en \mathbf{S} . On peut donc en déduire que

- f_0 n'est fonction que du premier invariant de \mathbf{S} (la trace de \mathbf{S} , soit $\text{div} \vec{u}$)
- f_1 est une constante
- f_2 est nul

On en arrive finalement à une expression de σ de la forme :

$$\sigma = -p \mathbf{I}_d + \lambda (\text{div} \vec{u}) \mathbf{I}_d + 2\mu \mathbf{S}(\vec{u})$$

Le coefficient μ est la viscosité dynamique du fluide et nous la supposons constante. Dans le cas d'un fluide newtonien incompressible, σ s'écrit :

$$\sigma = -p \mathbf{I}_d + \mu (\text{grad} \vec{u} + \text{grad} \vec{u}^T).$$

Remarque 1. L'équation de conservation de la quantité de mouvement fait intervenir la divergence du tenseur des contraintes. En notant que

$$\text{div} \vec{\nabla} \vec{u}^T = \vec{\nabla} (\text{div} \vec{u})$$

nous obtenons donc dans le cas d'un fluide incompressible :

$$\text{div} \sigma = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}$$

1.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes modélisent l'écoulement d'un fluide newtonien visqueux incompressible. Pour les établir, il suffit donc d'écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en y incluant les lois de comportement d'un fluide newtonien visqueux incompressible. Pour connaître l'écoulement d'un tel fluide, il nous faut donc trouver un champ de vitesse \vec{u} et un champ de pression p solution des équations de Navier-Stokes.

Comme nous l'avons dit précédemment, la conservation de la masse pour un fluide incompressible revient à dire que la masse volumique est constante le long des lignes de courant. Nous ferons une approximation supplémentaire qui est de supposer ρ constant dans la totalité du domaine. L'équation de conservation de la masse est alors trivialement vérifiée. Ainsi, afin de respecter la condition d'incompressibilité, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\int_{\gamma_m(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (1.7)$$

ou

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1.8)$$

Reprenons maintenant la première équation de conservation de la quantité de mouvement (1.6) sous sa seconde forme en tenant compte des propriétés d'un fluide newtonien visqueux incompressible :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{f}_V - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}$$

Intéressons nous plus particulièrement aux deux termes de gauche de l'équation précédente, il est possible en tenant compte de l'équation de conservation de la masse d'obtenir une autre forme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{u} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) \vec{u} + \rho \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \vec{u} \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) \right) \vec{u} + \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \vec{u} \right) \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite n'est autre que l'équation de conservation de la masse. Par conséquent, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \vec{u} \right) = \rho \vec{f}_V - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}$$

Compte tenu de l'hypothèse faite sur la constance de ρ , nous obtenons en divisant la précédente équation par ρ :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \vec{u} = \vec{f}_V - \vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{u}$$

où nous avons introduit la viscosité cinématique ν définie par $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ et P définie par $P = \frac{p}{\rho}$. Dans la suite du manuscrit et par souci de simplicité d'écriture, nous écrirons $p = P$. Cette dernière équation peut également être écrite sous sa forme conservative, en utilisant à nouveau la condition d'incompressibilité et en remarquant que :

$$\operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) = (\operatorname{div} \vec{u}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u},$$

nous obtenons alors :

$$\int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} (\vec{u} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega_{qdm}(t)} \vec{f}_V dV - \int_{\gamma_{qdm}(t)} p \vec{n} ds + \nu \int_{\gamma_{qdm}(t)} \mathbf{grad} \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

Afin de récapituler ces différentes équations, nous donnons ici une expression des équations de Navier-Stokes auxquelles nous nous intéresserons sous la forme conservative :

$$\int_{\omega_{qdm}(t)} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{\gamma_{qdm}(t)} \vec{u} \otimes \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \tag{1.9}$$

$$\int_{\omega_{qdm}(t)} \vec{f}_V dV - \int_{\gamma_{qdm}(t)} p \vec{n} ds + \nu \int_{\gamma_{qdm}(t)} \mathbf{grad} \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

$$\int_{\gamma_m(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0 \tag{1.10}$$

et sous la forme d'Équations aux Dérivées Partielles :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{f}_V - \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} \tag{1.11}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \tag{1.12}$$

1.3 Le problème de Stokes

L'analyse des équations de Navier-Stokes n'est pas chose simple, principalement du fait du terme de convection ($\vec{u} \cdot \mathbf{grad} \vec{u}$) non linéaire. Dans la suite de ce travail, nous allons utiliser des méthodes d'*Éléments Finis* (EF) ou de *Volumes Éléments Finis* (VEF) pour résoudre les équations de Navier-Stokes. L'étude de ces méthodes et en particulier de l'élément fini sur lequel elles sont basées se fait alors sur un problème plus simple, linéaire où le terme de convection est négligé. Ceci revient à faire l'approximation que le fluide est très visqueux ou que l'écoulement est à basse vitesse. Nous nous plaçons également dans le cas d'un écoulement stationnaire, le terme d'évolution temporelle des équations de Navier-Stokes est alors lui aussi négligé. Le problème de Stokes s'écrit :

$$-\nu \int_{\gamma_{qdm}(t)} \mathbf{grad} \vec{u} \cdot \vec{n} ds + \int_{\gamma_{qdm}(t)} p \vec{n} ds = \int_{\omega_{qdm}(t)} \vec{f}_V dV \quad \forall \omega_{qdm}(t) \subset \Omega \tag{1.13}$$

$$\int_{\gamma_m(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad \forall \gamma_m(t) = \partial \omega_m(t) \text{ où } \omega_m(t) \subset \Omega \tag{1.14}$$

sous forme conservative, ou bien

$$-\nu \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{1.15}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.16}$$

sous forme d'EDP.

Les équations de Stokes, bien que linéaires, demandent pourtant une attention particulière pour satisfaire la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Celle ci apparaît en fait comme une contrainte à respecter pour résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Le caractère non évolutif de l'équation de conservation de la masse entraîne que l'inconnue de pression ne possède pas d'équation d'évolution temporelle. Pour obtenir une équation permettant de trouver une solution en pression, il faut "plonger" l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans l'espace des vitesses à divergence nulle.

En appliquant l'opérateur divergence sur la première équation, nous obtenons l'équation de Poisson que la pression p doit satisfaire :

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_v \quad (1.17)$$

1.4 Étude d'un problème abstrait

Cette section rappelle des résultats théoriques classiques d'analyse numérique concernant l'étude d'un problème abstrait. Pour plus de détails concernant cette section, le lecteur pourra se référer à [GR79].

Soient X , M , deux espaces de Hilbert. Les produits scalaires définies sur ces espaces respectifs sont notés $(\cdot; \cdot)_X$ et $(\cdot; \cdot)_M$. Les normes associées à ces produits scalaires sont notées $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_M$. Soient a , b deux formes bilinéaires définies respectivement sur $X \times X$ et $X \times M$. Soient f et g deux éléments respectifs de X' et M' . X' (respectivement M') est l'espace dual de l'espace X (respectivement M), c'est à dire que c'est l'espace des formes linéaires définies sur X (respectivement M). Le produit entre un élément d'un espace de Hilbert et un élément de son dual est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Nous considérons le problème suivant :

Trouver (u, p) dans $X \times M$ tel que :

$$\begin{cases} \forall v \in X, & a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle \\ \forall q \in M, & b(u, q) = \langle g, q \rangle \end{cases} \quad (1.18)$$

et nous nous intéressons aux conditions d'existence et d'unicité d'une solution à ce problème. Nous introduisons un sous espace de X , V défini par :

$$V = \{v \in X / \forall q \in M, b(v, q) = 0\} \quad (1.19)$$

Nous supposons dans un premier temps que $g = 0$. Du problème initial (1.18), nous pouvons déduire le problème suivant :

$$\begin{cases} \forall v \in V, & a(u, v) = \langle f, v \rangle \\ u \in V \end{cases} \quad (1.20)$$

Nous faisons les trois hypothèses suivantes :

- b est une forme bilinéaire continue sur $X \times M$. Par conséquent, V est un sous espace fermé d'un espace de Hilbert donc V est un espace de Hilbert.
- a est une forme bilinéaire continue sur $X \times X$.
- a est elliptique sur V : $\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2$

Nous pouvons alors appliquer le lemme de Lax-Milgram.

qui nous donne que pour tout f dans V' , le problème (1.20) admet une unique solution u dans V . De plus, cette solution vérifie

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{X'}$$

Ceci nous assure l'existence et l'unicité d'une solution u au problème (1.20).

Il nous reste alors deux points à aborder :

1. Prendre en compte le cas non homogène où $g \neq 0$.
2. Trouver la solution p du problème (1.18).

Pour aborder ces deux points, il est nécessaire d'introduire la condition de type inf-sup introduite par Babüska-Brezzi ([Bab73],[Bre72]).

Proposition 1.4.1 (Babüska-Brezzi). *Les propriétés 1, 2 et 3 sont équivalentes :*

$$1. \exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{q \in M, q \neq 0} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta.$$

2. *Il existe un isomorphisme B' de M sur V° vérifiant les propriétés suivantes :*

$$b(v, q) = \langle v; B'q \rangle_{X, X'} \quad \forall q \in M, \|q\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|B'q\|_{X'}$$

Le polaire de V , V° , est défini ainsi : $V^\circ = \{h \in X' / \forall v \in V, \langle h, v \rangle = 0\}$.

3. *Il existe un isomorphisme B de V^\perp sur M' vérifiant les propriétés suivantes :*

$$b(v, q) = \langle Bv; q \rangle_{M', M} \quad \forall v \in V^\perp, \|v\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|Bv\|_{M'}$$

L'orthogonal de V , V^\perp , est défini par : $V^\perp = \{v \in X / \forall w \in V, (v, w) = 0\}$

Une démonstration de cette proposition peut être trouvée dans la référence [GR79]. Nous allons voir immédiatement comment est utilisée cette condition inf-sup.

Théorème 1.4.1. *On suppose que :*

1. *La forme $a()$ est bilinéaire continue sur $X \times X$.*
2. *La forme $b()$ est bilinéaire continue sur $X \times M$.*
3. *La propriété d'ellipticité :*

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \text{ avec } \alpha > 0$$

4. *La condition inf-sup :*

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{q \in M, q \neq 0} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta$$

Alors le problème (1.18) admet pour tout $(f; g) \in X' \times M'$ une solution unique $(u; p) \in X \times M$. De plus, cette solution vérifie :

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \left(\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{M'} \right) \quad (1.21)$$

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta} \left(\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\alpha} \left(\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{M'} \right) \right) \quad (1.22)$$

Démonstration Considérons le problème non homogène (1.18). Soit $g \in M'$, la proposition de Babüska-Brezzi nous permet d'écrire qu'il existe un unique $u_g \in V^\perp$ vérifiant :

$$\begin{aligned} Bu_g &= g \text{ et } \|u_g\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{M'} \\ \forall q \in M, \langle Bu_g; q \rangle &= \langle g; q \rangle \end{aligned}$$

Posons $u_0 = u - u_g$, le problème s'écrit alors :

Trouver u_0 dans V tel que :

$$\forall v \in V, a(u_0, v) = \langle f, v \rangle - a(u_g, v)$$

On retrouve un problème de type (1.20). Le lemme de Lax-Milgram nous indique que ce problème possède une solution unique u_0 dans V vérifiant :

$$\begin{aligned}\alpha \|u_0\|_X^2 &\leq a(u_0; u_0) = \langle f; u_0 \rangle - a(u_g; u_0) \\ \alpha \|u_0\|_X^2 &\leq \|f\|_{X'} \|u_0\|_X + \|a\| \|u_g\|_X \|u_0\|_X \\ \|u_0\|_X &\leq \frac{1}{\alpha} (\|f\|_{X'} + \|a\| \|u_g\|_X)\end{aligned}$$

Or, nous avons $u = u_0 + u_g$. Par conséquent, nous avons obtenu l'existence et l'unicité d'une solution u au problème (1.18).

Examinons maintenant le problème à résoudre pour la pression. Ce problème s'écrit :

$$\forall v \in X, b(v, p) = \langle f; v \rangle - a(u, v)$$

On définit F forme linéaire sur X , de la façon suivante :

$$\forall v \in X, \langle F; v \rangle = \langle f; v \rangle - a(u, v)$$

On remarque que :

$$\forall v \in V, \langle F; v \rangle = 0$$

donc F est un élément du polaire de V , ($F \in V^\circ$). La proposition de Babuška-Brezzi nous dit qu'il existe un isomorphisme B' de M sur V° , donc

$$\exists! p \in M, B'p = F$$

ce qui s'écrit :

$$\exists! p \in M, \forall v \in X, b(v; p) = \langle f; v \rangle - a(u; v)$$

De plus, on a :

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|F\|_{X'}$$

Or

$$\|F\|_{X'} \leq \|f\|_{X'} + \|a\| \|u\|_X$$

Ce qui, combiné avec la majoration précédente, nous donne la majoration escomptée et termine la démonstration du théorème.

1.5 Retour sur le problème de Stokes continu

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert borné à frontière Lipschitzienne. Nous rappelons les équations du problème de Stokes continu auxquelles nous avons rajouté des conditions aux limites de type Dirichlet homogène :

$$-\nu \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.23a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.23b)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \quad (1.23c)$$

Nous introduisons les espaces fonctionnels et les formes bilinéaires suivantes :

- $L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} p \, dx = 0 \right\}$ le sous espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle.

- $H^1(\Omega)^d = \left\{ v \in L^2(\Omega)^d / \vec{\nabla} v \in L^2(\Omega)^d \right\}$: le sous espace des fonctions de $L^2(\Omega)^d$ dont les dérivées premières sont dans $L^2(\Omega)$.

- $H_0^1(\Omega)^d$: le sous espace des fonctions de $H^1(\Omega)^d$ à trace nulle sur $\Gamma = \partial\Omega$.
- Les formes bilinéaires $a(.,.)$ et $b(.,.)$ définies respectivement sur $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)^d$ et $H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ par :
 - $a(u, v) = \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} u : \mathbf{grad} v \, dx$
 - $b(v, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} v \, dx$

En multipliant l'équation (1.23a) par une fonction v de $H_0^1(\Omega)^d$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons :

$$\int_{\Omega} -\nu \Delta u \, v \, dV + \int_{\Omega} \vec{\nabla} p \, v \, dV = \int_{\Omega} f \cdot v \, dV$$

$$\int_{\Omega} \nu \mathbf{grad} u : \mathbf{grad} v \, dV + \int_{\Omega} \vec{\nabla} p \, v \, dV = \int_{\Omega} f \cdot v \, dV$$

après une intégration par parties sur le premier terme de l'équation. Intéressons nous maintenant au second terme de cette équation. La formule de Stokes s'écrit :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)^d, \forall p \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} v \cdot \vec{\nabla} p \, dV = - \int_{\Omega} \operatorname{div} v \, p \, dV$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à support compact dans Ω .

En utilisant la propriété de densité de $\mathcal{D}(\Omega)^d$ dans $H_0^1(\Omega)^d$, cette relation est valide pour v dans $H_0^1(\Omega)$ et p dans $H^1(\Omega)$. Si la fonction p est "seulement" dans $L^2(\Omega)$, alors nous prenons comme définition :

$$\langle \vec{\nabla} p; v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \stackrel{\text{déf}}{=} - \int_{\Omega} \operatorname{div} v \, p \, dV$$

De même, en multipliant l'équation (1.23b) par une fonction p de $L^2(\Omega)$ et en intégrant sur le domaine Ω , nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v \, p \, dV = 0$$

Avec les notations introduites, la formulation variationnelle du problème de Stokes (1.15) s'écrit sous forme abstraite :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = \langle f; v \rangle, & \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad u \in H_0^1(\Omega)^d \\ b(u, q) = \langle g; q \rangle, & \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad p \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.24)$$

On choisit $X = H_0^1(\Omega)^d$ et $M = L_0^2(\Omega)$.

Le problème de Stokes s'écrit alors comme un problème de type (1.18).

L'espace V du cadre abstrait s'écrit :

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^d / \forall q \in L_0^2(\Omega), b(v; q) = 0 \right\} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega)^d / \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$$

Nous venons d'écrire le problème de Stokes sous la forme d'un problème abstrait de type (1.18). Pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution à ce problème, il suffit donc de se placer dans le cadre du théorème (1.4.1) et d'en vérifier les hypothèses.

Les formes bilinéaires a et b sont clairement continues sur les espaces $H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d$ et $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$. Pour vérifier la condition d'ellipticité de la forme a , nous utilisons une inégalité de type Poincaré que nous rappelons ici :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{0,\Omega} \leq C \|u\|_{1,\Omega} \quad (1.25)$$

Le seul point restant à vérifier est la condition de type inf-sup entre les espaces $H_0^1(\Omega)^d$ et $L_0^2(\Omega)$ pour la forme bilinéaire $b(.,.)$. Le lemme suivant nous donne cette condition.

Lemme 1.5.1. *On a les deux assertions suivantes :*

1. *L'opérateur div est un isomorphisme de V^\perp sur $\frac{L^2(\Omega)}{\mathbb{R}}$*
2. *Le gradient est un isomorphisme de $L_0^2(\Omega)$ sur V°*

Grâce au lemme précédent, nous nous trouvons dans les hypothèses d'application de la proposition (1.4.1) de Babūska-Brezzi , ce qui nous donne la condition inf-sup et assure donc l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Stokes continu.

Chapitre 2

Discrétisation du problème de Stokes

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la discrétisation du problème de Stokes. Nous rappelons d'abord les spécificités numériques du problème de Stokes ainsi que les précautions à prendre pour la discrétisation de ce problème (2.1). Du problème abstrait continu (1.4), nous déduisons la formulation abstraite du problème discret (2.2). A cette occasion, nous distinguons le cas d'une discrétisation conforme de celui d'une discrétisation non conforme. Nous verrons en particulier comment intervient l'erreur de consistance due à la non conformité dans le problème de majoration d'erreur à priori. Nous présentons et détaillons alors la formulation *Éléments Finis* sur le cas de l'élément de Crouzeix Raviart (2.3). Enfin nous présentons brièvement la méthode des *Volumes Éléments Finis* en s'appuyant sur ce même élément (2.4). Nous détaillons alors l'expression des formes bilinéaires dans le cadre des *Volumes Éléments Finis* qui nous servent à faire l'analyse de cette méthode sur le problème de Stokes (2.5). Enfin, nous verrons les problèmes rencontrés avec l'élément de Crouzeix-Raviart (2.6) qui nous ont mené à proposer une nouvelle discrétisation.

2.1 Mode parasite sur la pression

Comme rappelé au chapitre précédent (1.3), le couplage vitesse/pression peut poser des problèmes sous certaines conditions. Ils se traduisent, lors de l'étude du problème discret, par l'apparition de modes parasites sur la pression. Suivant la discrétisation utilisée, le gradient de pression calculé peut ne pas être "vu" par la vitesse. Un exemple de ce type de champ est exhibé sur la figure (2.1). La discrétisation est de type différences finies. Les inconnues de vitesse et de pression sont collocalisés, i.e. que toutes les inconnues se situent au même endroit (sur la figure (2.1), les inconnues sont à chercher sur les noeuds du maillage). Le gradient de pression est calculé par une méthode de type différences finies centrées :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{p(i+1, j) - p(i-1, j)}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{p(i, j+1) - p(i, j-1)}{2\Delta y} \end{aligned}$$

Sur un sommet blanc, l'évaluation du gradient de pression, ne fait intervenir que des sommets de pression noir et est donc nul. De même, sur un sommet noir, l'évaluation du gradient de pression ne fait intervenir que des sommets de pression blanc et il est lui aussi

nul. Ce champ de pression présente donc la particularité d'avoir **un gradient calculé nul**, sans pour autant être constant. Ceci est la définition d'un mode parasite sur la pression.

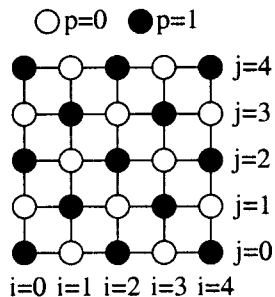


FIG. 2.1 – Mode parasite sur la pression en différences finies centrées

En différences finies et en volumes différences finies, l'utilisation de maillages entrelacés, comme pour la méthode Marker And Cell ([HW65]), permet d'éviter ce genre de désagrément. En éléments finis ou en volumes éléments finis, pour qu'il en soit de même, les espaces de vitesse et de pression doivent vérifier la condition inf-sup introduite précédemment ([Bab73],[Bre72]).

2.2 Le problème discret sous forme abstraite

Nous nous intéressons maintenant au problème de Stokes **discret**. Nous cherchons sous quelles conditions, ce problème admet une solution unique. Nous nous intéressons également aux erreurs de consistance : la solution discrète $(u_h; p_h)$ converge-t-elle vers la solution continue $(u; p)$? Si oui, de quelle façon?

2.2.1 Cas conforme

Nous reprenons le problème (1.18) de départ avec $g = 0$ par souci de simplification. Considérons alors deux fermés $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$.

Le problème discret s'écrit :

Trouver $(u_h; p_h) \in X_h \times M_h$ tel que :

$$\begin{cases} \forall v_h \in X_h, & a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle \\ \forall q_h \in M_h, & b(u_h, q_h) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

V_h est alors défini comme :

$$V_h = \{v_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, b(v_h, q_h) = 0\}$$

Il est à noter qu'en règle générale, $V_h \not\subset V$.

2.2.1.1 Existence et unicité d'une solution

Le théorème (1.4.1) s'applique au problème discret en substituant les espaces discrets aux espaces continus. Pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution au problème discret, il suffit donc de vérifier les hypothèses du théorème (1.4.1).

– Continuité de la forme bilinéaire a

Le fait que la forme bilinéaire a est continue sur $X \times X$ implique que a est continue sur $X_h \times X_h$ (car $X_h \subset X$).

- Continuité de la forme bilinéaire b
Le fait que la forme b est continue sur $X \times M$ implique que b est continue sur $X_h \times M_h$ (car $M_h \subset M$).
- Ellipticité de la forme bilinéaire a sur V_h
Cette fois ci, l'ellipticité de a sur V , n'implique pas que a est elliptique sur V_h . En revanche, si a est elliptique sur X , alors a est elliptique sur X_h et donc sur V_h .
- La condition inf-sup
La condition inf-sup du problème continue n'implique pas que la condition inf-sup du problème discret est vérifiée. Bien souvent, l'ellipticité de a est vérifiée sur X donc sur V_h , par conséquent, le seul point restant à traiter est la vérification de la condition inf-sup discrète.
Un mode parasite q_h sur la pression se traduit de la façon suivante :

$$q_h \in M_h; q_h \neq 0; \forall v_h \in X_h, b(v_h; q_h) = 0$$

Ce qui implique que la constante β_h de la condition inf-sup discrète est nulle et cette condition n'est donc pas vérifiée. Réciproquement, la vérification de la condition inf-sup assure qu'il n'y a pas de mode parasite sur la pression.

La démonstration de cette condition dépend bien entendu des espaces discrets choisis.

2.2.1.2 Analyse de l'erreur de consistance

Une fois l'existence et l'unicité d'une solution discrète acquise, il reste encore à vérifier de quelle façon converge la solution discrète (u_h, p_h) vers la solution continue (u, p) . Pour évaluer cela, nous cherchons donc à majorer l'erreur de consistance $\|u - u_h\|_X$ et $\|p - p_h\|_M$.

Majoration de $\|u - u_h\|_X$

Soit $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} a(u_h - v_h, u_h - v_h) &= a(u_h, u_h - v_h) - a(v_h, u_h - v_h) \\ a(u_h - v_h, u_h - v_h) &= \langle f; u_h - v_h \rangle - b(u_h - v_h, p_h) - a(v_h, u_h - v_h) \end{aligned}$$

u_h et v_h appartenant à V_h , $u_h - v_h$ appartient également à V_h et nous avons donc

$$b(u_h - v_h, p_h) = 0.$$

La propriété d'ellipticité de la forme a nous permet d'écrire :

$$\alpha \|u_h - v_h\|_X^2 \leq a(u_h - v_h, u_h - v_h)$$

donc

$$\alpha \|u_h - v_h\|_X^2 \leq \langle f; u_h - v_h \rangle - a(v_h, u_h - v_h)$$

u est solution du problème continu (1.18), donc

$$\bullet a(u, u_h - v_h) + b(u_h - v_h, p) = \langle f; u_h - v_h \rangle$$

On a donc la majoration :

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - v_h\|_X^2 &\leq a(u, u_h - v_h) + b(u_h - v_h, p) - a(v_h, u_h - v_h) \\ \alpha \|u_h - v_h\|_X^2 &\leq a(u - v_h, u_h - v_h) + b(u_h - v_h, p) \end{aligned}$$

Or $u_h - v_h \in V_h$ donc $\forall q_h \in M_h$, $b(u_h - v_h, q_h) = 0$.

$$\alpha \|u_h - v_h\|_X^2 \leq a(u - v_h, u_h - v_h) + b(u_h - v_h, p - q_h)$$

On utilise alors les propriétés de continuité des formes a et b .

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - v_h\|_X^2 &\leq \|a\| \|u_h - v_h\|_X \|u - v_h\|_X + \|b\| \|u_h - v_h\|_X \|p - q_h\|_M \\ \alpha \|u_h - v_h\|_X &\leq \|a\| \|u - v_h\|_X + \|b\| \|p - q_h\|_M \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire : $\|u - u_h\|_X \leq \|u - v_h\|_X + \|u_h - v_h\|_X$, on trouve :

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \|u - v_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha} \|p - q_h\|_M$$

Ceci étant vrai pour tout $v_h \in V_h$ et pour tout $q_h \in M_h$, on obtient :

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M$$

Mais la majoration précédente ne fait intervenir que la quantité $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_X$ que l'on ne sait pas évaluer. Pour obtenir une majoration par la quantité $\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X$, nous avons besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *On suppose que la forme b est continue sur $X_h \times M_h$ et vérifie la condition inf-sup pour une constante β_h , alors $\forall u \in V$,*

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_X \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_X$$

Une démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [GR79].

Cette proposition nous permet d'obtenir la majoration :

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \quad (2.2)$$

Cette fois ci, la majoration fait intervenir les bonnes quantités. En effet, il suffit que l'espace X_h approxime l'espace X à l'ordre 1 en norme $\|\cdot\|_X$ et que l'espace M_h approxime l'espace M à l'ordre 1 en norme $\|\cdot\|_M$ pour que la solution du problème discret u_h approxime la solution du problème continu à l'ordre 1 en norme $\|\cdot\|_X$.

Majoration de $\|p - p_h\|_M$ Soit $q_h \in M_h$. La condition inf-sup nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \beta_h \|p_h - q_h\|_M &\leq \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, p_h - q_h)}{\|v_h\|_X} \\ b(v_h, p_h - q_h) &= b(v_h, p_h) - b(v_h, q_h) \\ &= \langle f; v_h \rangle - a(u_h, v_h) - b(v_h, q_h) \\ &= a(u, v_h) + b(v_h, p) - a(u_h, v_h) - b(v_h, q_h) \\ &= a(u - u_h, v_h) + b(v_h, p - q_h) \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \forall v_h \in X_h, \quad b(v_h, p_h - q_h) &\leq \|a\| \|u - u_h\|_X \|v_h\|_X + \|b\| \|v_h\|_X \|p - q_h\|_M \\ \forall v_h \in X_h, \quad \frac{b(v_h, p_h - q_h)}{\|v_h\|_X} &\leq \|a\| \|u - u_h\|_X + \|b\| \|p - q_h\|_M \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $v_h \in X_h$ et le membre de droite ne dépendant pas de v_h , nous pouvons écrire :

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X} \leq \|a\| \|u - u_h\|_X + \|b\| \|p - q_h\|_M$$

En reprenant la première inégalité, nous obtenons :

$$\beta_h \|p_h - q_h\|_M \leq \|a\| \|u - u_h\|_X + \|b\| \|p - q_h\|_M$$

En introduisant l'inégalité triangulaire $\|p - p_h\|_M \leq \|p - q_h\|_M + \|q_h - p_h\|_M$, nous obtenons :

$$\|p - p_h\|_M \leq \frac{\|a\|}{\beta_h} \|u - u_h\|_X + \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \|p - q_h\|_M$$

En insérant la majoration précédente de $\|u - u_h\|_X$, nous trouvons finalement :

$$\|p - p_h\|_M \leq \frac{\|a\|}{\beta_h} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X \quad (2.3)$$

$$+ \left(1 + \frac{\|a\| \|b\|}{\alpha \beta_h} + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \quad (2.4)$$

2.2.2 Cas non conforme

Considérons deux espaces de Hilbert X_h et M_h . Cette fois ci, X_h et M_h ne sont plus forcément inclus dans X et M . De ce fait, nous nous donnons également $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ deux formes bilinéaires sur $X_h \times X_h$ et $X_h \times M_h$.

2.2.2.1 Existence et unicité d'une solution

Nous cherchons à résoudre le problème suivant : Trouver (u_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que :

$$\begin{cases} \forall v_h \in X_h, & a_h(u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle \\ \forall q_h \in M_h, & b_h(u_h, q_h) = \langle g, q_h \rangle \end{cases} \quad (2.5)$$

Là encore, nous utilisons le théorème (1.4.1) pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution. Il suffit donc de vérifier :

- la continuité uniforme de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ sur $X_h \times X_h$,
- la continuité uniforme de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$ sur $X_h \times M_h$,
- l'ellipticité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ sur V_h et
- une condition de type inf-sup entre les espaces X_h et M_h pour la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$.

Dans ce cas et **contrairement au cas conforme**, il n'est en général plus possible d'assurer certaines de ces hypothèses à partir de celles du problème continu. Ce n'est plus seulement la condition inf-sup qu'il faut vérifier, mais il faut également s'assurer explicitement de la validité des trois autres hypothèses.

2.2.2.2 Analyse de l'erreur de consistance

Nous donnons ici une majoration d'erreur abstraite, comme dans le cas conforme. Par rapport à celui ci, il s'introduit en plus une erreur de consistance $r_h(u, p)$.

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) &= \langle f, v_h \rangle & \forall v_h \in X_h \\ a_h(u, v_h) + b_h(v_h, p) &= \langle f, v_h \rangle + r_h(u, p)(v_h) & \forall v_h \in X_h \\ a_h(u - u_h, v_h) + b_h(v_h, p - p_h) &= r_h(u, p)(v_h) & \forall v_h \in X_h \end{aligned}$$

Majoration de $u - u_h$

Soit $w_h \in X_h$,

$$\begin{aligned} a_h(u_h - w_h, u_h - w_h) &= a_h(u_h - u, u_h - w_h) + a_h(u - w_h, u_h - w_h) \\ &= b_h(u_h - w_h, p - p_h) - r_h(u, p)(v_h) + a_h(u - w_h, u_h - w_h) \end{aligned}$$

Si $w_h \in V_h$ et $q_h \in M_h$,

$$\begin{aligned} a_h(u_h - w_h, u_h - w_h) &= b_h(u_h - w_h, p - q_h) - r_h(u, p)(u_h - w_h) + a_h(u - w_h, u_h - w_h) \\ \alpha \|u_h - w_h\|^2 &\leq \|b_h\| \|u_h - w_h\|_{X_h} \|p - q_h\|_{M_h} + \|r_h(u, p)\|_h^* \|u_h - w_h\|_{X_h} \\ &\quad + \|a_h\| \|u - w_h\|_{X_h} \|u_h - w_h\|_{X_h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{X_h} &\leq \|u - w_h\|_{X_h} + \|w_h - u_h\|_{X_h} \\ &\leq \left(1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \|r_h(u, p)\|_h^*\right) \|u - w_h\|_{X_h} + \frac{\|b_h\|}{\alpha} \|p - q_h\|_{M_h} \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $w_h \in V_h$ et pour tout $q_h \in M_h$. En utilisant le résultat de la proposition (2.2.1), on peut majorer comme suit :

$$\inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{X_h} \leq \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{X_h}$$

et nous obtenons la majoration de $u - u_h$:

$$\|u - u_h\|_{X_h} \leq \left(1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \|r_h(u, p)\|_h^*\right) \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{X_h} + \frac{\|b_h\|}{\alpha} \|p - q_h\|_{M_h} \quad (2.6)$$

Majoration de $p - p_h$ Par ailleurs, la condition inf-sup nous donne :

$$\beta_h \|p_h - q_h\|_{M_h} \leq \sup \frac{b_h(v_h, p_h - q_h)}{\|v_h\|_{X_h}}$$

$$\begin{aligned} b_h(v_h, p_h - q_h) &= b_h(v_h, p_h - p) + b_h(v_h, p - q_h) \\ &= r_h(u, p)(v_h) - a_h(u - u_h, v_h) + b_h(v_h, p - q_h) \end{aligned}$$

$$\beta_h \|p_h - q_h\|_{M_h} \leq \|r_h(u, p)\|_h^* + \|b_h\| \|p - q_h\|_{M_h} + \|a_h\| \|u - u_h\|_{X_h}$$

En introduisant l'inégalité triangulaire $\|p - p_h\|_{M_h} \leq \|p - q_h\|_{M_h} + \|q_h - p_h\|_{M_h}$, on obtient :

$$\|p - p_h\|_{M_h} \leq \frac{\|a_h\|}{\beta_h} \|u - u_h\|_{X_h} + \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \|p - q_h\|_{M_h} + \frac{1}{\beta_h} \|r_h(u, p)\|_h^*$$

En insérant la majoration précédente de $\|u - u_h\|_X$, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{M_h} &\leq \frac{\|a_h\|}{\beta_h} \left(1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \|r_h(u, p)\|_h^* \right) \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h} \right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X \\ &\quad + \left(1 + \frac{\|a_h\| \|b_h\|}{\alpha \beta_h} + \frac{\|b_h\|}{\beta_h} \right) \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{M_h} \\ &\quad + \frac{1}{\beta_h} \|r_h(u, p)\|_h^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les estimations d'erreur ont donc une forme identique à celles du cas conforme, il apparaît en plus des termes de non consistance en $r_h(u, v)$.

Nous allons maintenant illustrer le cas non conforme en revenant sur l'élément déjà introduit dans le plateforme de développement PRICELES, l'élément de Crouzeix Raviart.

2.3 Application à l'élément de Crouzeix Raviart

2.3.1 Introduction et notations

Nous fixons ici quelques notations. Soit Ω un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^d où d est la dimension d'espace. Sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est supposée régulière. On note $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de triangulations de Ω par des triangles ou des tétraèdres notés K , au sens usuel où :

- pour tout h , l'intersection de deux éléments différents de \mathcal{T}_h , si elle n'est pas vide, est soit un sommet, soit une arête, soit une face commune à ces deux éléments,
- le rapport du diamètre h_K d'un élément K de \mathcal{T}_h sur le diamètre de la sphère inscrite est borné par une constante σ indépendante de h .

h et h_- représentent respectivement le diamètre maximum et minimum des éléments de \mathcal{T}_h . N_K , N_s et N_f désignent respectivement le nombre d'éléments, de sommets et de faces de \mathcal{T}_h . L'ensemble des faces est noté \mathcal{F}_h . Les sommets sont indexés en s_i , les milieux de faces en x_i , les faces en f_i et les centres de gravité en c_K .

2.3.2 Localisation des inconnues

Nous rappelons ici brièvement l'élément introduit par Crouzeix et Raviart ([CR73]). Nous définissons les deux espaces d'éléments finis X_h et M_h qui nous serviront d'espace d'approximation pour la vitesse u_h et la pression p_h .

- L'espace X_h est défini comme l'ensemble des fonctions v_h dans $L^2(\Omega)^d$ vérifiant :
 - leur restriction sur chaque élément K de \mathcal{T}_h appartient à $\mathcal{P}_1(K)$, où $\mathcal{P}_1(K)$ désigne l'espace des fonctions affines sur K ,
 - elles sont continues en chaque point x_i , pour x_i barycentre de $f_i \in \mathcal{F}_h \cap \partial\Omega$.
L'espace X_h n'est donc pas inclus dans $X = H_0^1(\Omega)^d$, nous nous trouvons bien dans le cas non conforme.
- L'espace de discrétisation de la pression M_h est défini comme suit :

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_0(K)\}$$

L'espace discret de pression M_h est, quant à lui, inclus dans l'espace continu de pression $M = L_0^2(\Omega)$.

Les degrés de liberté pour l'élément de Crouzeix-Raviart sont indiqués sur la figure (2.2).

Les degrés de liberté de vitesse se situent au centre des faces des triangles ou des tétraèdres. Les degrés de liberté de pression se situent au centre des éléments.

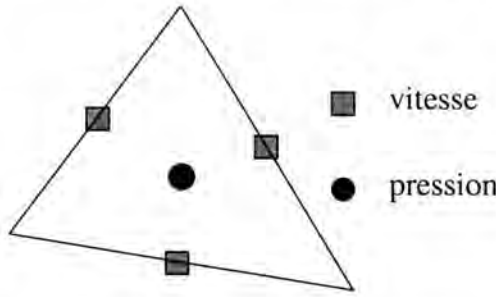


FIG. 2.2 – Localisation des degrés de liberté pour l'élément de Crouzeix Raviart

Soit ψ_i la fonction de base monodimensionnelle de X_h qui vérifie $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Sur chaque élément K , les fonctions de base s'écrivent :

$$\psi_i|_K = 1 - d \lambda_i|_K, \quad (2.8)$$

où $\lambda_i|_K$ est la coordonnée barycentrique de K associée au sommet faisant face au nœud x_i . Par conséquent, toute fonction \vec{v} de X_h peut s'écrire :

$$\vec{v}(x) = (u, v, w) = \left(\sum_i u(x_i) \psi_i(x), \sum_i v(x_i) \psi_i(x), \sum_i w(x_i) \psi_i(x) \right)$$

Soit $\mathbb{1}_K$ la fonction indicatrice du triangle K , toute fonction q_h de M_h s'écrit :

$$q_h(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q(c_K) \mathbb{1}_K(x)$$

2.3.3 Formulation EF

Les espaces $X = H_0^1(\Omega)^d$ et $M = L_0^2(\Omega)$ sont donc remplacés par les espaces d'approximation X_h et M_h définies précédemment. Les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont remplacées par les formes $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$. La différence entre les formes bilinéaires vient simplement du fait que les intégrales sur Ω ont été remplacées par des sommes d'intégrales sur les éléments de la triangulation puisque les fonctions de X_h ne sont pas dans $H^1(\Omega)^d$ mais dans $\Pi_{K \in \mathcal{T}_h} H^1(K)^d$. Dans le cas de l'élément de Crouzeix-Raviart, a_h et b_h sont définies par :

$$\forall (u_h, v_h) \in X_h \times X_h, \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_K \int_K \mathbf{grad} u_h : \mathbf{grad} v_h \, dx \quad (2.9)$$

$$\forall (u_h, p_h) \in X_h \times M_h, \quad b_h(u_h, p_h) = \sum_K \int_K \operatorname{div} u_h \, p_h \, dx \quad (2.10)$$

Le fait que X_h ne soit pas inclus dans X nous amène également à travailler avec une autre norme pour l'espace X_h que la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. La seminorme brisée suivante est alors introduite :

$$\|v_h\|_{h,\Omega} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Rappelons que Crouzeix et Raviart ont montré dans [CR73, Lemme 2] que cette seminorme s'avère être une norme sur l'espace X_h . Pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution au problème de Stokes discrétisé par EF à l'aide de l'élément de Crouzeix Raviart, il suffit de vérifier les quatre hypothèses du théorème 1.4.1 :

- L’hypothèse de continuité uniforme de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ sur $X_h \times X_h$ se vérifie aisément en appliquant une inégalité de Cauchy-Schwarz.
- De même, la continuité uniforme de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$ sur $X_h \times M_h$ se vérifie en appliquant là encore une inégalité de Cauchy-Schwarz.
- En remarquant que :

$$\|v_h\|_{h,\Omega} = a_h(v_h, v_h)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

l’hypothèse d’ellipticité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ sur X_h et donc sur V_h est trivialement vérifiée.

- La condition inf-sup entre X_h et M_h pour la forme bilinéaire b_h a été montrée par Crouzeix et Raviart ([CR73]).

2.4 Formulation VEF

Pour présenter la méthode de *Volumes Éléments Finis*, qui est celle implémentée dans le code PRICELES, nous nous appuyerons sur l’élément fini de Crouzeix-Raviart présenté précédemment. Pour plus de détails sur cette méthode et pour tout renseignement complémentaire concernant ce chapitre, le lecteur pourra se reporter à [Emo92].

Pour appliquer une méthode de *Volumes Éléments Finis*, on se donne un maillage du domaine et un espace d’éléments finis. On caractérise la solution par ses valeurs aux noeuds et on associe à chaque noeud un volume de contrôle. Dans le cas des équations de Stokes, aux noeuds de pression sont associés les volumes de contrôle de l’équation de conservation de la masse, aux noeuds de vitesse sont associés ceux de l’équation de conservation de la quantité de mouvement. Les équations du problème sous forme conservative sont alors écrites sur les différents volumes de contrôle.

Dans le cas de l’élément de Crouzeix-Raviart, les volumes de contrôle de l’équation de conservation de la masse sont les éléments eux-mêmes. Le volume de contrôle de l’équation de conservation de la quantité de mouvement associé à chaque noeud de vitesse situé au barycentre d’une face est construit en joignant les centres de gravité des éléments ayant la dite face en commun avec les sommets de la face. Nous définissons les κ_i dans chaque élément par la relation suivante :

$$\kappa_i = \{x \in K \text{ tel que } \psi_i(x) \geq \psi_j(x) \forall j \neq i\}$$

Un volume de contrôle ω_i est donc défini comme :

$$\omega_i = \cup_{K \ni f_i} \kappa_i$$

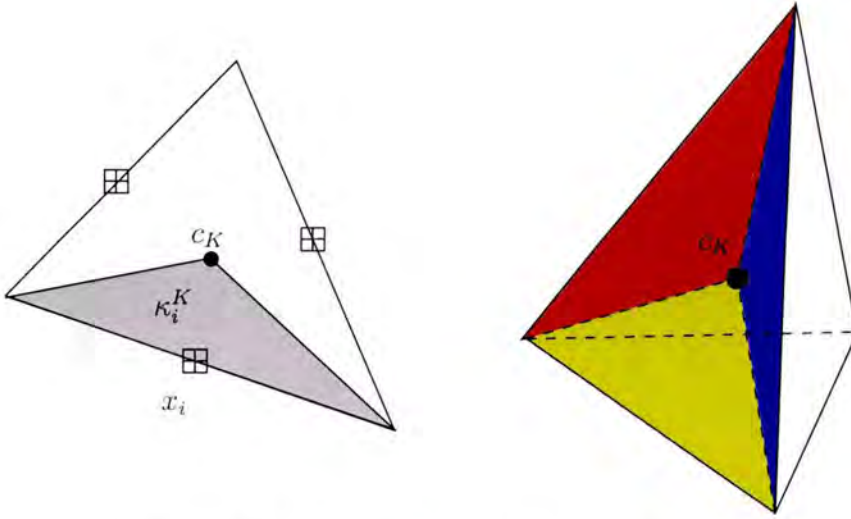
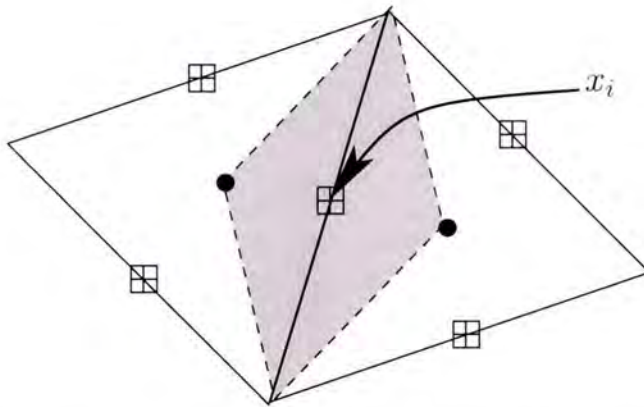
La figure suivante illustre dans le cas bidimensionnel, la construction d’un volume de contrôle ω_i attaché à un noeud x_i .

2.5 Formulation VEF du problème de Stokes

Nous écrivons les équations de Stokes sous forme conservative (1.13) sur les volumes de contrôle respectifs K et ω . Nous cherchons une solution (u_h, p_h) dans nos espaces d’éléments finis $X_h \times M_h$ vérifiant ces équations.

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_{\partial K} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (2.13)$$

$$\forall \omega, \quad - \int_{\partial \omega} (-p_h \mathbf{I}_d + \mathbf{grad} \vec{u}_h) \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega} \vec{f} \, dV \quad (2.14)$$

FIG. 2.3 – Représentation des κ_i en 2D et 3DFIG. 2.4 – Volume de controle ω_i (en grisé) attaché à un noeud x_i

Pour réaliser l'analyse numérique de ce problème, il est possible d'obtenir une formulation abstraite en multipliant une fonction test, associée à un nœud, par l'équation de conservation sur le volume de contrôle associé au nœud en question, et en sommant sur tous les nœuds.

Ceci nous donne :

$$\forall q_h \in M_h, \quad \sum_K \left(q_h(c_K) \int_{\partial K} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds \right) = 0 \quad (2.15)$$

$$\forall v_h \in X_h, \quad - \sum_{i=1}^{N_f} \left(\vec{v}_h(x_i) \int_{\partial\omega_i} \vec{\nabla} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds \right) + \sum_{i=1}^{N_f} \left(\vec{v}_h(x_i) \int_{\partial\omega_i} p_h \vec{n} \, ds \right) = \sum_{i=1}^{N_f} \left(\vec{v}_h(x_i) \cdot \int_{\omega_i} \vec{f} \, dx \right) \quad (2.16)$$

En définissant la forme bilinéaire sur $X_h \times X_h$:

$$a_h^V(u_h, v_h) \stackrel{\text{déf}}{=} - \sum_{i=1}^{N_f} \left(\vec{v}_h(x_i) \cdot \int_{\partial\omega_i} \vec{\nabla} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds \right),$$

la forme linéaire sur X_h :

$$L_h^V(v_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\vec{v}_h(x_i) \cdot \int_{\omega_i} \vec{f} \, dx \right),$$

et sur $X_h \times M_h$, les deux formes bilinéaires :

$$b_h^V(v_h, p_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\vec{v}_h(x_i) \cdot \int_{\partial\omega_i} p_h \vec{n} \, ds \right),$$

$$c_h^V(u_h, q_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(q_h(c_K) \int_{\partial K} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds \right).$$

Le problème peut alors s'écrire :

Trouver $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tel que :

$$\begin{cases} \forall v_h \in X_h, & a_h^V(u_h, v_h) + b_h^V(v_h, p_h) = L_h^V(v_h) \\ \forall q_h \in M_h, & c_h^V(u_h, q_h) = 0 \end{cases}$$

Deux stratégies peuvent être adoptées pour analyser ce problème abstrait :

- on vérifie la continuité uniforme des trois formes bilinéaires introduites, l'ellipticité de la forme bilinéaire a_h^V et la condition inf-sup entre les espaces X_h et M_h relativement aux formes bilinéaires,
- si le problème formulé en *Éléments Finis* a été traité, on compare les formes bilinéaires du système *Volumes Éléments Finis* avec celles du système *Éléments Finis* et on étend les résultats obtenus en *Éléments Finis* au cadre des *Volumes Éléments Finis*.

La formulation *Volumes Éléments Finis* du problème de Stokes avec l'élément de Crouzeix Raviart a été étudiée par P. Emonot dans sa thèse [Emo92] en utilisant la seconde méthode. Ce dernier a démontré que les deux formulations du problème de Stokes, en *Éléments Finis* et en *Volumes Éléments Finis*, pour cet élément, sont équivalentes. Ceci signifie que les solutions des deux problèmes sont identiques au second membre près.

2.6 Problèmes liés à l'élément de Crouzeix-Raviart

2.6.1 Un gradient de pression inconsistent

Le champ de pression est discrétisé constant par élément. Il ne sera donc possible de calculer que les composantes normales du gradient de pression, comme le montre la figure (2.5).

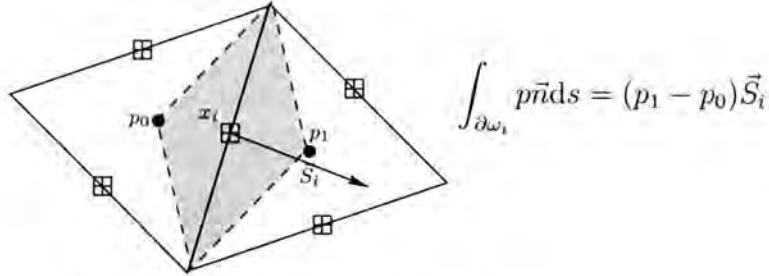


FIG. 2.5 – Gradient de pression normal aux faces

2.6.2 Un espace V_h trop grand

Les noeuds de pression se situant au centre de gravité des éléments K de \mathcal{T}_h , les volumes de contrôle des équations de conservation de la masse sont les éléments eux-mêmes. L'équation de conservation de la masse doit donc être vérifiée sur tous les éléments. Sur un élément, cette équation s'écrit :

$$\int_{\partial K} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

Hors, un champ de vitesse ayant uniquement des composantes tangentes sur les faces de l'élément sera forcément considéré comme étant à divergence nulle, ce qui peut être relativement choquant dans certains cas comme l'illustre la figure (2.6). Ce n'est pas seulement choquant d'un point de vue physique ; cela révèle aussi une véritable inconsistance numérique. Considérons en effet un simple tourbillon de la forme $(u, v) = (y, -x)$. La contribution du terme non linéaire de convection, que nous devons prendre en compte lors de la résolution des équations de Navier Stokes, sur un tourbillon de cette forme génère un champ de la forme de celui représenté sur la figure (2.6). Ce champ est à divergence discrète nulle et n'est donc pas absorbé par la pression comme il devrait l'être. Nous reviendrons sur cet exemple lors du chapitre 6.

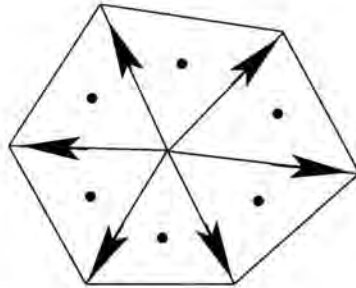


FIG. 2.6 – Vitesse dans V_h pour l'élément de Crouzeix Raviart

2.6.3 Une résolution maillage différente en vitesse et en pression

La Simulation des Grandes Echelles est un des champs d'application de la plateforme PRICELES. Je donnerai plus tard le principe de Simulation des Grandes Echelles, je dirai juste ici que les équations auxquelles nous nous intéresserons sont les équations de Navier Stokes filtrées par un filtre passe-bas en fréquence. Dans le code PRICELES, le filtre passe-bas utilisé est le filtre implicite que représente le maillage. Au dessous d'une certaine taille de maille, un signal d'une fréquence suffisamment grande ne peut plus être représenté sur le maillage, par conséquent le maillage représente implicitement un filtre passe-bas en fréquence. Pour obtenir un champ de vitesse et de pression identiquement filtrés par le maillage, comme l'a recommandé P. ROLLET-MIET dans sa thèse ([RM97]), il est donc nécessaire d'avoir un "maillage vitesse" et un "maillage pression" relativement similaires. Le nombre de noeuds de discrétisation de vitesse étant largement supérieur à celui des noeuds de pression pour l'élément de Crouzeix-Raviart, le filtre implicite du maillage appliqué au champ de vitesse et celui appliqué au champ de pression sont assez différents.

Chapitre 3

Nouvelles Discrétisations

Pour pallier les difficultés liées à l'élément de Crouzeix Raviart évoquées précédemment (cf. 2.6), le nouvel élément proposé est plus riche en pression que ce dernier. Nous présentons dans un premier temps la nouvelle discrétisation proposée (3.1). L'étude de cet élément a d'abord été effectuée par Bernardi et Hecht [BH00] dans le cadre *Éléments Finis* : nous rappelons les différents résultats qu'ils ont obtenus (3.2) et qui nous serviront pour la suite de l'étude. Nous présentons alors la formulation du problème de Stokes dans le cadre des *Volumes Éléments Finis* pour ce nouvel élément (3.3) et nous étendons les résultats du cadre *Éléments Finis* à celui des *Volumes Éléments Finis* (3.4-3.5). Nous exhibons les fonctions d'une base de V_h dans (3.6). Enfin, nous présentons des résultats numériques pour illustrer les résultats théoriques obtenus (3.7).

3.1 Présentation du nouvel élément

3.1.1 Vitesse \mathcal{P}_1 non conforme

L'espace discret de vitesse X_h est le même que l'espace de vitesse introduit par Crouzeix et Raviart et rappelé précédemment (2.3.2).

3.1.2 Pression $\mathcal{P}_1 +$ Bulle

Nous définissons M_h comme l'ensemble des fonctions p_h de $H^1(\Omega)$ vérifiant la propriété suivante :

- la restriction de p_h sur chaque élément K appartient à l'espace $\mathcal{P}(K)$ défini comme l'espace de dimension $d+2$ engendré par les polynômes de $\mathcal{P}_1(K)$ et la fonction bulle définie comme le minimum des coordonnées barycentriques de K .

Nous définissons également $M_{h,0}$ comme l'intersection de M_h avec $L_0^2(\Omega)$.

Les nœuds de pression sont situés aux sommets et au centre de gravité des éléments.

La fonction de forme \mathcal{P}_1 associée au sommet s_i , que nous noterons λ_{s_i} , dans un élément K est la coordonnée barycentrique du sommet s_i .

La fonction de forme bulle associée au centre de gravité d'un élément K , que nous noterons ϕ_K peut s'exprimer en fonction des coordonnées barycentriques dans l'élément :

$$\forall x \in K, \phi_K(x) = (d+1) \min_{s_i \in K} \lambda_{s_i}(x) \quad (3.1)$$

Sur chaque κ_i de l'élément (défini en 2.4), la fonction de forme bulle peut donc s'écrire :

$$\forall x \in \kappa_i, \phi_K(x) = (d+1)\lambda_{s_i}(x)$$

Sur chaque κ_i de l'élément, la pression est donc linéaire.

Toute fonction p_h de M_h s'écrit :

$$\forall x \in \Omega, p_h(x) = \sum_{i=1}^{N_s} p_h(s_i) \lambda_{s_i}(x) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(p_h(c_K) - \frac{1}{d+1} \sum_{s_j \in K_i} p_h(s_j) \right) \phi_K(x) \quad (3.2)$$

3.2 Formulation EF et résultats

Nous reprenons ici les notations et résultats introduits par Bernardi et Hecht dans leur article ([BH00]) portant sur l'analyse dans le cadre des *Éléments Finis* de ce nouvel élément.

3.2.1 Le problème discret en *Éléments Finis*

Le problème discret repose sur la formulation variationnelle (1.24) et s'écrit :

Trouver (u_h, p_h) dans $X_h \times M_{h,0}$ telle que :

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) + b_h^1(v_h, p_h) = L_h(v_h), & \forall v_h \in X_h \\ b_h^1(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in M_{h,0} \end{cases} \quad (3.3)$$

où les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h^1(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $L_h(\cdot)$ sont définies comme suit :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{grad} u_h : \mathbf{grad} v_h \, dx \quad (3.4)$$

$$b_h^1(v_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_h \cdot \vec{\nabla} q_h \, dx \quad (3.5)$$

$$L_h(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h \, dx \quad (3.6)$$

Le nouvel élément introduit, le \mathcal{P}_1 non conforme en vitesse et \mathcal{P}^1 Bulle en pression noté $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$, est plus riche en pression que l'élément de Crouzeix Raviart qui est \mathcal{P}^1 non conforme en vitesse mais \mathcal{P}^0 en pression. Le fait de rajouter des degrés de liberté en pression risque d'introduire des modes parasites sur la pression. Ce problème s'analyse comme un problème abstrait de la même façon que décrit précédemment (2.2). La continuité uniforme et l'ellipticité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ ont déjà été prouvées précédemment lors de l'étude de l'élément de Crouzeix Raviart puisque l'espace en vitesse n'a pas été modifié. Il nous reste donc à considérer la continuité uniforme de la forme bilinéaire $b_h^1(\cdot, \cdot)$ et la condition inf-sup discrète. Comme nous sommes dans le cas d'une discrétisation non conforme, nous verrons comment peut être majorée l'erreur de consistance due à la non conformité.

3.2.2 Décomposition des espaces de vitesse et de pression

Nous reprenons la décomposition des espaces X_h et M_h introduite par Bernardi et Hecht dans [BH00]. Soient X_h et M_h les espaces d'approximation de la vitesse et de la pression définis précédemment. Ces deux espaces sont décomposés chacun en deux sous espaces de la façon suivante :

- $X_h = X_h^T + X_h^N$, avec
- X_h^T l'espace des vitesses $\mathcal{P}^1\text{NC}$ tangentes aux faces.

- X_h^N l'espace des vitesses \mathcal{P}^1 NC normales aux faces.
- $M_h = M_h^1 + M_h^b$, avec
- M_h^1 l'espace des pressions engendré par $\mathcal{P}^1(K)$.
- M_h^b l'espace des pressions engendré par les fonctions bulle.

En utilisant cette décomposition, nous pouvons récrire la formule (3.2) :

$$\forall x \in \Omega, p_h(x) = p_h^1(x) + p_h^b(x) \quad (3.7)$$

avec $p_h^1 \in M_h^1$ et $p_h^b \in M_h^b$ définis de la façon suivante :

$$p_h^1 = \sum_{i=1}^{N_s} p_h(s_i) \phi_{s_i} = \sum_{i=1}^{N_s} p_h^{s_i} \phi_{s_i}$$

$$p_h^b = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(p_h(c_K) - \frac{1}{d} \sum_{s_j \in K_i} p_h(s_j) \right) \phi_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_h^K \phi_K$$

où nous avons introduit les notations :

$$\forall i = 1..N_s, \quad p_h^{s_i} = p_h(s_i)$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad p_h^K = \left(p_h(c_K) - \frac{1}{d} \sum_{s_j \in K_i} p_h(s_j) \right)$$

Remarque : L'analyse de Bernardi et Hecht a été faite avec une fonction bulle définie comme le produit des coordonnées barycentriques. L'utilisation d'une fonction bulle définie comme le minimum des coordonnées barycentriques ne change pas la nature du problème mais simplifie le codage, c'est pourquoi nous avons implémenté dans le code PRICELES, une bulle du min et non une bulle produit.

La figure (3.1) illustre la décomposition des deux espaces. Ce choix de décomposition des espaces a été guidé par la relation d'orthogonalité entre les espaces X_h^T et M_h^b relativement à $b_h^1(\cdot, \cdot)$:

$$\forall v_h \in X_h^T, \forall q_h \in M_h^b, \quad b_h^1(v_h, q_h) = 0 \quad (3.8)$$

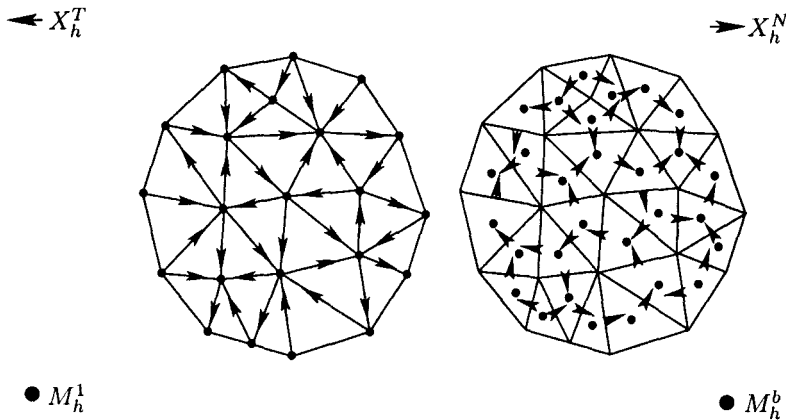


FIG. 3.1 – Décomposition des espaces de vitesse et de pression

Les deux espaces de pression, M_h^1 et M_h^b , contiennent chacun un mode parasite qui a été identifié et supprimé. Ces deux modes parasites sont les constantes de chaque espace. La fonction 1 appartient à l'espace M_h^1 et vérifie $\forall v_h \in X_h, b_h^1(v_h, q_h) = 0$, qui est l'expression

d'un mode parasite. De même, la fonction Φ_h définie par $\Phi_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \phi_K$, où ϕ_K est la fonction de forme bulle associée à l'élément K , est un mode parasite dans l'espace M_h^b . Les espaces $M_{h,0}^1$ et $M_{h,0}^b$ sont le résultat de l'intersection avec $L_0^2(\Omega)$ des espaces M_h^1 et M_h^b . Ces espaces ne contiennent pas les deux modes parasites cités.

3.2.3 Hypothèses et résultats de l'article de Bernardi et Hecht

Hypothèse 1. *La frontière Γ de Ω contient au plus un côté en dimension $d = 2$, au plus deux faces en dimension $d = 3$ d'un même élément K de \mathcal{T}_h .*

Proposition 3.2.1. *La forme b_h^1 est uniformément continue sur $X_h \times M_h$:*

$$\exists C \text{ indépendant de } h, \forall v_h \in X_h, \forall q_h \in M_h, b_h(v_h, q_h) \leq C \|v_h\|_{h,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (3.9)$$

Le premier résultat de condition inf-sup que nous rappelons nous donne une condition inf-sup non optimale entre les espaces X_h^T et $M_{h,0}^1$.

Proposition 3.2.2. *Sous réserve de vérifier l'hypothèse 1, il existe une constante β_{T^0} indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante est vérifiée :*

$$\forall q_h \in M_{h,0}^1, \sup_{v_h \in X_h^T} \frac{b_h^1(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{h,\Omega}} \geq \beta_{T^0} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |q_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

Par contre, nous avons une condition inf-sup optimale entre les espaces X_h et $M_{h,0}^1$.

Proposition 3.2.3. *Sous réserve de vérifier l'hypothèse 1, il existe une constante β_T indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante est vérifiée :*

$$\forall q_h \in M_{h,0}^1, \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_h^1(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{h,\Omega}} \geq \beta_T \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (3.11)$$

Nous avons le même type de résultat pour la paire d'espaces X_h et $M_{h,0}^b$.

Proposition 3.2.4. *Il existe une constante β_N indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante est vérifiée :*

$$\forall q_h \in M_{h,0}^b, \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_h^1(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{h,\Omega}} \geq \beta_N \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (3.12)$$

Par contre, la condition inf-sup démontrée pour les espaces X_h et $M_{h,0}$, c'est-à-dire pour l'élément qui nous intéresse, n'est pas optimale, c'est-à-dire que β dépend de h .

Théorème 3.2.1. *Sous réserve de vérifier l'hypothèse 1, il existe une constante β indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante est vérifiée :*

$$\forall q_h \in M_{h,0}, \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_h^1(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{h,\Omega}} \geq \beta \left(\inf_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \right) \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (3.13)$$

Ceci permet d'affirmer que le problème de Stokes discret formulé en *Éléments Finis* (3.3) admet une solution unique que nous notons (u_h, p_h) .

Le fait que la condition inf-sup ne soit pas optimale entraîne une altération des résultats d'approximation. Il n'y a pas de résultat de convergence sur la pression. Par contre, le résultat de convergence sur la vitesse est optimal.

Théorème 3.2.2. *Sous réserve de vérifier l'hypothèse 1, pour tout f dans $L^2(\Omega)^d$, et si, de plus, la solution (u, p) du problème de Stokes continu (1.24) appartient à $H^{s+1}(\Omega)^d \times H^s(\Omega)$ pour un réel s , $0 < s \leq 1$, alors il existe une constante c indépendante de h telle que l'estimation d'erreur suivante entre la solution continue u et la solution discrète u_h soit vérifiée :*

$$\|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq ch^s \left(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega} \right) \quad (3.14)$$

Enfin, nous exploitons la condition inf-sup optimale (3.11) entre les espaces X_h et $M_{h,0}^1$. Soit le problème suivant : *Trouver (u_h, p_h) dans $X_h \times M_{h,0}^1$ telle que :*

$$\begin{cases} a_h(u_h; v_h) + b_h^1(v_h; p_h) = L_h(v_h) = \langle f, v_h \rangle, & \forall v_h \in X_h \\ b_h^1(u_h; q_h) = 0, & \forall q_h \in M_{h,0}^1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Ce problème admet une solution unique, grâce à la condition inf-sup (3.11). Cette solution ayant toutes les bonnes propriétés de convergence.

Proposition 3.2.5. *Sous réserve de vérifier l'hypothèse 1, pour tout f dans $L^2(\Omega)^d$, le problème (3.15) admet une solution unique (\hat{u}_h, \hat{p}_h) dans $X_h \times M_{h,0}^1$. De plus, cette solution vérifie :*

$$\|\hat{u}_h\|_{h,\Omega} + \|\hat{p}_h\|_{0,\Omega} \leq c \|f\|_{0,\Omega} \quad (3.16)$$

pour une constante c indépendante de h . Si de plus, la solution (u, p) du problème (1.24) appartient à $H^{s+1}(\Omega)^d \times H^s(\Omega)$ pour un réel s , $0 < s \leq 1$, alors il existe une constante c indépendante de h telle que l'estimation d'erreur suivante entre cette solution et (\hat{u}_h, \hat{p}_h) du problème (3.15) :

$$\|u - \hat{u}_h\|_{h,\Omega} + \|p - \hat{p}_h\|_{0,\Omega} \leq ch^s \left(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega} \right). \quad (3.17)$$

Ce résultat important nous apprend que l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1$, qui n'avait pas encore fait l'objet d'une étude possède toutes les bonnes propriétés de convergence souhaitées, à savoir que les champs discrets de vitesse et de pression convergent de façon optimale vers les solutions continues de vitesse et de pression. De plus, cet élément possède la propriété d'avoir un champ de pression continu, ce qui n'était pas le cas de l'élément de Crouzeix Raviart. Cependant, nous verrons dans la section consacrée à la formulation *Volumes Éléments Finis* que ce nouvel élément a en quelque sorte une propriété duale d'un des inconvénients de l'élément de Crouzeix Raviart présenté en (2.6) qui justifie le fait que nous ne l'utilisons pas.

Enfin nous donnons un dernier résultat que nous utiliserons par la suite, concernant l'angle entre les espaces M_h^1 et M_h^b .

$$\forall q_h^1 \in M_h^1, \forall q_h^b \in M_h^b, \int_{\Omega} q_h^1 q_h^b \, dx \leq \left(\frac{d+2}{3d+2} \right)^{\frac{1}{2}} \|q_h^1\|_{0,\Omega} \|q_h^b\|_{0,\Omega} \quad (3.18)$$

Ceci signifie que l'angle entre les espaces M_h^1 et M_h^b dans $L^2(\Omega)$ reste supérieur à une constante C , $C \leq 1$, indépendante de h .

3.3 Description du système VEF

Pour écrire le problème discret en *Volumes Éléments Finis*, nous utilisons la forme conservative (1.13 et 1.14) du problème de Stokes. Nous devons donc définir les volumes de contrôle de masse et de quantité de mouvement.

3.3.1 Description des volumes de contrôle

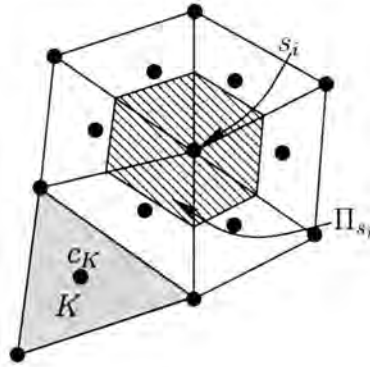
Les volumes de contrôle pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement sont identiques à ceux définis pour l'élément de Crouzeix-Raviart (§ 2.4). Ces volumes sont notés ω_i . L'ensemble des volumes de contrôle de quantité de mouvement est noté \mathcal{W}_h .

Nous distinguons deux types de volume de contrôle pour l'équation de conservation de la masse.

- Le premier que nous notons Π_{s_i} est associé à un noeud de pression en s_i ,
- le second associé à un noeud de pression au centre de gravité c_K d'un élément K est l'élément K lui même.

Différents choix peuvent être faits pour la construction des volumes de contrôle. Ces différents choix et leurs conséquences sur la définition des formes bilinéaires sont détaillés dans l'annexe A. Pour clarifier l'exposé, nous faisons le choix de ne pas considérer le cas général mais de définir les Π_{s_i} de la façon suivante : $\Pi_{s_i} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ x \in K / \lambda_{s_i}(x) \geq \frac{1}{2} \right\}$.

Le volume de contrôle Π_{s_i} se construit donc en joignant sur tous les éléments contenant s_i les barycentres des faces dont s_i est un sommet en dimension 2. En dimension 3, le volume est construit en joignant sur tous les éléments contenant s_i , les barycentres des arêtes dont s_i est un sommet. L'ensemble de ces volumes de contrôle est noté \mathcal{V}_h .



3.3.2 Description des formes bilinéaires

Nous définissons la forme bilinéaire a_h^V sur $X_h \times X_h$ par :

$$a_h^V(u_h, v_h) \stackrel{\text{aé}}{=} - \sum_{i=1}^{N_F} \left(v_h(m_i) \cdot \int_{\partial\omega_i} \mathbf{grad} u_h \cdot \vec{n} \, ds \right), \quad (3.19)$$

la forme linéaire L_h^V sur X_h par :

$$L_h^V(v_h) \stackrel{\text{aé}}{=} \sum_{i=1}^{N_F} \left(v_h(m_i) \cdot \int_{\omega_i} \vec{f} \, dx \right) \quad (3.20)$$

et les formes bilinéaires sur $X_h \times M_h$:

$$b_h^V(v_h, p_h) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{i=1}^{N_F} \left(v_h(m_i) \cdot \int_{\partial\omega_i} p_h \vec{n} \, ds \right) \quad (3.21)$$

$$c_h^V(v_h, q_h) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{i=1}^{N_v} q_h^{s_i} \left(\int_{\partial\Pi_{s_i}} v_h \cdot \vec{n} \, ds + \alpha_1 \sum_{K \in \mathcal{V}(s_i)} \int_{\partial K} v_h \cdot \vec{n} \, ds \right) \\ + \alpha_2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_h^K \left(\int_{\partial K} v_h \cdot \vec{n} \, ds \right) \quad (3.22)$$

α_1 et α_2 sont deux coefficients qui servent \u00e0 rendre la forme $c_h^V(\cdot, \cdot)$ proportionnelle \u00e0 la forme $b_h^V(\cdot, \cdot)$. Ces deux coefficients sont fonctions de la dimension d'espace et du choix des volumes de contr\u00f4le de masse. Pour le choix de volume de contr\u00f4le que nous avons fait pour l'expos\u00e9, les coefficients α_1 et α_2 valent respectivement :

$$\alpha_1 = \frac{d-1}{2^d} \quad (3.23)$$

$$\alpha_2 = \frac{d+1}{2^d} \quad (3.24)$$

3.3.3 Ecriture du probl\u00e8me de Stokes

Le probl\u00e8me de Stokes discret formul\u00e9 en *Volumes \u00c9l\u00e9ments Finis* s'écrit alors : *Trouver* (u_h, p_h) dans $X_h \times M_{h,0}$ telle que :

$$\begin{cases} a_h^V(u_h, v_h) + b_h^V(v_h, p_h) = L_h^V(v_h), & \forall v_h \in X_h, \\ c_h^V(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in M_{h,0} \end{cases} \quad (3.25)$$

Comme dit pr\u00e9c\u00e9demment, deux fa\u00e7ons d'analyser ce probl\u00e8me peuvent \u00eatre envisag\u00e9es :

- Reprendre l'analyse compl\u00e8te du probl\u00e8me. A savoir, continuit\u00e9 uniforme des formes bil\u00e9aires $a_h^V(\cdot, \cdot)$ et $b_h^V(\cdot, \cdot)$, ellipticit\u00e9 de la forme $a_h^V(\cdot, \cdot)$ et condition inf-sup discr\u00e8te.
- S'appuyer sur l'analyse faite en *\u00c9l\u00e9ments Finis*, puisqu'elle existe, et comparer entre elles les formes bil\u00e9aires des deux formulations.

Nous choisissons la deuxi\u00e8me approche.

3.4 Comparaison des deux formulations

Nous redonnons tout d'abord un r\u00e9sultat concernant les formes $a_h(\cdot, \cdot)$ et $a_h^V(\cdot, \cdot)$.

Lemme 3.4.1. *Les formes bil\u00e9aires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $a_h^V(\cdot, \cdot)$ sont identiques sur l'espace $X_h \times X_h$.*

Ce r\u00e9sultat a \u00e9t\u00e9 montr\u00e9 entre autres par Emonot dans sa th\u00e8se ([Emo92]). Nous donnons ici une id\u00e9e de la d\u00e9monstration. Il suffit de calculer les deux formes bil\u00e9aires sur des fonctions de base ψ_i et ψ_j . La formulation *\u00c9l\u00e9ments Finis* nous donne le r\u00e9sultat suivant :

$$a_h(\psi_i, \psi_j) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{grad} \psi_i : \mathbf{grad} \psi_j \, dV$$

La formulation *Volumes Éléments Finis* s'écrit :

$$a_h^V(\psi_i, \psi_j) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \gamma_j} \mathbf{grad} \psi_i \cdot \vec{n} ds$$

La fonction ψ_i est linéaire sur chacun des K de \mathcal{T}_h , donc son gradient est une constante sur chaque élément que l'on peut calculer en appliquant la formule de Stokes.

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \psi_i|_K &= \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{grad} \psi_i dV \\ &= \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} \psi_i \cdot \vec{n} ds \end{aligned}$$

Nous ne devons considérer que les éléments en contact avec la face f_i associée à la fonction de forme ψ_i . La fonction de forme est linéaire donc pour calculer son intégrale sur les faces d'un élément, il suffit de connaître sa valeur au centre des faces. La fonction ψ_i est non nulle uniquement au centre de la face f_i donc l'intégrale précédente se réduit à :

$$\mathbf{grad} \psi_i|_K = \frac{1}{|K|} \vec{S}_i^K$$

en notant $\vec{S}_i^K = \int_{f_i \cap \partial K} \vec{n} ds$ où \vec{n}^K est la normale unitaire extérieure à K . La formulation *Volumes Éléments Finis* peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} a_h^V(\psi_i, \psi_j) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{grad} \psi_i|_K \int_{K \cap \gamma_j} \vec{n} ds \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \vec{S}_i^K \int_{K \cap \gamma_j} \vec{n} ds \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \vec{S}_i^K \vec{S}_j^K \end{aligned}$$

en remarquant que $\int_{K \cap \gamma_j} \vec{n} ds = -\vec{S}_j^K$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} a_h^V(\psi_i, \psi_j) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left(\frac{1}{|K|} \vec{S}_i^K \right) \left(\frac{1}{|K|} \vec{S}_j^K \right) \\ a_h^V(\psi_i, \psi_j) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\frac{1}{|K|} \vec{S}_i^K \right) \left(\frac{1}{|K|} \vec{S}_j^K \right) dV \\ a_h^V(\psi_i, \psi_j) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{grad} \psi_i \mathbf{grad} \psi_j dV \\ a_h^V(\psi_i, \psi_j) &= a_h(\psi_i, \psi_j) \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant un résultat propre au nouvel élément et qui permet d'étendre les résultats obtenus pour cet élément dans le cadre *Éléments Finis* au cadre *Volumes Éléments Finis*.

Lemme 3.4.2. Soient ψ une fonction de X_h , ϕ^1 une fonction de M_h^1 et ϕ^b une fonction de M_h^b . b_h^V est la forme gradient en *Volumes Éléments Finis*, c_h^V la forme divergence en *Volumes Éléments Finis* et b_h^1 la forme gradient en *Éléments Finis*. Alors nous avons les relations suivantes entre les différentes formes en *Éléments Finis* et *Volumes Éléments Finis* :

– Pour une pression de M_h^1 :

$$b_h^V(\psi, \phi^1) = b_h^1(\psi, \phi^1) \quad (3.26)$$

$$c_h^V(\psi, \phi^1) = -\frac{d(d+1)}{2d} b_h^V(\psi, \phi^1) \quad (3.27)$$

– Pour une pression de M_h^b :

$$b_h^V(\psi, \phi^b) = \frac{(d+1)}{d} b_h^1(\psi, \phi^b) \quad (3.28)$$

$$c_h^V(\psi, \phi^b) = -\frac{d(d+1)}{2d} b_h^V(\psi, \phi^b) \quad (3.29)$$

Pour la démonstration, nous calculons simplement les formes gradient et divergence en *Éléments Finis* et *Volumes Éléments Finis* pour les fonctions de forme de vitesse et de pression (cf. Annexe A).

Remarque 2. La continuité uniforme des différentes formes bilinéaires introduites dans le cadre des *Volumes Éléments Finis* se déduit immédiatement de la continuité uniforme des formes bilinéaires du cadre des *Éléments Finis*.

Remarque 3. Les formulations *Éléments Finis* et *Volumes Éléments Finis* du problème de Stokes admettent le même nombre de modes parasites en pression.

Pour montrer ce résultat, nous notons $q_h \neq 0$ un mode parasite en *Volumes Éléments Finis*. Nous avons donc :

$$\forall v_h \in X_h, b_h^V(v_h, q_h) = 0$$

En utilisant la décomposition (3.7) de l'espace M_h , nous trouvons $q_h = q_h^1 + q_h^b$.

$$\forall v_h \in X_h, b_h^V(v_h, q_h^1 + q_h^b) = 0$$

$$\forall v_h \in X_h, b_h^V(v_h, q_h^1) + b_h^V(v_h, q_h^b) = 0$$

Or compte tenu des résultats (3.26) et (3.28), nous pouvons écrire :

$$\forall v_h \in X_h, b_h^1(v_h, q_h^1) + \frac{(d+1)}{d} b_h^1(v_h, q_h^b) = 0$$

$$\forall v_h \in X_h, b_h^1(v_h, \tilde{q}_h) = 0$$

pour $\tilde{q}_h = q_h^1 + \frac{(d+1)}{d} q_h^b$.

\tilde{q}_h n'étant pas nul, c'est un mode parasite de pression pour la formulation *Éléments Finis*.

Le même raisonnement aurait pu être fait en partant d'un parasite en *Éléments Finis*. Par conséquent, il apparaît qu'à chaque mode parasite de pression en *Volumes Éléments Finis* est associé un mode parasite en *Éléments Finis* et réciproquement à chaque mode parasite de pression en *Éléments Finis* est associé un mode parasite en *Volumes Éléments Finis*.

Remarque 4. Soit V_h^V le noyau de la forme b_h^V dans X_h et V_h le noyau de b_h^1 dans X_h . On a $V_h^V = V_h$.

En effet soit $v_h \in V_h^V$, montrons que $v_h \in V_h$. Pour cela nous devons établir que

$$\forall q_h \in M_{h,0}, b_h^1(v_h, q_h) = 0.$$

Soit q_h un élément de $M_{h,0}$, en utilisant à nouveau la décomposition (3.7) de l'espace M_h , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} b_h^1(v_h, q_h) &= b_h^1(v_h, q_h^1) + b_h^1(v_h, q_h^b) \\ &= b_h^V(v_h, q_h^1) + \frac{d}{d+1} b_h^V(v_h, q_h^b) \\ &= b_h^V(v_h, q_h^1 + \frac{d}{d+1} q_h^b) \end{aligned}$$

Or, v_h étant dans V_h^V , $b_h^V(v_h, q_h^1 + \frac{d}{d+1} q_h^b) = 0$. Par conséquent v_h est dans V_h . Le même calcul peut être mené en sens inverse, donc nous avons bien $V_h^V = V_h$.

3.5 Résultats de convergence

3.5.1 Élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$

Compte-tenu des précédents résultats sur l'équivalence des formes *Éléments Finis* et *Volumes Éléments Finis*, toutes les conditions inf-sup prouvées dans le cadre des *Éléments Finis* sont valides dans le cadre des *Volumes Éléments Finis*. De même, la continuité uniforme de la forme bilinéaire $b_h^V(\cdot, \cdot)$ se déduit immédiatement de la continuité uniforme de la forme bilinéaire $b_h^1(\cdot, \cdot)$ par les relations obtenues précédemment (§ 3.4). Par conséquent, des résultats de convergence peuvent être donnés pour la vitesse, mais nous n'avons aucun résultat de convergence sur la pression.

Proposition 3.5.1. *Pour tout f dans $L^2(\Omega)^d$ et si la solution (u, p) du problème continu (1.24) appartient à l'espace $H^{s+1}(\Omega)^d \times H^s(\Omega)$ pour un réel s , $0 < s \leq 1$, alors il existe deux constantes c et c' indépendantes de h telle que la majoration d'erreur suivante entre la vitesse u du problème (1.24) et la vitesse u_h du problème (3.25) soit vérifiée :*

$$\|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq ch^s \left(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega} \right) + c'h \|f\|_{0,\Omega} \quad (3.30)$$

Démonstration

Notons (u_h, p_h) et (u_h^V, p_h^V) les solutions respectives des problèmes EF (3.3) et VEF (3.25). u_h et u_h^V sont deux champs de V_h , donc la différence que nous noterons $e_h = u_h - u_h^V$ est également dans V_h et nous avons la propriété suivante :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, e_h) &= L_h(e_h) \\ a_h(u_h^V, e_h) &= L_h^V(e_h) \\ a_h(e_h, e_h) &= L_h(e_h) - L_h^V(e_h) \\ \|e_h\|_{h,\Omega}^2 &= L_h(e_h) - L_h^V(e_h) \\ L_h(e_h) - L_h^V(e_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f e_h \, dx - \sum_{\mathcal{F}_h} e_h(m_i) \int_{\omega_i} f \, dx \end{aligned}$$

Notons \bar{e}_h l'interpolé \mathcal{P}^0 de e_h sur les ω_i défini par :

$$\bar{e}_h = \sum_{\mathcal{F}_h} e_h(m_i) \mathbb{1}_{\omega_i}$$

$$\begin{aligned}
L_h(e_h) - L_h^V(e_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f e_h \, dx - \sum_{\mathcal{F}_h} \int_{\omega_i} f \bar{e}_h \, dx \\
L_h(e_h) - L_h^V(e_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f (e_h - \bar{e}_h) \, dx \\
|L_h(e_h) - L_h^V(e_h)| &\leq \sum_K \|f\|_{0,K} \|e_h - \bar{e}_h\|_{0,K} \\
|L_h(e_h) - L_h^V(e_h)| &\leq \sum_K h_K \|f\|_{0,K} \|e_h\|_{1,K} \\
|L_h(e_h) - L_h^V(e_h)| &\leq h \|f\|_{0,\Omega} \|e_h\|_{h,\Omega}
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\|e_h\|_{h,\Omega} \leq c' h \|f\|_{0,\Omega} \quad (3.31)$$

Ce résultat combiné avec le résultat de convergence (3.14) termine la démonstration.

Nous avons donc obtenu avec ce nouvel élément les mêmes résultats pour le système formulé en *Volumes Éléments Finis* que pour le système formulé en *Éléments Finis* à savoir :

- Existence d'une solution unique (u_h^V, p_h^V) au problème (3.25)
- Convergence optimale de la vitesse
- Pas de convergence en pression à priori

3.6 Discussions

3.6.1 Exhibition d'une base de V_h

Nous ne traiterons ici que le cas de la dimension $d = 2$. Une base de V_h est engendrée par deux types de fonctions de base. Un premier type est lié aux éléments, le second type est lié aux sommets.

3.6.1.1 Fonctions de la base de V_h liées aux éléments

Ces fonctions de base se construisent à partir de l'espace X_h^T des fonctions tangentes aux faces. Comme l'exprime la relation d'orthogonalité (3.8), les fonctions de X_h^T sont à divergence nulle sur les éléments. Pour satisfaire la condition d'incompressibilité sur les sommets, il suffit de prendre sur un élément des vitesses tangentes aux faces de sorte que les flux de masse sur un sommet se compensent. La figure (3.2) illustre ce type de fonction de base de l'espace à divergence nulle V_h en dimension $d = 2$. Soient un élément K et ses trois faces f_1 , f_2 et f_3 . Considérons un champ de vitesse constitué de vitesses tangentes aux faces f_1 , f_2 et f_3 . Sur chacune de ces faces, la vitesse est notée respectivement \vec{u}_1 , \vec{u}_2 et \vec{u}_3 . Il nous reste trois degrés de liberté pour satisfaire la condition d'incompressibilité sur les volumes de contrôle associés aux sommets. Intéressons nous à cette condition écrite sur le volume de contrôle bleu associé au sommet s_1 . Sur ce volume bleu Π_{s_1} , la condition $\int_{\partial\Pi_{s_1}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = 0$ doit être satisfaite. Cette condition s'écrit :

$$\int_{\partial\Pi_{s_1}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{1}{4} \vec{u}_2 \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_{1-3}) + \frac{1}{4} \vec{u}_3 \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_{1-2})$$

où $\vec{S}_i = \int_{f_i} \vec{n} \, ds$. En procédant de même sur les deux autres volumes de contrôle associés aux sommets s_2 et s_3 , nous obtenons les deux autres équations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi_{s_2}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \frac{1}{4} \vec{u}_3 \cdot (\vec{S}_2 + \vec{S}_{2-1}) + \frac{1}{4} \vec{u}_1 \cdot (\vec{S}_2 + \vec{S}_{2-3}) \\ \int_{\partial\Pi_{s_3}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \frac{1}{4} \vec{u}_1 \cdot (\vec{S}_3 + \vec{S}_{3-2}) + \frac{1}{4} \vec{u}_2 \cdot (\vec{S}_3 + \vec{S}_{3-1}) \end{aligned}$$

Ces trois équations ne sont pas indépendantes. Pour s'en apercevoir, il suffit de les additionner et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi_{s_1}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\partial\Pi_{s_2}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\partial\Pi_{s_3}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \\ \frac{1}{4} \vec{u}_1 \cdot (\vec{S}_2 + \vec{S}_{2-3} + \vec{S}_3 + \vec{S}_{3-2}) + \\ \frac{1}{4} \vec{u}_2 \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_{1-3} + \vec{S}_2 + \vec{S}_{2-3}) + \\ \frac{1}{4} \vec{u}_3 \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_{1-2} + \vec{S}_2 + \vec{S}_{2-1}) \end{aligned}$$

Or, par construction géométrique, les trois sommes de normales précédentes sont nulles, l'expression précédente est donc identiquement nulle et les trois contraintes d'incompressibilité pour ce type de champ sont liées. Par conséquent il reste un degré de liberté par élément.

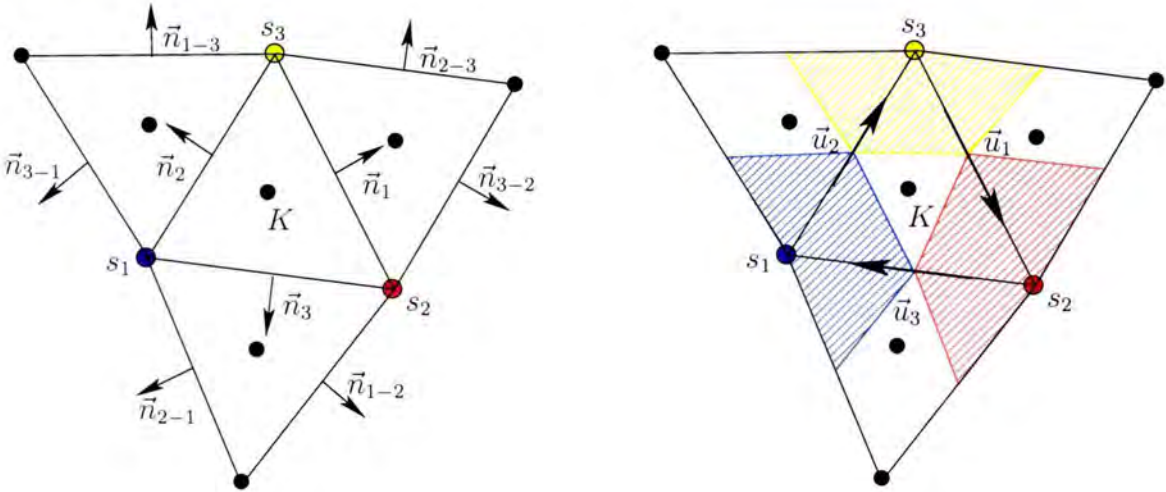


FIG. 3.2 – Fonction de base de l'espace à divergence nulle V_h liée à un élément

3.6.1.2 Fonctions de base de V_h liées aux sommets

Considérons maintenant un sommet s . Soit N le nombre d'éléments partageant ce sommet. s appartient également à N faces. Nous considérons un champ de vitesse non nul uniquement sur les N faces auxquelles ce sommet appartient et nous cherchons à trouver un champ à divergence nulle sur tous les éléments et sur tous les volumes de contrôle associés aux sommets. La figure (3.3) représente un tel champ. La contribution d'une

vitesse \vec{u}_i à la divergence sur le volume de contrôle associé au sommet s est en $\vec{u}_i \cdot \vec{n}'_i$. Considérons donc un champ normal à \vec{n}'_i sur chaque face f_i . Ce champ est à divergence nulle sur le sommet s considéré. A noter qu'il est également à divergence nulle sur tous les sommets. En effet, soit s_i l'autre sommet d'une face f_i contenant s , la contribution de la vitesse \vec{u}_i est également en $\vec{u}_i \cdot \vec{n}'_i$ et par conséquent nulle compte tenu du choix des \vec{u}_i normaux aux \vec{n}'_i . De plus, dans un élément K , si nous appelons s'_i le sommet opposé à une face f_i dans K . La contribution de la vitesse \vec{u}_i sur le volume de contrôle associé au sommet s'_i est nulle car la fonction \mathcal{P}_1 non conforme est nulle sur le bord de ce volume de contrôle.

Nous avons donc $2N$ inconnues. Nous avons fixé N contraintes pour satisfaire la condition de divergence nulle sur tous les sommets. Il nous reste à imposer cette condition sur les éléments. N éléments entrent en jeu, et nous rajoutons donc N contraintes, mais ces N contraintes sont liées. En effet, notons \vec{n}_i les normales respectives aux faces f_i tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour du sommet s . Le système d'équations assurant la condition de divergence nulle sur les éléments s'écrit :

$$\begin{cases} -\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ -\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_3 = 0 \\ \vdots \\ -\vec{u}_N \cdot \vec{n}_N + \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}$$

Ce système est clairement lié et le nombre de contraintes n'est donc que de $N - 1$, il reste donc un degré de liberté par sommet.

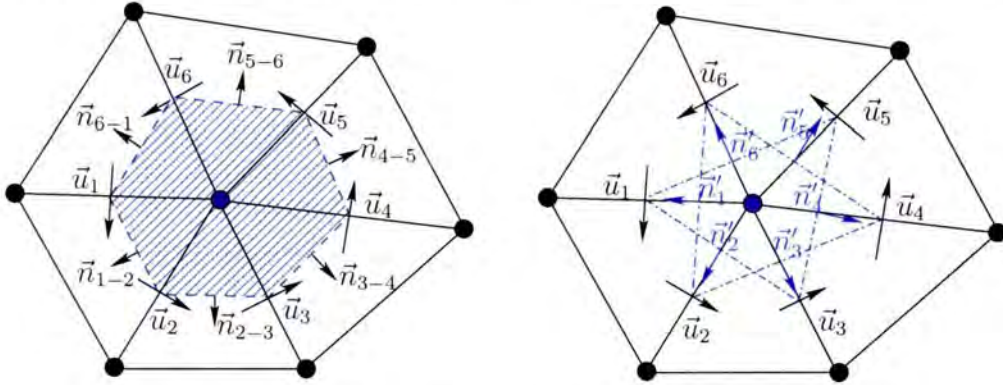
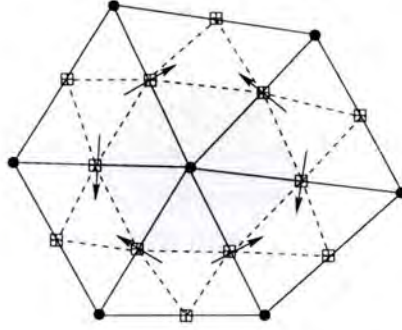


FIG. 3.3 – Fonction de base de l'espace à divergence nulle liée à un sommet

3.6.2 Remarque sur l'Élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1$

Revenons sur le résultat de la proposition 3.2.5 obtenu dans le cadre *Éléments Finis*. De la même façon que pour l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$, ce résultat peut être étendu au cadre des *Volumes Éléments Finis*. Cet élément a la propriété d'avoir non seulement une convergence optimale en vitesse mais également une convergence optimale en pression, ce qui fait défaut à l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$. Mais cet élément possède le défaut dual d'un de ceux du Crouzeix Raviart évoqué en (§ 2.6.2). Pour construire une base de V_h de cet élément, il suffit de reprendre la construction précédente (§ 3.6.1.2) sans satisfaire la condition de divergence nulle sur les éléments. Nous nous apercevons que le mode choquant de la figure (2.6) a été éliminé. Cependant, un nouveau type de champ de V_h (figure 3.4) est apparu et ce dernier n'est guère moins choquant. Ce type de champ n'est pas à divergence nulle sur les éléments.

FIG. 3.4 – Champ de vitesse de V_h pour le $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1$ 

L'élément de Crouzeix Raviart assure la condition d'incompressibilité sur les éléments, ce qui entraîne le type de champ de V_h de la figure (2.6). L'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1$ assure la condition d'incompressibilité sur les volumes de contrôle définis autour des sommets, ce qui entraîne le type de champ de V_h de la figure (3.4). L'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$ assure lui la condition d'incompressibilité sur les deux types de volumes de contrôle, les éléments et ceux centrés autour des sommets.

3.7 Résultats numériques

3.7.1 Présentation du cas test

Nous présentons un cas test en dimension $d = 2$. Le domaine Ω est défini comme le carré unité $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Nous résolvons le problème de Stokes suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p &= \vec{f} && \text{dans } \Omega \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \vec{u} &= 0 && \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

avec la force de volume \vec{f} définie par :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4\Pi^2 \sin(2\Pi y)(1 - 2 \cos(2\Pi x)) \\ 4\Pi^2 \sin(2\Pi x)(1 - 2 \cos(2\Pi y)) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Ce problème admet la solution analytique suivante :

$$\begin{aligned} u &= -\sin(2\Pi y) + \sin(2\Pi y) \cos(2\Pi x) \\ v &= \sin(2\Pi x) - \sin(2\Pi x) \cos(2\Pi y) \\ p &= 0 \end{aligned}$$

3.7.2 Résultats du cas test

Des calculs menés sur différents maillages nous permettent de vérifier l'ordre de convergence de vitesse et nous donnent une idée de la convergence de la pression car les résultats théoriques précédents ne peuvent nous affirmer ni que la pression converge, ni qu'elle ne converge pas. Les normes d'erreur en pression porteront sur plusieurs champs. Le champ nommé p indique la norme de la pression totale $\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$, p^1 indique la norme des composants \mathcal{P}_1 de la pression totale et p^b indique la norme des composants Bulle de la pression

	10 × 10	20 × 20	40 × 40
$\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$			
$\ p\ _{0,\Omega}$	1.84931	1.25388	1.12664
$\ p^1\ _{0,\Omega}$	2.73407	2.03485	1.91768
$\ p^b\ _{0,\Omega}$	1.42531	1.09449	1.04163
$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	0.0237044	0.00590125	0.001455
$\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_0$			
$\ p^0\ _{0,\Omega}$	0.512629	0.216188	
$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	0.025911	0.00655151	

TAB. 3.1 – Convergence du $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$

totale. Dans ce tableau, figurent également, à titre indicatif, les résultats du même cas test menés sur les mêmes maillages avec l'élément de Crouzeix Raviart.

Comme annoncé par les résultats théoriques, le champ de vitesse converge bien à l'ordre deux en norme L^2 vers la solution analytique. Sur ce cas test, la différence de "qualité" du champ de vitesse entre le nouvel élément et l'élément de Crouzeix Raviart n'est pas flagrante.

Les différents champs de pression semblent ne pas converger. Nous faisons figurer les trois types de champ de pression dans ce tableau pour bien s'apercevoir qu'il n'y a pas un champ qui converge vers la solution et l'autre qui le perturbe. Les deux champs de pression, le champ \mathcal{P}_1 et le champ Bulle interagissent l'un avec l'autre, sans converger que ce soit individuellement ou en se combinant.

Chapitre 4

Amélioration des nouvelles discrétisations

Ce nouvel élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$ que nous avons proposé au chapitre précédent, s'il corrige certaines propriétés gênantes du Crouzeix Raviart, n'améliore pas l'ordre de convergence de la vitesse et ne possède plus de propriété de convergence pour le champ de pression, ce qui est loin d'être satisfaisant. Dans ce chapitre, nous parvenons à expliquer pourquoi le champ de pression ne converge pas (§4.1). Au vu de cette explication, nous proposons alors un nouvel espace d'approximation pour la pression qui lui, nous le montrerons au (§4.2), présente toutes les bonnes propriétés de convergence. Nous reviendrons alors sur l'élément précédent pour montrer les liens qui unissent ces deux nouveaux éléments finis et pour démontrer que la condition inf-sup montrée par Bernardi et Hecht est réellement non optimale (§4.3). Nous établirons ensuite un résultat important sur la consistance de l'espace V_h et sur une propriété de super convergence de l'élément pour le problème de Stokes dans un cas particulier (§4.4). Enfin, nous proposerons une extension de cette famille d'éléments à d'autres éléments finis (§4.5).

4.1 Problème lié à la bulle

Si d'un point de vue théorique nous n'avons pas d'affirmation concernant la convergence du champ de pression (ni preuve de convergence, ni preuve de non convergence), le résultat du cas test précédent (cf. §3.7) indique que la solution discrète de pression ne converge pas vers la solution continue. De plus, si les éléments de Crouzeix Raviart et l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1$ possèdent une propriété de convergence en pression, ce cas test a également mis en évidence que la composante \mathcal{P}_1 comme la composante Bulle de l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$ isolément ne convergent pas. Il faut noter d'ailleurs qu'il serait étonnant que la composante Bulle seule parvienne à converger car l'espace des bulles ne possède pas de propriété d'approximation. Cette non convergence des deux composantes prises isolément, alors que l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1$ possède une propriété de convergence (cf. §3.2.5), indique bien que les deux champs de pression interagissent. Nous avons donc mis au point un cas test permettant de rendre compte de cette interaction et de mettre en évidence ce que nous appellerons un mode parasite asymptotique.

4.1.1 Présentation du cas test

L'idée sous-jacente est de dire que les deux champs de pression tendent à s'opposer. Pour ce cas test, nous ne résolvons pas un problème de Stokes, mais le problème suivant :

$$-\Delta \vec{u} = \vec{\nabla} p \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \quad (4.1b)$$

le champ p étant imposé. Ce problème, une fois discrétisé, peut s'écrire sous forme abstraite :

$$\forall v_h \in X_h, a_h(u_h, v_h) = b_h^1(v_h, p_h)$$

Nous ferons deux calculs avec deux champs de pression différents :

Cas 1	Cas 2
$p = \begin{cases} x & \text{pour la composante } \mathcal{P}_1 \\ -2x & \text{pour la composante Bulle} \end{cases}$	$p = \begin{cases} x^2 & \text{pour la composante } \mathcal{P}_1 \\ -2x^2 & \text{pour la composante Bulle} \end{cases}$

où d représente la dimension d'espace. Les calculs ont été menés sur trois maillages différents et les résultats sont donnés dans les tableaux 4.1 et 4.2 :

Cas 1	3 × 3	6 × 6	12 × 12
$\ u_h\ _{1,\Omega}$	0.0770243	0.0455212	0.023568
$\ p_h\ _{0,\Omega}$	0.460611	0.458746	0.458279

TAB. 4.1 – Résultats du cas test 1

Cas 2	3 × 3	6 × 6	12 × 12
$\ u_h\ _{1,\Omega}$	0.0866052	0.0520347	0.027121
$\ p_h\ _{0,\Omega}$	0.369913	0.35866	0.355813

TAB. 4.2 – Résultats du cas test 2

Les résultats de ces deux cas tests nous apprennent que ces champs de pression que nous imposons ne tendent pas vers 0 avec h , tandis que la vitesse semble tendre vers 0 comme h . Ceci, compte tenu du problème que nous résolvons, semble indiquer que la constante β de la condition inf-sup pour l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$ tend vers 0 avec h . Mais ceci n'est bien sûr pas une preuve. Nous reviendrons sur ce point et donnerons une démonstration de cette convergence de β vers 0 dans le paragraphe 4.3.

Ce défaut de l'élément est en fait dû au manque de propriété d'approximation de l'espace des bulles. La figure 4.1 nous permet de mieux comprendre le phénomène. Elle représente, dans le cas 1D, une fonction $\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$ et son "équivalent" dans l'espace $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0$ sur deux maillages différents. La fonction \mathcal{P}_1 imposée est $y = x$. Les fonctions rajoutées au \mathcal{P}_1 sont calculées de telle sorte que la fonction finale soit à moyenne nulle sur chaque maille. La figure du haut représente la fonction sur un maillage de pas 2, celle du bas représente la même fonction sur un maillage raffiné de pas 1. Cette figure nous permet de mieux comprendre que dans ce cas, la fonction $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0$ à moyenne nulle tend vers 0 avec le pas de maillage, ce que ne fait pas la fonction "équivalente" de l'espace $\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$.

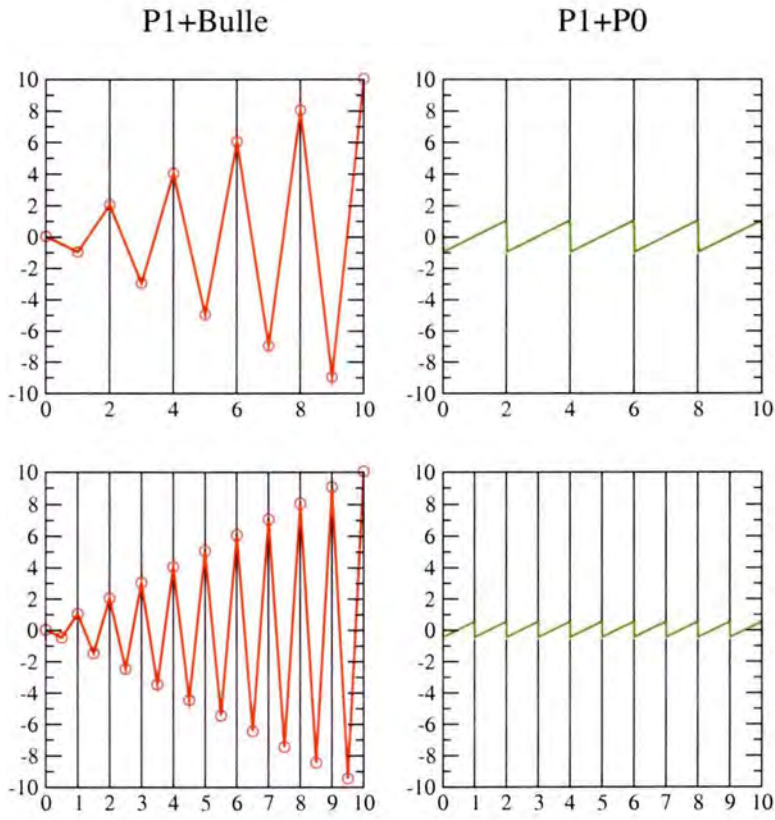


FIG. 4.1 – Transposition d'une bulle du min en \mathcal{P}_0

4.2 Une nouvelle discrétisation $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0$

Au vu de l'exemple 1D ci-dessus, nous proposons une modification de l'élément introduit précédemment. L'espace d'approximation de pression $\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$ est remplacé par l'espace $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_0$.

4.2.1 Présentation du nouvel élément

Soit N_h le nouvel espace de discrétisation de la pression. Comme l'espace M_h , N_h peut lui aussi s'écrire comme la somme de deux sous-espaces N_h^1 et N_h^0 .

Pour la partie linéaire \mathcal{P}_1 de la pression, rien n'est changé. L'espace d'approximation est toujours l'ensemble des fonctions dont la restriction sur chaque élément est $\mathcal{P}_1(K)$, c'est-à-dire $N_h^1 = M_h^1$.

Les degrés de liberté de pression au centre des mailles qui étaient discrétisés à l'aide de fonctions bulle le seront donc désormais à l'aide de fonctions constantes par élément. Autrement dit, l'espace N_h^0 , qui remplace l'espace M_h^b , s'écrit :

$$N_h^0 = \{q_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}^0(K)\} \quad (4.2)$$

Toute fonction p_h de N_h s'écrit :

$$\forall x \in \Omega, p_h(x) = \sum_{i=1}^{N_s} p_h(s_i) \lambda_{s_i}(x) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(p_h(c_K) - \frac{1}{d+1} \sum_{s_j \in K_i} p_h(s_j) \right) \mathbb{1}_K(x) \quad (4.3)$$

L'espace $N_h = N_h^1 + N_h^0$ n'est plus un sous espace de $H^1(\Omega)$ et la pression discrète n'est plus continue. En particulier, la pression n'est pas continue au voisinage des sommets. Nous supposons ici que la fonction indicatrice sur les éléments est non nulle uniquement sur l'intérieur des éléments. Ainsi sur n'importe quel sommet s d'un élément K , on a $\mathbb{1}_K(s) = 0$.

Nous pouvons décomposer N_h de la même façon que nous avons décomposé M_h à savoir :

$$\forall x \in \Omega, p_h(x) = p_h^1(x) + p_h^0(x) \quad (4.4)$$

avec $p_h^1 \in N_h^1$ et $p_h^0 \in N_h^0$ définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} p_h^1 &= \sum_{i=1}^{N_s} p_h(s_i) \lambda_{s_i} = \sum_{i=1}^{N_s} p_h^{s_i} \lambda_{s_i} \\ p_h^0 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(p_h(c_K) - \frac{1}{d} \sum_{s_j \in K_i} p_h(s_j) \right) \mathbb{1}_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_h^K \mathbb{1}_K \end{aligned}$$

où nous avons introduit les notations :

$$\begin{aligned} \forall i = 1..N_s, \quad p_h^{s_i} &= p_h(s_i) \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad p_h^K &= \left(p_h(c_K) - \frac{1}{d} \sum_{s_j \in K_i} p_h(s_j) \right) \end{aligned}$$

Une autre décomposition de l'espace N_h sera également utilisée dans ce chapitre : $N_h = \tilde{N}_h \oplus N_h^0$ avec \tilde{N}_h défini comme suit :

$$\tilde{N}_h = \{q_h \in N_h; \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in L_0^2(K)\} \quad (4.5)$$

Cette décomposition de l'espace N_h est L^2 orthogonale, ce qui signifie :

$$\forall \tilde{q}_h \in \tilde{N}_h, \forall q_h^0 \in N_h^0; \int_{\Omega} \tilde{q}_h q_h^0 \, dx = 0$$

4.2.2 Formulation VEF du problème

Nous traitons ici la formulation *Volumes Éléments Finis* du problème. La formulation du problème est strictement identique pour cet élément à celle de l'élément précédemment introduit. Les volumes de contrôle de masse et de quantité de mouvement sont les mêmes que ceux choisis et présentés pour l'élément $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$. La définition des formes reste elle aussi la même, seuls les coefficients α_1 et α_2 servant à rendre proportionnelles les formes c_h^V et b_h^V sont modifiés.

La forme divergence définie par l'équation (3.22), dont nous rappelons l'expression ici :

$$c_h^V(v_h, q_h) = \sum_{i=1}^{N_v} q_h^{s_i} \left(\int_{\partial\Pi_{s_i}} v_h \cdot \vec{n} \, ds + \alpha_1 \sum_{K \in \mathcal{V}(s_i)} \int_{\partial K} v_h \cdot \vec{n} \, ds \right) + \alpha_2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_h^K \left(\int_{\partial K} v_h \cdot \vec{n} \, ds \right)$$

ne dépend pas de la forme des fonctions bulles choisies. La forme divergence n'est pas modifiée que nous prenions une bulle du minimum comme précédemment ou bien une fonction \mathcal{P}_0 . La forme gradient, par contre, est modifiée par le changement de type de bulle, c'est pourquoi les coefficients α_i sont modifiés pour conserver la proportionnalité entre les deux formes bilinéaires.

Nous gardons pour l'instant la décomposition de N_h en N_h^1 et N_h^0 . Toute pression q_h de N_h peut donc s'écrire $q_h^1 + q_h^0$ comme défini au paragraphe 4.4. Nous nous intéressons au calcul de la forme gradient pour les fonctions de base \mathcal{P}_0 .

$$b_h^V(\psi_{m_i}, \mathbb{1}_K) = -\vec{S}_i^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i)$$

Or nous avons trouvé pour une fonction de forme bulle du minimum :

$$b_h^V(\psi_{m_i}, \phi_K) = -\frac{1}{d} \vec{S}_i^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i)$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

$$\forall v_h \in X_h, \quad b_h^V(v_h, \mathbb{1}_K) = db_h^V(v_h, \phi_K) \quad (4.6)$$

Par conséquent, pour que les formes b_h^V et c_h^V soient proportionnelles, compte tenu des coefficients α_1 et α_2 donnés dans l'équation (3.23), les coefficients α_1 et α_2 doivent maintenant valoir :

$$\alpha_1 = \frac{d-1}{2^d} \quad (4.7)$$

$$\alpha_2 = \frac{d(d+1)}{2^d} \quad (4.8)$$

4.2.3 Formulation EF du problème

Si la formulation *Volumes Éléments Finis* du problème reste inchangée par la modification de l'élément, il n'en est pas de même pour la formulation *Éléments Finis* du problème. En effet si nous gardons la forme b_h^1 définie par l'équation (3.5) :

$$b_h^1(v_h, p_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_h \cdot \vec{\nabla} p_h \, dx,$$

nous ne tiendrons absolument pas compte de la composante \mathcal{P}_0 de la pression dans le calcul du gradient. De façon similaire, si nous reprenons la forme utilisée pour l'élément de Crouzeix-Raviart définie par l'équation (2.10) :

$$b_h^0(v_h, p_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} v_h p_h \, dx,$$

la composante \mathcal{P}_1 de la pression ne sera pas prise en compte dans le calcul du gradient. En effet, la vitesse étant linéaire par élément, $\operatorname{div} v_h$ est une constante par élément et le calcul de l'intégrale précédente se restreint au calcul de la moyenne du champ de pression par élément. En utilisant la décomposition de N_h en \tilde{N}_h et N_h^0 , il est clair que la composante \mathcal{P}_1 ne sera pas prise en compte dans le calcul du gradient. Nous allons donc définir une nouvelle forme b_h^2 combinant les deux précédentes. Pour cela, nous introduisons deux opérateurs de projection qui nous serviront pour définir la forme b_h^2 . Nous introduisons tout d'abord l'opérateur de projection orthogonale Π_h^0 défini sur $L^2(\Omega)$ à valeurs dans N_h^0 .

$$\forall p \in L^2(\Omega), \forall q_h \in N_h^0, (p - \Pi_h^0 p; q_h) = 0$$

Nous introduisons également l'opérateur de projection orthogonale $\tilde{\Pi}_h$ défini sur $L^2(\Omega)$ à valeurs dans \tilde{N}_h .

$$\forall p \in L^2(\Omega), \forall q_h \in \tilde{N}_h, (p - \tilde{\Pi}_h p; q_h) = 0$$

Il est à noter les propriétés suivantes des deux opérateurs que nous venons d'introduire :

$$\begin{aligned} \forall q_h \in N_h^0, \quad \Pi_h^0 q_h &= q_h \\ \forall q_h \in \tilde{N}_h, \quad \Pi_h^0 q_h &= 0 \\ \forall q_h \in N_h^0, \quad \tilde{\Pi}_h q_h &= 0 \\ \forall q_h \in \tilde{N}_h, \quad \tilde{\Pi}_h q_h &= q_h \end{aligned}$$

Soit p une fonction de $L^2_0(\Omega)$. Notons $\bar{p}_h = \Pi_h^0 p$ et $\tilde{p}_h = \tilde{\Pi}_h p = p_h^1 - \bar{p}_h^1$.

Remarque 5. L'écriture de \tilde{p}_h en une fonction \mathcal{P}^1 , p_h^1 , et une fonction \mathcal{P}^0 n'est pas unique car les deux espaces de discrétisation contiennent les constantes globales sur Ω . Par conséquent et pour rendre unique cette décomposition de \tilde{p}_h , il suffit en plus de minimiser la norme de la fonction \bar{p}_h^1 .

La forme $b_h^2(\cdot, \cdot)$ est alors définie par :

$$b_h^2(v, p) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v \cdot \vec{\nabla} p_h^1 \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} v (\bar{p}_h - \bar{p}_h^1) \, dx \quad (4.9)$$

Notons au passage que pour ce choix de la forme b_h^2 , nous avons la relation suivante :

$$\forall v_h \in X_h, \forall p_h \in N_h, b_h^2(v_h, p_h) = b_h^V(v_h, p_h) \quad (4.10)$$

Nous cherchons donc à résoudre le problème suivant : *Trouver (u_h, p_h) dans $X_h \times N_{h,0}$ telle que :*

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) + b_h^2(v_h, p_h) &= L_h(v_h), & \forall v_h \in X_h \\ b_h^2(u_h, q_h) &= 0, & \forall q_h \in N_{h,0} \end{cases} \quad (4.11)$$

Une nouvelle fois, pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution à ce problème, nous devons vérifier les quatre hypothèses du théorème (1.4.1).

- La continuité uniforme de la forme bilinéaire a_h est évidente et nous l'avons rappelé au § 2.3.3.

- La continuité uniforme de la forme bilinéaire b_h^2 reste à démontrer.
- L'ellipticité de la forme bilinéaire a_h est elle aussi évidente (cf. § 2.3.3)
- La condition inf-sup pour la forme bilinéaire b_h^2 entre les espaces X_h et N_h^0 reste à prouver.

Nous nous intéressons donc maintenant à la propriété de continuité uniforme et à la condition de type inf-sup.

Lemme 4.2.1. *Il existe une constante c indépendante de h telle que la propriété de continuité uniforme suivante soit vérifiée :*

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h \in N_h, |b_h^2(v_h, q_h)| \leq c \|v_h\|_{h,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (4.12)$$

Démonstration. Compte tenu de la décomposition L^2 orthogonale de N_h , il suffit de montrer la continuité uniforme de b_h^2 sur $X_h \times N_h^0$ puis sur $X_h \times \tilde{N}_h$. La continuité uniforme sur la première paire d'espaces est évidente puisque la forme b_h^2 sur cet espace s'écrit :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h \in N_h^0, b_h^2(v_h, q_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} v_h q_h \, dx$$

Pour l'autre paire d'espaces, la démonstration n'est pas si évidente et s'inspire de la démonstration de continuité uniforme pour l'élément $\mathcal{P}_1\text{NC}/\mathcal{P}_1 + \text{Bulle}$. Soit q_h un élément de \tilde{N}_h . La forme b_h^2 s'écrit :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h \in \tilde{N}_h, b_h^2(v_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{grad} q_h^1 v_h \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} v_h \bar{q}_h^1 \, dx$$

En intégrant par parties le premier terme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} b_h^2(v_h, q_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div} v_h (q_h^1 - \bar{q}_h^1) \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v_h \cdot n q_h^1 \, ds \\ b_h^2(v_h, q_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v_h \cdot n q_h^1 \, ds \end{aligned}$$

v_h étant linéaire sur chaque élément, $\operatorname{div} v_h$ est une constante par élément. L'intégrale sur les éléments dans l'expression précédente fait donc intervenir la valeur moyenne de $q_h = q_h^1 - \bar{q}_h^1$. q_h étant par définition de N_h à moyenne nulle, l'intégrale sur les éléments est nulle. Considérons une face f de \mathcal{E}_h et notons \bar{w}_h^f la valeur moyenne de tout polynôme w_h sur f . Nous distinguons deux cas suivant la localisation de f :

- f appartient à $\partial\Omega$.

$v_h \cdot n$ est affine sur f et s'annule au barycentre de f , nous avons donc :

$$\int_f v_h \cdot n q_h^1 \, ds = \int_f v_h \cdot n (q_h^1 - \bar{q}_h^{1f}) \, ds$$

- f n'appartient pas à $\partial\Omega$.

L'intégrale sur f apparaît deux fois dans la somme précédente sur les éléments de \mathcal{T}_h , et elle peut donc être remplacée par $\frac{1}{2} \int_f [v_h \cdot n] q_h \, ds$ où $[\cdot]$ représente le saut de la fonction sur f avec le signe correspondant. Or $[v_h \cdot n]$ est affine et s'annule au barycentre de f donc :

$$\frac{1}{2} \int_f [v_h \cdot n] q_h^1 \, ds = \frac{1}{2} \int_f [v_h \cdot n] (q_h^1 - \bar{q}_h^{1f}) \, ds$$

Nous avons donc prouvé que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v_h \cdot n q_h^1 ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{f \subset \partial K} \int_f v_h \cdot n (q_h^1 - \bar{q}_h^{1f}) ds$$

Sur chaque face f de \mathcal{E}_h , vu sur un élément K , nous pouvons donc écrire :

$$\int_f v_h \cdot n (q_h^1 - \bar{q}_h^{1f}) ds = \int_f (v_h - \bar{v}_h^f) \cdot n (q_h^1 - \bar{q}_h^{1f}) ds = \int_f (v_h - \bar{v}_h^f) \cdot n (q_h^1 - \bar{q}_h^1) ds$$

\bar{q}_h^1 est la valeur moyenne de q_h^1 sur l'élément K considéré. Supposons que f est une face d'un élément K de \mathcal{T}_h . h_K représente le diamètre de K , nous utilisons la fonction affine qui envoie K sur un élément de référence \hat{K} et la face f sur une face \hat{f} de \hat{K} , nous avons alors la majoration suivante :

$$\left| \int_f v_h \cdot n (q_h^1 - \bar{q}_h^{1f}) ds \right| \leq ch_K^{d-1} \int_{\hat{f}} |\hat{v}_h - \bar{v}_h^f| |\hat{q}_h^1 - \bar{q}_h^1| d\hat{s},$$

et en utilisant l'équivalence des normes sur l'espace de dimension fini sur l'élément de référence, nous obtenons :

$$\left| \int_f v_h \cdot n (q_h^1 - \bar{q}_h^{1f}) ds \right| \leq ch_K^{d-1} \left\| \hat{v}_h - \bar{v}_h^f \right\|_{1, \hat{K}} \left\| \hat{q}_h^1 - \bar{q}_h^1 \right\|_{0, \hat{K}}$$

□

Nous venons de montrer la continuité uniforme de la forme b_h^2 . Il nous reste donc à démontrer la dernière hypothèse du théorème (1.4.1), à savoir la condition inf-sup.

4.2.4 Résultats de condition inf-sup

Nous prouvons deux résultats de conditions inf-sup. Le premier fait intervenir les espaces X_h^T et \tilde{N}_h . La démonstration de la seconde condition inf-sup, entre les espaces X_h et N_h s'appuie sur la première, à laquelle nous nous intéressons maintenant.

4.2.4.1 Condition inf-sup entre X_h^T et \tilde{N}_h

Le même schéma de démonstration que pour la condition inf-sup entre X_h^T et M_h^1 est suivi.

Lemme 4.2.2. *Sous réserve de vérifier l'hypothèse (1), il existe une constante β_T indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante soit vérifiée :*

$$\forall q_h \in \tilde{N}_h, \sup_{v_h \in X_h^T} \frac{b_h^2(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{h, \Omega}} \geq \beta_T \|q_h\|_{0, \Omega} \quad (4.13)$$

Démonstration. Soit q_h un élément de \tilde{N}_h . En utilisant la propriété d'orthogonalité entre X_h^T et N_h^0 , nous obtenons :

$$b_h^2(v_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{grad} q_h^1 \cdot v_h dx$$

De la définition de \tilde{N}_h , nous déduisons que $\mathbf{grad} q_h^1$ est constant sur chaque élément K . Par conséquent, pour tout v_h dans X_h^T nous avons :

$$\begin{aligned} b_h^2(v_h, q_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{grad} q_h^1|_K \cdot \int_K v_h dx \\ b_h^2(v_h, q_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{grad} (q_h^1 - \bar{q}_h^1)|_K \cdot \int_K v_h dx \end{aligned}$$

Rappelons que pour toute fonction w dans $\mathcal{P}_1(K)$,

$$\int_K w \, dx = \frac{|K|}{d+1} \sum_{f_i \subset \partial K} w(x_i).$$

Ce qui nous donne

$$b_h^2(v_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{d+1} \mathbf{grad} \, q_h|_K \sum_{f_i \subset \partial K, f_i \not\subset \partial \Omega} v_h(x_i).$$

Puisque tous les $v_h \cdot n_{f_i}$ s'annulent en x_i de par la définition de X_h^T et puisque la partie tangentielle de $\mathbf{grad} \, q_h$ est continue sur chaque face f , l'idée est de prendre :

$$(v_h \times n_{f_i})(x_i) = h_{f_i}^2 (\mathbf{grad} \, q_h)_K \times n_{f_i}$$

où h_{f_i} est le diamètre de la face f_i .

$$b_h^2(v_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{d+1} \sum_{f_i \subset \partial K, f_i \not\subset \partial \Omega} h_{f_i}^2 |(\mathbf{grad} \, q_h)_K \times n_{f_i}|^2.$$

De l'hypothèse faite sur la régularité de la famille de triangulations, il résulte que pour tout K de \mathcal{T}_h contenant la face f_i ,

$$\sigma^{-1} h_K \leq h_{f_i} \leq h_K.$$

Nous avons supposé dans le cas de la dimension $d = 2$ qu'au moins deux faces d'un même triangle K n'appartiennent pas à $\partial \Omega$. Par conséquent, les vecteurs unitaires tangents à ces faces forment une base de \mathbb{R}^2 ; de plus, l'angle entre ces deux vecteurs appartient à un intervalle $]\eta, \pi - \eta[$, où η dépend uniquement du paramètre sigma mesurant la régularité de la famille de triangulation $(\mathcal{T}_h)_h$. De façon similaire, en dimension $d = 3$, nous avons supposé qu'au moins deux faces f_i et f'_i de K n'appartiennent pas à $\partial \Omega$. Le vecteur unitaire τ sur leur arête commune, les vecteurs orthogonaux à τ respectivement dans le plan de f_i et de f'_i forment une base de \mathbb{R}^3 ; l'angle entre ces vecteurs appartient également à un intervalle $]\eta, \pi - \eta[$ identique au précédent. Nous obtenons donc

$$b_h^2(v_h, q_h) \geq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |(\mathbf{grad} \, q_h)_K|^2,$$

ou, de façon équivalente

$$b_h^2(v_h, q_h) \geq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |q_h|_{1,K}^2 \quad (4.14)$$

En utilisant la fonction de Lagrange μ_{f_i} qui appartient à $\mathcal{P}_1(K)$ pour tout K de \mathcal{T}_h et s'annule en tous les barycentres des faces des éléments K de \mathcal{T}_h sauf en x_i où elle vaut 1, nous obtenons par passage à l'élément de référence :

$$|\mu_{f_i}|_{1,K} \leq c h_{f_i}^{\frac{d}{2}-1}. \quad (4.15)$$

Ce qui donne

$$|v_h|_{1,K} \leq c h_K |K|^{\frac{1}{2}} |(\mathbf{grad} \, q_h)_K|$$

puis

$$\|v_h\|_{h,\Omega} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |q_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$b_h^2(v_h, q_h) \geq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |q_h|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_h\|_{h,\Omega}.$$

Maintenant, en combinant ce résultat avec une inégalité de type Bramble-Hilbert sur K , nous obtenons

$$\|q_h\|_{0,K} \leq h_K |q_h|_{1,K},$$

ce qui nous permet de conclure. \square

4.2.4.2 Condition inf-sup entre X_h et N_h

Proposition 4.2.1. *Il existe une constante β indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante soit vérifiée :*

$$\forall q_h \in N_h, \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{h,\Omega}} \geq \beta \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (4.16)$$

Démonstration. La démonstration s'appuie sur un argument de type Boland et Nicolaidis [BN83]. Soit $q_h = \tilde{q}_h + q_h^0$, où $\tilde{q}_h \in \tilde{N}_h$ et $q_h^0 \in N_h^0$. En utilisant la condition inf-sup (4.13), il existe une fonction v_h^T dans X_h^T telle que :

$$b_h^2(v_h^T, \tilde{q}_h) = \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 \text{ et } \|v_h^T\|_{h,\Omega} \leq \frac{1}{\beta_T} \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} \quad (4.17)$$

De plus, en utilisant la condition inf-sup de l'élément de Crouzeix-Raviart, il existe une fonction w_h dans X_h telle que :

$$b_h^2(w_h, q_h^0) = \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 \text{ et } \|w_h\|_{h,\Omega} \leq \frac{1}{\beta_N} \|q_h^0\|_{0,\Omega} \quad (4.18)$$

Prenons $v_h = v_h^T + \mu w_h$, et en utilisant les équations (4.17) et (4.18) et la propriété d'orthogonalité :

$$b_h^2(v_h, q_h) = \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 + \mu b_h^2(w_h, \tilde{q}_h)$$

Maintenant, en appliquant la propriété de continuité uniforme de b_h^2 et la relation (4.18) :

$$\begin{aligned} b_h(v_h, q_h) &\geq \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 - \frac{\mu c}{\beta_N} \|q_h^0\|_{0,\Omega} \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} \\ b_h(v_h, q_h) &\geq \left(\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} - \frac{\mu c}{2\beta_N} \|q_h^0\|_{0,\Omega} \right)^2 + \mu \left(1 - \frac{c^2 \mu}{4\beta_N^2} \right) \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

En choisissant $\mu = \frac{2\beta_N^2}{c^2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} b_h^2(v_h, q_h) &\geq \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\beta_N^2}{c^2} \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 \\ b_h(v_h, q_h) &\geq \inf \left\{ 1; \frac{\beta_N^2}{c^2} \right\} \left(\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 \right) \end{aligned}$$

En appliquant une nouvelle fois les expressions (4.17) et (4.18), nous avons :

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{h,\Omega} &\leq \|v_h^T\|_{h,\Omega} + \mu \|w_h\|_{h,\Omega} \\ \|v_h\|_{h,\Omega} &\leq \frac{1}{\beta_T} \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} + \frac{\mu}{\beta_N} \|q_h^0\|_{0,\Omega} \\ \|v_h\|_{h,\Omega} &\leq \left(\frac{1}{\beta_T^2} + \frac{\mu^2}{\beta_N^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

La relation

$$\|q_h\|_{0,\Omega} = \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} + \|q_h^0\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2} \left(\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|q_h^0\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

nous permet de conclure. \square

Les quatre hypothèses du théorème (1.4.1) sont donc vérifiées et **le problème de Stokes discret (4.11) admet donc une solution unique** (u_h, p_h) . Nous nous intéressons maintenant à la convergence de cette solution (u_h, p_h) vers la solution continue (u, p) .

4.2.5 Résultats de convergence

D'après la proposition (4.2.1), sous réserve de vérifier l'hypothèse (1), **nous avons une condition inf-sup optimale entre X_h et N_h** . Cette condition et les propriétés d'approximation standards des espaces X_h et N_h donnent le résultat suivant, qui nous permet d'assurer la convergence de la solution (u_h, p_h) vers la solution continue (u, p) .

Proposition 4.2.2. *Sous réserve de vérifier l'hypothèse (1), pour tout \vec{f} dans $L^2(\Omega)^d$, le problème 4.11 a une solution unique (\vec{u}_h, p_h) dans $X_h \times N_h$. De plus, cette solution vérifie*

$$\|\vec{u}_h\|_{h,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega} \leq c \|\vec{f}\|_{0,\Omega} \quad (4.19)$$

où c est une constante indépendante de h . De plus, si la solution (\vec{u}, p) du problème (1.24) appartient à l'espace $H^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$, il existe une constante c indépendante de h telle que l'estimation d'erreur entre cette solution et la solution (\vec{u}_h, p_h) du problème (4.11) soit la suivante :

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{h,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch \left(\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} \right) \quad (4.20)$$

4.3 Condition inf-sup non optimale pour le $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$

Nous montrons maintenant que la condition inf-sup pour l'élément fini $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$ est réellement non-optimale. Nous allons en fait montrer que le coefficient β est en $\mathcal{O}(h)$. Pour ce faire, nous nous servons de la relation (4.6) liant une pression de l'espace M_h à une pression de l'espace N_h .

$$\forall v_h \in X_h, \quad b_h^V(v_h, \mathbf{1}_K) = db_h^V(v_h, \phi_K)$$

Lemme 4.3.1. *Le terme β_h de la condition inf-sup pour les espaces X_h et M_h relativement à la forme b_h^1 est majoré comme suit :*

$$\exists C \text{ indépendant de } h : \beta_h \leq Ch \quad (4.21)$$

Démonstration. Considérons p_h une fonction de N_h :

$$\begin{aligned} p_h &= \sum_{i=1}^{N_s} p_h^i \tilde{\lambda}_i + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p_h^K \mathbf{1}_K \\ p_h &= \sum_{i=1}^{N_s} p_h^i \lambda_i + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(p_h^K - \frac{1}{d} \sum_{s_i \in K} p_h^i \right) \mathbf{1}_K \end{aligned}$$

Notons p_h^* la fonction de M_h définie par :

$$p_h^* = \sum_{i=1}^{N_s} p_h^i \lambda_i + (d+1) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(p_h^K - \frac{1}{d} \sum_{s_i \in K} p_h^i \right) \psi_K,$$

Nous rappelons les relations 3.28 et 4.6

$$\begin{aligned}\forall v_h \in X_h, \quad b_h^V(v_h, \phi_K) &= \frac{(d+1)}{d} b_h^1(v_h, \phi_K) \\ \forall v_h \in X_h, \quad b_h^V(v_h, \mathbb{1}_K) &= d b_h^V(v_h, \phi_K)\end{aligned}$$

et nous donnons en plus la relation suivante :

$$\forall v_h \in X_h, b_h^2(v_h, \mathbb{1}_K) = b_h^V(v_h, \mathbb{1}_K) \quad (4.22)$$

La combinaison de ces trois relations nous permet d'écrire :

$$\forall v_h \in X_h, b_h^2(v_h, p_h) = b_h^1(v_h, p_h^*) \quad (4.23)$$

Soit v_h la fonction de X_h telle que la condition inf-sup pour l'élément $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$ est satisfaite :

$$\begin{aligned}\beta_h &\leq \frac{b_h^1(v_h, p_h^*)}{\|v_h\|_{h,\Omega} \|p_h^*\|_{0,\Omega}} \\ \beta_h &\leq \frac{b_h^2(v_h, p_h)}{\|v_h\|_{h,\Omega} \|p_h^*\|_{0,\Omega}} \\ \beta_h &\leq c \frac{\|p_h\|_{0,\Omega}}{\|p_h^*\|_{0,\Omega}}\end{aligned}$$

par continuité de la fonction b_h^2 .

Soit p une fonction de $H^2(\Omega)$. Nous choisissons $p_h = p_h^1 + p_h^0$, où p_h^1 est l'interpolation \mathcal{P}_1 de la fonction p et p_h^0 est l'opposé de l'interpolation \mathcal{P}_0 de la fonction p . Par conséquent, nous avons la relation suivante :

$$\|p_h\|_{0,\Omega} \leq ch \|p\|_{2,\Omega}$$

Le numérateur de la fraction précédente majorant β_h tend donc vers 0 avec h . Nous montrons maintenant que le dénominateur ne peut tendre vers 0. En effet, notons p_h^1 et p_h^b les fonctions respectives de M_h^1 et M_h^b telle que $p_h^* = p_h^1 + p_h^b$. Ceci implique :

$$\begin{aligned}\|p_h^1 + p_h^b\|_{0,\Omega}^2 &\geq \|p_h^1\|_{0,\Omega}^2 + \|p_h^b\|_{0,\Omega}^2 - 2 \int_{\Omega} p_h^1 p_h^b \, dx \\ \|p_h^1 + p_h^b\|_{0,\Omega}^2 &\geq \|p_h^1\|_{0,\Omega}^2 + \|p_h^b\|_{0,\Omega}^2 - 2C \|p_h^1\|_{0,\Omega} \|p_h^b\|_{0,\Omega} \\ \|p_h^1 + p_h^b\|_{0,\Omega}^2 &\geq \left(\|p_h^1\|_{0,\Omega} - C \|p_h^b\|_{0,\Omega} \right)^2 + (1 - C^2) \|p_h^b\|_{0,\Omega}^2\end{aligned}$$

La relation (3.18) nous donne la valeur de cette constante C . Cette constante étant en dimension 2 et 3 inférieure à 1, cette relation nous assure que la fonction p_h^* ne peut tendre vers 0 que si les composantes p_h^1 et p_h^b tendent simultanément vers 0. Il existe donc des fonctions p_h^* ne tendant pas vers 0 avec h , ce qui signifie qu'il existe une constante $C > 0$ et indépendante de h telle que :

$$\forall h, \|p_h\|_{0,\Omega} \geq C$$

En combinant ce dernier résultat avec la majoration précédente de p_h et celle de β_h , nous pouvons conclure que :

$$\beta_h \leq Ch \|p\|_{2,\Omega}$$

□

4.4 Consistance de l'espace V_h

Les reproches formulés à l'encontre de l'élément de Crouzeix Raviart traduisent le fait que cet élément ne parvient pas à séparer de façon consistante l'espace L^2 , en une partie à divergence nulle et une partie s'exprimant comme un gradient. Comme nous l'avons déjà signalé, l'espace à V_h de l'élément de Crouzeix Raviart est de trop grande dimension, et nombre de ses fonctions devraient être en fait représentées par un gradient. La capacité d'un élément à séparer l'espace L^2 en une partie à divergence nulle et une partie gradient se mesure à travers l'étude du problème discret de Darcy.

4.4.1 Consistance de l'espace V_h

Le problème de Darcy s'écrit sous la forme du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (4.24)$$

Ce problème peut également s'écrire en formulation variationnelle : *Trouver (u, p) dans $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ tel que :*

$$\begin{cases} m(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle, & \forall v \in L^2(\Omega)^d \\ b(u, q) = 0, & \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.25)$$

Les formes bilinéaires $m(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont définies sur $L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega)^d$ et $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} m(u, v) &= \int_{\Omega} uv \, dx \\ b(v, q) &= \int_{\Omega} \nabla q \cdot v \, dx \end{aligned}$$

Le problème discretisé avec le $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$ repose sur la formulation variationnelle (4.25) et s'écrit : *Trouver (u_h, p_h) dans $X_h \times M_{h,0}$, tel que :*

$$\begin{cases} m(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle, & \forall v_h \in X_h \\ b(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in M_{h,0} \end{cases} \quad (4.26)$$

Notons que pour les équations du problème de Darcy, la discrétisation $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$ est conforme. L'ellipticité de la forme m , la continuité uniforme de m et de b sur $X_h \times X_h$ et $X_h \times M_{h,0}$ tout comme la condition inf-sup sont immédiates. Ceci implique que cet élément possède tous les résultats de convergence optimaux pour les équations de Darcy, et signifie que cet élément sépare correctement l'espace $L^2(\Omega)$ en une partie gradient et une partie à divergence nulle. Concernant l'élément $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$, nous pouvons appliquer la relation (4.23) pour montrer que les deux éléments sont capables de représenter les mêmes gradients de pression, par conséquent, cet élément est lui aussi en mesure de séparer correctement l'espace $L^2(\Omega)$. ♦

De plus, nous montrons que l'espace V_h est consistant à l'ordre 2 avec l'espace V .

Théorème 4.4.1. *Nous avons le résultat d'approximation suivant :*

$$\forall v_h \in V_h, \inf_{v \in V} \|v_h - v\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|v_h\|_{h,\Omega} \quad (4.27)$$

Démonstration. Pour la démonstration, nous introduisons un problème auxiliaire : Trouver (v, ψ) dans $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} (v, w) + (w, \nabla \psi) = (v_h, w), & \forall w \in L^2(\Omega)^d \\ (v, \nabla q) = 0, & \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.28)$$

En prenant, $w = v - v_h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|v - v_h\|_{0,\Omega}^2 &= (v_h, \nabla \psi) \\ &= (v_h, \nabla(\psi - \psi_h)) \quad \forall \psi_h \in M_h^1 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_h \cdot \nabla(\psi - \psi_h) \, dV \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v_h \cdot n (\psi - \psi_h) \, ds \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v_h \cdot n (\psi - \psi_h - \Pi_h^0(\psi - \psi_h)) \, ds \\ &\leq C \|v_h\|_{h,\Omega} \|(\psi - \psi_h) - \Pi_h^0(\psi - \psi_h)\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

Maintenant, nous choisissons ψ_h telle que :

$$\begin{aligned} \|v - v_h\|_{0,\Omega}^2 &\leq Ch \|v_h\|_{h,\Omega} \|(\psi - \psi_h)\|_{0,\Omega} \\ \|v - v_h\|_{0,\Omega}^2 &\leq Ch^2 \|v_h\|_{h,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (4.29)$$

La condition inf-sup pour le problème de Darcy nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \beta \|\psi\|_{1,\Omega} &\leq \sup_{w \in L^2(\Omega)^d} \frac{(w, \nabla \psi)}{\|w\|_{0,\Omega}} \\ &\leq \sup_{w \in L^2(\Omega)^d} \frac{(w, v_h - v)}{\|w\|_{0,\Omega}} \\ \beta \|\psi\|_{1,\Omega} &\leq \|v - v_h\|_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (4.30)$$

En combinant les relations (4.29) et (4.30), nous obtenons le résultat escompté. \square

4.4.2 Super-Convergence de la solution du problème de Stokes

Nous revenons au problème de Stokes dans le cas particulier où $f = \nabla \Phi$, c'est-à-dire $u = 0$. Nous pouvons alors montrer que l'ordre de convergence de la solution discrète vers la solution continue est supérieur aux résultats précédemment obtenus.

Proposition 4.4.1. *La solution (u_h, p_h) du problème de Stokes suivant : Trouver (u_h, p_h) dans $X_h \times N_h^0$ telle que :*

$$\begin{cases} a_h^V(u_h, v_h) + b_h^2(v_h, p_h) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Phi v_h \, dx, & \forall v_h \in X_h \\ b_h^2(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in N_{h,0} \end{cases}$$

à la propriété de super-convergence suivante :

$$\|u_h\|_{h,\Omega} \leq \frac{C}{\nu} h^3 \|\Phi\|_{2,\Omega} \quad (4.31)$$

$$\|\Phi - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|\Phi\|_{2,\Omega} \quad (4.32)$$

Démonstration. Nous avons :

$$\begin{aligned}\|u_h\|_{h,\Omega}^2 &= \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} f \cdot u_h \, dx = \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot u_h \, dx \\ &= \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \nabla (\Phi - \Phi_h) \cdot (u_h - v) \, dx\end{aligned}$$

pour toute fonction Φ_h de M_h , et pour toute fonction v de

$$V = \left\{ v \in L^2(\Omega)^d / \forall \Phi \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot v \, dx = 0 \right\}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\|u_h\|_{h,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} \inf_{\Phi_h \in M_h} |\Phi - \Phi_h|_{1,\Omega} \inf_{v \in V} \|u_h - v\|_{0,\Omega} \quad (4.33)$$

En utilisant le résultat (4.27), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\|u_h\|_{h,\Omega} &\leq \frac{C}{\nu} h^2 \inf_{\Phi_h \in M_h} |\Phi - \Phi_h|_{1,\Omega} \\ \|u_h\|_{h,\Omega} &\leq \frac{C}{\nu} h^3 \|\Phi\|_{2,\Omega}\end{aligned} \quad (4.34)$$

Nous donnons maintenant une majoration de l'erreur de consistance $\|\Phi - p_h\|_{0,\Omega}$. Pour toute fonction q_h de M_h^T , nous avons la relation suivante :

$$q_h \in M_h \cap N_h \quad (4.35)$$

$$\forall v_h \in X_h, \quad b_h^1(v_h, q_h) = b_h^2(v_h, q_h) \quad (4.36)$$

Notons $e_h = p_h - q_h$. Nous avons :

$$\begin{aligned}b_h^2(v_h, e_h) &= \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot v_h - b_h^2(v_h, q_h) - a_h(u_h, v_h) \\ &= b_h^1(v_h, \Phi) - b_h^1(v_h, q_h) - a_h(u_h, v_h)\end{aligned}$$

La condition inf-sup Darcy nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\|e_h\|_{0,\Omega} &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_h^1(v_h, \Phi - q_h) - a_h(u_h, v_h)}{\|v_h\|_{h,\Omega}} \\ \|e_h\|_{0,\Omega} &\leq \frac{C}{\beta} \|\Phi - q_h\|_{0,\Omega} + \frac{C'}{\beta} \|u_h\|_{h,\Omega} \\ \|e_h\|_{0,\Omega} &\leq \frac{C}{\beta} \|\Phi - q_h\|_{0,\Omega} + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|\Phi - p_h\|_{0,\Omega}$ est majoré ainsi :

$$\|\Phi - p_h\|_{0,\Omega} \leq \left(1 + \frac{C}{\beta}\right) \inf_{q_h \in M_h^T} \|\Phi - q_h\|_{0,\Omega} + \mathcal{O}(h^3)$$

Supposons que Φ appartienne à $H^2(\Omega)$, nous obtenons finalement :

$$\|\Phi - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|\Phi\|_{2,\Omega} \quad (4.37)$$

□

4.4.3 Résultats numériques

Pour les trois tests que nous présentons maintenant, nous résolvons les équations de Stokes pour un fluide dans un domaine carré unité. Les trois tests diffèrent uniquement de par les forces volumiques appliquées.

$$-\eta\Delta u + \nabla p = \rho f \quad \text{sur } \Omega, \quad (4.38)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (4.39)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (4.40)$$

Nous fixons $\eta = 0.01\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\rho = 1\text{kg m}^{-3}$ pour la suite des tests, nous reprenons ainsi les tests effectués par Gerbeau [GBB97].

4.4.3.1 Fluide soumis à une force constante f

Nous supposons f constante et égale à $(100, 100)$ sur Ω . Deux calculs sont effectués respectivement avec l'élément de Crouzeix-Raviart $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^0$ et avec le nouvel élément $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$ sur les trois maillages représentés sur les figures (4.2), (4.3) and (4.4).

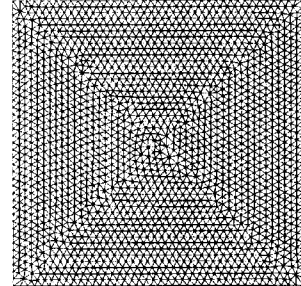
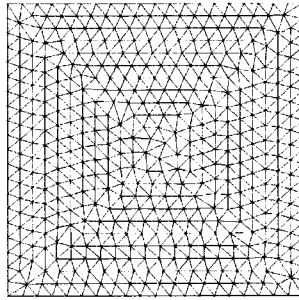
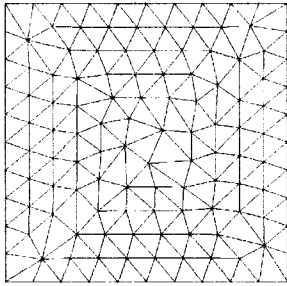


FIG. 4.2 – Maillage grossier

FIG. 4.3 – Maillage intermédiaire

FIG. 4.4 – Maillage fin

Les résultats sont présentés dans le tableau (4.3).

h	0.1	0.05	0.025
Norme L^2 de l'erreur en pression	1.01374	0.313299	0.082203
Norme L^2 de l'erreur en vitesse	14.2575	3.53526	0.762752
Ordre de convergence pour la pression		1.69	1.93
Ordre de convergence pour la vitesse		2.01	2.21

TAB. 4.3 – Résultats obtenus avec l'élément de Crouzeix-Raviart pour une force constante

Avec le nouvel élément, **la solution analytique est obtenue**. La force f est une constante et peut donc s'écrire $f = \nabla\Phi_0$ avec Φ_0 une fonction de $L_0^2(\Omega)$ linéaire sur Ω . Par conséquent Φ_0 appartient à N_h et $(u_h = 0, p_h = \Phi_0)$ est la solution de notre problème de Stokes.

4.4.3.2 Fluide soumis à une force $f = \nabla\Phi$

Dans ce test, nous comparons de nouveau les deux éléments et la force f est égale à $\nabla\Phi_1$, avec $\Phi_1 = x^5 + x^4y^3 + x^2y + y^4$.

Ces tests ont à nouveau été réalisés sur les maillages représentés sur les figures (4.2), (4.3) et (4.4). Les résultats sont donnés dans les tableaux (4.4) et (4.5). Un résultat de super convergence est observé pour le nouvel élément et confirme numériquement les résultats théoriques obtenus précédemment.

h	0.1	0.05	0.025
Norme L^2 de l'erreur en pression	0.0852782	0.0385061	0.018257
Norme L^2 de l'erreur en vitesse	0.312739	0.0767528	0.0178065
Ordre de convergence pour la pression		1.14	1.07
Ordre de convergence pour la vitesse		2.02	2.10

TAB. 4.4 – Résultats obtenus avec l'élément de Crouzeix-Raviart pour $f = \nabla\Phi_1$

h	0.1	0.05	0.025
Norme L^2 de l'erreur en pression	0.0108966	0.00254827	0.00060535
Norme L^2 de l'erreur en vitesse	0.000267965	1.4087e-05	5.75e-07
Ordre de convergence pour la pression		2.09	2.07
Ordre de convergence pour la vitesse		4.24	4.61

TAB. 4.5 – Résultats obtenus avec l'élément $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$ avec $f = \nabla\Phi_1$

4.4.3.3 Fluide soumis à une force $f = \nabla\Phi + \text{rot}g$

Les deux tests précédents illustraient le cas de fluide au repos. La force maintenant appliquée est la somme d'un gradient et d'une composante à divergence nulle engendrant ainsi une vitesse non nulle :

$$f = \nabla\Phi + \overrightarrow{\text{rot}}g \quad (4.41)$$

où $\overrightarrow{\text{rot}}g$ est définie par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Pour s'assurer de la compatibilité entre la condition d'incompressibilité et les conditions aux limites, nous imposons $g = g_0$, avec g_0 définie ainsi :

$$A = 0.1 [xy(1-x)(1-y)]^2, \quad (4.42)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{rot}}A, \quad (4.43)$$

$$g_0 = \text{rot}\vec{u}, \quad (4.44)$$

$\text{rot}\vec{u}$ est alors définie par :

$$\text{rot}\vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Pour les calculs, nous prenons $\Phi(x, y) = \frac{5}{2}y^2 - 10x$.

La figure (4.5) représente les champs de vitesse obtenus sur différents maillages et calculés avec différentes discrétisations, tous comparés avec la solution analytique.

Trois calculs ont été menés sur un maillage structuré 41×41 avec différents étirements en utilisant une discrétisation de type MAC. Les résultats montrent que la discrétisation est très sensible aux étirements du maillage. Deux calculs supplémentaires ont été menés

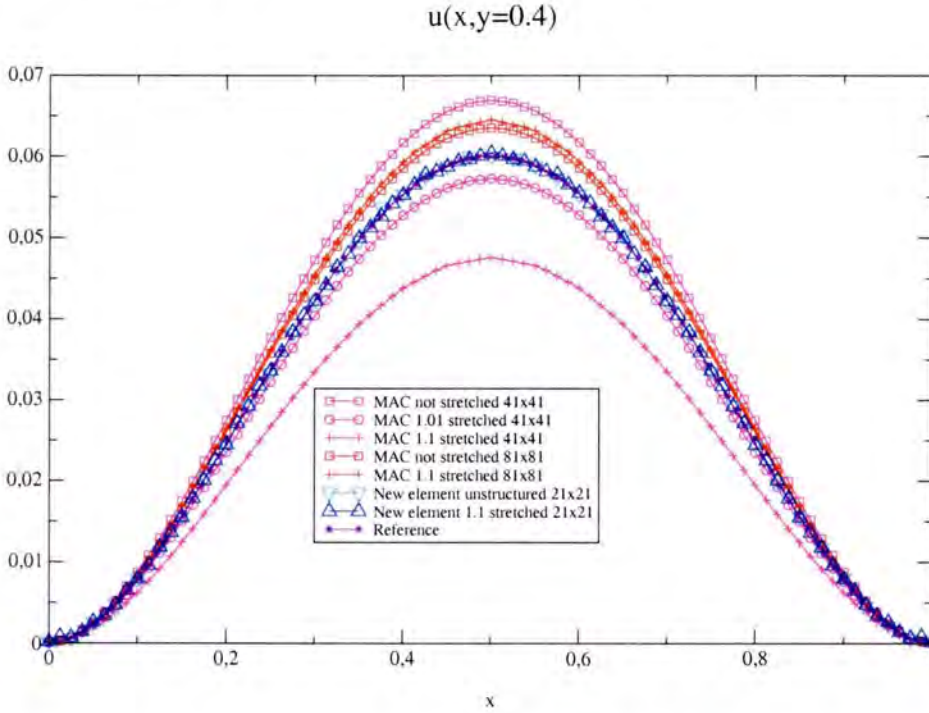


FIG. 4.5 – Résultats du troisième cas test

sur des maillages raffinés structurés 81×81 avec des étirements différents. Si les résultats semblent être moins sensibles aux étirements, les solutions calculées sont encore assez éloignées de la solution analytique. Deux autres calculs ont été fait sur des maillages non structurés générés à partir de maillages structurés 21×21 découpés en triangles, avec là aussi des étirements différents. L'élément de discrétisation est le nouvel élément $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$. Nous constatons que la discrétisation est très peu sensible aux étirements du maillage. De plus, même si les maillages sont relativement grossiers, la solution obtenue est très proche de la solution analytique.

4.5 Modification de l'élément de Taylor Hood

En dimension $d = 2$, il est possible d'étendre les résultats obtenus sur l'élément précédent à d'autres éléments. Nous gardons donc l'espace discret de pression N_h et nous cherchons cette fois la vitesse appartenant à un espace X_h défini comme suit :

$$X_h = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega)^d / \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_2(K)^d \right\}$$

L'espace discret de vitesse est identique à celui de l'élément de Taylor-Hood. Les degrés de liberté de cet élément sont représentés sur la figure (4.6).

Pour analyser ce nouvel élément, il n'est pas nécessaire d'introduire des formes discrètes a_h et b_h car la discrétisation est conforme. En effet, les espaces X_h et N_h sont inclus respectivement dans $H^1(\Omega)^d$ et $L^2(\Omega)$. Par conséquent, le problème de Stokes discret s'écrit : Trouver (u_h, p_h) dans $X_h \times N_h$, vérifiant :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v \rangle, & \forall v_h \in X_h \\ b(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in N_h \end{cases} \quad (4.45)$$

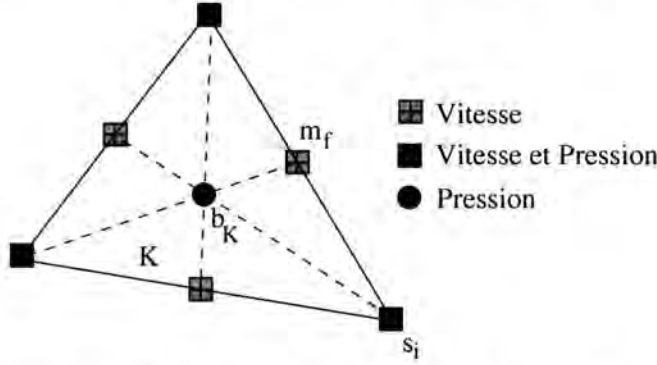


FIG. 4.6 – Degrés de liberté de l'élément de Taylor-Hood modifié

Les formes a et b sont donc tout naturellement continues sur $X_h \times X_h$ et $X_h \times N_h$. L'ellipticité de la forme a est tout aussi évidente. La seule propriété à vérifier pour s'assurer de l'existence d'une solution unique à ce problème est la condition inf-sup. Le même schéma de démonstration que pour l'élément précédemment introduit est suivi ; nous introduisons une décomposition des espaces X_h et N_h avec certaines propriétés d'orthogonalité, puis nous montrons deux conditions inf-sup sur deux paires de sous espaces, enfin un argument analogue à celui de Boland et Nicolaides nous permet de conclure sur la condition inf-sup entre X_h et N_h .

Nous gardons la même décomposition de l'espace N_h à savoir :

$$N_h = \tilde{N}_h \oplus N_h^0$$

Nous décomposons l'espace X_h comme :

$$X_h = X_h^T \oplus X_h^N$$

où X_h^T est défini par :

$$X_h^T = \{v_h \in X_h; \forall e \in \mathcal{E}_h, (v_h \cdot n_e)(m_e) = 0; \forall v_i \in \mathcal{T}_h, v_h(v_i) = 0\}, \quad (4.46)$$

Proposition 4.5.1. *Il existe une constante β_T indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante soit vérifiée :*

$$\forall q_h \in \tilde{N}_h, \sup_{v_h \in X_h^T} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (4.47)$$

Démonstration. La démonstration est exactement identique à la condition inf-sup précédente (4.13). Nous devons simplement prêter attention à la relation suivante

$$\forall w \in \mathcal{P}_2(K), \int_K w \, dx = \frac{|K|}{3} \sum_{e \subset \partial K} w(m_e),$$

valable uniquement en dimension $d = 2$. □

Proposition 4.5.2. *Il existe une constante β indépendante de h telle que la condition inf-sup suivante soit vérifiée :*

$$\forall q_h \in N_h, \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q_h\|_{0,\Omega} \quad (4.48)$$

Démonstration. La démonstration est là encore en tout point identique à la démonstration de la condition inf-sup globale précédente (4.16). \square

Proposition 4.5.3. *Pour tout f dans $L^2(\Omega)^d$, le problème (4.45) admet une solution unique (u_h, p_h) dans $X_h \times N_h$. De plus cette solution vérifie*

$$\|u_h\|_{1,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega} \leq c \|f\|_{0,\Omega}, \quad (4.49)$$

pour une constante c indépendante de h . De plus, si la solution (u, p) du problème (1.24) appartient à $\mathbf{H}^{s+1}(\Omega) \times \mathbf{H}^s(\Omega)$ pour s réel, $0 < s \leq 2$, alors il existe une constante c indépendante de h telle que l'estimation d'erreur suivante entre cette solution et la solution (u_h, p_h) du problème (4.45) est valide :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch^s \left(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega} \right) \quad (4.50)$$

Chapitre 5

Extension au problème de Navier-Stokes

Nous venons d'analyser la nouvelle discrétisation sur le problème de Stokes et nous nous intéressons maintenant au comportement de cette discrétisation sur les équations de Navier-Stokes. En réalité, nous travaillerons sur une forme légèrement modifiée des équations de Navier-Stokes. En effet, le cadre d'application de la plateforme PRICELES étant la Simulation de la Turbulence à l'aide de la Simulation des Grandes Echelles (SGE), nous nous intéresserons aux équations de Navier-Stokes filtrées. Nous introduirons tout d'abord brièvement le principe de la SGE, puis nous établirons les équations de Navier-Stokes filtrées (§5.1).

Nous verrons que du fait de la légère modification qu'introduit la SGE sur les équations de Navier-Stokes, la prise en compte des termes diffusifs demande une attention particulière. Ce point sera abordé dans la section (5.2).

Les problèmes traités par la SGE concernent des écoulements turbulents, ils ne sont donc pas à basse vitesse et les termes convectifs ne peuvent donc plus être négligés. Après avoir présenté ce que nous attendons de la discrétisation des termes de convection, nous proposerons une nouvelle discrétisation de ces termes (§5.3).

5.1 Equations de Navier Stokes avec turbulence

Comme nous l'avons dit, le cadre d'application de la plateforme PRICELES est la Simulation des Grandes Echelles, par conséquent, nous entamons cette partie en présentant brièvement le principe de la SGE et en la situant parmi les méthodes de simulation numérique des écoulements turbulents. Pour plus de détails sur la plateforme PRICELES, le lecteur pourra consulter [Bar00] et [BEL99]. La description de la simulation des grandes échelles dans PRICELES est faite dans la thèse de C. Ackermann [Ack00].

5.1.1 La Simulation des Grandes Echelles

Un écoulement turbulent contient un très grand nombre d'échelles. Si nous voulons simuler toutes ces échelles (i.e. jusqu'au nombre d'onde de coupure de Kolmogorov ¹), il est nécessaire d'avoir un nombre de points de l'ordre de $Re^{3/4}$ (Re : nombre de Reynolds ²),

¹le nombre d'onde de Kolmogorov k_d est celui où se produit la dissipation d'énergie cinétique et correspond aux plus petites structures turbulentes présentes dans l'écoulement.

²Le nombre de Reynolds est un nombre adimensionnel permettant d'évaluer le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il est formé par une échelle de longueur l , une échelle de vitesse u et par la viscosité moléculaire ν . Son expression est : $Re = \frac{ul}{\nu}$. Plus il est élevé, plus l'écoulement est turbulent.

par direction. En trois dimensions, il faut donc $Re^{9/4}$ points. Nous présentons maintenant les principales techniques classiquement utilisées pour simuler des écoulements turbulents.

La Simulation Numérique Directe (SND ou DNS = Direct Numerical Simulation) consiste à résoudre toutes les échelles du mouvement (cf. figure 5.1). Dans ce cas, aucune modélisation de la turbulence n'est introduite, le système est entièrement décrit par les équations de Navier-Stokes.

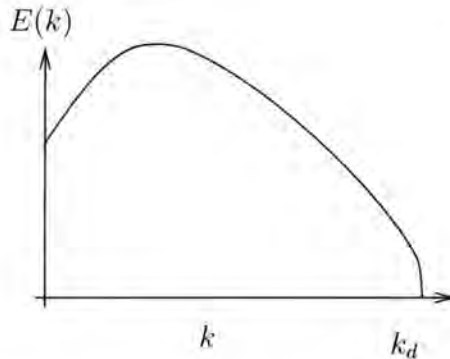


FIG. 5.1 - Spectre d'énergie turbulente - En SND, tout est simulé

Cependant, cette méthode de simulation reste limitée à des écoulements à faible nombre de Reynolds, assez peu turbulents, car elle nécessite des maillages très importants (de l'ordre $Re^{9/4}$ points de discrétisation) pour pouvoir capter toutes les échelles du mouvement. Pour les écoulements à haut nombre de Reynolds, nous sommes actuellement limités par la capacité des calculateurs ; les calculs industriels à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 ou plus ne sont donc pas envisageables pour le moment. C'est pour cette raison que d'autres modélisations ont été développées.

Les approches moyennées (RANS = Reynolds Averaged Navier-Stokes) permettent de simuler des écoulements à des nombres de Reynolds plus grands. Une moyenne statistique des grandeurs de l'écoulement est calculée et les fluctuations par rapport à cette moyenne sont modélisées (cf. [Sag98] et figure 5.2). Habituellement, la moyenne statistique correspond à une moyenne temporelle, ce qui nécessite moins de points de discrétisation, car l'opération de moyenne diminue considérablement le nombre d'échelles présentes dans l'écoulement, et permet donc de réaliser des simulations à plus haut nombre de Reynolds. La méthode $k - \epsilon$ est un exemple d'approche RANS.

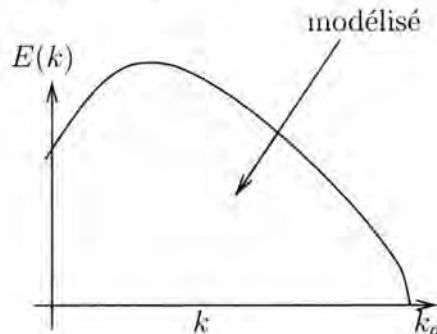


FIG. 5.2 - Spectre d'énergie turbulente - En RANS

Ce type d'approche ne permet pas de simuler tous les types d'écoulements. Par exemple, la simulation d'écoulements instationnaires n'est pas envisageable, dans le cas où la grandeur calculée correspond à une moyenne temporelle. L'approche intermédiaire aux méthodes RANS et à la SND est celle que nous allons utiliser dans ce chapitre.

La Simulation des Grandes Echelles (ou LES = Large Eddy Simulation) permet de simuler toutes les échelles, jusqu'à une échelle spatiale, que nous nommons *échelle de coupure* : les échelles plus petites sont alors modélisées (figure 5.3). Par rapport à une SND, moins de points de discrétisation sont nécessaires, ce qui permet d'envisager des situations à des nombres de Reynolds plus élevés et, par rapport à une méthode RANS, nous avons accès à des informations supplémentaires.

Elles sont de deux types :

- des informations statistiques, comme les valeurs moyennes, mais aussi les fluctuations des différentes grandeurs (écart types ...), ou des spectres temporels (ou spatiaux dans certains cas).
- des informations sur la topologie de l'écoulement : nous pouvons voir les structures cohérentes (tourbillons ...), présentes dans l'écoulement.

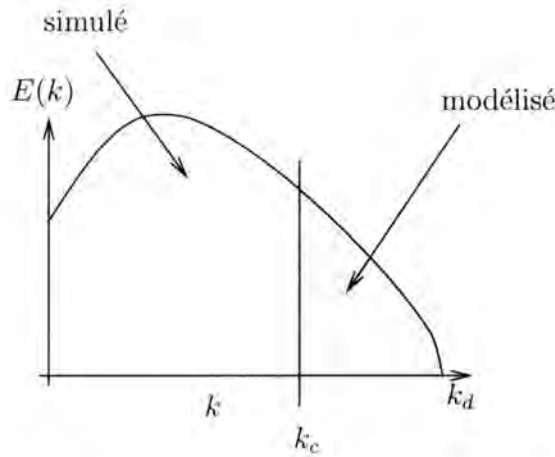


FIG. 5.3 – Spectre d'énergie turbulente - En SGE

Nous donnons maintenant plus de précision sur le principe de la Simulation des Grandes Echelles. En Simulation des Grandes Echelles, nous résolvons explicitement les grandes échelles et nous modélisons ce qui se passe aux échelles plus petites. Ceci revient à appliquer un filtre passe-bas (pour les nombres d'onde), qui élimine les fluctuations des échelles inférieures à la largeur du filtre $\bar{\Delta}$, appelées *échelles sous-maille*.

5.1.2 Les équations de Navier-Stokes filtrées

Le sujet principal de notre travail n'est pas la SGE, c'est pourquoi nous nous limiterons à rappeler les propriétés que doit vérifier le filtre et à donner quelques exemples de filtre utilisé. L'opération de filtrage ne nous intéresse que d'un point de vue formel pour obtenir les équations que nous devons discrétiser.

Le filtre Soit G ce filtre, et \bar{f} la grandeur filtrée correspondant à f . L'opération de filtrage correspond à un produit de convolution, nous avons :

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = (G * f)(\vec{x}, t) = \int f(\vec{y}, t) G(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} \quad (5.1)$$

Pour que les équations de Navier-Stokes filtrées conservent les propriétés mathématiques des équations de Navier-Stokes, le filtre doit vérifier les propriétés suivantes (cf. [Sag98]) :

- il doit conserver les constantes : $\bar{a} = a$, si a est une constante (par construction),
- il doit être linéaire : $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$. Cette propriété est vérifiée quelque soit G , du fait de la linéarité du produit de convolution.

– il doit commuter avec la dérivation : $\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$.

Nous présentons les filtres classiquement utilisés en Simulation des Grandes Echelles. Nous les écrivons pour le cas mono-dimensionnel.

– Pour une SGE dans l'espace spectral, le filtre classiquement utilisé est le **filtre droit** ou **filtre porte**, défini par :

$$G(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < k_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2)$$

k_c est le nombre d'onde de coupure du filtre.

Les autres filtres explicites utilisés sont :

– le **filtre gaussien** défini par :

$$G(x) = \left(\frac{\gamma}{\pi \bar{\Delta}^2} \right) \exp \left(-\frac{\gamma \|x\|^2}{\bar{\Delta}^2} \right) \quad (5.3)$$

où γ est une constante, habituellement prise égale à 6.

– le **filtre boîte** ou **filtre droit dans l'espace physique** défini par :

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}} & \text{si } \|x\| < \frac{\bar{\Delta}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.4)$$

Par définition, $k_c = \frac{2\pi}{\bar{\Delta}}$ et $\bar{\Delta} = 2\Delta x$, d'où : $k_c = \frac{\pi}{\Delta x}$.

En pratique, le filtre que nous utilisons dans le cadre de la plateforme PRICELES est *un filtre implicite* lié à la discrétisation. En Volumes Finis, le filtre implicite dû au maillage peut être assimilé à un filtre boîte, car les grandeurs calculées peuvent être considérées comme leur moyenne sur les volumes de contrôle. La largeur de ce filtre est $2\Delta x$.

Pour ce travail, nous supposons que ce filtre vérifie les trois propriétés requises. Notons que si la troisième propriété n'est pas vérifiée, l'erreur dû à la non commutation des opérateurs de filtrage et de dérivation est d'ordre deux (cf. [GM95]) et vient s'ajouter aux erreurs numériques d'approximation et de modélisation.

Nous appliquons le filtre passe-bas aux équations de Navier-Stokes (équations 1.11 et 1.12). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) &= \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j - u_i \bar{u}_j) \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la propriété d'incompressibilité et le fait que nous nous intéressons à des écoulements à viscosité constante, nous pouvons réécrire ainsi la première équation :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{S}_{ij} + T_{ij})$$

$$\text{avec } T_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}$$

T_{ij} est le tenseur des contraintes sous-maille.

Ce terme caractérise les effets des échelles sous-maille sur les grandes échelles ; c'est par ce terme que nous modélisons la turbulence. Nous considérons ici uniquement des modèles

faisant l'hypothèse d'une viscosité turbulente, c'est à dire que le tenseur des contraintes sous-maille peut s'écrire comme :

$$T_{ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij}.$$

La viscosité turbulente est alors évaluée avec un modèle sous maille. Les modèles de Smagorinsky et Fonction de Structure, ainsi que plusieurs de leurs variantes sont implémentées dans la plateforme PRICELES. Les équations de Navier-Stokes filtrées s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.6)$$

5.2 Aspects diffusifs

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'implémentation de l'opérateur de diffusion. Nous verrons que la combinaison de la non conformité de la vitesse discrétisée et de la modification du terme de diffusion pour prendre en compte les effets de la turbulence nous force à prendre quelques précautions pour implémenter l'opérateur de diffusion turbulente.

Nous nous intéressons à la discrétisation du terme de diffusion des équations de Navier-Stokes standards. Dans ce cas, le terme continu à discrétiser s'écrit :

$$\text{Diff}_A = \text{div} \left(\nu \vec{\nabla} u \right) = \nu \Delta u$$

puisque nous avons supposé ν constant.

Ce terme est celui que nous avons étudié dans les chapitres précédents lors de l'étude de la discrétisation du problème de Stokes.

Revenons maintenant aux équations qui nous intéressent, à savoir les équations de la SGE, les équations de Navier-Stokes filtrées. La modélisation de la turbulence étant uniquement prise en compte de façon diffusive, le terme de diffusion des équations en est bien évidemment affecté. Ce terme s'écrit :

$$\text{Diff}_B = \text{div} \left[(\nu + \nu_t) \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right) \right]$$

Le terme de diffusion a été modifié en deux points :

- La turbulence modélisée par une action purement dissipative a conduit à l'introduction d'une viscosité turbulente ν_t .
- La nature du terme de diffusion a également été modifiée puisque cette fois, ce n'est plus la divergence du gradient de vitesse qui intervient mais la divergence du tenseur des vitesses de déformation.

Ces deux modifications entraînent bien évidemment une modification du comportement de l'opérateur de diffusion. Aussi, pour mieux identifier l'effet des deux modifications apportées au terme de diffusion, nous décidons de séparer les deux effets en écrivant le terme de diffusion sous la forme suivante :

$$\text{Diff}_B = \nu \text{div} \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right) + \text{div} \left[\nu_t \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right) \right] \quad (5.7)$$

Ainsi, nous pouvons analyser le comportement de cet opérateur de diffusion dans le cadre d'un écoulement laminaire sans prendre en compte le second terme mais en considérant uniquement le terme $\nu \text{div} \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right)$.

5.2.1 Diffusion laminaire

Au terme de diffusion standard $\nu\Delta u$, s'est donc ajouté un terme faisant intervenir la divergence du gradient de vitesse transposée. Ce terme n'apparaît pas dans la formulation continue car en appliquant la relation suivante :

$$\operatorname{div} \left(\vec{\nabla} u^T \right) = \vec{\nabla} (\operatorname{div} u)$$

il apparaît que pour un écoulement incompressible, ce terme est nul. Pour cette raison, le terme de diffusion que l'on cherche à discrétiser de façon standard est uniquement $\nu\Delta u$. Pour connaître l'influence et les effets du terme rajouté, nous nous intéressons à sa discrétisation :

$$a_h^*(u_h, v_h) = \sum_K \int_K \nu \left(\vec{\nabla} u_h \right)^T : \vec{\nabla} v_h \, dV$$

Ici par souci de simplicité d'écriture, nous omettons les indices h de u_h et v_h . Notons $A(K)$ l'intégrale sur K .

$$A(K) = \int_K \nu_h (u_{x,x}v_{x,x} + u_{y,x}v_{x,y} + u_{x,y}v_{y,x} + u_{y,y}v_{y,y}) \, dV$$

On applique deux fois la formule de Green sur les "termes croisés" :

$$\begin{aligned} \int_K \nu_h u_{y,x}v_{x,y} \, dV &= \nu_h|_K \left(- \int_K u_{y,xy}v_x \, dV + \int_{\partial K} u_{y,x}v_x n_y \, ds \right) \\ &= \nu_h|_K \left(\int_K u_{y,y}v_{x,x} \, dV + \int_{\partial K} u_{y,x}v_x n_y \, ds - \int_{\partial K} u_{y,y}v_x n_x \, ds \right) \end{aligned}$$

De même pour l'autre terme croisé, on obtient :

$$\int_K \nu_h u_{x,y}v_{y,x} \, dV = \nu_h|_K \left(\int_K u_{x,x}v_{y,y} \, dV + \int_{\partial K} u_{x,y}v_y n_x \, ds - \int_{\partial K} u_{x,x}v_y n_y \, ds \right)$$

En réintroduisant ces équations dans l'expression $A(K)$, on obtient :

$$\begin{aligned} A(K) &= \int_K \nu_h (u_{x,x}v_{x,x} + u_{y,y}v_{x,x} + u_{x,x}v_{y,y} + u_{y,y}v_{y,y}) \, dV \\ &+ \int_{\partial K} \nu_h (u_{y,x}n_y - u_{y,y}n_x) v_x \, ds + \int_{\partial K} \nu_h (u_{x,y}n_x - u_{x,x}n_y) v_y \, ds \\ &= \int_K \nu_h ((u_{x,x} + u_{y,y})(v_{x,x} + v_{y,y})) \, dV \\ &+ \int_{\partial K} \nu_h (u_{y,x}n_y - u_{y,y}n_x) v_x \, ds + \int_{\partial K} \nu_h (u_{x,y}n_x - u_{x,x}n_y) v_y \, ds \end{aligned}$$

Nous cherchons une solution à notre problème qui est dans V_h . Or pour le choix d'espaces et de formes bilinéaires que nous avons fait, les fonctions de V_h sont à divergence nulle sur les éléments donc les intégrales sur les triangles, s'annulent, et il reste les intégrales sur le bord des éléments. Les transformations effectuées sur les triangles sont "l'équivalent" de la transformation en continu $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u})^T = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$.

La quantité $a_h^*(u, v)$ se limite donc au saut des gradients de vitesse, si l'on considère ν constant, à travers les triangles :

$$\begin{aligned} a_h^*(u, v) &= \sum_K A(K) \\ a_h^*(u, v) &= \sum_K \left(\int_{\partial K} \nu_h (u_{y,x} n_y - u_{y,y} n_x) v_x \, ds + \int_{\partial K} \nu_h (u_{x,y} n_x - u_{x,x} n_y) v_y \, ds \right) \quad (5.8) \\ &= \sum_{e \notin \partial \Omega} \int_e [\nu_h (u_{y,x} n_y - u_{y,y} n_x)] v_x \, ds + \sum_{e \notin \partial \Omega} \int_e [\nu_h (u_{x,y} n_x - u_{x,x} n_y)] v_y \, ds \end{aligned}$$

5.2.1.1 Détails pour une fonction de X_h

Nous allons maintenant expliciter ce terme supplémentaire pour des fonctions \mathcal{P}^1 non conforme et pour des fonctions \mathcal{P}^1 . Nous verrons alors clairement que le terme supplémentaire est identiquement nul pour la discrétisation \mathcal{P}^1 tandis qu'il ne l'est pas pour la discrétisation non conforme.

Pour ce faire, nous étudierons deux cas

- l'influence de la fonction sur elle-même,
- l'influence de la fonction sur une fonction voisine.

Influence d'une fonction sur elle-même Il nous suffit de considérer un élément K . La normale à la surface f_0 et extérieure à K est notée \vec{S}_0 et ses composantes sont S_x^0 et S_y^0 . La figure (5.4) illustre cette configuration.

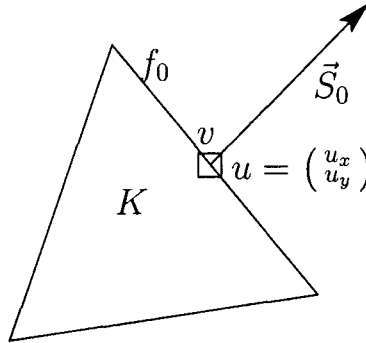


FIG. 5.4 – Notations pour le calcul du gradient d'une fonction \mathcal{P}^1 NC : premier cas

Soit \vec{u} la fonction de X_h portée par cette face f_0 , de composantes u_x et u_y . Le gradient de cette fonction s'écrit :

$$\mathbf{grad} u|_K = \begin{bmatrix} \frac{u_x S_x^0}{|K|} & \frac{u_x S_y^0}{|K|} \\ \frac{u_y S_x^0}{|K|} & \frac{u_y S_y^0}{|K|} \end{bmatrix}$$

La fonction test v est portée par la même face f_0 . En reprenant l'expression (5.8) avec $\nu = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \frac{u_y S_x^0}{|K|} S_y^0 - \frac{u_y S_y^0}{|K|} S_x^0 = 0 \\ a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= \frac{u_x S_y^0}{|K|} S_x^0 - \frac{u_x S_x^0}{|K|} S_y^0 = 0 \end{aligned}$$

Remarque 6. Nous donnons le résultat équivalent pour une fonction discrétisée \mathcal{P}^1 . La figure (5.5) illustre les notations choisies.

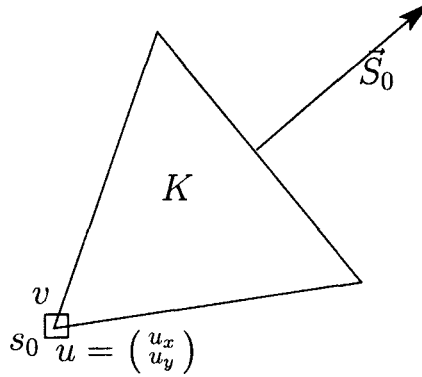


FIG. 5.5 – Notations pour le calcul du gradient d'une fonction \mathcal{P}^1 : premier cas

Le gradient de la fonction $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ associée au sommet s_0 s'écrit :

$$\mathbf{grad}u|_{K_i} = \begin{bmatrix} -\frac{u_x S_x^0}{|K|} & -\frac{u_x S_y^0}{|K|} \\ -\frac{u_y S_x^0}{|K|} & -\frac{u_y S_y^0}{|K|} \end{bmatrix}$$

La fonction test v est également associée au sommet s_0 . Là encore, en reprenant l'expression (5.8) avec $\nu = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \frac{u_y S_x^0}{|K|} \frac{1}{2} S_y^0 - \frac{u_y S_y^0}{|K|} \frac{1}{2} S_x^0 = 0 \\ a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= \frac{u_x S_y^0}{|K|} \frac{1}{2} S_x^0 - \frac{u_x S_x^0}{|K|} \frac{1}{2} S_y^0 = 0 \end{aligned}$$

Nous constatons donc que le terme supplémentaire de diffusion que nous étudions n'a pas d'influence sur les termes diagonaux que ce soit pour une discrétisation \mathcal{P}^1 conforme ou non.

Influence d'une fonction sur une fonction voisine Soit \vec{u} la fonction de X_h portée par cette face f_0 , de composantes u_x et u_y .

Le gradient de cette fonction s'écrit :

$$\mathbf{grad}u|_K = \begin{bmatrix} \frac{u_x S_x^0}{|K|} & \frac{u_x S_y^0}{|K|} \\ \frac{u_y S_x^0}{|K|} & \frac{u_y S_y^0}{|K|} \end{bmatrix}$$

La fonction v est cette fois portée par la face f_1 . En reprenant l'expression (5.8) avec $\nu = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \frac{u_y S_x^0}{|K|} S_y^1 - \frac{u_y S_y^0}{|K|} S_x^1 \\ a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= \frac{u_x S_y^0}{|K|} S_x^1 - \frac{u_x S_x^0}{|K|} S_y^1 \end{aligned}$$

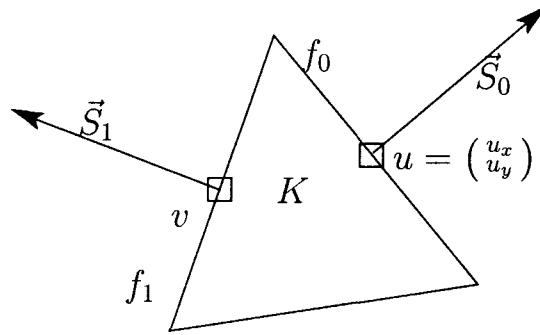


FIG. 5.6 – Notations pour le calcul du gradient d'une fonction \$\mathcal{P}^1\$NC : second cas

Remarque 7. Nous donnons le résultat équivalent pour une fonction discrétisée \$\mathcal{P}^1\$. La figure (5.7) illustre les notations choisies.

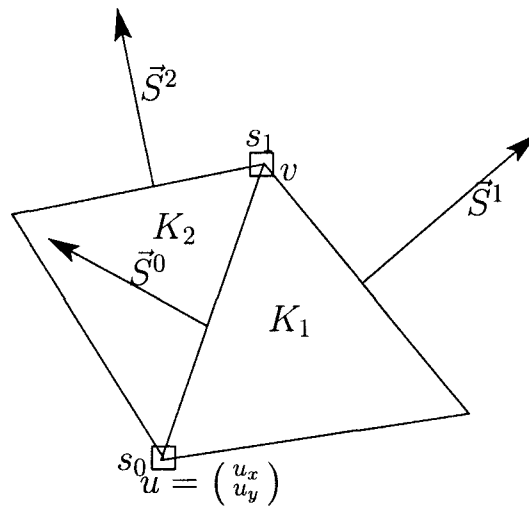


FIG. 5.7 – Notations pour le calcul du gradient d'une fonction \$\mathcal{P}^1\$: second cas

Le gradient de la fonction \$u\$ associée au sommet \$s_0\$ sur l'élément \$K_i\$ s'écrit :

$$\mathbf{grad}u|_{K_i} = \begin{bmatrix} -\frac{u_x S_x^i}{|K_i|} & -\frac{u_x S_y^i}{|K_i|} \\ -\frac{u_y S_x^i}{|K_i|} & -\frac{u_y S_y^i}{|K_i|} \end{bmatrix}$$

La fonction \$v\$ est associée au sommet \$s_1\$. En reprenant l'expression (5.8) avec \$\nu = 1\$, nous

obtenons :

$$\begin{aligned}
a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \frac{u_y S_x^1}{|K_1|} \frac{1}{2} (S_y^1 + S_y^0) + \frac{u_y S_x^2}{|K_2|} \frac{1}{2} (S_y^{1-2} - S_y^0) \\
&\quad - \frac{u_y S_y^1}{|K_1|} \frac{1}{2} (S_x^1 + S_x^0) - \frac{u_y S_y^2}{|K_2|} \frac{1}{2} (S_x^2 - S_x^0) \\
&= \frac{u_y S_x^1}{|K_1|} \frac{1}{2} S_y^0 - \frac{u_y S_x^2}{|K_2|} \frac{1}{2} S_y^0 - \frac{u_y S_y^1}{|K_1|} \frac{1}{2} S_x^0 + \frac{u_y S_y^2}{|K_2|} \frac{1}{2} S_x^0 \\
&= \frac{u_y}{2} \left(\left\| \bar{S}^0 \wedge \frac{\bar{S}^{0-1}}{|K_1|} \right\| - \left\| \bar{S}^0 \wedge \frac{\bar{S}^{0-2}}{|K_2|} \right\| \right) = 0 \\
a_h^*(u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= \frac{u_x S_y^1}{|K_1|} \frac{1}{2} (S_x^1 + S_x^0) + \frac{u_x S_y^2}{|K_2|} \frac{1}{2} (S_x^2 - S_x^0) \\
&\quad - \frac{u_x S_x^1}{|K_1|} \frac{1}{2} (S_y^1 + S_y^0) - \frac{u_x S_x^2}{|K_2|} \frac{1}{2} (S_y^2 - S_y^0) \\
&= \frac{u_x S_y^1}{|K_1|} \frac{1}{2} S_x^0 - \frac{u_x S_y^2}{|K_2|} \frac{1}{2} S_x^0 - \frac{u_x S_x^1}{|K_1|} \frac{1}{2} S_y^0 + \frac{u_x S_x^2}{|K_2|} \frac{1}{2} S_y^0 \\
&= \frac{u_x}{2} \left(\left\| \bar{S}^0 \wedge \frac{\bar{S}^{0-1}}{|K_1|} \right\| - \left\| \bar{S}^0 \wedge \frac{\bar{S}^{0-2}}{|K_2|} \right\| \right) = 0
\end{aligned}$$

Cette fois-ci, nous pouvons constater que le terme supplémentaire de diffusion que nous étudions, s'il est nul pour les termes extra-diagonaux dans le cas d'une discrétisation \mathcal{P}^1 conforme, ne l'est pas dans le cas d'une discrétisation \mathcal{P}^1 non conforme.

En conclusion, nous pouvons dire que ce terme (nul dans le cas continu) est nul dans le cas d'une discrétisation \mathcal{P}^1 conforme (il peut donc être ajouté et pris en compte sans désagrément), tandis qu'il n'est pas nul pour une discrétisation \mathcal{P}^1 non conforme. La prise en compte d'un tel terme va donc introduire une erreur purement numérique.

5.2.1.2 Illustration numérique

Pour nous rendre compte de l'effet de l'ajout de ce terme à l'opérateur de diffusion laminaire, nous l'avons implémenté et testé sur un cas simple. Le cas test que nous avons choisi pour illustrer l'influence de ce terme est le cas d'un écoulement 2D de Poiseuille. Le domaine de calcul est un carré de côté 1 maillé en 800 triangles.

- Sur les frontières $y = 0$ et $y = 1$, une condition d'adhérence est imposée $\vec{u} = \vec{0}$.
- Sur la frontière $x = 0$, une pression $p = 0$ est imposée.
- Sur la frontière $x = 1$, une pression $p = 1$ est imposée.

Ce problème admet la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}y(y-1) \\ v = 0 \\ p = x \end{cases}$$

Le maillage utilisé ainsi que les résultats du calcul sont présentés sur les figures 5.8 à 5.11. Le maillage que nous avons utilisé pour ce calcul privilégie volontairement une direction, pour mieux illustrer le fait que le terme ajouté à la diffusion est dépendant du maillage.

Bien entendu, la résolution de ce problème avec l'opérateur de diffusion laminaire non modifié donne des résultats tout à fait satisfaisants (les normes d'erreurs obtenues sur la vitesse sont de l'ordre de 1.e-5). Sur la figure représentant la solution de vitesse horizontale

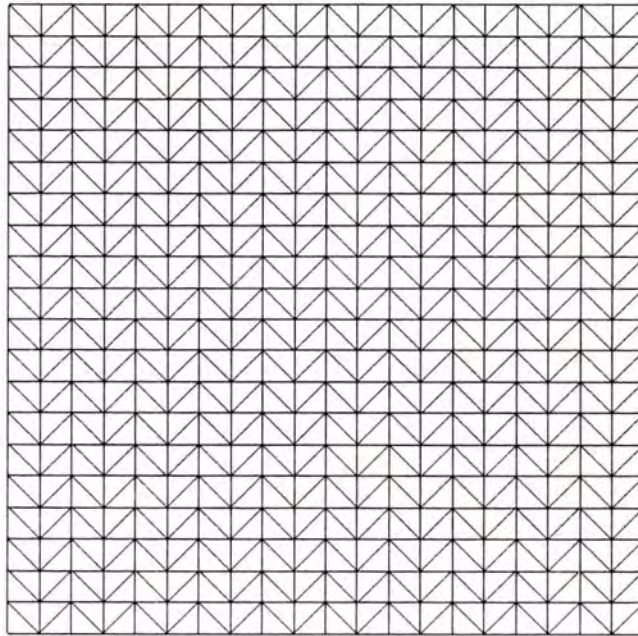


FIG. 5.8 – Poiseuille : Maillage utilisé

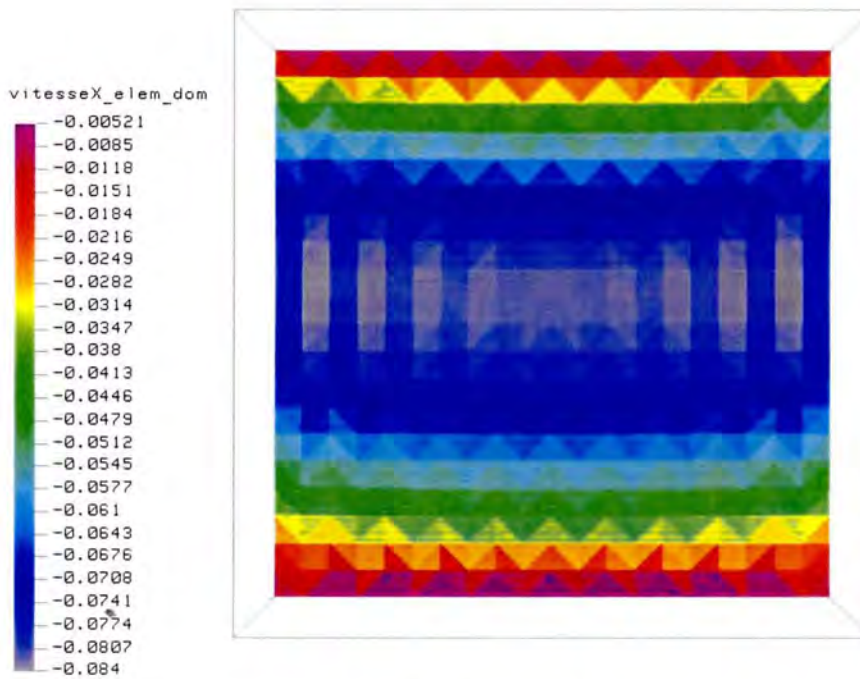


FIG. 5.9 – Poiseuille : Vitesse horizontale

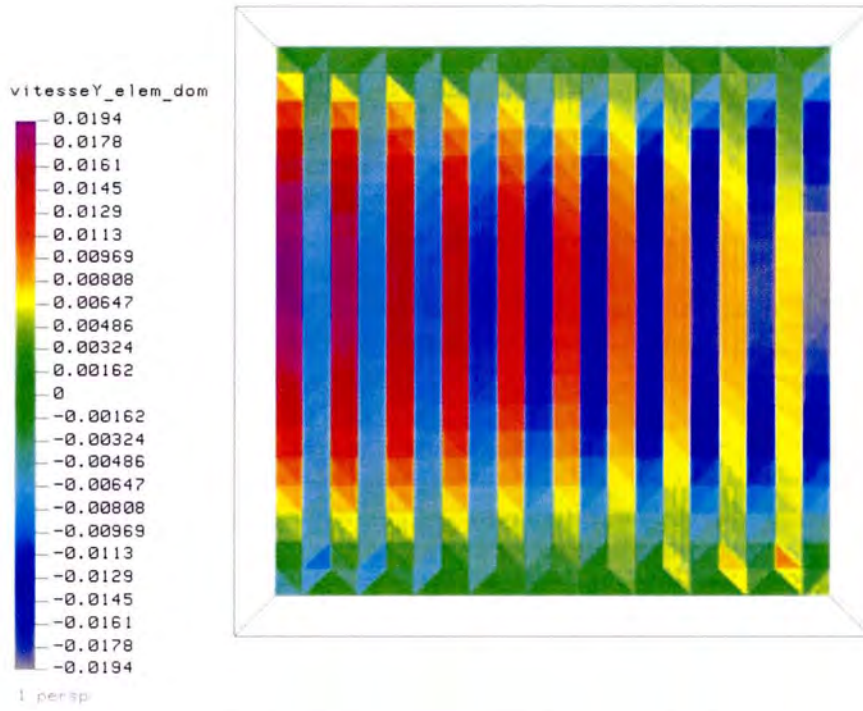


FIG. 5.10 – Poiseuille : Vitesse verticale

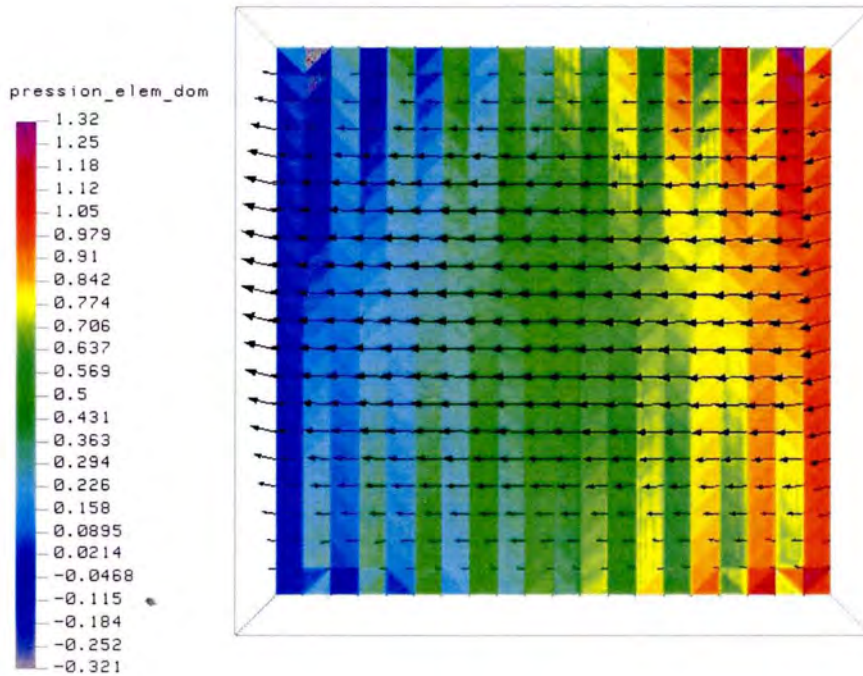


FIG. 5.11 – Poiseuille : Pression

u_h avec gradient transposé, nous observons des bandes d'isovaleurs horizontales tout à fait normales puisque la solution continue est $y(y - 1)$. Mais nous distinguons également sur cette figure, des bandes d'isovaleurs verticales de même fréquence que le maillage, alors que la solution continue ne dépend absolument pas de x . Ces bandes verticales sont uniquement le fait du terme de diffusion modifié. Les perturbations sont encore plus flagrantes sur les figures représentant les champs de vitesse verticale et de pression. La vitesse verticale devrait être nulle or nous distinguons le même type de bande, le fluide suivant en fait les lignes de maillage. L'intensité de ces perturbations est de plus élevée puisque le maximum de vitesse parasite verticale relevée représente près de 25% du maximum de la vitesse horizontale. Le champ de pression est lui aussi parasité et laisse apparaître ses bandes de même fréquence que le maillage.

Dans le cas d'un écoulement laminaire, où l'on suppose en plus que la viscosité est constante, nous ne tenons pas compte dans le terme de diffusion de ce terme supplémentaire que nous venons d'étudier.

5.2.2 Diffusion turbulente

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la modification de la nature du terme de diffusion des équations de Navier-Stokes filtrées a des conséquences relativement importantes. Dans le cas d'un écoulement turbulent, au niveau des zones où le modèle de turbulence n'intervient pas, il serait erroné de tenir compte du terme faisant intervenir la divergence du gradient transposé dans le terme de diffusion. Par conséquent, nous avons choisi de modifier le terme de diffusion turbulente pour tenter de limiter les erreurs numériques apportées par la non conformité de la vitesse. Le terme à discrétiser est celui de l'équation 5.7 :

$$\text{Diff}_B = \nu \operatorname{div} \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right) + \operatorname{div} \left[\nu_t \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right) \right]$$

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent la prise en compte du gradient transposé dans le cadre d'une discrétisation \mathcal{P}^1 non conforme introduit une erreur purement numérique. Dans le cadre d'un écoulement laminaire où de surcroît nous avons considéré la viscosité moléculaire ν constante, le paragraphe précédent nous a montré quels étaient les effets de ce terme et nous avons donc décidé de ne pas tenir compte de ce dernier. Le premier terme de l'équation 5.7 est donc modifié pour ne pas tenir compte du gradient transposé. Le second terme de cette équation n'est lui pas modifié. En effet, celui ci fait intervenir la viscosité turbulent qui varie de maille en maille. Il n'est donc pas possible de tenir le même raisonnement que précédemment pour éliminer le terme en gradient transposé. Par conséquent le terme diffusif turbulent discrétisé s'écrit :

$$\text{Diff}_t = \nu \operatorname{div} \left(\vec{\nabla} u \right) + \operatorname{div} \left[\nu_t \left(\vec{\nabla} u + \vec{\nabla} u^T \right) \right] \quad (5.9)$$

5.3 Aspects Convectifs

5.3.1 Problématique

La complexité de l'étude, de la discrétisation et de la résolution des équations de Navier-Stokes vient en grande partie des termes convectifs non-linéaires. C'est pour cette raison que l'étude de l'élément que nous avons introduit s'est faite sur les équations du problème de Stokes où les termes de convection sont négligés.

Une nouvelle fois, nous allons voir combien il est important que l'espace discret V_h soit consistant avec l'espace continu V .

Cette fois ci, nous supposons que le fluide étudié est très peu visqueux au point que nous négligerons les termes diffusifs. Le problème auquel nous nous intéressons est donc le suivant : nous cherchons à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (5.10)$$

La solution continue de ce problème est la suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \\ p &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Nous avons effectué deux calculs sur ce cas test. Le domaine Ω est le carré unité. Les deux calculs sont initialisés avec le champ solution continu. Un calcul a été lancé en discrétisant à l'aide de l'élément de Crouzeix-Raviart. Un autre a été mené à l'aide de l'élément $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$ sur un maillage 11x11. Le premier calcul n'a pas abouti et a divergé. Avant de présenter le résultat du second calcul, nous tentons de donner une explication de cette divergence.

5.3.1.1 L'espace V_h trop grand du $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^0$

Pour illustrer cette explication, nous nous appuyerons sur deux exemples de maillages simplifiés du domaine Ω présentés sur les figures suivantes (5.12, 5.13). En noir, nous avons représenté, la solution du problème continu. En rouge, nous avons fait figurer l'accélération du terme convectif.

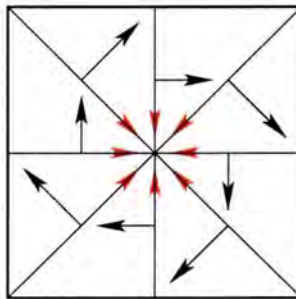


FIG. 5.12 – Premier exemple de maillage de Ω

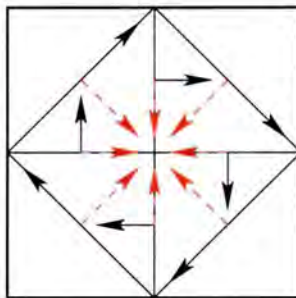


FIG. 5.13 – Second exemple de maillage de Ω

L'état initial est la solution du problème continu. Cette solution étant linéaire, l'élément de Crouzeix-Raviart est en mesure de calculer de façon exacte l'accélération du terme convectif. En effet le gradient de vitesse par élément vaut $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'accélération calculée vaut donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Or sur le premier maillage, ce terme est exactement un élément de l'espace V_h , ce qui est loin d'être le cas dans l'espace continu. De ce fait, la pression dans l'espace discret ne "voit" pas et ne peut donc compenser l'accélération du terme convectif comme cela se produit en continu. Le second maillage est un peu moins sévère pour l'élément puisque une partie de l'accélération (sur toutes les faces obliques relativement aux axes) est "vue" par les pressions des différents éléments. Cependant, sur les faces tangentes aux axes, l'accélération du terme convectif est considéré comme à divergence nulle pour l'élément et il n'est donc pas contrôlé par le terme de pression.

Pour le nouvel élément introduit, le terme convectif se calcule exactement de la même manière puisque l'espace discret de vitesse est identique. Cependant l'espace V_h est différent et cette fois, aucun terme d'accélération n'apparaît comme étant dans V_h , tous ces termes s'écrivent en fait comme des gradients de pression. Et c'est ce que nous pouvons constater sur la figure suivante. Le champ de pression que nous visualisons sur un quart du domaine

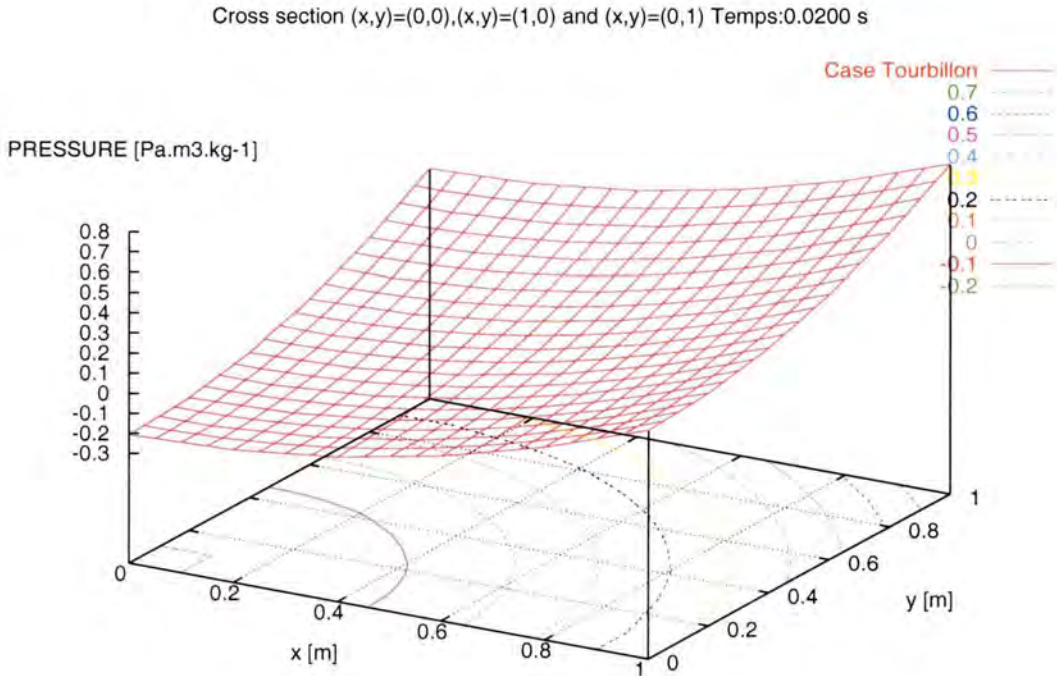


FIG. 5.14 – Tourbillon résolu avec le nouvel élément

est bien identique à la solution analytique, de forme parabolique. L'accélération des termes convectifs est bien compensée par la pression.

5.3.2 Schéma proposé

Les modèles de turbulence que nous utilisons pour la SGE sont tous de nature uniquement dissipative. La distinction des différents modèles passe donc simplement par une viscosité turbulente différemment calculée. Afin de caractériser et d'étudier le plus précisément

possible ces différents modèles, il est donc nécessaire de limiter au maximum les sources de diffusion artificielles comme celles des schémas numériques. C'est pourquoi un effort a été fait sur les schémas convectifs. En effet, l'utilisation d'un schéma de type amont, relativement diffusif anéantirait les chances de pouvoir étudier et appliquer des modèles de turbulence pour la SGE. En effet la diffusivité de ce schéma masque à elle seule la diffusivité qu'introduit le modèle de SGE. D'un autre côté, si le schéma ne doit pas être trop diffusif, il doit cependant rester stable et ne pas entraîner une divergence du calcul par une création artificielle d'énergie. Le schéma dit centré a cette propriété d'être inconditionnellement instable. Entre ces deux extrêmes, nous proposons un nouveau schéma de discrétisation qui nous a permis de réaliser les calculs présentés dans le chapitre suivant. Il faut noter qu'une tentative intéressante a été faite par Benhamadouche ([BL00]) étendant ainsi les travaux de Perot ([Per00]) pour réaliser un schéma conservant exactement l'énergie cinétique en l'absence de termes diffusifs (dans le cas de fluides parfaits). Mais ce schéma est relativement lourd à appliquer en terme de cout CPU et un développement supplémentaire devrait être étendu aux cas des fluides visqueux.

Nous reprenons les équations de Navier-Stokes originales. Par souci de simplicité et ne considérant dans cette partie la discrétisation des termes convectifs, nous prendrons les équations de Navier-Stokes non filtrées.

Nous introduisons maintenant une décomposition de l'espace X_h en une partie \mathcal{P}^1 continue et une partie discontinue. La séparation se fait au sens de L^2 . Nous noterons \bar{X}_h l'espace discret \mathcal{P}^1 conforme défini ainsi :

$$\bar{X}_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega)^d \ / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K) \right\} \quad (5.11)$$

La séparation de l'espace X_h peut donc se résumer par les équations suivantes :

$$u_h = \bar{u}_h + u'_h \quad (5.12)$$

$$(u'_h, \bar{v}_h) = 0 \quad \forall \bar{v}_h \in \bar{X}_h \quad (5.13)$$

Nous pouvons réécrire les équations de Navier-Stokes en nous servant de la décomposition introduite, ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \bar{v}_h \right) + \nu (\nabla u_h, \nabla \bar{v}_h) + (u_h \cdot \nabla u_h, \bar{v}_h) + (\bar{v}_h, \nabla p_h) = (f, \bar{v}_h), \quad \forall \bar{v}_h \in \bar{X}_h \quad (5.14a)$$

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v'_h \right) + \nu (\nabla u_h, \nabla v'_h) + (u_h \cdot \nabla u_h, v'_h) + (v'_h, \nabla p_h) = (f, v'_h), \quad \forall v'_h \in X'_h \quad (5.14b)$$

$$(\nabla \cdot u_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h \quad (5.14c)$$

Compte tenu des propriétés de la décomposition (5.13), ce système s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_h}{\partial t}, \bar{v}_h \right) + \nu (\nabla u_h, \nabla \bar{v}_h) + (u_h \cdot \nabla u_h, \bar{v}_h) + (\bar{v}_h, \nabla p_h) = (f, \bar{v}_h), \quad \forall \bar{v}_h \in \bar{X}_h$$

$$\left(\frac{\partial u'_h}{\partial t}, v'_h \right) + \nu (\nabla u_h, \nabla v'_h) + (u_h \cdot \nabla u_h, v'_h) + (v'_h, \nabla p_h) = (f, v'_h), \quad \forall v'_h \in X'_h$$

$$(\nabla \cdot u_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h$$

Nous faisons le choix de pénaliser la partie discontinue de la vitesse de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial u'_h}{\partial t} + \lambda u'_h, v'_h \right) + \nu (\nabla u_h, \nabla v'_h) + (v'_h, \nabla p_h) = (f, v'_h), \quad \forall v'_h \in X'_h \quad (5.15)$$

Sur cette équation, le terme convectif est donc volontairement négligé par souci de stabilité. Le choix du λ sera explicité plus tard.

Nous choisissons de coupler le schéma de discrétisation temporelle avec celui de discrétisation des termes convectifs. Le couplage est le suivant :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{u}_h^{n+1} - \bar{u}_h^n}{\Delta t}, \bar{v}_h \right) + \nu \left(\nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \bar{v}_h \right) + \left(u_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{v}_h \right) + \left(\bar{v}_h, \nabla p_h^{n+\frac{1}{2}} \right) &= (f, \bar{v}_h), \forall \bar{v}_h \in \bar{X}_h \\ \left(\frac{u_h'^{n+1} - u_h'^n}{\Delta t} + \lambda u_h'^{n+\frac{1}{2}}, v_h' \right) + \nu \left(\nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v_h' \right) + \left(v_h', \nabla p_h^{n+\frac{1}{2}} \right) &= (f, v_h'), \forall v_h' \in X_h' \\ \left(\nabla \cdot u_h^{n+\frac{1}{2}}, q_h \right) &= 0, \forall q_h \in M_h \end{aligned}$$

où la notation suivante a été adoptée :

$$f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f^{n+1} + f^n) = \frac{1}{2} (f(t = t^{n+1}) + f(t = t^n))$$

Intéressons nous plus particulièrement aux termes convectifs de l'équation portant sur l'espace \bar{X}_h . En utilisant la décomposition précédemment introduite de l'espace X_h , nous pouvons réécrire ce terme convectif en deux termes :

$$\left(u_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{v}_h \right) = \underbrace{\left(u_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}}, \bar{v}_h \right)}_A + \underbrace{\left(u_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla u_h'^{n+\frac{1}{2}}, \bar{v}_h \right)}_B$$

Nous nous intéressons maintenant au premier terme lorsque $v_h = \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(u_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \, dx \\ A &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \vec{\nabla} \cdot u_h^{n+\frac{1}{2}} \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(u_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \, dx \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) u_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

Or, la solution étant à divergence nulle sur les éléments, le premier terme de A est nul. En constatant que le second terme n'est autre que la quantité A, on obtient :

$$A = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} \, ds + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) u_h'^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} \, ds$$

Comme \bar{u}_h est continue, de la première somme d'intégrales, il ne subsiste que l'intégrale sur le bord du domaine Ω :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \left(\bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} \, ds + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) u_h'^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} \, ds$$

Enfin si nous faisons l'hypothèse que l'écoulement est régulier, c'est à dire que le terme en $u_h'^{n+\frac{1}{2}}$ est nul, alors le second terme de A et le terme B sont nuls.

Revenons alors sur la première équation de quantité de mouvement pour $v_h = \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}}$, on obtient une équation d'évolution de l'énergie cinétique pour la composante continue :

$$\frac{\bar{E}_h^{n+1} - \bar{E}_h^n}{\Delta t} = -\nu \left(\nabla \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \left(\bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n} \, ds + (f, \bar{u}_h^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5.16)$$

Cette dernière équation laisse donc apparaître que dans le cas d'un écoulement lisse (sans composante u'_h), la variation d'énergie cinétique de la solution calculée avec le schéma proposé n'est dû qu'aux actions :

1. du terme diffusif qui dissipe de l'énergie,
2. du terme de bords (une entrée de fluide représente un apport d'énergie, une sortie représente une perte),
3. du terme associé aux forces volumiques appliquées à l'écoulement.

Revenons maintenant sur le choix du paramètre λ dans l'équation 5.15. Compte tenu du lien introduit entre la discrétisation temporelle et la discrétisation spatiale, l'équation précédente s'écrit :

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + \lambda u_h^{n+\frac{1}{2}}, v'_h \right) + \nu \left(\nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v'_h \right) + \left(v'_h, \nabla p_h^{n+\frac{1}{2}} \right) = (f, v'_h), \forall v'_h \in X'_h$$

Nous avons fait le choix de ne pas avoir de dépendance temporelle sur u' . Ceci est réalisé en prenant $\lambda = \frac{2}{\Delta t}$. Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$\left(\frac{2u_h^{n+1}}{\Delta t}, v'_h \right) + \nu \left(\nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v'_h \right) + \left(v'_h, \nabla p_h^{n+\frac{1}{2}} \right) = (f, v'_h)$$

C'est avec ce choix de paramètre du schéma de convection que les calculs du chapitre suivant ont été menés.

5.4 Bilan de l'extension au problème de Navier-Stokes

Comme nous venons de le voir, nous avons étendu notre étude aux équations de Navier-Stokes en tenant compte de la possibilité de modéliser la turbulence à l'aide de la SGE et des effets que cette modélisation pouvait entraîner sur le terme diffusif. Ceci, combiné à la discrétisation non conforme de la vitesse, nous a amené, après avoir mis en évidence la source d'erreur, à proposer une modification du terme de diffusion turbulente.

Une simulation de type SGE requiert un schéma de convection qui, tout en étant stable, reste peu diffusif, sans quoi, les effets du modèle de turbulence risquent d'être masqué. C'est pourquoi, nous avons proposé le schéma de convection présenté ci-dessus basé sur une décomposition du champ de vitesse permettant de mesurer les perturbations de ce dernier. Comme nous l'avons vu, ce schéma devrait se révéler, en cas d'écoulements lisses, très peu dissipatif. De plus, le fait de pénaliser la composante u'_h devrait se révéler bénéfique pour nos simulations de grandes échelles et devrait contribuer à stabiliser les calculs.

Nous allons maintenant présenter quelques tests numériques permettant de vérifier à la fois la consistance de ces schémas et leurs bonnes propriétés escomptées.

Chapitre 6

Résultats numériques

Nous présentons ici les résultats obtenus sur deux cas tests classiques :

- La cavité à paroi défilante
- L'écoulement autour d'un obstacle de section circulaire

6.1 Cavité à paroi défilante

6.1.1 Description du cas test

Nous cherchons à simuler l'écoulement d'un fluide incompressible et isotherme dans une cavité carrée de 1 mètre de côté dont l'une des parois est entraînée à la vitesse de $1\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le nombre de Reynolds vaut $\frac{1}{\nu}$, avec $\nu = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Les conditions aux limites du calcul sont :

- une paroi défilante à la vitesse de $1\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour la paroi supérieure,
- des parois fixes pour les trois autres.

La configuration du calcul est représentée sur la figure 6.1.

Le maillage utilisé pour cette simulation est construit à partir d'un maillage structuré de 41×41 , raffiné près des parois ; chaque maille étant ensuite redécoupée en 4 triangles. La figure 6.1 le représente.

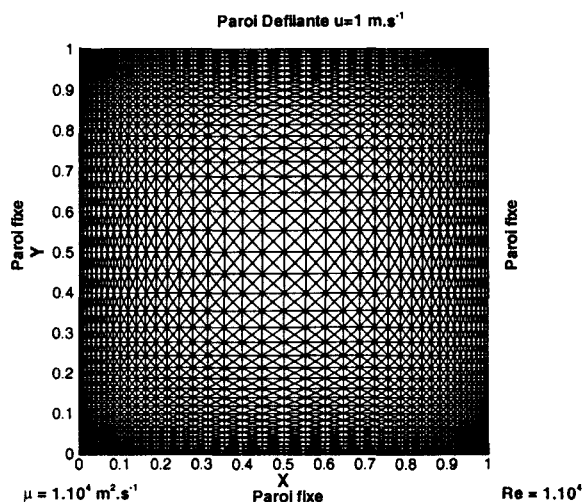


FIG. 6.1 – Configuration et maillage du cas Cavité à paroi défilante

Ce cas constitue un cas test classique (cf. [GGS82]), permettant en particulier de tester le schéma de convection.

Cette simulation a été réalisée avec les deux discrétisations évoquées dans ce travail, $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^0$ et $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$.

Pour évaluer les résultats, nous observerons les quantités suivantes :

- les lignes de courant de l'écoulement,
- les profils de vitesse.

6.1.2 Résultats de calculs

Les résultats sont présentés sur les figures 6.2 à 6.4.



FIG. 6.2 – Lignes de courant pour la discrétisation $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^0$

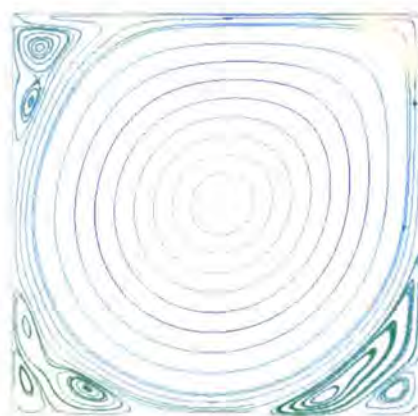


FIG. 6.3 – Lignes de courant pour la discrétisation $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$

La figure 6.2 représente les lignes de courant de l'écoulement résolu avec la discrétisation $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^0$ colorées par la pression. Nous pouvons constater que certaines lignes de courant se terminent sur la paroi, ce qui indique que le champ de vitesse n'est pas à divergence nulle. De même, nombre de lignes de courant ne se referment pas sur elle-même, indiquant le même souci sur le champ de vitesse.

La figure 6.3 représente les lignes de courant de l'écoulement résolu avec la discrétisation $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$.

En comparant les deux figures, nous constatons que la position des tourbillons dans les coins n'est pas tout à fait identique pour les deux discrétisations. De plus, dans le coin supérieur droit, la topologie de l'écoulement n'est pas la même et le résultat de la discrétisation $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^0$ est conforme aux résultats obtenus par Ghia.

D'une manière générale, le résultat obtenu avec la nouvelle discrétisation correspond aux résultats classiques que l'on trouve dans la littérature en laissant toutefois apparaître de nombreux détails (comme ces recirculations de deuxième ou troisième ordre) sur un maillage qui n'est pas parmi les plus fins.

Nous représentons sur la figure 6.4, le profil de la composante horizontale de la vitesse suivant une coupe verticale en $x = 0$, ainsi que celui de la composante verticale suivant une coupe horizontale en $y = 0$. Les deux discrétisations sont représentées sur cette même figure. Les différences entre les deux discrétisations sont encore plus flagrantes que sur les lignes de courant précédemment représentées.

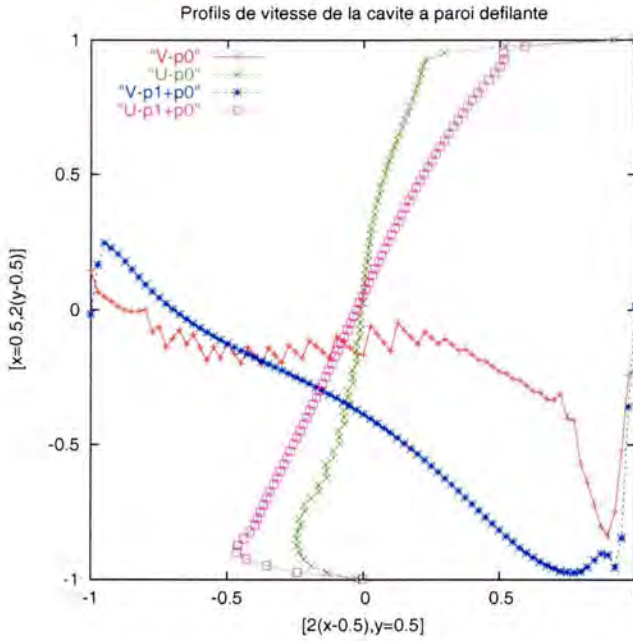


FIG. 6.4 – Profils de vitesse de la cavité à paroi défilante

6.2 Ecoulement autour d'un obstacle

6.2.1 Description du cas test

Nous cherchons à simuler l'écoulement autour d'un obstacle de section circulaire. Une condition d'adhérence est imposée sur l'obstacle. En entrée du domaine, la vitesse u_0 est imposée. Sur les frontières en haut et en bas du domaine, une condition de symétrie est imposée. En sortie, une condition de sortie libre est imposée. Le Reynolds calculé à l'aide de la vitesse d'entrée du fluide et du diamètre de l'obstacle est de 100. Le champ de vitesse initial est uniforme et est identique à la vitesse imposée en entrée. La figure 6.5 illustre cette configuration et montre le maillage utilisé pour le calcul.

Ce calcul nous permet de vérifier la consistance des schémas numériques utilisés et montre de plus le bon comportement du nouvel élément avec la condition de sortie libre.

Nous observons le champ de pression.

6.2.2 Résultats de calculs

Les cinq figures suivantes nous permettent d'observer un lâcher de tourbillons alternés dans le sillage de l'obstacle sur une période. Nous obtenons le comportement attendu pour cette configuration. Cette suite d'images nous permet de vérifier la faible diffusivité de nos schémas numériques puisque nous pouvons suivre les tourbillons, matérialisés par les faibles pressions, jusqu'à la sortie du domaine. Nous remarquons, que les tourbillons peuvent sortir du domaine sans difficulté avec la condition de sortie libre, qui est en fait, une condition de pression imposée. Ceci n'était pas observé avec l'élément de Crouzeix-Raviart.

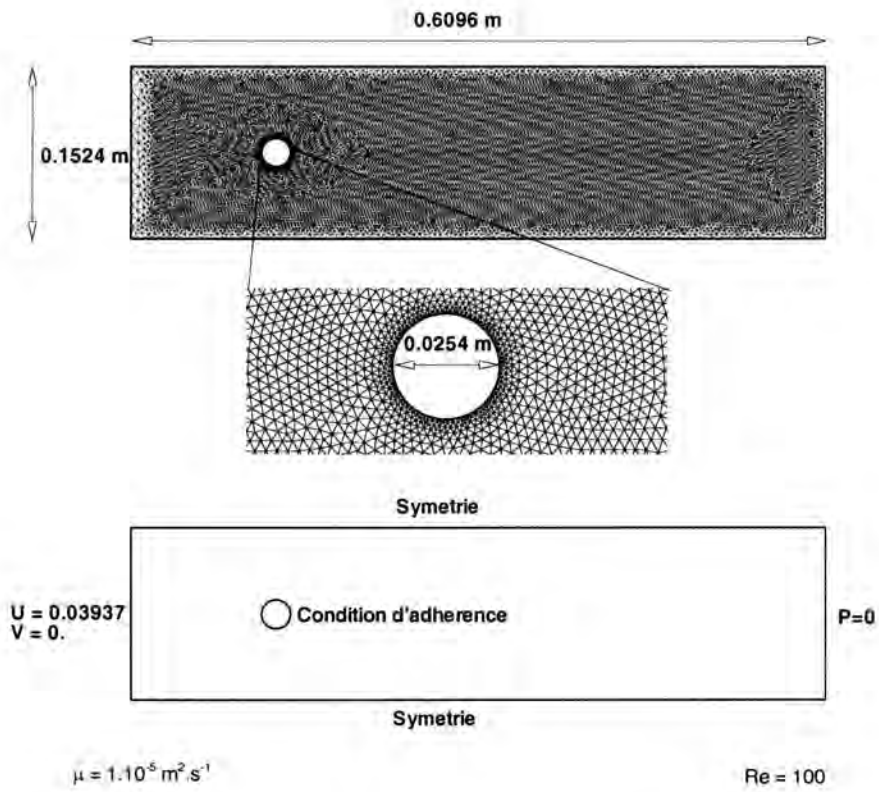


FIG. 6.5 – Configuration et maillage du cas de l'obstacle

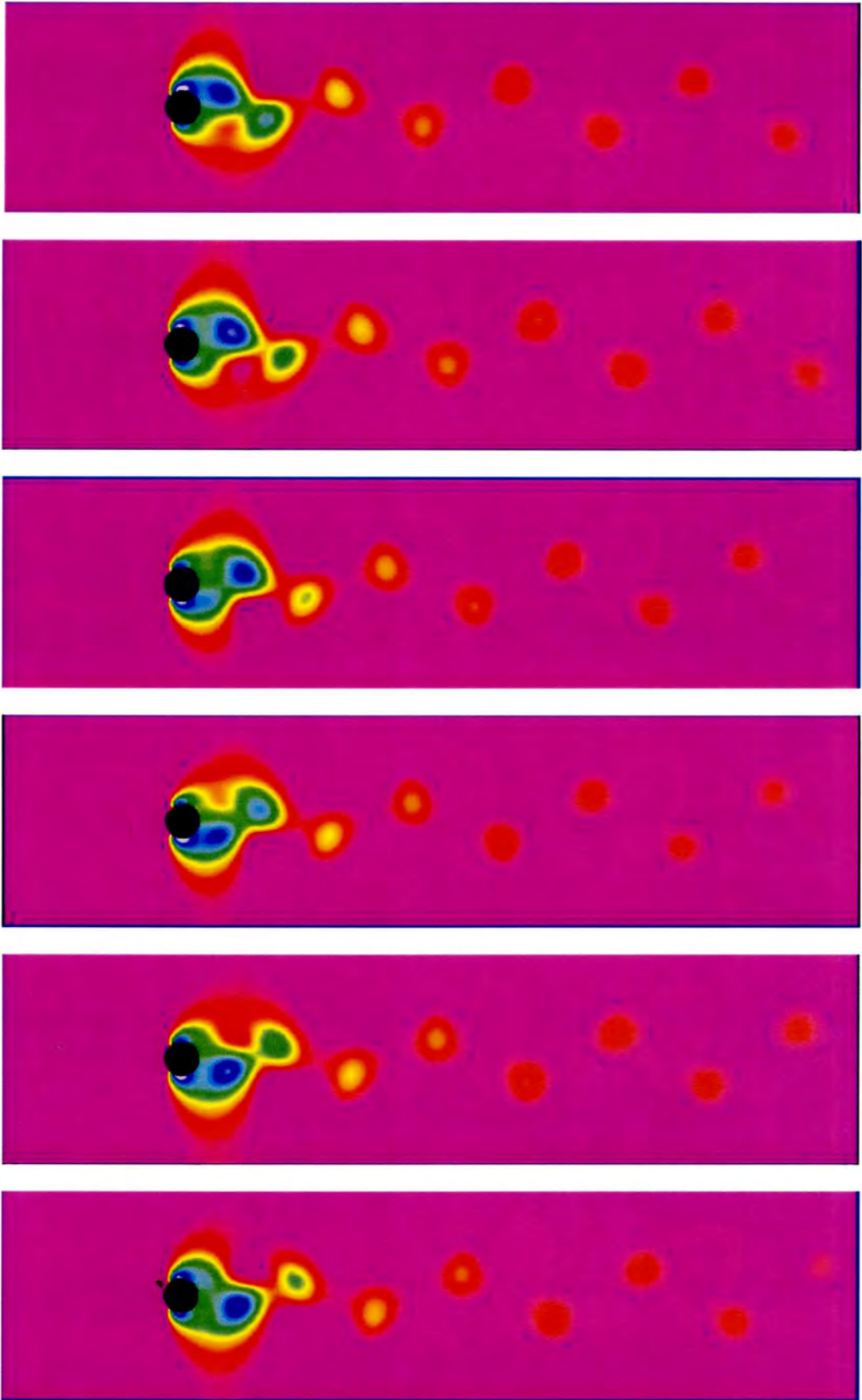


FIG. 6.6 – Evolution du champ de pression de l'écoulement autour du cylindre

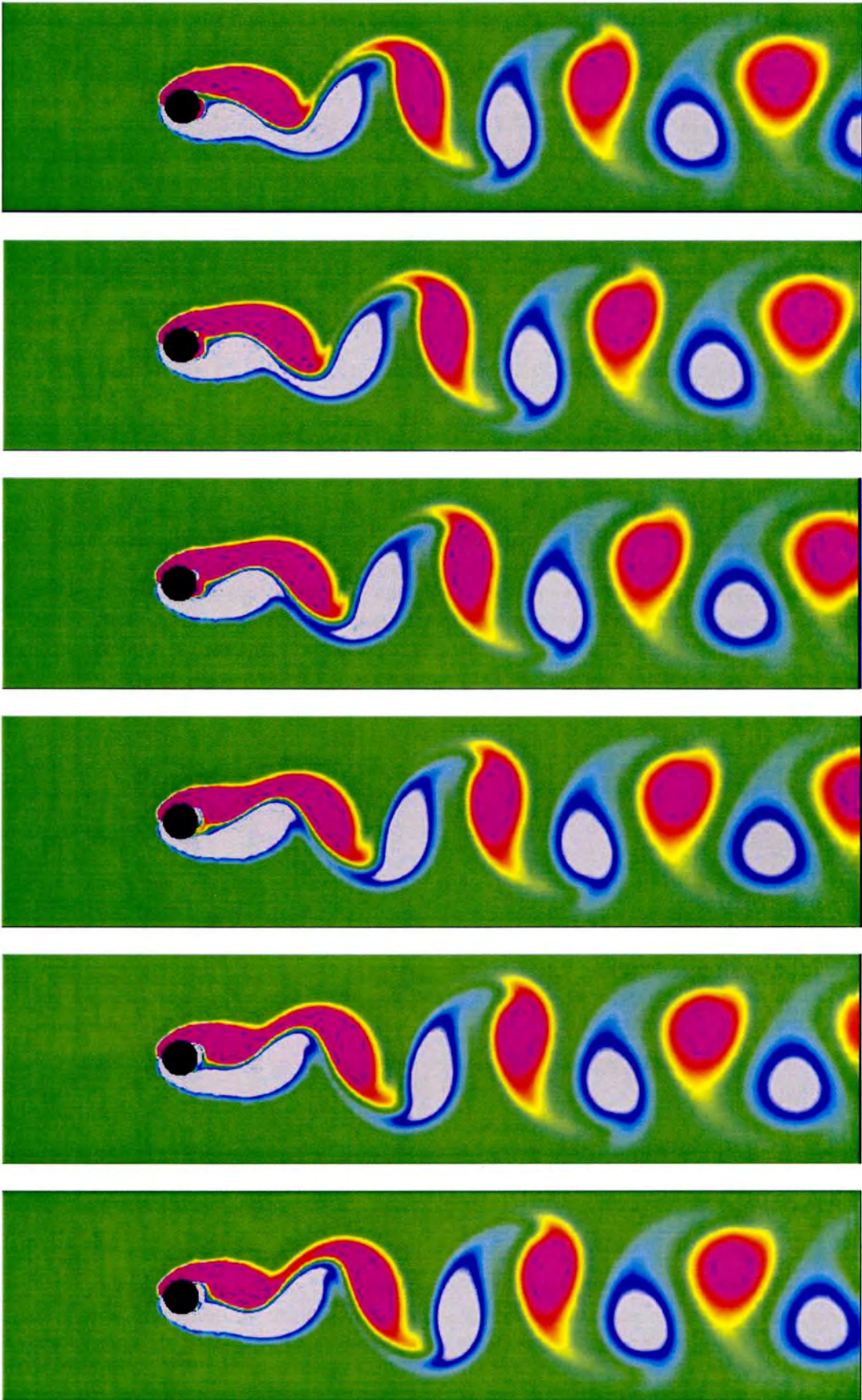


FIG. 6.7 – Evolution du champ de vorticité de l'écoulement autour du cylindre

6.3 Exemples d'utilisation pour des calculs plus complexes

Ce calcul vient illustrer l'utilisation faite de la nouvelle discrétisation introduite. Les travaux concernant le schéma de convection étant relativement récents, ce calcul n'est pas réalisé avec celui précédemment présenté. Le schéma utilisé pour ces calculs, couple une nouvelle fois la discrétisation en temps et la discrétisation spatiale des termes convectifs. Le schéma alternant, comme nous l'avons nommé est décrit dans la thèse de C. Ackermann [Ack00]. C'est un schéma à deux sous pas de temps. Le calcul du terme convectif au premier pas de temps se fait par un calcul décentré amont, puis au second sous pas de temps par un calcul décentré aval. La moyenne des deux contributions est alors prise.

6.3.1 Calcul et expérience MOCHE

Ce calcul a été réalisé en collaboration avec EDF par E. Longatte (EDF), U. Bieder (CEA), P. Ledac (CS). Ce calcul a permis :

- de décrire les spectres des forces de pression sur un tube flexible en écoulement axial,
- l'étude de phénomènes transitoires,
- une comparaison avec l'expérience MOCHE

La configuration du calcul est représentée sur la figure 6.8. Dans cette configuration, de l'eau arrive par le haut à travers une grille entre le tube de section cylindrique et le tube de section carré. L'évacuation se fait par une sortie latérale. Le maillage surfacique est représenté sur la figure 6.9. Il a été généré à partir d'un maillage structuré de 250000 nœuds, découpé en tétraèdres. Le maillage obtenu compte 200000 volumes de contrôle avec un raffinement à proximité du tube central.

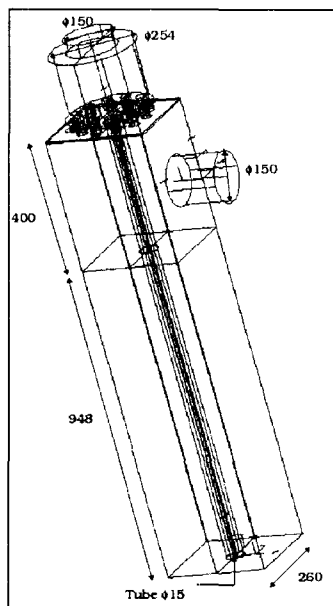


FIG. 6.8 - Configuration du calcul MOCHE

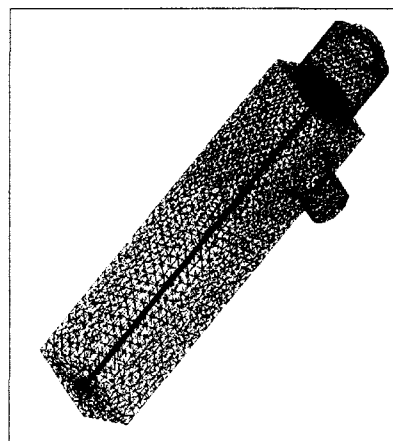


FIG. 6.9 - Maillage utilisé pour le calcul MOCHE

Le calcul a été mené en parallèle sur 25 processeurs avec la nouvelle discrétisation introduite. Le champ de pression sur les parois externes est représenté sur la figure 6.10.

Les champs de pression et de vitesse sont représentés sur la figure 6.11 sur un plan de coupe axial.

Les trois figures suivantes 6.12 à 6.14 montrent les champs de vitesse et de pression sur trois coupes perpendiculaires à l'axe central à différentes hauteurs.

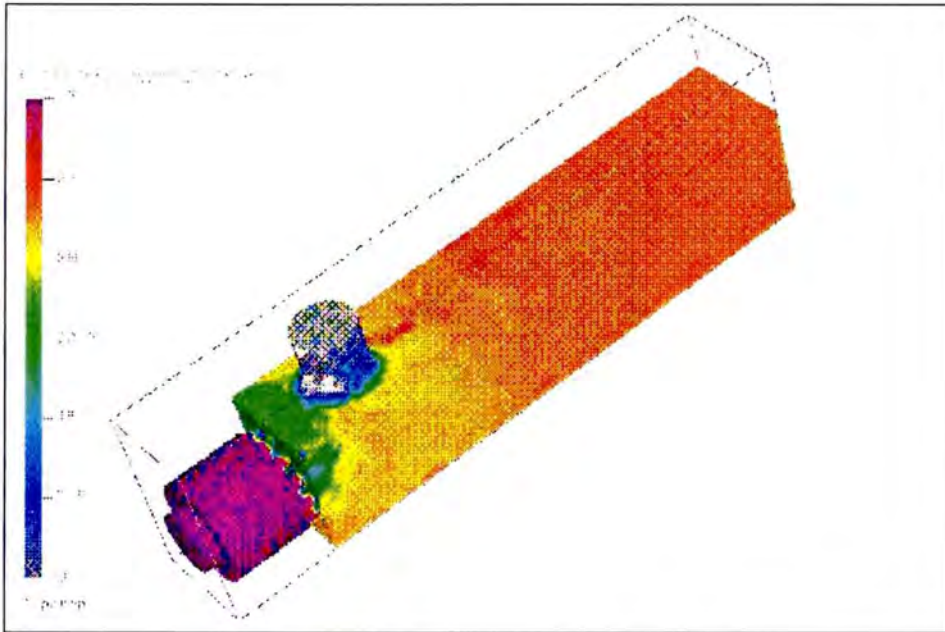


FIG. 6.10 – Champ de pression sur les parois externes

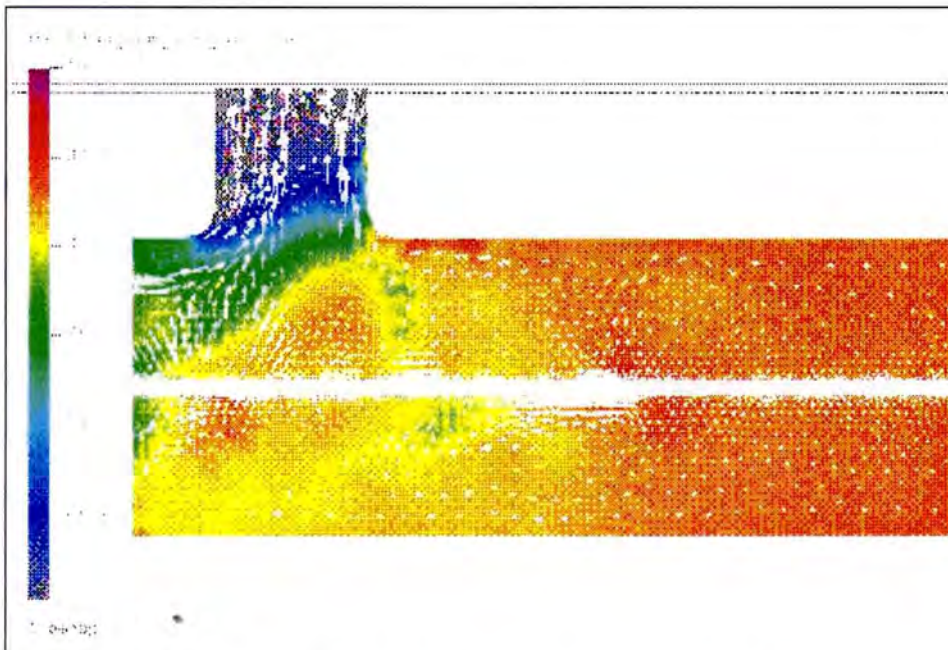


FIG. 6.11 – Vitesse et pression sur une coupe axiale

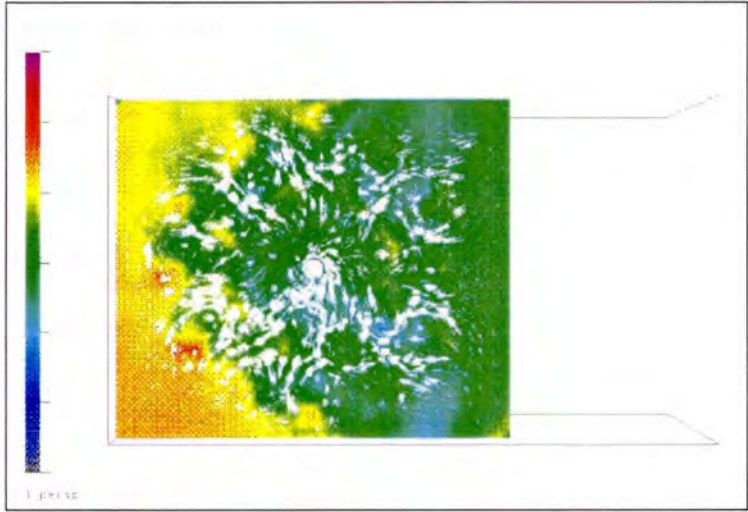


FIG. 6.12 – Vitesse et pression sur une coupe derrière la plaque perforée

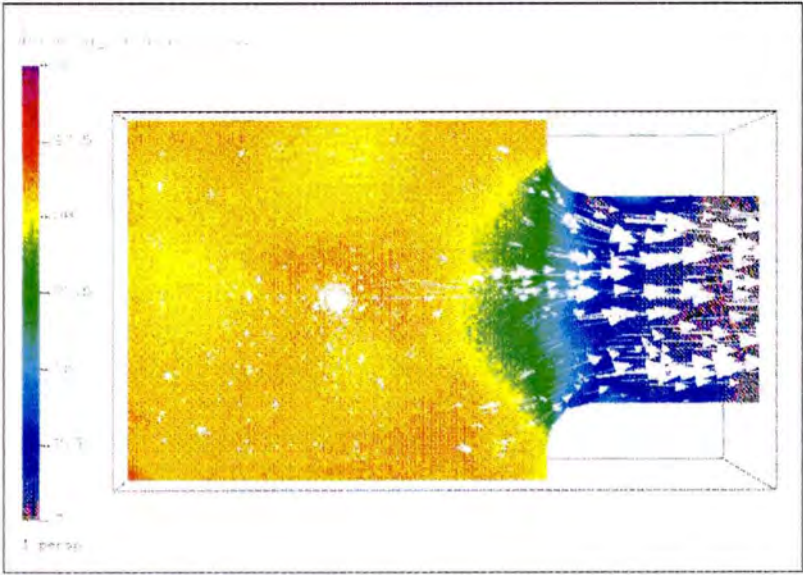


FIG. 6.13 – Vitesse et pression sur une coupe traversant la sortie latérale

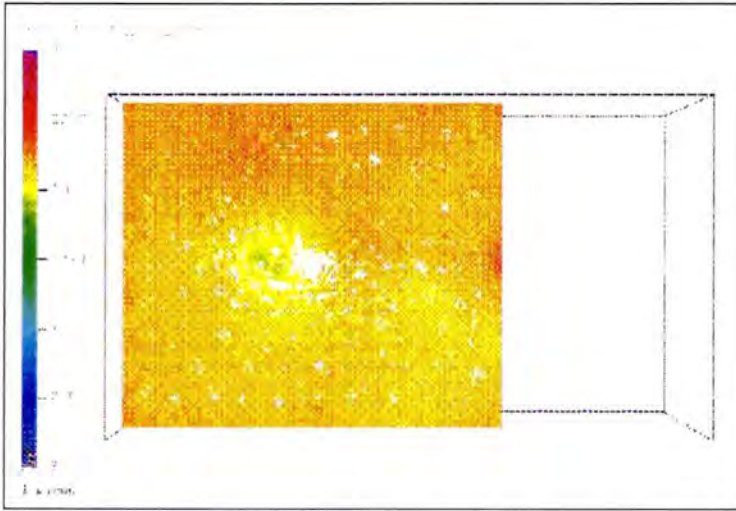


FIG. 6.14 – Vitesse et pression sur une coupe apres la sortie latérale

Enfin les forces de pression le long du tube axial calculées avec la simulation ont été comparées avec celles obtenues à partir de l'expérience. Les résultats sont fournies sur les deux courbes suivantes 6.15, 6.16.

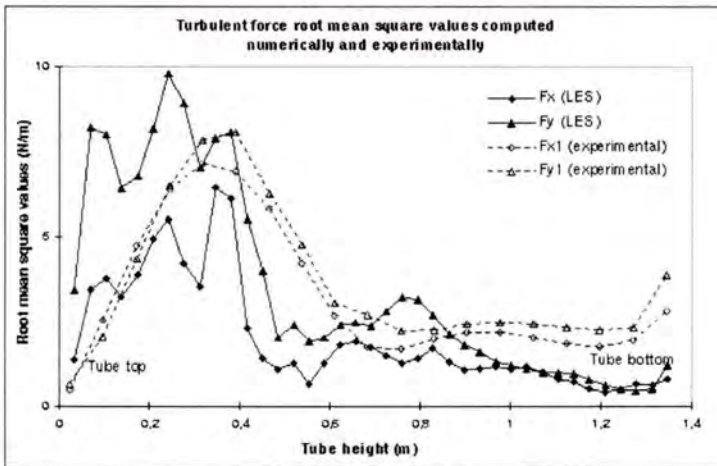


FIG. 6.15 – Comparaison des forces turbulentes le long du tube axial

6.4 Bilan des tests numériques

Les deux premiers tests numériques, relativement simples et très classiques, nous ont permis de vérifier d'une part, la consistance des schémas numériques précédemment introduits et d'autre part, le bon comportement de la nouvelle discrétisation. Ils ont confirmé que cette dernière permet des calculs précis sur des maillages non nécessairement très fins. Le test de la cavité à paroi défilante a en effet révélé des petites structures tourbillonnaires sur un maillage plus grossier que ceux utilisés par Ghia qui nous servait de référence. L'écoulement autour de l'obstacle nous a montré le bon comportement et la faible diffusivité des schémas numériques choisis.

Le calcul ensuite présenté vient illustrer l'utilisation faite dans un cadre plus industriel des résultats que nous avons obtenus durant ce travail.

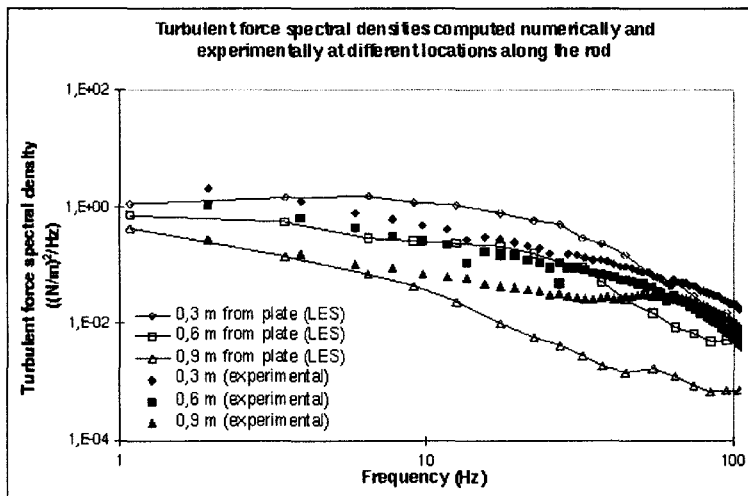


FIG. 6.16 – Comparaison des spectres de forces turbulentes le long du tube axial

Chapitre 7

Conclusions et Perspectives

La discrétisation de type Marker and Cell (MAC) (cf. [HW65]) reste une référence pour les calculs effectués sur des maillages structurés. Notre but initial était de nous rapprocher de la situation du MAC. L'enjeu était donc d'obtenir un espace V_h aussi consistant que possible, car comme nous l'avons vu, cette consistance facilite la stabilité des schémas numériques.

Pour étendre les résultats de la discrétisation MAC aux maillages non structurés, il est possible de formuler le problème de Stokes en vorticité-vitesse-pression comme l'a fait Salmon (cf. [Sal99]). Mais cette nouvelle formulation pose d'autres problèmes, car si l'espace V_h est cette fois consistant, le traitement numérique de cette formulation reste délicat. Nous avons décidé de garder la formulation en vitesse-pression du problème de Stokes. La technique des covolumes est une extension naturelle aux maillages non structurés de schémas différences finies (tel que le schéma MAC) sur des maillages structurés entrelacés (cf. [NPH95]) et nous voyons ici que la nouvelle discrétisation introduite durant ce travail peut être vue comme une extension de la méthode aux maillages non structurés ou comme une méthode de type covolume. Dans la méthode MAC, seules les composantes normales de vitesse sont calculées au milieu des arêtes (en dimension 2), des faces (en dimension 3). Les noeuds de pression sont situés au centre des éléments. La figure 7.1 en haut à gauche représente une telle discrétisation. Maintenant, imaginons un second maillage, identique au premier, translaté de $\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}\right)$ en dimension 2. Ce second maillage n'est autre que le maillage dual du premier.

En dimension 2, un tel maillage est représenté sur la figure 7.1 en haut à droite. La même discrétisation est appliquée sur le second maillage. Cette fois, en tout milieu d'arête (2D) en tout barycentre de face (3D), toutes les composantes de la vitesse sont connues et les noeuds de pression se situent à la fois au centre des éléments et aux sommets. La situation est similaire en dimension 2 pour les éléments que nous avons introduits et étudiés, comme le montre la figure 7.2. Toutes les composantes de vitesse sont connues milieu des arêtes et les noeuds de pression se situent au centre des mailles et aux sommets.

En dimension 3, la situation est un peu différente. Si les résultats de convergence optimaux que nous avons obtenu au paragraphe 4.2 sont valables en dimension 2 et 3, il est possible que l'espace V_h soit encore de trop grande dimension en dimension 3. C'est en tout cas ce que peut laisser penser la vision présentée ici. Si nous reprenons l'extension de la discrétisation "triple MAC" en dimension 3, le second maillage doit être translaté de $\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}, \frac{\Delta z}{2}\right)$ toutes les composantes de vitesse seraient connues sur tous les barycentres de faces et aux sommets. Les noeuds de pression, quant à eux se situeraient au centre des éléments et au milieu des arêtes. L'extension de la méthode multi-MAC en non structuré tridimensionnelle passerait donc par l'introduction d'un nouvel élément plus riche encore

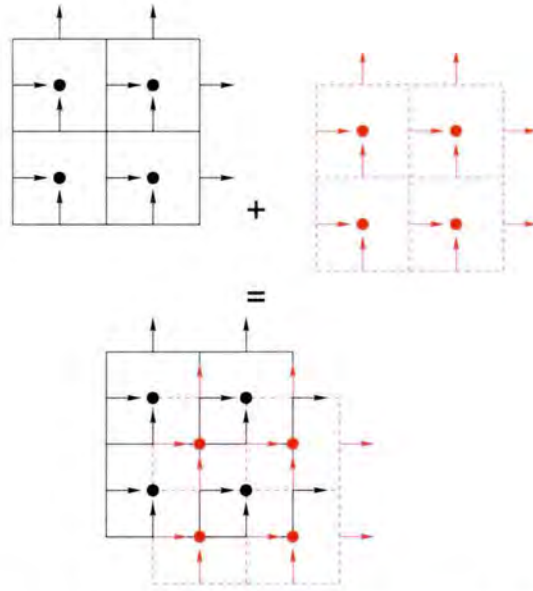


FIG. 7.1 – Une double discrétisation MAC

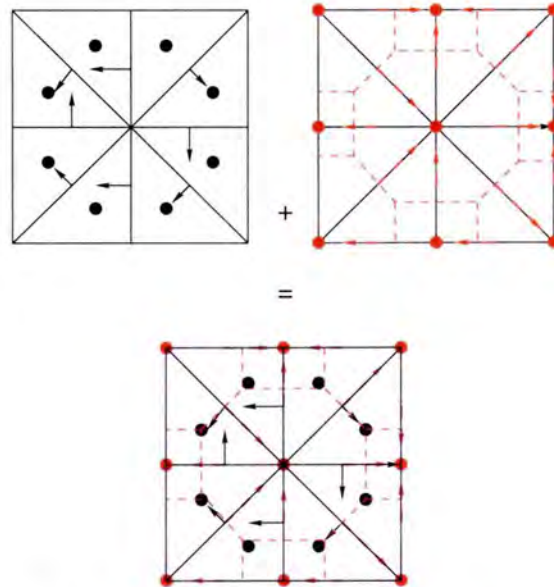


FIG. 7.2 – P1NC/P1B vu comme des covolumes

en pression que celui que nous avons introduit. Cet hypothétique élément, doté d'un espace V_h plus restreint que celui de la discrétisation introduite, pourrait se révéler plus stable.

Bibliographie

- [Ack00] Ackermann C. – Développements et Validation de Simulation des Grandes Echelles d'écoulements turbulents dans un code industriel. – Thèse, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2000.
- [Bab73] Babuška I. – The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerical Mathematics*, no20, 1973, pp. 179–192.
- [Bar00] Barre F. – TRIO.U : Incompressible single phase flow module for newtonian fluids. – Rapport technique, *CEA - GRENOBLE*, 2000.
- [BEL99] Bieder U., Emonot P. et Laurence D. – PRICELES : Summary of the Numerical Scheme. – Note Technique SMTH/LATA n° 98-50, *CEA/GRENOBLE*, Mars 1999.
- [BH00] Bernardi C. et Hecht F. – More pressure in the finite element discretization of the Stokes problem. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, vol. 34, n° 5, Septembre-Octobre 2000, pp. 953–980.
- [BL00] Benhamadouche S. et Laurence D. – Conservation globale de l'énergie cinétique sur maillages non-structurés : Application à la Simulation des Grandes Echelles (LES). – Rapport technique, *EDF RD, MFTT*, 2000.
- [BN83] Boland J. et Nicolaidis R. – 'stability of finite elements under divergence constraints. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1983.
- [Bre72] Brezzi F. – On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, no8 R2, 1972, pp. 129–151.
- [CR73] Crouzeix M. et Raviart P. – Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary stokes equation. *RAIRO ,Sér. Anal. Numer.*, vol. 33, 1973, pp. 7–33.
- [Duv90] Duvaut G. – Mécanique des milieux continus. – *Masson*, 1990.
- [Emo92] Emonot P. – Méthodes de Volumes Eléments finis : Application aux Equations de Navier-Stokes et Résultats de convergence. – Thèse, *Université Claude Bernard - LYON I*, 1992.
- [GBB97] Gerbeau J.-F., Bris C. L. et Bercovier M. – Spurious velocities in the steady flow of an incompressible fluid subjected to external forces'. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997.
- [GGS82] Ghia U., Ghia K. N. et Shin C. T. – High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 1982.
- [GM95] Ghosal S. et Moin P. – The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry. *Journal of Computational Physics*, 1995.

- [GR79] Girault V. et Raviart P. – Finite element approximation of the navier-stokes equations. – *Springer*, 1979.
- [HW65] Harlow F. H. et Welch J. E. – Numerical Calculation of Time-Dependant Viscous incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids*, vol. 8, n° 12, December 1965, pp. 2182–2189.
- [NPH95] Nicolaides R., Porsching T. et Hall C. – Covolume methods in computational fluid dynamics. *Computational Fluid Dynamics Review*, 1995.
- [Per00] Perot B. – Conservation properties of unstructured staggered mesh schemes. *Journal of Computational Physics*, 2000.
- [RM97] Rollet-Miet P. – Simulation des Grandes Echelles sur maillages non-structurés pour géométries complexes. – Thèse, *Ecole Centrale de Lyon*, 1997.
- [Sag98] Sagaut P. – Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible. – *Springer*, 1998.
- [Sal99] Salmon S. – Développement numérique de la formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes. – Thèse, *Université Pierre et Marie Curie - Paris VI*, Décembre 1999.

Annexe A

Calcul des différentes formes

Cette annexe présente plus en détail le calcul des formes en *Éléments Finis* et en *Volumes Éléments Finis* pour l'élément fini $\mathcal{P}^1\text{NC}/\mathcal{P}^1\text{Bulle}$. Nous introduisons tout d'abord quelques notations dont nous nous servons plus tard pour les calculs proprement dits. Ensuite nous présentons les détails des calculs de la forme gradient, puis ceux de la forme divergence.

A.1 Notations

Nous introduisons ici une série de notations qui nous seront utiles par la suite.

- $\bar{v}(m_i) = \frac{1}{|f_i|} \int_{f_i} \bar{v} ds$
- $\bar{S}_i^K \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{f_i} \bar{n}_K$
- $\partial\omega_i^K \stackrel{\text{déf}}{=} \partial\omega_i \cap K$
- $\mathcal{V}(s_i)$ est l'ensemble des éléments ayant s_i pour sommet
- $\mathcal{V}(f_j)$ est l'ensemble des éléments ayant f_j comme face.

A.2 Calculs des formes gradient et divergence

A.2.1 La forme gradient

Nous rappelons ici l'expression deux formes bilinéaires que nous allons comparer :

$$b_h^V(\bar{v}, p) = \sum_i \int_{\partial\omega_i} p \bar{n} \bar{v}(m_i) ds$$
$$b_h^1(\bar{v}, p) = \sum_K \int_K \bar{\nabla} p \bar{v} dx$$

Nous redonnons également les volumes de contrôle ω_i de conservation de la quantité de mouvement.

A.2.1.1 Pression dans M_h^T

Nous calculons $b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j})$, avec

$$\vec{\psi}_{m_i} = \begin{pmatrix} \psi_{m_i} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou bien } \vec{\psi}_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{m_i} \end{pmatrix} \text{ en dimension } d = 2, \quad (\text{A.1})$$

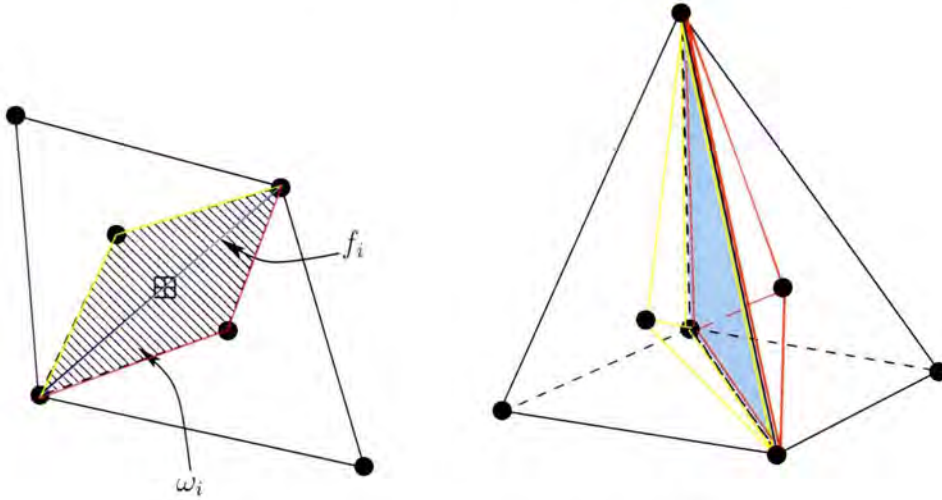


FIG. A.1 – Volumes de contrôle de QDM

où ψ_{m_i} est la fonction de forme du \mathcal{P}^1 NC associé au nœud m_i définie en (2.8).

$$b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) = \sum_K \int_K \vec{\nabla} \phi_{s_j} \cdot \vec{\psi}_{m_i} \, dx$$

La fonction ϕ_{s_j} est linéaire sur chaque élément, donc son gradient est constant par élément. Par conséquent, nous pouvons sortir le gradient de l'intégrale pour écrire :

$$b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) = \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \vec{\nabla} \phi_{s_j} \Big|_K \cdot \int_K \vec{\psi}_{m_i} \, dx$$

Nous utilisons la formule de Stokes pour expliciter le calcul du gradient de ϕ_{s_j} dans K .

$$\vec{\nabla} \phi_{s_j} \Big|_K = \frac{1}{K} \int_K \vec{\nabla} \phi_{s_j} = \frac{1}{K} \int_{\partial K} \phi_{s_j} \vec{n} \tag{A.2}$$

Nous calculons dans le cas bidimensionnel la dernière expression en utilisant les notations de la figure (A.2).

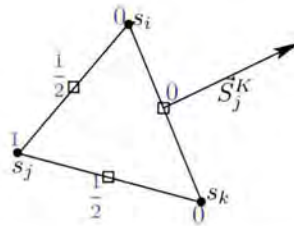


FIG. A.2 – Notation et valeurs de la fonction ϕ_{s_j}

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \phi_{s_j} \vec{n} \, ds &= \int_{s_i s_j} \frac{1}{2} \vec{n} \, ds + \int_{s_j s_k} \frac{1}{2} \vec{n} \, ds + \int_{s_i s_k} 0 \vec{n} \, ds \\ \int_{\partial K} \phi_{s_j} \vec{n} \, ds &= -\frac{1}{2} \int_{s_i s_k} \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

car $\int_{\partial K} \vec{n} \, ds = \vec{0}$.

L'extension au cas tridimensionnel est immédiate et permet de généraliser l'écriture :

$$\int_{\partial K} \phi_{s_j} \vec{n} \, ds = -\frac{1}{d} \vec{S}_j^K$$

En réinjectant dans l'expression de b_h^1 , nous obtenons :

$$b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) = - \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \frac{1}{d|K|} \vec{S}_j^K \cdot \int_K \vec{\psi}_{m_i} \, dx$$

La fonction $\vec{\psi}_{m_i}$ est linéaire sur K donc l'intégrale précédente se calcule simplement comme :

$$\int_K \vec{\psi}_{m_i} \, dx = \frac{|K|}{d+1} \vec{\psi}_{m_i}(m_i)$$

où

$$\vec{\psi}_{m_i}(m_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou bien } \vec{\psi}_{m_i}(m_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

suivant le choix fait en (A.1). Donc en substituant dans l'équation précédente, nous obtenons l'expression de b_h^1 :

$$b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) = -\frac{1}{d(d+1)} \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \vec{S}_j^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \tag{A.3}$$

Calculons maintenant la formulation *Volumes Éléments Finis* .

$$\begin{aligned} b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) &= \sum_l \int_{\partial \omega_l} \phi_{s_j} \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_l) ds \\ b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) &= \int_{\partial \omega_i} \phi_{s_j} \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) ds \\ b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) &= \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \int_{\partial \omega_i^K} \phi_{s_j} \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) ds \\ b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) &= \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \cdot \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \int_{\partial \omega_i^K} \phi_{s_j} \vec{n} ds \end{aligned}$$

Dans la première configuration, $s_j \in f_i$, soient K_1 et K_2 les deux éléments ayant la face

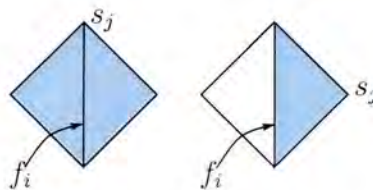


FIG. A.3 - $\mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)$ pour deux configurations différentes

f_i en commun. Comme ϕ_{s_j} est continue sur f_i , $\int_{f_i} \phi_{s_j} \vec{n}^{K_1} ds + \int_{f_i} \phi_{s_j} \vec{n}^{K_2} ds = 0$ et nous pouvons donc ajouter ce terme dans l'expression de b_h^V sans la modifier. Dans la seconde configuration, ϕ_{s_j} est identiquement nul sur f_i et nous pouvons donc ajouter $\int_{f_i} \phi_{s_j} \vec{n} ds$ à l'expression de b_h^V sans la modifier, ce qui nous permet d'écrire :

$$b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) = \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \int_{\partial \kappa_i^K} \phi_{s_j} \vec{n} ds$$

Pour calculer l'intégrale, nous utilisons toujours la formule de Stokes :

$$\int_{\partial \kappa_i^K} \phi_{s_j} \vec{n} ds = \int_{\kappa_i^K} \vec{\nabla} \phi_{s_j} dx$$

La fonction de forme ϕ_{s_j} est linéaire sur K , donc son gradient est constant par élément. Le gradient de la fonction ϕ_{s_j} sur κ_i^K est le même que celui sur K .

$$\begin{aligned} \int_{\partial \kappa_i^K} \phi_{s_j} \vec{n} ds &= \int_{\kappa_i^K} \vec{\nabla} \phi_{s_j} dx \\ &= |\kappa_i^K| \vec{\nabla} \phi_{s_j} \Big|_{\kappa_i^K} = |\kappa_i^K| \vec{\nabla} \phi_{s_j} \Big|_K \\ &= |\kappa_i^K| \times \frac{1}{|K|} \int_K \vec{\nabla} \phi_{s_j} = \frac{|\kappa_i^K|}{|K|} \times \left(-\frac{1}{d} \vec{S}_j^K \right) \\ &= -\frac{1}{d(d+1)} \vec{S}_j^K \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement pour la forme b_h^V :

$$b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_{s_j}) = -\frac{1}{d(d+1)} \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \vec{S}_j^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \quad (\text{A.4})$$

Les équations (A.3) et (A.4) nous permettent de conclure sur les relations entre le gradient *Éléments Finis* et le gradient *Volumes Éléments Finis* pour une pression de M_h^T :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h^T \in M_h^T, b_h^V(v_h, q_h^T) = b_h^1(v_h, q_h^T) \quad (\text{A.5})$$

A.2.1.2 Pression dans M_h^N

Nous calculons $b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K)$. Nous choisissons la bulle du min dont nous rappelons ici l'expression

$$\phi_K(x) = (d+1) \inf_{i=1..d+1} \phi_{s_i}^K(x)$$

La fonction ϕ_K est linéaire sur chaque $\omega_i \cap K$, son gradient est constant sur chaque $\omega_i \cap K$. Notons $\kappa_i^K \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i \cap K$.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \phi_K \Big|_{\kappa_i^K} &= (d+1) \vec{\nabla} \phi_{s_i}^K \Big|_{\kappa_i^K} \\ &= (d+1) \vec{\nabla} \phi_{s_i}^K \Big|_K \\ &= -\frac{d+1}{d|K|} \vec{S}_i^K = -\frac{1}{d|\kappa_i^K|} \vec{S}_i^K \end{aligned}$$

Donc nous pouvons écrire :

$$b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) = \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i)} \int_K \vec{\nabla} \phi_K \cdot \vec{\psi}_{m_i} \, dx = \sum_{\kappa_j^K \subset K \in \mathcal{V}(f_i)} \int_{\kappa_j^K} \vec{\nabla} \phi_K \cdot \vec{\psi}_{m_i} \, dx$$

$$b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) = \sum_{\kappa_j^K \subset K \in \mathcal{V}(f_i)} -\frac{1}{d|\kappa_j^K|} \vec{S}_j^K \cdot \int_{\kappa_j^K} \vec{\psi}_{m_i} \, dx$$

Calculons le terme $\int_{\kappa_j^K} \vec{\psi}_{m_i} \, dx$. Nous distinguons deux cas de figure.

- calcul de l'intégrale de $\vec{\psi}_{m_i}$ sur κ_i ,
 ψ_{m_i} étant linéaire, il suffit de calculer sa moyenne à l'aide des valeurs aux sommets du κ_i . La valeur au centre de gravité est $\frac{1}{d+1}$. Les autres sommets pris en compte sont les sommets de la face f_i , et sur ces d sommets ψ_{m_i} vaut 1. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_i^K} \vec{\psi}_{m_i} \, dx &= \frac{|\kappa_i|}{d+1} \left(d + \frac{1}{d+1} \right) \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \\ &= \frac{d^2 + d + 1}{(d+1)^2} |\kappa_i| \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \end{aligned}$$

- calcul de l'intégrale de $\vec{\psi}_{m_i}$ sur les autres κ_j de l'élément
 Par rapport au cas précédent, seuls les sommets pris en compte changent. La valeur au centre de gravité reste identique. $d-1$ sommets de la face f_i entrent dans le calcul de l'intégrale. Sur ces sommets, ψ_{m_i} vaut 1. Sur le sommet opposé à la face f_i , ψ_{m_i} vaut $1-d$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_j^K} \vec{\psi}_{m_i} \, dx &= \frac{|\kappa_j|}{d+1} \left(\frac{1}{d+1} \right) \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \\ &= \frac{1}{(d+1)^2} |\kappa_j| \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) &= -\frac{1}{d|\kappa_i|} \vec{S}_i^K \cdot \int_{\kappa_i} \vec{\psi}_{m_i} \, dx + \sum_{\kappa_j^K \subset K, j \neq i} -\frac{1}{d|\kappa_j|} \vec{S}_j^K \cdot \int_{\kappa_j} \vec{\psi}_{m_i} \, dx \\ &= -\frac{d^2 + d + 1}{d(d+1)^2} \vec{S}_i^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) - \frac{1}{d(d+1)^2} \sum_{j \neq i} \vec{S}_j^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \\ &= -\left(\frac{d^2 + d + 1}{d(d+1)^2} - \frac{1}{d(d+1)^2} \right) \vec{S}_i^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \end{aligned}$$

$$b_h^1(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) = -\frac{1}{d+1} \vec{S}_i^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \quad (\text{A.6})$$

Calculons maintenant $b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K)$:

$$b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) = \sum_i \int_{\partial\omega_i} \phi_K \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \, ds$$

Comme ϕ_K est nulle sur les faces de l'élément, $\int_{\partial\omega_i} \phi_K \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) ds = \int_{\partial\kappa_i} \phi_K \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) ds$ et nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) &= \sum_{\kappa_i \in K \in \mathcal{V}(f_i)} \int_{\partial\kappa_i} \phi_K \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) ds \\ b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) &= \int_{\partial\kappa_i^K} \phi_K \vec{n} \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) ds \end{aligned}$$

$$b_h^V(\vec{\psi}_{m_i}, \phi_K) = -\frac{1}{d} \vec{S}_i^K \cdot \vec{\psi}_{m_i}(m_i) \quad (\text{A.7})$$

Les équations (A.6) et (A.7) nous permettent de conclure sur les relations entre les formes gradient en *Éléments Finis* et en *Volumes Éléments Finis* pour une pression dans M_h^N :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h^N \in M_h^N, b_h^V(v_h, q_h^N) = \frac{d+1}{d} b_h^1(v_h, q_h^N) \quad (\text{A.8})$$

A.2.2 La forme divergence

En *Éléments Finis* la forme divergence et la forme gradient sont identiques. En *Volumes Éléments Finis*, nous rappelons la définition de la forme divergence introduite précédemment :

$$\begin{aligned} c_h^V(v_h, q_h) &= \sum_{i=1}^{N_s} q_h^i \left(\int_{\partial\Pi_{s_i}} v_h \cdot \vec{n} ds + \alpha_1 \sum_{K \in \mathcal{V}(s_i)} \int_{\partial K} v_h \cdot \vec{n} ds \right) \\ &\quad + \alpha_2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_h^K \left(\int_{\partial K} v_h \cdot \vec{n} ds \right), \end{aligned}$$

où nous avons introduit les notations :

$$\begin{aligned} \forall i = 1..N_s, \quad q_h^i &= q_h(s_i) \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad q_h^K &= \left(q_h(c_K) - \frac{1}{d} \sum_{s_j \in K} q_h(s_j) \right) \end{aligned}$$

Les coefficients α_1 et α_2 sont deux paramètres non nuls que nous allons fixer afin de rendre les formes gradient et divergence symétriques et qui dépendent du choix des volumes de contrôle de type Π_{s_i} . Pour simplifier l'écriture, nous noterons $\Pi_i = \Pi_{s_i}$. Nous introduisons maintenant quelques notations utiles qui, de plus, permettent de définir Π_i :

- $\partial K \cap \Pi_i = \{x \in \partial K / \lambda_i(x) \leq \beta\}$
- $\gamma_{K_i} = \{x \in \partial K / \lambda_i(x) = \beta\}$
- $\chi_i = \{x \in K / \lambda_i(x) \geq \beta\}$
- $\alpha = \frac{|\Pi_i \cap K|}{|K|}$

La figure (A.4) illustre les notations que nous venons de définir dans le cas $\{\alpha = \frac{1}{8}; \beta = \frac{1}{4}\}$. Le choix que nous avons fait dans le manuscrit correspondait au cas $\{\alpha = \frac{1}{2d}; \beta = \frac{1}{2}\}$.

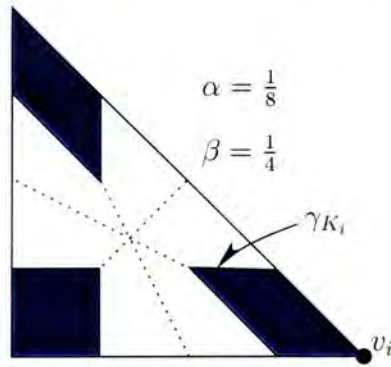


FIG. A.4 – Description du volume de contrôle de masse Π_i

A.2.2.1 Pression dans M_h^T

Nous choisissons $p = \phi_{s_j}$.

La forme divergence s'écrit :

$$c_h^V(\psi_{m_i}, \lambda_{s_j}) = \sum_{K \in \mathcal{V}(s_j)} \int_{(\partial \Pi_{s_j}) \cap K} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds + \alpha_1 \sum_{K \in \mathcal{V}(s_j)} \int_{\partial K} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\int_{\partial \Pi_j} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{K \cap \Pi_j} \nabla \cdot \psi_{m_i} \, dx - \int_{\partial K \cap \Pi_j} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\int_{\partial K \cap \Pi_j} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\chi_j} \nabla \cdot \psi_{m_i} \, dx - \int_{\gamma_j} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\int_{\partial \Pi_j} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds = (\alpha - (1 - \beta)^d) |K| (\nabla \cdot \psi_{m_i})|_K + \int_{\gamma_j} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds$$

Sur χ_j , nous avons :

$$\psi_i = 1 - d\lambda_i = 1 - (d\tilde{\lambda}_i (1 - \beta)) (1 - \delta_{ij}) - d\beta\delta_{ij}$$

$$\int_{\gamma_j} \tilde{\lambda}_i = |\gamma_j| \frac{1}{d} \quad \text{if } i \neq j$$

$$|\gamma_j| = (1 - \beta)^{d-1} |S_j|$$

$$\int_{\gamma_j} \psi_i \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\gamma_j} \vec{n} \, ds \cdot \psi_i(m_i) (1 - d\beta\delta_{ij} - (1 - \beta)(1 - \delta_{ij}))$$

$$\int_{\gamma_j} \psi_i \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\gamma_j} \vec{n} \cdot d\psi_i(m_i) (\beta + (1 - (d + 1)\beta) \delta_{ij})$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \int_{\partial \pi_j \cap K} \psi_i \cdot \vec{n} \, ds = (\alpha - (1 - \beta)^d) \psi_i(m_i) \cdot \vec{S}_j \delta_{ij} +$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} (1 - \beta)^{d-1} \vec{S}_j \cdot \psi_i(m_i) (\beta + (1 - (d + 1)\beta) \delta_{ij})$$

$$= (\alpha - (1 - \beta)^d + (1 - (d + 1)\beta) (1 - \beta)^{d-1}) \vec{S}_j \cdot \psi_i(m_i) \delta_{ij} +$$

$$\beta (1 - \beta)^{d-1} \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \vec{S}_j \cdot \psi_i(m_i)$$

Donc, nous avons :

$$c_h^V(\psi_i, \lambda_j) = \left(\alpha_1 + \alpha - (1 - \beta)^d + (1 - (d + 1)\beta)(1 - \beta)^{d-1} \right) \vec{S}_j \cdot \psi_i(m_i) \delta_{ij} + \beta (1 - \beta)^{d-1} \sum_{K \in \mathcal{V}(e_i) \cap \mathcal{V}(v_j)} \vec{S}_j \cdot \psi_i(m_i)$$

Pour s'assurer que c_h^V soit toujours proportionnelle à b_h^V , la relation suivante doit être vérifiée :

$$\alpha_1 + \alpha - (1 - \beta)^{1-d} d\beta = 0$$

Différents choix de α et β peuvent être faits :

1. Premier choix proposé : $\left\{ \alpha = \frac{1}{2d}; \beta = \frac{1}{2}; \alpha_1 = \frac{d-1}{2d} \right\}$.

C'est le choix que nous avons fait dans le manuscrit. Avec ce choix, nous avons :

$$c_h^V(\psi_{m_i}, \lambda_{v_j}) = \frac{1}{2^d} \sum_{K \in \mathcal{V}(f_i) \cap \mathcal{V}(s_j)} \psi_i(m_i) \cdot \vec{S}_j \quad (\text{A.9})$$

Dans ce cas, nous pouvons conclure que :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h^T \in M_h^T, c_h^V(v_h, q_h^T) = -\frac{d(d+1)}{2^d} b_h^V(v_h, q_h^T) \quad (\text{A.10})$$

2. Second choix proposé : $\left\{ \alpha = \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1}; \beta = \frac{1}{d}; \alpha_1 = \frac{1}{d} \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1} \right\}$.

Avec ce choix, nous avons

$$c_h^V(\psi_{m_i}, \lambda_{v_j}) = \frac{1}{d} \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1} \sum_{K \in \mathcal{V}(e_i) \cap \mathcal{V}(v_j)} \psi_i(m_i) \cdot \vec{S}_j \quad (\text{A.11})$$

Dans ce cas, nous pouvons conclure que :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h^T \in M_h^T, c_h^V(v_h, q_h^T) = -(d+1) \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1} b_h^V(v_h, q_h^T) \quad (\text{A.12})$$

A.2.2.2 Pression dans M_h^N

La forme divergence s'écrit alors :

$$\begin{aligned} c_h^V(\psi_{m_i}, \phi_K) &= \alpha_2 \int_{\partial K} \psi_{m_i} \cdot \vec{n} \, ds \\ c_h^V(\psi_{m_i}, \phi_K) &= \alpha_2 \psi_{m_i}(m_i) \cdot \vec{S}_i^K \end{aligned}$$

Pour s'assurer que les formes gradient et divergence restent proportionnelles, le choix de α_2 dépend de celui des volumes de contrôle de masse (α and β).

1. Pour le premier choix proposé, nous fixons $\alpha_2 = \frac{d+1}{2^d}$ et nous avons le résultat suivant :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h \in M_h, c_h^V(v_h, q_h) = -\frac{d(d+1)}{2^d} b_h^V(v_h, q_h). \quad (\text{A.13})$$

2. Pour le second choix proposé, nous fixons $\alpha_2 = \frac{d+1}{d} \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1}$ et nous avons le résultat suivant :

$$\forall v_h \in X_h, \forall q_h \in M_h, c_h^V(v_h, q_h) = -(d+1) \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1} b_h^V(v_h, q_h). \quad (\text{A.14})$$

