

N° d'ordre: 280-92

Année 1992

THESE

présentée

devant l'**UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I**

pour l'obtention

du **DIPLOME DE DOCTORAT**

(arrêté du 30.3.92)

Spécialité : Analyse Numérique

par

EMONOT Philippe

**METHODES DE VOLUMES ELEMENTS FINIS :
APPLICATIONS AUX EQUATIONS DE NAVIER STOKES
ET RESULTATS DE CONVERGENCE**

soutenu le **3 DECEMBRE 1992**

JURY : **J.M. THOMAS** : rapporteur
R. TOUZANI : rapporteur
J. BARANGER
J.F. MAITRE
D. GRAND
A. BOURG

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

Président de l'Université
1er Vice-Président Fédération Santé
1er Vice-Président Fédération Sciences
Président du Comité de Coordination
des Etudes Médicales
Secrétaire Général

M. le Professeur G. FONTAINE
M. le Professeur P. ZECH
M. Le Professeur Y. LEMOIGNE

M. le Professeur P. ZECH
M. F. MARIANI

FEDERATION SANTE

- UFR de Médecine GRANGE-BLANCHE
 - UFR de Médecine ALEXIS-CARREL
 - UFR de Médecine LYON-NORD
 - UFR de Médecine LYON-SUD
 - Institut des Sciences Biologiques
et Pharmaceutiques
 - UFR d'ODONTOLOGIE
 - INSTITUT DES TECHNIQUES DE
READAPTATION
 - Département de BIOLOGIE HUMAINE
 - Département d'INNOVATION ET DE
COORDINATION PEDAGOGIQUE
- Directeur : Mme le Pr. PELLET
Directeur : M. le Pr. EVREUX
Directeur : M. le Pr. PATRICOT
Directeur : M. le Pr. DEJOUR
Directeur : M. le Pr. VILLARD

Directeur : M. le Pr. MAGLOIRE
Directeur : M. le Pr. EYSSETTE

Directeur : M. le Pr. BRYON
Directeur : M. le Pr. LLORCA

FEDERATION SCIENCES

- Institut DES SCIENCES DE LA MATIERE
 - Institut DES SCIENCES DE L'INGE-
NIERIE ET DU DEVELOPPEMENT
TECHNOLOGIQUES
 - Institut DE CHIMIE ET BIOLOGIE
 - Institut d'ANALYSE DES SYSTEMES
BIOLOGIQUES ET SOCIO-ECONOMIQUES
 - Institut DES SCIENCES DE LA TERRE
DE L'OCEAN, DE L'ATMOSPHERE, DE
L'ESPACE ET DE L'ENVIRONNEMENT
 - UFR des ACTIVITES PHYSIQUES ET
SPORTIVES
 - I.U.T. A
 - I.U.T. B
 - Département de 1er Cycle
pluridisciplinaire Sciences
 - Département de 2ème Cycle
 - Sciences de la Vie et de la
Terre
 - Sciences pour l'Ingénieur
 - Sciences de l'Analyse et de
la Matière
- Directeur : M. le Pr. ELBAZ
Directeur : M. le Pr. DIMNET

Directeur : Mme VARAGNAT, M.C.
Directeur : M. le Pr. LEGAY

Directeur : M. le Pr. ELMY

Directeur : M. le Pr. CAMY

Directeur : M. le Pr. GIELLY
Directeur : M. le Pr. PIVOT
Directeur : M. PONCET, M.C.

Directeur : M. le Pr. BLANCHET
Directeur : M. le Pr. BETHOUX

Directeur : M. le Pr. VIALLE

A Nadine et Margot.

Je remercie Jean Marie Thomas et Rachid Touzani d'avoir accepté d'être rapporteurs.

Je tiens à remercier Jacques Baranger et Jean François Maitre pour leur disponibilité et leur soutien tout au long de ce travail.

Je remercie André Latrobe, Dominique Grand, Vincent Pimont et Daniel Meyer pour m'avoir proposé ce sujet de thèse.

Je remercie André Bourg et Michel Villand qui ont suivi ce travail pendant trois ans.

Je remercie Christophe Terrasson pour tous les dépannages informatiques !

Je remercie Pierre Malartic (stagiaire à Cisi Ingénierie) pour la mise en œuvre de la thermique dans *Nelly* : la maquette réalisée durant ces trois ans, et Jean Christophe Jardinnier (stagiaire au CENG) pour avoir écrit l'interface entre *Nelly* et les mailleurs tétraédriques.

Je remercie Corine Pantigny pour son aide précieuse.

Et un grand MERCI à tout le Laboratoire de Modélisation et de développement des Logiciels ainsi qu'au personnel de Cisi Ingénierie à Grenoble.

Introduction

La simulation numérique des écoulements de fluides incompressibles dans toute la plage des nombres de Reynolds et dans des géométries complexes nécessite des méthodes numériques robustes. La méthode utilisée dans *TRIO VF* [14] qui est le code de thermo-hydraulique développé par le *CEA* et *Cisi Ingénierie* à Grenoble est une méthode de *Volumes Finis* inspirée du schéma Marker and Cell (M.A.C. [19]). L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle nécessite l'emploi de maillages rectangulaires. Il est donc difficile de faire des calculs dans des géométries complexes et de raffiner localement le maillage pour l'adapter à l'écoulement.

Les méthodes de *Volumes Finis* sont depuis longtemps employées dans des codes industriels et représentent également la méthode de discrétisation la plus répandue pour les problèmes hyperboliques (tels que les équations de la dynamique des gaz). Elles apparaissent comme des méthodes "naturelles" de discrétisation des équations de conservation. L'analyse mathématique des méthodes de *Volumes Finis* est pour l'instant restreinte aux problèmes hyperboliques; la théorie existante pour les problèmes elliptiques est très peu développée surtout si on la compare à la théorie des méthodes d' *Éléments Finis* .

Le schéma M.A.C. a été interprété par Girault et Raviart dans [17] comme étant la restriction aux maillages rectangulaires de méthodes *Éléments Finis* particulières. Mais ces méthodes *Éléments Finis* ne sont pas conservatives en général : on ne peut pas exhiber de volumes de contrôle sur lesquels les équations de conservation sont vérifiées. Une autre tentative pour "destructurer" le schéma M.A.C. est donnée dans [16] par Girault.

La *Box Method* [22] est une tentative pour allier la souplesse géométrique des *Éléments Finis* et l'aspect conservatif des *Volumes Finis* , et peut être considérée comme la première méthode de *Volumes Éléments Finis* pour traiter le problème du Laplacien. L'idée de la *Box Method* en dimension deux est d'associer à chaque sommet d'une triangulation du domaine de calcul un *volume de contrôle* et de chercher une fonction continue affine par triangle vérifiant les équations de conservation sur chaque cellule. Notre objectif est de construire une méthode de *Volumes Éléments Finis* adaptée au problème de Navier Stokes.

Dans le premier chapitre, on établit les équations de conservation modélisant les écoulements de fluides incompressibles sous forme d'équations de bilan et on présente brièvement les principes des méthodes de *Volumes Finis*.

Le second chapitre se veut une introduction aux méthodes de *Volumes Éléments Finis*. On y décrit la *Box Method* et on propose une méthode de *Volumes Éléments Finis* adaptée aux problèmes de Stokes et de Navier Stokes. Cette dernière méthode est décrite en détail et on donne des résultats numériques obtenus sur deux cas test classiques.

Le troisième chapitre présente une analyse d'erreur de la méthode des *Volumes Éléments Finis* pour le problème du Laplacien, et des applications en dimension un, deux ou trois.

Le quatrième chapitre prolonge les techniques du chapitre trois pour faire une analyse d'erreur de la méthode des *Volumes Éléments Finis* pour le problème de Stokes.

Table des matières

1	Lois de conservation et Volumes Finis.	5
1	Lois de conservation et lois d'équilibre.	5
1.1	Conservation de la masse.	5
1.2	Équations dynamiques.	7
1.3	Équation de l'énergie.	8
1.4	Lois de comportement.	9
2	Volumes Finis.	10
2.1	Les méthodes centrées sur les cellules.	11
2.2	Les méthodes centrées sur les nœuds.	14
2	Une Méthode de Volumes Éléments Finis pour le problème de Navier Stokes.	17
1	Introduction aux méthodes de Volumes Éléments Finis.	17
2	Une première méthode de Volumes Éléments Finis pour le problème du Laplacien.	18
3	Une méthode Volumes Éléments Finis pour le problème de Stokes. . .	22
3.1	L'élément de Crouzeix Raviart.	22
3.2	Description des volumes de contrôle.	24
3.3	Formulation conservative discrète.	24
3.4	Extension à la dimension trois.	32
4	Extension aux équations de Navier Stokes.	33
4.1	Le schéma centré	34
4.2	Un schéma décentré amont.	36
4.3	Calculs instationnaires.	36
4.4	Extension à Navier Stokes anisotherme.	39
5	Résultats numériques.	43
5.1	Cavité à paroi défilante.	43
5.2	Cavité de Vahl Davis.	45

3	Analyse Numérique des méthodes de Volumes Éléments Finis pour le problème du Laplacien.	47
1	Position du problème et notations	50
2	Analyse	52
2.1	Un résultat de convergence abstrait.	52
2.2	Un lemme d'approximation des flux.	53
2.3	Résultat de convergence.	56
2.4	Conclusion	61
3	Applications	61
3.1	Applications en dimension un.	61
3.2	Applications en dimension deux.	71
3.3	Applications en dimension trois.	77
4	Extension au problème de convection diffusion	77
4.1	Position du problème.	77
4.2	Problème discret.	78
4	Analyse Numérique des méthodes de Volumes Éléments Finis pour le problème de Stokes.	81
1	Position du problème.	81
1.1	Le problème continu.	81
1.2	Le problème discret.	82
2	Analyse.	83
2.1	Un résultat de convergence abstrait.	83
2.2	Résultat de convergence.	86
3	Applications.	90
3.1	Application à l'élément de Crouzeix Raviart.	90
3.2	Application à l'élément P_1 -bulle P_1	90

Chapitre 1

Lois de conservation et Volumes Finis.

Introduction.

On montre ici le lien étroit existant entre les méthodes de *Volumes Finis* et les lois de conservation. Les lois de conservation expriment la conservation locale d'une grandeur physique, c'est-à-dire la conservation de cette quantité sur tout sous-domaine. L'idée de la méthode des *Volumes Finis* est d'écrire ces mêmes lois de conservation sur un ensemble fini de volumes de contrôle. On décrit ici le modèle de Navier-Stokes pour un fluide incompressible à la fois sous forme d'équations aux dérivées partielles et sous forme d'équations de bilan exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

1 Lois de conservation et lois d'équilibre.

On renvoie à [13] pour plus de détails.

1.1 Conservation de la masse.

Variables d'Euler.

La description eulérienne consiste à caractériser le mouvement par la vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$ de la particule qui se trouve au point \vec{x} à l'instant t . La difficulté inhérente au point de vue d'Euler est une certaine complication de l'expression de l'accélération

d'une particule fluide. On a :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération.

Dérivée particulaire.

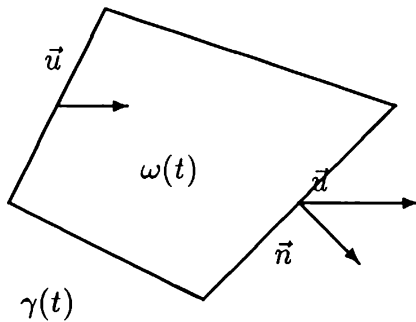
La dérivée particulaire d'une fonction $f(\vec{x}, t)$ est la dérivée calculée en suivant la particule fluide dans son mouvement, elle s'écrit :

$$\frac{df}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) f$$

En choisissant pour f l'intégrale de volume sur un domaine borné $\omega(t)$ de frontière $\gamma(t)$ que l'on suit dans son mouvement d'une quantité $\phi(\vec{x}, t)$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \phi \, dV = \int_{\omega(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV + \int_{\gamma(t)} \phi \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$$

où \vec{n} est la normale unitaire à $\gamma(t)$ extérieure à $\omega(t)$.



L'interprétation du deuxième terme est très simple; il représente le flux du vecteur $\phi \vec{u}$ à travers la surface $\gamma(t)$, c'est-à-dire le bilan net des quantités de ϕ apportées par les particules fluides qui sont entrées (ou sorties) dans le domaine $\omega(t)$ en traversant sa frontière $\gamma(t)$.

Équation de continuité.

On appelle *équation de continuité* l'équation qui exprime le principe fondamental de *conservation de la masse* que doit vérifier tout écoulement. Si $\rho(\vec{x}, t)$ désigne la masse volumique au point \vec{x} , à l'instant t , la masse d'un domaine $\omega(t)$ borné s'écrit :

$$M(t) = \int_{\omega(t)} \rho \, dV$$

Le principe de conservation de la masse impose la nullité de la dérivée particulière $\frac{dM}{dt}$. En appliquant le résultat du paragraphe précédent, on obtient :

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\gamma(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0$$

En remarquant que ceci doit être vrai pour tout domaine $\omega(t)$, on obtient l'expression du principe de conservation de la masse sous forme d'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{u} = 0$$

1.2 Équations dynamiques.

Théorème des quantités de mouvement.

La loi fondamentale de la dynamique dit qu'il existe une chronologie (dite *galiléenne*) et un référentiel (dit *galiléen*) tels que, à tout instant et pour toute partie $\omega(t)$ d'un système mécanique, le *torseur des quantités d'accélération* est égal au *torseur des efforts extérieurs*. On note $[K]$ le torseur des quantités de mouvement d'un domaine $\omega(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \int_{\omega(t)} \rho \vec{u} dV \\ \vec{\mathcal{M}}_0(K) &= \int_{\omega(t)} \vec{x} \wedge \rho \vec{u} dV \end{aligned}$$

et $[F]$ le torseur des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\omega(t)} \rho \vec{f}_V dV + \int_{\gamma(t)} \vec{f}_S ds \\ \vec{\mathcal{M}}_0(F) &= \int_{\omega(t)} \rho \vec{x} \wedge \vec{f}_V dV + \int_{\gamma(t)} \vec{x} \wedge \vec{f}_S ds \end{aligned}$$

où $\rho \vec{f}_V$ est une densité volumique de force et \vec{f}_S une densité surfacique de force. On a :

$$\frac{d[K]}{dt} = [F]$$

Soit :

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{\gamma(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f}_V dV + \int_{\gamma(t)} \vec{f}_S ds \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \, dV + \int_{\gamma(t)} (\vec{x} \wedge \rho \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds \\
= \\
\int_{\omega(t)} \rho \vec{x} \wedge \vec{f}_V \, dV + \int_{\gamma(t)} \vec{x} \wedge \vec{f}_S \, ds
\end{aligned} \tag{1.2}$$

L'hypothèse de Cauchy conduit à écrire :

$$\vec{f}_S = \sigma(\vec{n})$$

où σ est appelé tenseur des contraintes. La relation (1.2) est alors équivalente à σ est symétrique :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

En écrivant que (1.1) est vraie pour tout domaine, on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous forme d'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{f}_V + \text{div} \sigma$$

1.3 Équation de l'énergie.

Le premier principe de la Thermodynamique dit qu'il existe une fonction énergie interne spécifique (c'est-à-dire par unité de masse), telle que la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale (énergie cinétique + énergie interne) soit égale à la puissance des forces extérieures appliquées au système plus les apports de chaleur par unité de temps :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \right) \, dV &= \int_{\omega(t)} \rho \vec{f}_V \cdot \vec{u} \, dV + \int_{\gamma(t)} \sigma(\vec{n}) \cdot \vec{u} \, ds \\
&+ \int_{\omega(t)} \rho h \, dV + \int_{\gamma(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} \, ds
\end{aligned}$$

où :

e est l'énergie interne spécifique

ρh est une source volumique de chaleur par unité de temps et

\vec{q} est le vecteur flux de chaleur.

1.4 Lois de comportement.

Pour un milieu donné et un type de mouvement, l'équilibre entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues est obtenu en négligeant ce qui peut l'être et en introduisant d'autres relations entre les inconnues, dites *lois constitutives* ou *lois de comportement*. Les lois constitutives concernent par exemple σ , q , e , mais pas les variables indépendantes v , ρ , T (principe de causalité). Ces lois doivent être physiquement admissibles (déterminisme, action locale, objectivité.) et ne doivent pas être en contradiction avec les lois fondamentales.

Fluides incompressibles.

Un fluide incompressible est tel que $\text{div} \vec{u} = 0$:

$$\int_{\gamma(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

L'incompressibilité a pour conséquence que $\frac{d\rho}{dt} = 0$, c'est-à-dire que la masse volumique est constante le long des lignes de courant.

Fluides Newtoniens.

Pour un fluide Newtonien, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} -pI_d + \lambda(\text{div} \vec{u})I_d + 2\mu D$$

où $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^t)$, p est la pression et μ la viscosité.

Soit pour un fluide incompressible :

$$\sigma = -pI_d + \mu (\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^t)$$

en remarquant que $\text{div}(\vec{\nabla} \vec{u})^t = \vec{\nabla}(\text{div} \vec{u})$, on obtient l'écriture simplifiée de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} \, dV + \int_{\gamma(t)} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f}_V \, dV + \int_{\gamma(t)} (-pI_d + \mu \vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \vec{n} \, ds$$

ou

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - \mu \vec{\nabla} \vec{u} + pI_d) = \rho \vec{f}_V$$

Loi de Fourier.

La loi de Fourier stipule :

$$\vec{q} = k\vec{\nabla}T$$

et on suppose :

$$e = c_p T$$

où c_p est une fonction croissante de la température. En utilisant la symétrie de σ , l'incompressibilité et la conservation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \int_{\gamma(t)} \rho e \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega(t)} \rho h dV + \int_{\gamma(t)} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} ds + \int_D \sigma D(\vec{u})$$

Récapitulatif.

On a obtenu le système d'équations sous forme *Conservative* suivant :

$$\int_{\gamma(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{\gamma(t)} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f}_V dV + \int_{\gamma(t)} (-p I_d + \mu \vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \vec{n} ds$$

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial H}{\partial t} dV + \int_{\gamma(t)} H \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega(t)} \rho h dV + \int_{\gamma(t)} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} ds + \int_D \sigma D(\vec{u})$$

où $H = \rho c_p T$ est l'enthalpie volumique.

Pour compléter le système, il faut se donner des conditions aux limites et une condition initiale. Les conditions aux limites les plus simples sont de se donner sur la frontière du domaine de calcul soit \vec{u} soit $-p\vec{n} + \mu \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n}$ pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et soit H soit $k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}$ pour l'équation de conservation de l'énergie.

2 Volumes Finis.

La méthode des *Volumes Finis* cherche à approcher la solution de ce système en se donnant un ensemble fini de domaines ω_i appelés volumes de contrôle et une caractérisation de la solution discrète. Il existe deux grandes familles de méthodes de *Volumes Finis* :

- ou bien on se donne les ω_i et on caractérise la solution discrète par ses valeurs moyennes sur les volumes de contrôle; il reste alors à relier les flux aux valeurs moyennes.
- ou bien on se donne un maillage, on caractérise la solution par ses valeurs aux nœuds et on associe à chaque nœud un volume de contrôle. À l'intérieur de cette famille, on distingue les méthodes de *Volumes Différences Finies* où l'on se donne un maillage rectangulaire et où l'on approche les flux en écrivant des développements de Taylor tronqués et la méthode des *Volumes Éléments Finis* où l'on se donne une triangulation et un espace éléments finis associés.

On décrit brièvement dans la suite un exemple de chacune de ces méthodes sur le problème de la conservation de l'énergie pour un fluide au repos ($\vec{u} = 0$) en dimension deux :

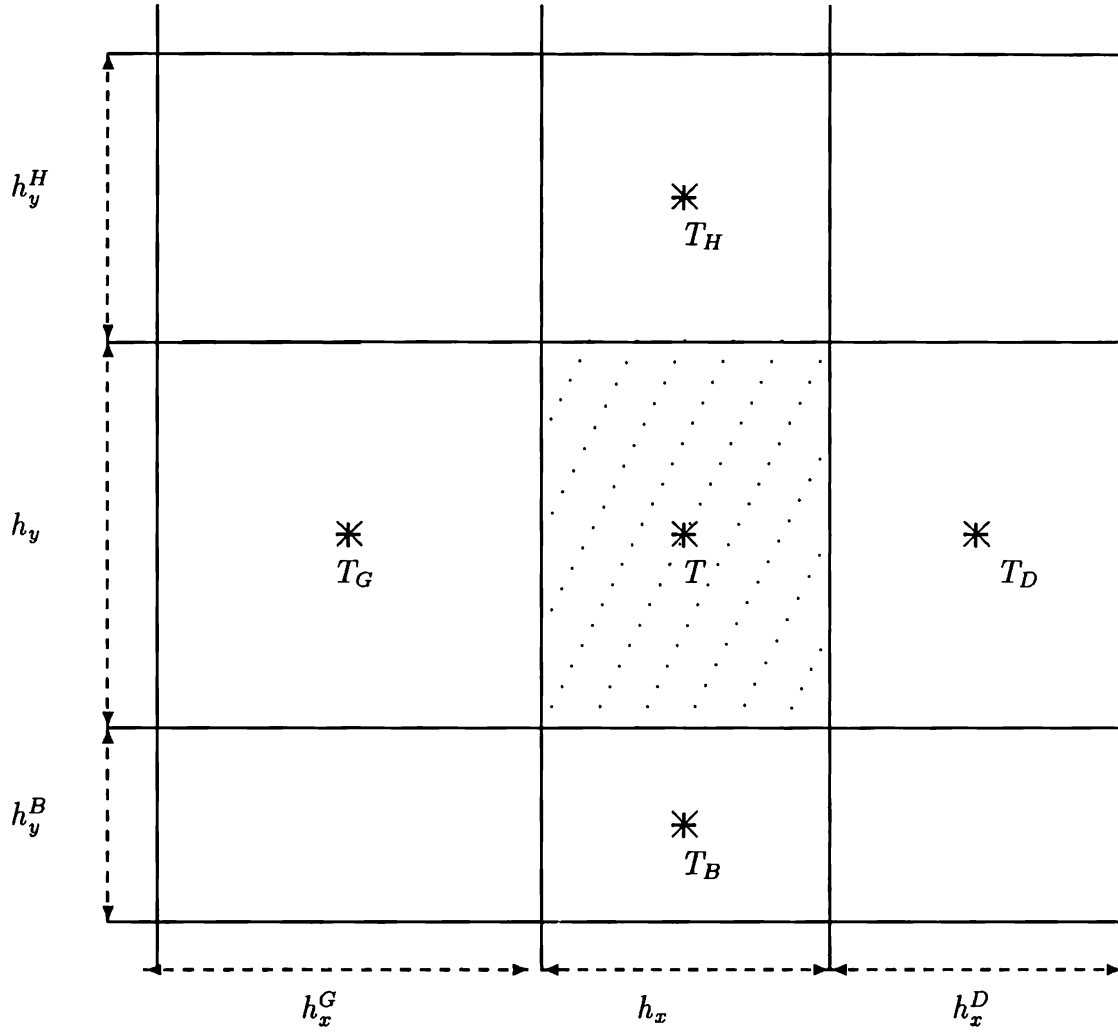
$$\int_{\gamma} -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega} \rho h \, dV \quad (1.3)$$

avec k constant et la condition aux limites $T = 0$ sur Γ .

2.1 Les méthodes centrées sur les cellules.

Maillages structurés.

On prend pour exemple la discrétisation de l'équation de la chaleur qui est utilisée dans *TRIO VF*. On se donne une partition du domaine de calcul en rectangles de côtés parallèles aux axes, on représente les champs de température par leur valeurs moyennes sur chaque rectangle. On évalue les flux par des schémas aux *Différences Finies* :



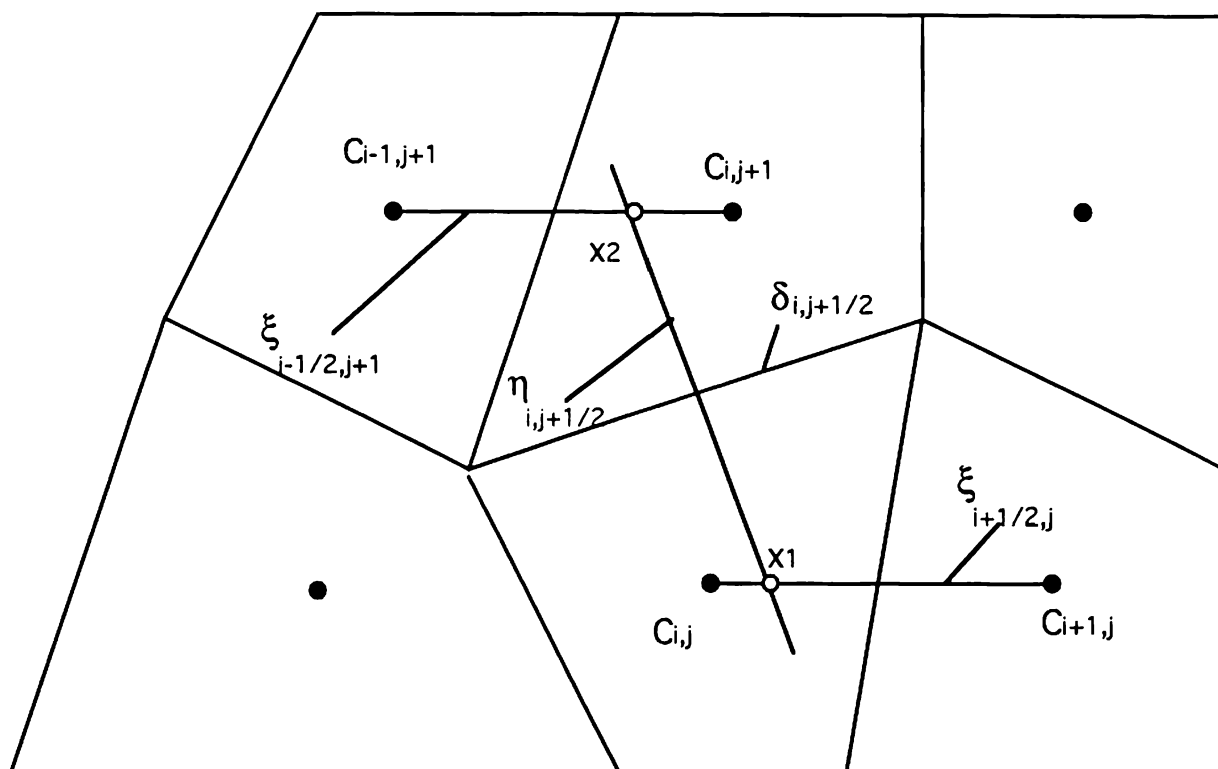
$$\int_{\gamma} -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, ds \approx 2k \left(h_x \left(\frac{T - T_H}{h_y + h_y^H} + \frac{T - T_B}{h_y + h_y^B} \right) + h_y \left(\frac{T - T_D}{h_x + h_x^D} + \frac{T - T_G}{h_x + h_x^G} \right) \right)$$

où γ est la frontière du rectangle associé à T (hachuré).

Maillages non structurés.

I. Faille et T. Gallouet se sont récemment intéressés à ce type de méthode. Ils ont proposé dans [15], si le maillage garde la structure $\mathcal{T}_h = \{K_{ij}, i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M\}$, le schéma suivant :

Soient C_{ij} le centre de la maille K_{ij} , $\delta_{i,j-\frac{1}{2}}$, $\delta_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\delta_{i-\frac{1}{2},j}$, $\delta_{i+\frac{1}{2},j}$ les quatre arêtes formant la maille K_{ij} et $\eta_{i,j-\frac{1}{2}}$, $\eta_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\eta_{i-\frac{1}{2},j}$, $\eta_{i+\frac{1}{2},j}$ leurs médiatrices respectives. On note encore $\xi_{i,j-\frac{1}{2}}$ (resp. $\xi_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\xi_{i-\frac{1}{2},j}$, $\xi_{i+\frac{1}{2},j}$) la droite joignant les points $C_{i,j}$ et $C_{i,j-1}$ (resp $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ et $C_{i-1,j}$, $C_{i+1,j}$ et $C_{i,j}$).



Considérons par exemple l'arête $\delta_{i,j+\frac{1}{2}}$ séparant les mailles K_{ij} et $K_{i,j+1}$. Pour approcher $\vec{\nabla}T \cdot \vec{n}_K$ au milieu de cette arête, on construit une approximation de T aux points x_1 et x_2 situés sur la médiatrice $\eta_{i,j+\frac{1}{2}}$ de l'arête $\delta_{i,j+\frac{1}{2}}$, de part et d'autre de celle-ci. On écrit enfin :

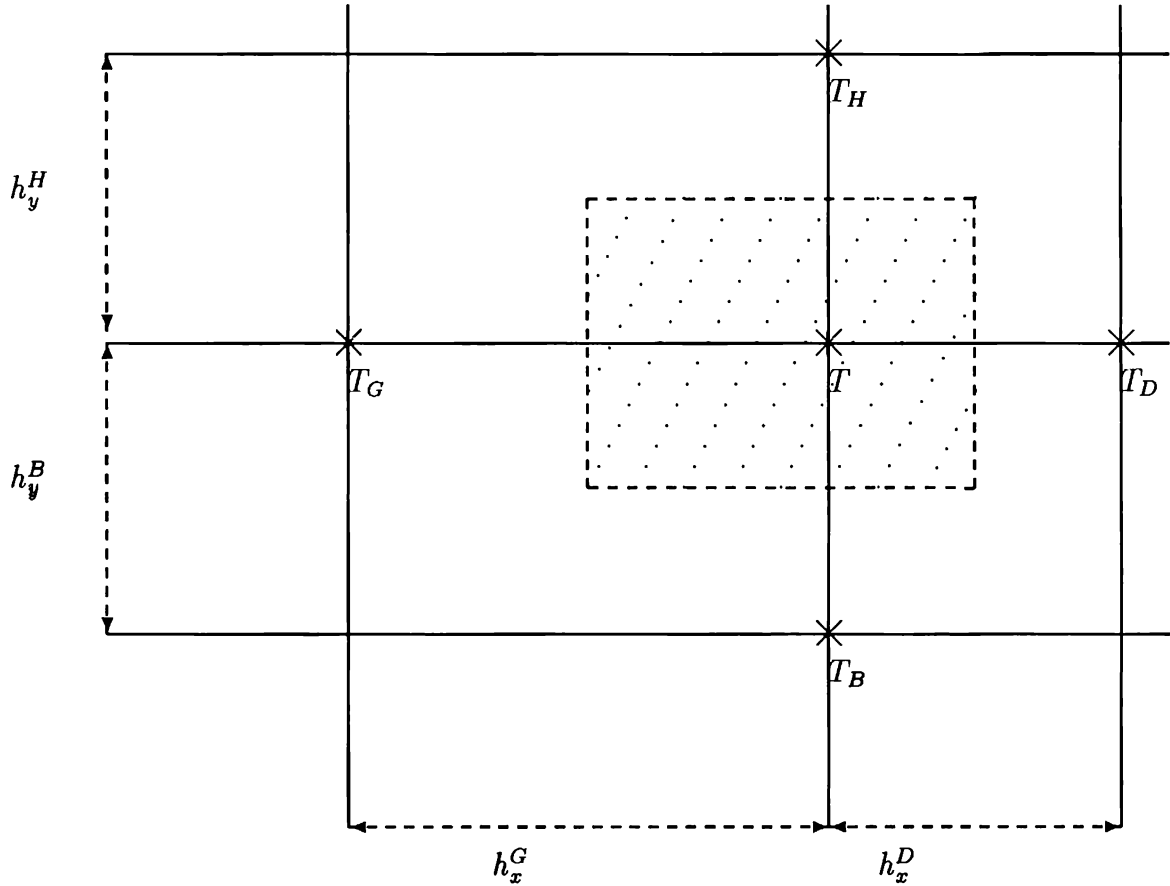
$$\int_{\delta_{i,j+\frac{1}{2}}} \vec{\nabla}T \cdot \vec{n}_K \approx |\delta_{i,j+\frac{1}{2}}| \frac{\theta_2 - \theta_1}{|x_2 - x_1|}$$

où θ_1 et θ_2 sont obtenus par interpolation linéaire le long des droites ξ . Pour ces deux méthodes, il faut ajouter des mailles fictives pour traiter les conditions aux limites de Dirichlet.

2.2 Les méthodes centrées sur les nœuds.

Méthodes de Volumes Différences Finies.

On se donne une grille rectangulaire et on associe à chaque nœud un volume de contrôle en joignant les centres de gravité des rectangles. On évalue les flux par des schémas aux *Différences Finies* :



$$\int_{\gamma} -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, ds \approx k \left(\frac{h_x^G + h_x^D}{2} \left(\frac{T - T_H}{h_y^H} + \frac{T - T_B}{h_y^B} \right) + \frac{h_y^H + h_y^B}{2} \left(\frac{T - T_D}{h_x^D} + \frac{T - T_G}{h_x^G} \right) \right)$$

où γ est la frontière du rectangle associé à T (hachuré).

Méthodes de Volumes Éléments finis.

C'est la méthode qui nous intéresse ici. Elle sera présentée et analysée en détail dans la suite.

Chapitre 2

Une Méthode de Volumes Éléments Finis pour le problème de Navier Stokes.

1 Introduction aux méthodes de Volumes Éléments Finis.

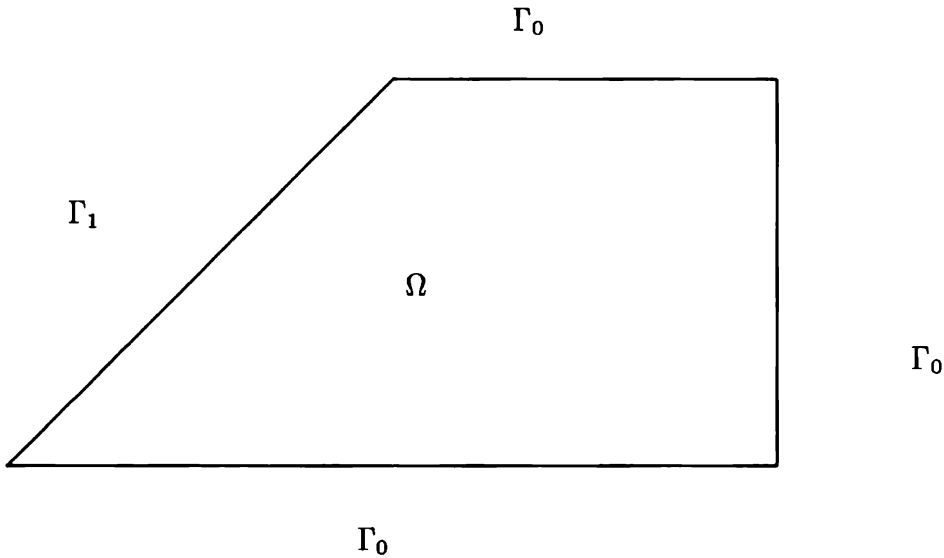
L'idée d'associer des volumes de contrôle à un maillage triangulaire est une idée ancienne (ref [22]) mais peu étudiée. Seule la *Box Method* (où le terme *Box* renvoie à la notion de volume de contrôle) qui correspond à une méthode de *Volumes Éléments Finis* affines par éléments est bien connue (ref [5,18]). L'analyse mathématique de la *Box Method* proposée par Bank et Rose ([5]) ou Hackbusch (ref [18]) est basée sur une comparaison entre les solutions *Éléments Finis* et *Box Method*. Heinrich (ref [20]) a proposé une analyse plus dans l'esprit des *Différences Finies*. Enfin Cai et Mc Cormick (ref [23]) ont proposé une analyse que l'on peut chercher à étendre d'une part à d'autres lois de conservation que celle du problème du Laplacien et d'autre part à d'autres choix d' *Éléments Finis* et de volumes de contrôle. Citons enfin Banaszek (ref [4,3]) qui a comparé "expérimentalement" la méthode des *Éléments Finis* et la méthode des *Volumes Éléments Finis* pour les éléments les plus usuels et Baliga et Pathankar (ref [2]) qui ont conçu une méthode de *Volumes Éléments Finis* pour le problème de Navier Stokes à partir de l'élément de Pironneau Bercovier ($P_1^{\frac{A}{2}} P_1$).

2 Une première méthode de Volumes Éléments Finis pour le problème du Laplacien.

On décrit ici la *Box Method* qui peut être considérée comme étant la première méthode de *Volumes Éléments Finis* proposée pour le problème du Laplacien. On ne considère ici que le problème de la chaleur stationnaire non convectif ($\vec{u} = 0$) dans \mathfrak{R}^2 avec $k = 1, \rho c_p = 1$:

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma(t)} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, ds &= \int_{\omega(t)} h \, dV \quad \forall D \in \Omega \\ T &= T_0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} &= q \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

où $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.



On se donne une triangulation de Ω -compatible avec les conditions aux limites : les points d'intersection de Γ_0 et Γ_1 coïncident avec des nœuds du maillage- à laquelle on associe l'espace *Éléments Finis* V_h constitué des fonctions définies sur Ω à valeur dans \mathfrak{R} , continues et affines par triangle (i.e. de la forme $T(x, y) = ax + by + c$). On notera x_i les sommets de la triangulation et ϕ_i la fonction de V_h telle que

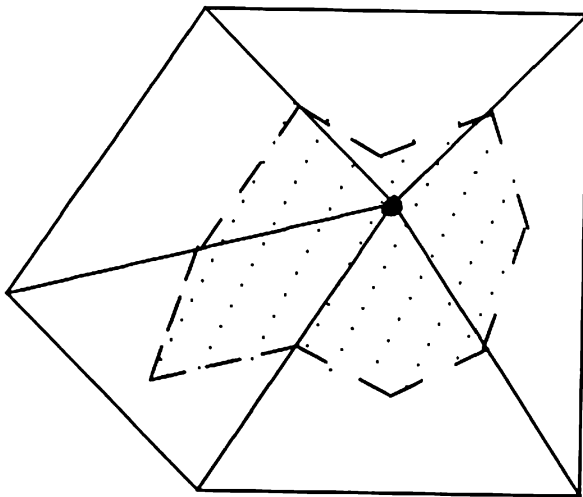
$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

de sorte que toute fonction T de V_h vérifie :

$$T(x) = \sum_i T(x_i) \phi_i(x) .$$

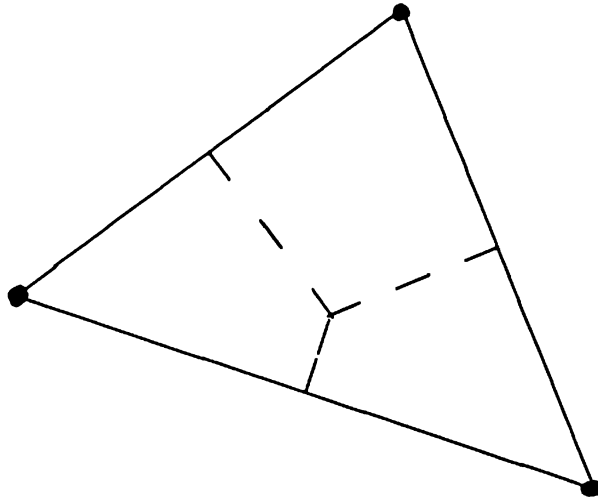
On construit le volume de contrôle ω_i associé au sommet x_i de la triangulation en joignant dans chaque triangle de sommet x_i les milieux des côtés à un point quelconque du triangle éventuellement frontière par une courbe de sorte que $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$.

Exemple de Volume de contrôle.

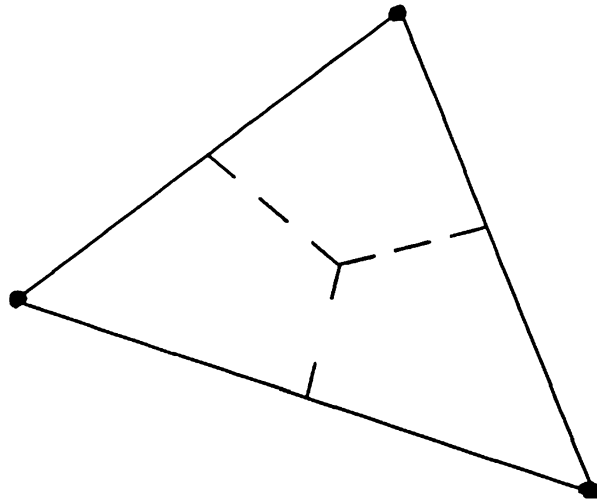


Les deux choix les plus classiques consistent à construire les cellules en joignant dans chaque triangle les milieux des côtés au point de concours des médiatrices si tous les angles des triangles sont aigus, et au barycentre (point de concours des médianes) pour les triangulations générales.

Construction des Volumes de contrôle par les médiatrices.



Construction des Volumes de contrôle par les médianes.



On décompose la frontière $\partial\omega_i$ de la cellule ω_i en deux parties :
la partie où le flux est connu :

$$\gamma_{i,1} \stackrel{\text{def}}{=} \partial\omega_i \cap \Gamma_1$$

et le reste :

$$\gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial\omega_i - \gamma_{i,1}$$

On obtient le problème discret : Trouver $T \in V_h$ tel que :

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \, ds &= \int_{\omega_i} h \, dV + \int_{\gamma_i^1} q \, ds \quad (\forall i, x_i \notin \Gamma_0) \\ T(x_i) &= T_0(x_i) \quad (\forall i, x_i \in \Gamma_0) \end{aligned}$$

Soit en développant T suivant les fonctions de base :

$$\sum_{j : x_j \notin \Gamma_0} \left(T(x_j) \int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) = \int_{\omega_i} h \, dV + \int_{\gamma_i^1} q \, ds + \sum_{j : x_j \in \Gamma_0} \left(T_0(x_j) \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right)$$

que l'on peut récrire sous la forme du système linéaire suivant :

$$AT = B$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} A_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \\ B_i &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega_i} h \, dV + \int_{\gamma_i^1} q \, ds + \sum_{j : x_j \in \Gamma_0} \left(T_0(x_j) \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) \\ T_j &\stackrel{\text{def}}{=} T(x_j) \end{aligned}$$

Il est connu que la matrice A est la même que celle obtenue par la méthode de Galerkin (ref [5]) dans le cas des volumes considérés :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{\nabla} \phi_j \, dV$$

de sorte que les deux méthodes ne diffèrent que par le traitement du second membre et de la condition de Neumann :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i} h \, dV &\neq \int_{\Omega} h \phi_i \, dV \\ \int_{\gamma_i^1} q \, ds &\neq \int_{\Gamma_1} q \phi_i \, dV \end{aligned}$$

On peut montrer, en comparant les deux seconds membres, la convergence de cette première méthode de *Volumes Éléments Finis* . Au paragraphe suivant, on construit une méthode de *Volumes Éléments Finis* pour le problème de Stokes qui conduit à un système linéaire qui ne diffère du système linéaire obtenu par le méthode des *Éléments Finis* que par le second membre.

3 Une méthode Volumes Éléments Finis pour le problème de Stokes.

On propose ici une méthode inspirée de la *Box Method* adaptée au problème de Stokes stationnaire ($\rho = 1, \nu = 1$) :

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p &= \vec{f} \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_d \text{ sur } \Gamma_0 \\ (\vec{\nabla} \vec{u} - p I_d) \cdot \vec{n} &= \vec{g} \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

où $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$.

Soit sous forme conservative :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (-\vec{\nabla} \vec{u} + p I_d) \cdot \vec{n} \, ds &= \int_{\omega} f \, dV \\ \int_{\gamma} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= 0 \end{aligned}$$

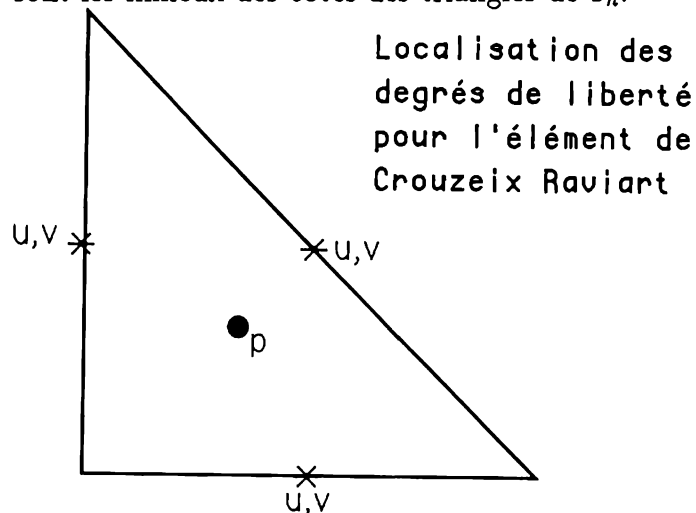
La difficulté principale du problème de Stokes réside dans le couplage vitesse / pression. En *Différences Finies* et *Volumes Différences Finies* ce problème se traduit par l'apparition éventuelle de "checkerboard modes" qu'on supprime par l'utilisation de maillages entrelacés. En *Éléments Finis*, il est connu que l'espace en vitesse et l'espace en pression doivent vérifier une condition de compatibilité dite condition inf-sup (ref [7]).

3.1 L'élément de Crouzeix Raviart.

C'est à partir de cet élément proposé par Crouzeix et Raviart dans [11] que l'on va construire notre méthode de *Volumes Éléments Finis* pour le problème de Stokes; ce choix sera justifié dans le chapitre 4. On notera $P_0(K)$ l'espace des fonctions constantes sur le triangle K et $P_1(K)$ celui des fonctions affines (c'est-à-dire de la forme $ax + by + c$) sur K . On associe à une triangulation \mathcal{T}_h de Ω compatible avec les conditions aux limites, les espaces *Éléments Finis* \vec{V}_h et Q_h définis par :

$$\begin{aligned} V_h &\stackrel{\text{def}}{=} \{v \text{ continues aux } x_i : \forall K \in \mathcal{T}_h, v \in P_1(K)\} \\ \vec{V}_h &\stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v} = (u, v) : u \in V_h, v \in V_h\} \\ Q_h &\stackrel{\text{def}}{=} \{q : \forall K \in \mathcal{T}_h, q \in P_0(K)\} \end{aligned}$$

où les x_i sont les milieux des côtés des triangles de \mathcal{T}_h .



On notera ϕ_i la fonction de base de V_h qui vérifie : $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ et ψ_K la fonction indicatrice du triangle K (c'est à dire la fonction qui vaut 1 dans K et 0 ailleurs.) de sorte que toute fonction de \vec{V}_h s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{v}(x) = (u, v) &= \left(\sum_i u(x_i) \phi_i(x), \sum_i v(x_i) \phi_i(x) \right) \\ &= \sum_i \vec{v}(x_i) \phi_i(x).\end{aligned}$$

Les fonctions de base ϕ_i s'écrivent sur chaque triangle :

$$\phi_i|_K = 1 - 2\lambda_i|_K$$

où $\lambda_i|_K$ est la coordonnée barycentrique de K associée au sommet faisant face au nœud x_i .

De même toute fonction de Q_h s'écrit :

$$q(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q(g_K) \psi_K(x)$$

où g_K est le centre de gravité du triangle K . On supposera les nœuds x_i numérotés de façon à ce que les $N_{h,0}$ premiers nœuds soient internes :

$$\begin{aligned}1 \leq i \leq N_{h,0} &\Rightarrow x_i \notin \Gamma_0 \\ N_{h,0} < i \leq N_h &\Rightarrow x_i \in \Gamma_0\end{aligned}$$

Remarque : L'élément de Crouzeix Raviart est non conforme : $V_h \not\subset H^1(\Omega)$ les fonctions de V_h étant discontinues sur les côtés des triangles, mais les flux de masse

au travers des arêtes sont bien définis :

$$\int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} \vec{u}_{K_1} \cdot \vec{n}_{K_1} \, ds + \int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} \vec{u}_{K_2} \cdot \vec{n}_{K_2} \, ds = 0$$

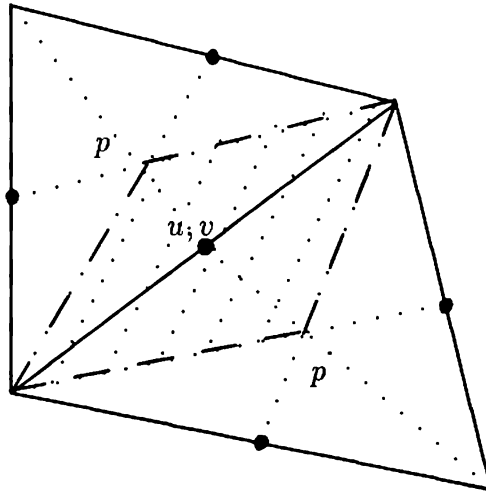
où K_1 et K_2 sont deux triangles voisins, \vec{u}_{K_1} (resp. \vec{u}_{K_2}) est la restriction à K_1 (resp. K_2) de \vec{u} , \vec{n}_{K_1} (resp. \vec{n}_{K_2}) est la normale unitaire extérieure à K_1 (resp. K_2).

3.2 Description des volumes de contrôle.

À tout nœud x_i , on associe le volume de contrôle ω_i obtenu en joignant les sommets des triangles à leur centre de gravité. Les ω_i seront les volumes de contrôle de la quantité de mouvement, les triangles seront les volumes de contrôle de la masse. On notera comme pour la *Box Method* :

$$\begin{aligned} \gamma_{i,1} &= \partial\omega_i \cap \Gamma_1 \\ \gamma_i &= \partial\omega_i - \gamma_{i,1} \end{aligned}$$

Volume de contrôle de la quantité de mouvement



3.3 Formulation conservative discrète.

On cherche un champ de vitesse dont chaque composante est affine par élément, continue aux milieux des côtés et un champ de pression constant par élément vérifiant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sur les volumes de contrôle adéquats :

On cherche $\vec{u} = (u, v) \in \vec{V}_h$ et $p \in Q_h$ tels que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial K - \Gamma_0} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= - \int_{\partial K \cap \Gamma_0} \vec{u}_d \cdot \vec{n} \, ds \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ \int_{\gamma_i} [(pI_d) - (\vec{\nabla} \vec{u})] \cdot \vec{n} \, ds &= \int_{\omega_i} \vec{f} \, dV + \int_{\gamma_i^1} \vec{g} \, ds \quad \text{pour } i \leq N_{h,0} \\ \vec{u}(x_i) &= \vec{u}_d(x_i) \quad \text{pour } N_{h,0} < i \leq N_h \end{aligned}$$

En développant suivant les fonctions de base, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N_{h,0}} \left(u(x_j) \int_{\partial K - \Gamma_0} \phi_j n_x \, ds + v(x_j) \int_{\partial K - \Gamma_0} \phi_j n_y \, ds \right) = - \int_{\partial K \cap \Gamma_0} \vec{u}_d \cdot \vec{n} \, ds \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

qui exprime la conservation de la masse,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_{h,0}} \left(u(x_j) \int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) + \sum_K \left(p(g_K) \int_{\gamma_i} \psi_K n_x \, ds \right) &= \\ = \sum_{j=N_{h,0}+1}^{N_h} \left(u_d(x_j) \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) + \int_{\omega_i} f_x \, dV + \int_{\gamma_i^1} g_x \, ds \quad \forall i \leq N_{h,0} \end{aligned}$$

qui exprime la conservation de la première composante de la quantité de mouvement et :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_{h,0}} \left(v(x_j) \int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) + \sum_K \left(p(g_K) \int_{\gamma_i} \psi_K n_y \, ds \right) &= \\ = \sum_{j=N_{h,0}+1}^{N_h} \left(v_d(x_j) \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) + \int_{\omega_i} f_y \, dV + \int_{\gamma_i^1} g_y \, ds \quad \forall i \leq N_{h,0} \end{aligned}$$

qui exprime la conservation de la seconde composante de la quantité de mouvement.

On peut récrire ces équations sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A & C_x \\ & A & C_y \\ B_x & B_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ G \end{pmatrix}$$

où :

- U est le vecteur de taille $N_{h,0}$ des valeurs de la première composante du champ de vitesses aux nœuds :

$$U_i = u(x_i)$$

- V est le vecteur de taille $N_{h,0}$ des valeurs de la seconde composante du champ de vitesses aux nœuds :

$$V_i = v(x_i)$$

- P est le vecteur des valeurs de la pression sur les triangles :

$$P_K = p(g_K).$$

- A est un matrice $N_{h,0} \times N_{h,0}$ dont les coefficients sont :

$$A_{ij} = \int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds$$

- B_x et B_y sont des matrices $N_K \times N_{h,0}$ dont les coefficients sont :

$$(B_x)_{Ki} = \int_{\partial K} \phi_i n_x \, ds$$

$$(B_y)_{Ki} = \int_{\partial K} \phi_i n_y \, ds$$

- C_x et C_y sont des matrices $N_{h,0} \times N_K$ dont les coefficients sont :

$$(C_x)_{iK} = \int_{\gamma_i} \psi_K n_x \, ds$$

$$(C_y)_{iK} = \int_{\gamma_i} \psi_K n_y \, ds$$

- F_x et F_y sont des vecteurs de taille $N_{h,0}$:

$$(F_x)_i = \sum_{j=N_{h,0}+1}^{N_h} \left(u_d(x_j) \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) + \int_{\omega_i} f_x \, dV + \int_{\gamma_i^1} g_x \, ds$$

$$(F_y)_i = \sum_{j=N_{h,0}+1}^{N_h} \left(v_d(x_j) \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) + \int_{\omega_i} f_y \, dV + \int_{\gamma_i^1} g_y \, ds$$

- G est le vecteur de taille N_K :

$$G_K = - \int_{\partial K \cap \Gamma_0} \vec{u}_d \cdot \vec{n} \, ds$$

soit en notant :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_x & B_y \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{G} = G$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{U} + \mathcal{C}\mathcal{P} &= \mathcal{F} \\ \mathcal{B}\mathcal{U} &= \mathcal{G} \end{aligned}$$

Les matrices A , B et C ont des propriétés remarquables que l'on va préciser.

La matrice de diffusion : A

La matrice de diffusion s'écrit :

$$A_{ij} = \int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds$$

Lemme 2.1 :

La matrice A est la même matrice que celle obtenue par la méthode de Galerkin (elle est donc symétrique définie positive).

Démonstration :

On a pour tout K de la triangulation, si x_j est le milieu d'un côté de K :

$$\begin{aligned} \int_K \vec{\nabla} \phi_j \, dV &= \int_{\partial K} \phi_j \vec{n} \, ds \text{ et} \\ \int_K \vec{\nabla} \phi_j \, dV &= |K| \vec{\nabla} \phi_j \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{\nabla} \phi_j|_K = \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} \phi_j \vec{n} \, ds$$

Notons ∂K_j le côté de K portant x_j , on a :

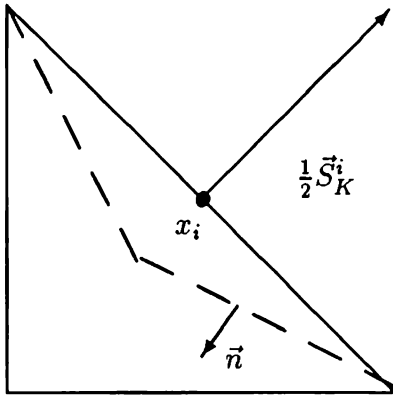
$$\int_{\partial K} \phi_j \vec{n} \, ds = \int_{\partial K_j} \phi_j \vec{n} \, ds + \int_{\partial K - \partial K_j} \phi_j \vec{n} \, ds$$

Or sur les deux côtés de K ne portant pas x_j , ϕ_j est affine et nulle au milieu du côté donc :

$$\int_{\partial K - \partial K_j} \phi_j \vec{n} \, ds = 0$$

et en notant \vec{n}_j la normale à ∂K_j extérieure à K ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_j} \phi_j \vec{n} \, ds &= |\partial K_j| \vec{n}_j \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{S}_K^j. \end{aligned}$$



D'autre part,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\gamma_i \cap K} (\vec{\nabla} \phi_j)|_K \cdot \vec{n} \, ds \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\vec{\nabla} \phi_j)|_K \cdot \int_{\gamma_i \cap K} \vec{n} \, ds \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \vec{S}_K^j \cdot \int_{\gamma_i \cap K} \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

or

$$\int_{\gamma_i \cap K} \vec{n} \, ds = - \int_{\partial K_i} \vec{n} \, ds = -\vec{S}_K^i$$

d'où :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{|K|} \vec{S}_K^j \cdot \vec{S}_K^i \quad \text{soit} \\ A_{ij} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{\nabla} \phi_j \, dV \end{aligned}$$

qui est bien l'expression correspondant à la méthode de Galerkin.

Remarques :

- A a cinq termes non nuls par ligne et par colonne et peut donc être stockée dans un tableau de taille nombre de faces \times 5.
- Cette propriété reste vraie si l'on joint les sommets des triangles à un point quelconque du triangle par des courbes ne se coupant pas.

Les matrices de divergence et de gradient : B et C .

La matrice de divergence s'écrit :

$$(B_x)_{Ki} = \int_{\partial K} \phi_i n_x \, ds$$

$$(B_y)_{Ki} = \int_{\partial K} \phi_i n_y \, ds$$

La matrice de gradient s'écrit :

$$(C_x)_{iK} = \int_{\gamma_i} \psi_K n_x \, ds$$

$$(C_y)_{iK} = \int_{\gamma_i} \psi_K n_y \, ds$$

Lemme 2.2 :

Les matrices B et C sont les mêmes matrices que celles obtenues par la méthode de Galerkin, et on a $B = -C^t$.

Démonstration :

On a :

$$\int_{\Omega} \psi_K \operatorname{div} \vec{u} = \sum_K \int_{\partial K} \vec{u} \cdot \vec{n}$$

30:

ce qui montre que la matrice B est la même que celle obtenue par la méthode de Galerkin.

$$\text{Or : } \begin{pmatrix} (B_x)_{Ki} \\ (B_y)_{Ki} \end{pmatrix} = \int_{\partial K} \vec{\phi}_i \cdot \vec{n} = \vec{S}_K^i \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_i} \psi_K \vec{n} \, ds &= \int_{\gamma_i \cap \partial K} \vec{n} \, ds \\ &= - \int_{\partial K_i} \vec{n} \, ds \\ &= -\vec{S}_K^i \end{aligned}$$

d' où : $B = -C^t$.

Remarques :

- B a trois termes non nuls par ligne et deux par colonne et peut donc être stockée dans un tableau de taille nombre de faces $\times 2$ ou nombre de triangles $\times 3$.
- Cette propriété reste vraie si l'on joint les sommets des triangles à un point quelconque du triangle par des courbes ne se coupant pas.

On peut donc récrire (en changeant \mathcal{G} en $-\mathcal{G}$ et \mathcal{B} en $-\mathcal{B}$) le système linéaire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}U + \mathcal{B}^t \mathcal{P} &= \mathcal{F} \\ \mathcal{B}U &= \mathcal{G} \end{aligned}$$

Le second membre.

Comme pour la *Box Method* pour le Laplacien, les seuls termes qui diffèrent de la méthode de Galerkin sont la partie f et la partie g du second membre :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i} \vec{f} \, dV &\neq \int_{\Omega} \vec{f} \phi_i \, dV \\ \int_{\gamma_i} \vec{g} \, ds &\neq \int_{\Gamma_1} \vec{g} \phi_i \, ds \end{aligned}$$

On remarque que le second membre de la méthode V.E.F. peut être considéré comme une intégration approchée particulière du second membre E.F. :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_K f_x \phi_i \, dV - \int_{\omega_i \cap K} f_x \, dV \right| &= \left| \int_{K - (\omega_i \cap K)} f_x \, dV - 2 \int_K \lambda_i f_x \, dV \right| \\
 &\leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \sqrt{|K|} \|f_x\|_{L^2(K)} \\
 &\leq \frac{2\sqrt{3}}{9} |K| \|f_x\|_{L^\infty(K)} \\
 &= O(h^2) \|f_x\|_{L^\infty(K)}
 \end{aligned}$$

Traitement des conditions de Dirichlet.

La méthode ainsi définie n'est pas globalement conservative en quantité de mouvement :

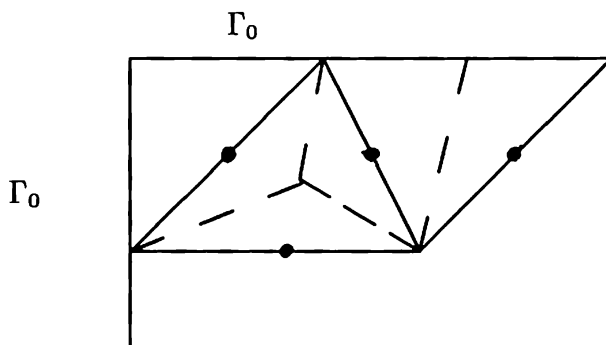
$$\int_{\Gamma_0} (-\vec{\nabla} \vec{u} + pI_d) \cdot \vec{n} \, ds \neq \int_{\Omega} \vec{f} \, dV + \int_{\Gamma_1} \vec{g} \, ds$$

car on n'écrit pas d'équation de conservation sur les cellules associées aux nœuds de Dirichlet. De plus, on traite mal le voisinage de $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$. On propose ici une modification palliant ces problèmes.

On construit les volumes de contrôle en joignant dans chaque triangle

- les sommets au centre de gravité du triangle si aucun des trois nœuds du triangle n'est de Dirichlet.
- le sommet faisant face au nœud de Dirichlet à ce dernier si un seul nœud est de Dirichlet.
- si deux nœuds sont de Dirichlet, on affecte tout le triangle au nœud restant.

Traitement de la frontière.



Cette modification ne modifie pas les matrices A et B ; c'est cette méthode qui à été utilisée pour les cas tests.

Justification du choix effectué.

On a donc obtenu un système discret, qui pour le problème de Stokes, est le même que celui obtenu par la méthode des *Éléments Finis* de Crouzeix-Raviart avec intégration approchée du second membre. Ceci assure la stabilité et la consistance du schéma et donc la convergence comme on le verra dans le Chapitre 4. De plus cette méthode présente l'avantage d'être conservative et donc atteint l'objectif fixé.

3.4 Extension à la dimension trois.

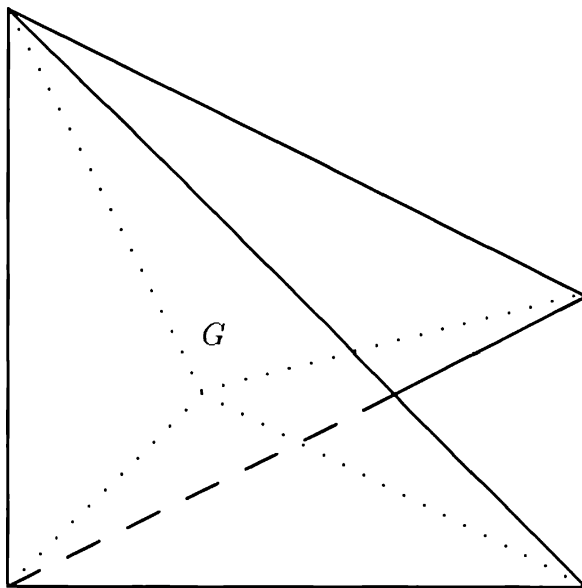
En dimension trois, la vitesse est cherchée dans l'espace des fonctions affines par tétraèdre, continues aux x_i , où les x_i sont les centres de gravité des faces et la pression est cherchée dans l'espace des fonctions constantes par tétraèdre. On construit les volumes de contrôle de la quantité de mouvement en joignant les sommets des tétraèdres à leur centre de gravité. Les volumes de contrôle de la masse sont les tétraèdres.

Pour ce qui est de l'expression des coefficients des opérateurs discrets, ils gardent la même expression à condition de définir :

$$\phi_i|_K = 1 - 3\lambda_i|_K \quad \text{et}$$

$$\vec{S}_K^i \stackrel{\text{def}}{=} |\partial K_i| \vec{n}_i = \int_{\partial K_i} \vec{n} \, ds = \int_{\partial K} \phi_i \vec{n} \, ds$$

où ∂K_i est la face opposée au sommet i .



Comme en dimension deux, on montre que cette méthode ne diffère de la méthode de Galerkin que par le second membre.

4 Extension aux équations de Navier Stokes.

On suppose toujours $\rho = 1$ et on cherche \vec{u} et p solutions de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \operatorname{div} \nu \vec{\nabla} \vec{u} + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p &= \vec{f} \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \mu$.

Avec les conditions aux limites :

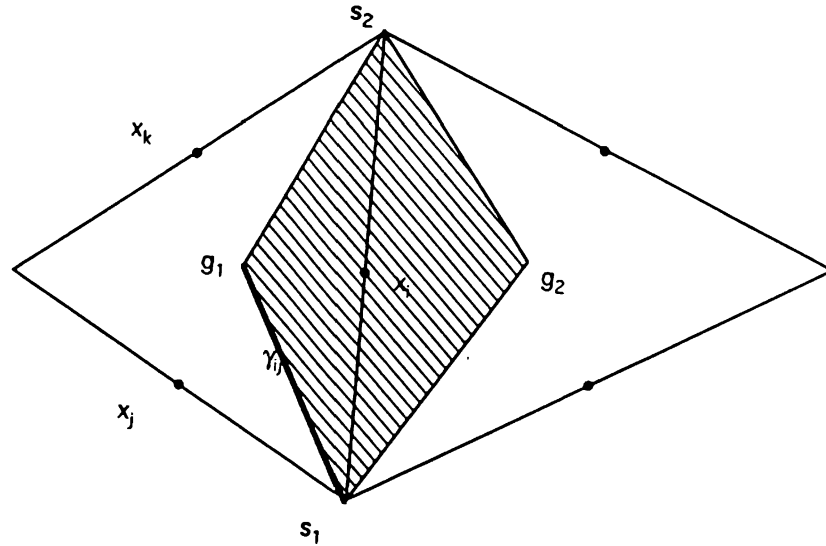
$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_d \text{ sur } \Gamma_0 \\ (\nu \vec{\nabla} \vec{u} - p I_d) \cdot \vec{n} &= \vec{g} \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

La difficulté supplémentaire par rapport au problème de Stokes vient du terme convectif. Il est connu que les schémas centrés sont instables si ν est petit devant $h \|\vec{u}\|$, aussi a-t-on développé des méthodes de décentrage aussi bien dans le "monde des différences finies" que dans le "monde des *Éléments Finis*". Le schéma de base implanté dans *TRIO V.F.* est le schéma amont dont on s'inspire ici. Présentons d'abord le schéma centré.

4.1 Le schéma centré

On a :

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) dV = \int_{\gamma} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) ds.$$



Pour $\bar{\mathbf{u}} \in \vec{V}_h$, on a :

$$\int_{\gamma_i} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) ds = \sum_j \mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}})_{ij} \bar{\mathbf{u}}(x_j)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}})_{ij} &= \int_{\gamma_i} \phi_j(\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) ds \\ &= \sum_k \vec{\mathcal{L}}_{ijk} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_k &= \bar{\mathbf{u}}(x_k) \\ \vec{\mathcal{L}}_{ijk} &= \int_{\gamma_i} \phi_j \phi_k \bar{\mathbf{n}} ds \end{aligned}$$

On voit que la matrice $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}})$ n'est pas en général à diagonale dominante ce qui peut conduire à des instabilités.

Calculons $\int_{s_1}^{g_1} \phi_i \phi_j \vec{n} \, ds$ (voir figure)

$\phi_i \phi_j$ est un polynôme de degré deux d'où :

$$\int_{s_1}^{g_1} \phi_i \phi_j \, ds = \frac{|s_1 g_1|}{6} [(\phi_i \phi_j)(s_1) + 4(\phi_i \phi_j)(m_1) + (\phi_i \phi_j)(g_1)]$$

où m_1 est le milieu du segment $[s_1 g_1]$. Utilisant les expressions :

$$\begin{aligned} (\phi_i \phi_j)(s_1) &= 1 \\ (\phi_i \phi_j)(g_1) &= \frac{1}{9} \\ (\phi_i \phi_j)(m_1) &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{g_1} \phi_i \phi_j \, ds &= \frac{|s_1 g_1|}{6} \left[1 + \frac{16}{9} + \frac{1}{9} \right] \\ &= |s_1 g_1| \left[\frac{13}{27} \right] \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\int_{s_2}^{g_1} \phi_i \phi_j \vec{n} \, ds$

$$\int_{s_2}^{g_1} \phi_i \phi_j \, ds = \frac{|s_2 g_1|}{6} [(\phi_i \phi_j)(s_2) + 4(\phi_i \phi_j)(m_2) + (\phi_i \phi_j)(g_1)]$$

où m_2 est le milieu du segment $[s_2 g_1]$. Utilisant les expressions :

$$\begin{aligned} (\phi_i \phi_j)(s_2) &= -1 \\ (\phi_i \phi_j)(g_1) &= \frac{1}{9} \\ (\phi_i \phi_j)(m_2) &= \frac{-4}{9} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{s_2}^{g_1} \phi_i \phi_j \, ds &= \frac{|s_2 g_1|}{6} \left[-1 - \frac{16}{9} + \frac{1}{9} \right] \\ &= -|s_2 g_1| \left[\frac{4}{9} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\vec{\mathcal{L}}_{ij} = \frac{13}{27} \int_{s_1}^{g_1} \vec{n} - \frac{4}{9} \int_{s_2}^{g_1} \vec{n}.$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{L}}_{iik} &= \frac{13}{27} \int_{s_2}^{s_1} \vec{n} - \frac{4}{9} \int_{s_1}^{s_2} \vec{n}. \\ \vec{\mathcal{L}}_{ijj} &= \frac{13}{27} \int_{s_1}^{s_2} \vec{n}\end{aligned}$$

et il est clair que $\vec{\mathcal{L}}_{iii} = 0$ car γ_i est un contour fermé.

4.2 Un schéma décentré amont.

On notera \vec{n}_i la normale unitaire extérieure à γ_i et $\gamma_{i,j} = \gamma_i \cap \gamma_j$. L'idée du schéma décentré amont est d'approcher \vec{u} sur $\gamma_{i,j}$ par u_i si $(\vec{u} \cdot \vec{n}_i) > 0$, et par u_j si $(\vec{u} \cdot \vec{n}_i) < 0$. On obtient le schéma suivant :

$$\int_{\gamma_{i,j}} \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}_i) ds \approx \int_{\gamma_{i,j}} \vec{u}_i \max(\vec{u} \cdot \vec{n}_i, 0) + \vec{u}_j \min(\vec{u} \cdot \vec{n}_i, 0) ds$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{u})_{ij} &= \int_{\gamma_{i,j}} \frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{n}_i - |\vec{u} \cdot \vec{n}_i|) ds \leq 0 \\ \mathcal{L}(\vec{u})_{ii} &= \int_{\gamma_i} \frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{n}_i + |\vec{u} \cdot \vec{n}_i|) ds \geq 0\end{aligned}$$

On a :

$$\sum_i \mathcal{L}(\vec{u})_{ij} = 0$$

car $\vec{n}_i = -\vec{n}_j$ et :

$$\sum_j \mathcal{L}(\vec{u})_{ij} = \int_{\gamma_i} \vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

Ainsi si $\text{div} \vec{u} = 0$, on obtient une matrice à diagonale dominante ce qui assure la stabilité conditionnelle du schéma.

4.3 Calculs instationnaires.

On cherche \vec{u} et p sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \sum_i \vec{u}(x_i, t) \phi_i(x) \\ p &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} p(g_K, t) \psi_K(x)\end{aligned}$$

En utilisant tout ce qui précède, on obtient le système algébro différentiel suivant :

$$M \frac{\partial U}{\partial t} + AU + L(U)U + B^t P = F \quad (2.1)$$

$$BU = G \quad (2.2)$$

avec la condition initiale : $U(t = 0) = U_0$ telle que : $BU_0 = G$.

où $U_i = \begin{pmatrix} u(x_1, t) \\ \vdots \\ u(x_{N_h,0}, t) \\ v(x_1, t) \\ \vdots \\ v(x_{N_h,0}, t) \end{pmatrix}$, $P = p(g_K, t)$, $L(U) = \mathcal{L}(\vec{u})$ et M est la matrice de masse :

$$M_{ij} = \int_{\omega_i} \phi_j \, dV.$$

Si on approche M par :

$$M_{ij} \approx |\omega_i| \delta_{ij}$$

alors on obtient la matrice de masse de la méthode de Galerkin. C'est cette matrice de masse approchée que l'on a programmée car elle est diagonale et donc facile à inverser.

schémas de projection.

Utilisant le fait que le noyau de B^t est réduit aux constantes, on peut choisir un triangle K_0 , imposé $p(K_0) = 0$ et retirer dans B (resp B^t) la ligne (resp colonne) correspondante. Ainsi B^t devient injectif.

En multipliant l'équation (2.1) à gauche par BM^{-1} et en remarquant que $B \frac{\partial U}{\partial t} = 0$ car \vec{u}_d est supposé indépendant de t , on obtient :

$$BM^{-1} (AU + L(U)U + B^t P) = BM^{-1} F$$

Ainsi en notant :

$$\begin{aligned} E &= BM^{-1} B^t \\ N(U) &= M^{-1} (F - AU - L(U)U) \end{aligned}$$

où la matrice E est inversible :

$$\begin{aligned}
Ep = 0 &\Rightarrow (Ep, q) = 0 \quad \forall q \\
&\Rightarrow (BM^{-1}B^t p, q) = 0 \quad \forall q \\
&\Rightarrow (M^{-1}B^t p, B^t q) = 0 \quad \forall q \\
&\Rightarrow B^t p = 0 \\
&\Rightarrow p = C^{ste},
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P} = I - M^{-1}B^t E^{-1}B$$

on obtient une équation différentielle ordinaire sur U et une équation algébrique reliant P à U :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{P}N(U) \quad (2.3)$$

$$P = E^{-1}BN(U) \quad (2.4)$$

\mathcal{P} est l'opérateur de projection sur $Ker(B)$ parallèlement à $Im(M^{-1}B^t)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}o\mathcal{P} &= I_d - 2M^{-1}B^t E^{-1}B + M^{-1}B^t E^{-1}BM^{-1}B^t E^{-1}B \\
&= I_d - 2M^{-1}B^t E^{-1}B + M^{-1}B^t E^{-1}B \\
&= \mathcal{P}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(M^{-1}B^t P) &= M^{-1}B^t P - M^{-1}B^t E^{-1}BM^{-1}B^t P \\
&= M^{-1}B^t P - M^{-1}B^t E^{-1}EP \\
&= 0
\end{aligned}$$

En multipliant (2.3) à gauche par M et en utilisant (2.4), on obtient bien (2.1), d'autre part d'après les propriétés de \mathcal{P} , et la condition $BU_0 = 0$, (2.3) implique (2.2). Il reste donc à choisir un schéma en temps stable et consistant. Le schéma utilisé dans *TRIO V.F.* est le schéma d'Euler explicite :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \mathcal{P}N(U^n)$$

Ce schéma est conditionnellement stable.

L'algorithme d'avance en temps s'écrit :

- On se donne $\epsilon > 0$, si on cherche un état stationnaire et t_{max} si on cherche à simuler l'écoulement sur l'intervalle $[0, t_{max}]$.

- $n = 0, U^0, \Delta t$ donnés.
- Répéter :
- Calculer $V = N(U^n)$
- Calculer $P^n = E^{-1}BV$
- Calculer $V = V - M^{-1}B^tP^n$
- Calculer $U^{n+1} = U^n + \Delta tV$
- Faire $n := n + 1; t = t + \Delta t$
- Jusqu'à ce que $\|V\| \leq \epsilon$ ou $t \geq t_{max}$

4.4 Extension à Navier Stokes anisotherme.

On s'intéresse maintenant au système complet d'équations modélisant l'écoulement d'un fluide incompressible. Rappelons d'abord le jeu d'équations obtenu au chapitre 1 en négligeant le terme de dissipation visqueuse :

$$\mu \rightarrow \mu + \mu_r \quad (\vec{\nabla} \vec{u})^T = ?$$

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{\gamma(t)} \rho \vec{u} \otimes \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega(t)} \rho f_V dV + \int_{\gamma(t)} (-pI_d + (\mu \vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \vec{n} ds$$

$$\int_{\gamma(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial H}{\partial t} dV + \int_{\gamma(t)} H \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\omega(t)} \rho h dV + \int_{\gamma(t)} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} ds$$

où $H = \rho c_p T$.

On se donne les conditions aux limites :

$$\vec{u} = \vec{u}_d \text{ sur } \Gamma_0^{qdm} \quad \text{et} \quad T = T_d \text{ sur } \Gamma_0^e$$

$$\mu \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} - p \vec{n} = \vec{g} \text{ sur } \Gamma_1^{qdm} \quad \text{et} \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = q \text{ sur } \Gamma_1^e \quad \Gamma_1^e \neq \emptyset$$

$$\Gamma_1^{qdm} = 0$$

$$\Gamma_1^{qdm} = 0 \quad \text{CL} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_p(0) = u_j \\ v_p(0) = v_{p,q} \end{array} \right. \quad \text{avec } \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

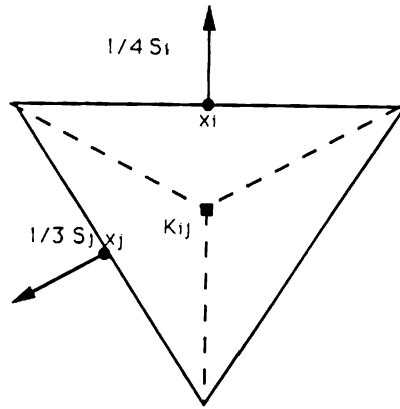
où $\Gamma = \Gamma_0^{qdm} \cup \Gamma_1^{qdm} = \Gamma_0^e \cup \Gamma_1^e$.

On a choisi de chercher H et T dans le même espace que chacune des composantes de la vitesse, les fonctions $\rho(T)$, $C_p(T)$, $k(T)$ et $\nu(T)$ sont tabulées.

Après discrétisation en espace, on obtient le système suivant -en indiquant par $_{qdm}$ les matrices relatives à la quantité de mouvement, et par $_e$ les matrices relatives à l'énergie - :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{qdm} \frac{\partial \rho \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{A}_{qdm} \mathcal{U} + \mathcal{L}_{qdm}(\vec{u})(\rho \mathcal{U}) + \mathcal{B}^t P &= \mathcal{F}_{qdm} \\ \mathcal{B} \mathcal{U} &= G \\ M_e \frac{\partial H}{\partial t} + A_e T + L_e(\vec{u}) H &= F_e \\ H &= \rho C_p T \end{aligned}$$

où les différentes matrices ont les expressions suivantes :



$$\begin{aligned} (M_{qdm})_{ij} &= |\omega_i^{qdm}| \delta_{ij} & ; & & (M_e)_{ij} &= |\omega_i^e| \delta_{ij} \\ (A_{qdm})_{ij} &= \mu (g_{K_{ij}}) \frac{\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j}{|K_{ij}|} & ; & & (A_e)_{ij} &= k (g_{K_{ij}}) \frac{\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j}{|K_{ij}|} \\ (A_{qdm})_{ii} &= - \sum_{j \neq i} (A_{qdm})_{ij} & ; & & (A_e)_{ii} &= - \sum_{j \neq i} (A_e)_{ij} \\ (L_{qdm}(\vec{u}))_{ij} &= \int_{\gamma_{i,j}^{qdm}} \frac{1}{2} (\vec{u} \cdot \vec{n} - |\vec{u} \cdot \vec{n}|) ds \\ (L_{qdm}(\vec{u}))_{ii} &= \int_{\gamma_i^{qdm}} \frac{1}{2} (\vec{u} \cdot \vec{n} + |\vec{u} \cdot \vec{n}|) ds \\ (L_e(\vec{u}))_{ij} &= \int_{\gamma_{i,j}^e} \frac{1}{2} (\vec{u} \cdot \vec{n} - |\vec{u} \cdot \vec{n}|) ds \\ (L_e(\vec{u}))_{ii} &= \int_{\gamma_i^e} \frac{1}{2} (\vec{u} \cdot \vec{n} + |\vec{u} \cdot \vec{n}|) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B_x)_{Ki} &= -\vec{S}_{Kx}^i & ; & & (B_y)_{Ki} &= -\vec{S}_{Ky}^i \\
(F_{qdm}^x)_i &= \int_{\omega_i^{qdm}} \rho f_V^x dV + \int_{\gamma_{i,1}^{qdm}} g_x ds \\
&+ \sum_{j=N_{h,0}+1}^{N_h} u_d(x_j) \int_{\gamma_i^{qdm}} \mu \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} ds \\
(F_{qdm}^y)_i &= \int_{\omega_i^{qdm}} \rho f_V^y dV + \int_{\gamma_{i,1}^{qdm}} g_y ds \\
&+ \sum_{j=N_{h,0}+1}^{N_h} v_d(x_j) \int_{\gamma_i^{qdm}} \mu \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} ds \\
(F_e)_i &= \int_{\omega_i^e} \rho h dV + \int_{\gamma_{i,1}^e} q ds \\
&+ \sum_{j=N_{h,0}+1}^{N_h} T_d(x_j) \int_{\gamma_i^e} k \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} ds \\
(G)_K &= \int_{\partial K \cap \Gamma_0} \vec{u}_d \cdot \vec{n} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \mathcal{U} &= \begin{pmatrix} (U) \\ (V) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{qdm} = \begin{pmatrix} (M_{qdm}) & \\ & (M_{qdm}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{qdm} = \begin{pmatrix} (A_{qdm}) & \\ & (A_{qdm}) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} (B_x) \\ (B_y) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{qdm} = \begin{pmatrix} (F_{qdm}^x) \\ (F_{qdm}^y) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{L}_{qdm}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} (L_{qdm})(\vec{u}) & \\ & (L_{qdm})(\vec{u}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les $|\omega_i^{qdm}|$ ne diffèrent des $|\omega_i^e|$ qu'au voisinage des bords du fait de la prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet en vitesse ou température. De la même façon $(L_{qdm}(U))$ ne diffère de $(L_e(U))$ qu'au voisinage des bords. Il arrive souvent que \vec{f} dérive d'un potentiel :

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \xi_f$$

par exemple pour la gravité, $\xi_f = -gz$.

Il peut alors être intéressant de discrétiser le terme source de la façon suivante (en prenant l'exemple de la gravité) :

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_i} \rho \vec{g} dV &= \int_{\omega_i} \rho dV \int_{\omega_i} -\vec{\nabla} gz dV = \int_{\omega_i} \rho dV \left(\int_{\gamma_i} -gz \vec{n} ds + \int_{\gamma_i^1} -gz \vec{n} ds \right) \\
&\approx -\rho(x_i) g \left((\mathcal{B}^t \mathcal{X})_i + \int_{\gamma_i^1} gz \vec{n} ds \right)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{X}_K = (g_K)_z$. C'est cette discrétisation de la gravité qui à été utilisée pour le second cas test.

Dans la suite, on décrit l'algorithme qui est utilisé dans les codes de thermo-hydraulique développés à Grenoble par *Cisi Ingénierie*. Pour construire cet algorithme on effectue les mêmes manipulations sur les équations de la masse et de la quantité de mouvement, qu'en 4.3. On obtient alors un système d'équations différentielles sur les variables \mathcal{U} et H et une équation algébrique reliant P à \mathcal{U} . On écrit alors le schéma d'Euler explicite pour le système d'équations différentielles. L'algorithme s'écrit :

- On se donne $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$, si on cherche un état stationnaire et t_{max} si on cherche à simuler l'écoulement sur l'intervalle $[0, t_{max}]$.
- $U_0, T_0, \Delta t$ donnés.
- Calculer $H_0 = \rho(T_0)C_p(T_0)T_0$.
- Répéter :
- Calculer A_{qdm}, F_{qdm} avec $\mu = \mu(T_n)$ et $\rho = \rho(T_n)$.
- Calculer $V = \frac{1}{\rho^n} M_{qdm}^{-1} (F_{qdm} - A_{qdm} U^n - L(U^n)(\rho^n U^n))$
- Calculer $P^n = E^{-1} B V$ où $E = B M_{qdm}^{-1} B^t$
- Calculer $V = V - M_{qdm}^{-1} B^t P^n$
- Calculer $U^{n+1} = U^n + \Delta t V$
- Calculer A_e , avec $k = k(T_n)$.
- Calculer $\theta = F_e - A_e T - L_e(U^{n+1})H$.
- Calculer $H_{n+1} = H_n + \Delta t \theta$.

- Calculer $T_{n+1} = f(H_{n+1})$.
- Faire $n = n + 1$ et $t = t + \Delta t$.
- Jusqu'à ce que $n = Nmax$ ou ($\|\theta\| \leq \epsilon_1$ et $\|V\| \leq \epsilon_2$)

5 Résultats numériques.

On présente ici les résultats obtenus sur deux cas tests classiques :

- La cavité à paroi défilante permet de tester la méthode en hydraulique.
- La cavité de Vahl Davis permet de valider le couplage entre l'hydraulique et la thermique.

De nombreux résultats ont été publiés sur ces deux cas test.

La maquette ayant été écrite en 3D, on a ajouté une épaisseur de l'ordre de h et imposé sur les parois latérales une condition aux limites dite de symétrie :

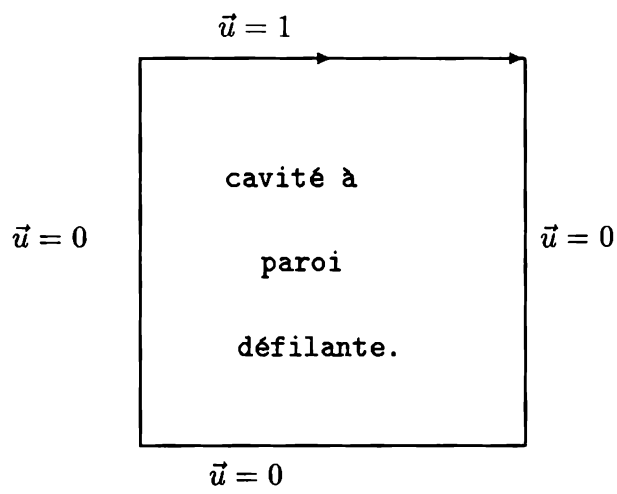
$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{\nabla} p \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0$ pour le second cas test.

Le maillage comprend 265 nœuds, 1618 faces et 680 tétraèdres. Les figures ont été obtenues en interpolant la solution calculée par la méthode des *Volumes Éléments Finis* sur un maillage structuré 20×20 de type M.A.C.

5.1 Cavité à paroi défilante.

Description du cas test

On cherche à approcher l'écoulement d'un fluide incompressible et isotherme dans une cavité carrée de côté $1m$ dont l'une des parois est entraînée à la vitesse de $1ms^{-1}$.

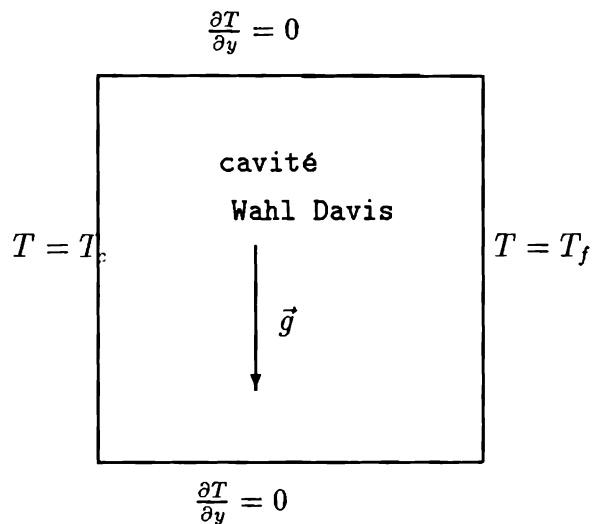


Le seul paramètre est le nombre de Reynolds qui ici est $\frac{1}{\nu}$.
On donne les champs de vitesse et les isobares dans les figures qui suivent.

5.2 Cavité de Vahl Davis.

Description du cas test

On étudie un écoulement d'air dans une cavité carrée de côté L dont la paroi gauche est à la température $T_c = 315K$ et la paroi droite à $T_f = 215K$, les deux autres parois étant parfaitement isolées.



Les paramètres de l'écoulement sont les nombres de Prandtl ($\frac{\nu}{k} = 0.71$ pour l'air) et de Rayleigh ($Ra = \frac{g\beta(T_c - T_f)L^3}{k\nu}$) où $\beta = -\frac{\partial \rho}{\rho_0 \partial T}$ et $\rho_0 = \rho\left(\frac{T_f + T_c}{2}\right)$. Pour les calculs, on a utilisé : $\rho_0 = 1$, $g = 9.81 m s^{-2}$, $\beta = 3.41 e^{-3}$, $T_c - T_f = 10$, $\nu = 1.8 e^{-5} m^2 s^{-1}$ et $k = 2.535 e^{-5} m^2 s^{-1}$ de sorte qu'il suffit de choisir L convenablement pour fixer le Ra .

On obtient le tableau suivant :

$$Ra = \begin{matrix} 1.e^3 & 1.e^4 & 1.e^5 & 1.e^6 \\ L \approx & 1.1e^{-2} & 2.3e^{-2} & 5.1e^{-2} & 1.1e^{-1} \end{matrix}$$

On donne les champs de vitesse et les isothermes dans les figures qui suivent. La solution de référence est donnée dans [12].

Chapitre 3

Analyse Numérique des méthodes de Volumes Éléments Finis pour le problème du Laplacien.

Quelques rappels.

Espaces de Sobolev.

On renvoie à [1] pour plus de détails sur les espaces de Sobolev.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière lipschitzienne (ref [1]) et soit $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions mesurables dont la norme :

$$\|v\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est finie.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, pour $m \geq 0$ et $1 \leq p < \infty$ est l'ensemble des fonctions $v \in L^p(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles au sens des distributions $\partial^\alpha v$ avec $|\alpha| \leq m$ sont dans $L^p(\Omega)$. On munit $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme :

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

On note $H^m(\Omega)$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ et :

$$|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un théorème de trace.

Soit $\Omega \subset \mathfrak{R}^d$ un ouvert borné de frontière Γ lipschitzienne. Il existe un opérateur “trace” linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. On notera $H_0^1(\Omega)$ le noyau de cet opérateur.

Le lemme de Bramble Hilbert.

Ce lemme est montré dans [6].

Soit $\Omega \subset \mathfrak{R}^d$ un ouvert de frontière lipschitzienne. Pour un entier $k \geq 0$ et $p \in [1, \infty]$, soit f une forme linéaire continue sur $W^{k+1,p}(\Omega)$ vérifiant :

$$f(q) = 0 \quad \forall q \in P_k(\Omega)$$

où $P_k(\Omega)$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k . Alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que $\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$:

$$|f(v)| \leq C(\Omega) \|f\|_{k+1,p,\Omega}^* |v|_{k+1,p,\Omega}$$

où $\|\cdot\|_{k+1,p,\Omega}^*$ est la norme sur le dual de $W^{k+1,p}(\Omega)$.

Passage à un élément de référence.

On trouve les deux résultats qui suivent dans [10].

Si \hat{K} est un polyèdre de \mathfrak{R}^d et K l'image de \hat{K} par une transformation affine inversible F de \mathfrak{R}^d dans \mathfrak{R}^d définie par $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$, alors :

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}} \quad , \quad |\det(B)| = \frac{|K|}{|\hat{K}|} \geq \left(\frac{\rho_K}{h_{\hat{K}}} \right)^d$$

où h_K (resp. $h_{\hat{K}}$) est le diamètre de K (resp. de \hat{K}) et ρ_K (resp. $\rho_{\hat{K}}$) est le plus grand diamètre des boules inscrites dans K (resp. de \hat{K}) ; de plus $\exists C(\hat{K}) > 0$:

$$\forall v \in H^k(K), |\hat{v}|_{k,\hat{K}} \leq C \|B\|^k |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{k,K}$$

où $\hat{v}(\hat{x}) = v(F(\hat{x}))$.

Interpolation sur l'élément de référence.

Soit \hat{K} un polyèdre de \mathfrak{R}^d et $\hat{\pi}$ un opérateur linéaire continu de $H^{k+1}(\hat{K})$ dans $H^m(\hat{K})$, $0 \leq m \leq k+1$ vérifiant:

$$\forall v \in P_k, \hat{\pi}v = v,$$

on a : $\exists C(\hat{K}, \hat{\pi}) :$

$$\forall v \in \mathbf{H}^{k+1}(\hat{K}), \|v - \hat{\pi}v\|_{m, \hat{K}} \leq C|v|_{k+1, \hat{K}}$$

1 Position du problème et notations

On considère ici le problème modèle dans un ouvert polyédrique :

$$\begin{aligned} \Omega &\subset \mathbb{R}^d \quad d = 1, 2, 3 \\ -\Delta u &= f \quad \text{dans } (\Omega) \\ u &= 0 \quad \text{sur } (\Gamma) \end{aligned} \tag{3.1}$$

On suppose les données telles que :

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

On se donne une famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ c'est-à-dire vérifiant :

$$\exists \sigma > 0 : \quad \forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad h_K \leq \sigma \rho_K$$

- où h_K est le diamètre de K , ρ_K est le plus grand diamètre des boules inscrites dans K et $h = \max(h_K) \rightarrow 0$ - avec l'hypothèse :

$$\exists \hat{K} : \quad \forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \exists F_K^h : F_K^h(\hat{K}) = K$$

et F_K^h affine et inversible.

On notera x_i les nœuds de chaque triangulation \mathcal{T}_h numérotés de sorte que :

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq N_{h,0} &\Rightarrow x_i \notin \Gamma \\ N_{h,0} + 1 \leq i \leq N_h &\Rightarrow x_i \in \Gamma \end{aligned}$$

et $(V_h)_h, (V_{h,0})_h$ les espaces éléments finis de Lagrange associés :

$$\begin{aligned} V_h &= e.v. \{ \phi_i, 1 \leq i \leq N_h \} \\ V_{h,0} &= e.v. \{ \phi_i, 1 \leq i \leq N_{h,0} \} \end{aligned}$$

où les fonctions de bases ϕ_i sont telles que:

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

À tout nœud x_i de \mathcal{T}_h on associe un ouvert ω_i appelé volume de contrôle de sorte que :

$$\begin{aligned} \bigcup_i \bar{\omega}_i &= \bar{\Omega} \\ i \neq j &\Rightarrow \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \\ x_i &\in \bar{\omega}_i \end{aligned}$$

On notera :

$$\begin{aligned}\gamma_i &\stackrel{\text{def}}{=} \partial\omega_i \\ \gamma_{i,j} &= \gamma_i \cap \gamma_j\end{aligned}$$

En intégrant (3.1) sur les volumes de contrôle ω_i pour $1 \leq i \leq N_{h,0}$, on obtient:

$$\int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega_i} f \, dV. \quad (3.2)$$

Le principe de la méthode des *Volumes Éléments Finis* est de chercher une fonction $u_h \in V_{h,0}$ vérifiant :

$$\int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} u_h \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega_i} f \, dV \quad 1 \leq i \leq N_{h,0}.$$

Comme u_h appartient à $V_{h,0}$, on a:

$$u_h = \sum_{j=1}^{j=N_{h,0}} u_h^j \phi_j$$

on obtient donc :

$$\sum_{j=1}^{j=N_{h,0}} \left(u_h(x_j) \int_{\gamma_i} -\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \right) = \int_{\omega_i} f \, dV$$

qui s'écrit encore sous la forme :

$$AU = F$$

en notant,

$$\begin{aligned}A_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{n} \, ds \\ F_i &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega_i} f \, dV \\ U_j &\stackrel{\text{def}}{=} u_h^j = u_h(x_j)\end{aligned}$$

Remarque : la matrice A n'est pas a priori symétrique.

2 Analyse

On introduit la forme bilinéaire :

$$a_h(u, v) = - \sum_{i=1}^{i=N_{h,0}} \left(\int_{\gamma_i} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, ds \, v(x_i) \right)$$

définie pour u et v dans $\mathcal{S}_h \stackrel{\text{def}}{=} V_h \oplus H^2(\Omega)$
et la forme linéaire définie sur \mathcal{S}_h :

$$L_h(v) = \sum_{i=1}^{i=N_{h,0}} \left(\int_{\omega_i} f \, dV \, v(x_i) \right)$$

pour $f \in L^2(\Omega)$

de sorte que l'on peut écrire en utilisant (3.2) :

$$a_h(u_h, v_h) = a_h(u, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

2.1 Un résultat de convergence abstrait.

On a le résultat suivant d'existence et unicité de type Babuska :

Lemme 3.1 :

Soient V un espace de Hilbert, $(V_h)_h$ une famille d'espaces de Hilbert de dimension finie - non nécessairement inclus dans V -, munis du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_h$, $(a_h)_h$ une famille de formes bilinéaires continues sur V_h et $u \in V$. On suppose que $(\cdot, \cdot)_h$ et $(a_h)_h$ se prolongent à $u \oplus V_h$. Si,

$$\exists \alpha_h > 0 : \quad \forall v_h \in V_h \sup_{w_h \in \dot{V}_h} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_h} \geq \alpha_h \|v_h\|_h \quad (3.3)$$

alors :

$$\forall u \in V \quad \exists ! u_h \in V_h : a_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

de plus :

$$\|u - u_h\|_h \leq \inf_{v_h \in \dot{V}_h} (\|u - v_h\|_h + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{w_h \in \dot{V}_h} \frac{a_h(u - v_h, w_h)}{\|w_h\|_h})$$

Démonstration :

Existence et unicité.

Soient u_h^1 et u_h^2 deux solutions, on a :

$$a_h(u_h^1 - u_h^2, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

d'où par (3.3) :

$$\|u_h^1 - u_h^2\|_h = 0$$

On a $\forall v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} \|u_h - v_h\|_h &\leq \frac{1}{\alpha_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{a_h(u_h - v_h, w_h)}{\|w_h\|_h} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{a_h(u - v_h, w_h)}{\|w_h\|_h} \end{aligned}$$

et

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h$$

d'où le résultat annoncé.

En particulier on aura si π_h est l'opérateur de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans V_h défini par $\pi_h v(x_i) = v(x_i)$:

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - \pi_h u\|_h + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{w_h} \frac{a_h(u - \pi_h u, w_h)}{\|w_h\|_h}$$

2.2 Un lemme d'approximation des flux.Ce lemme a été montré en dimension deux pour le P_1 par Cai (ref [23]).

Lemme 3.2 :

Soit $\hat{\kappa}$ un polyèdre de \mathbb{R}^d ($d \leq 3$), soit $\hat{\gamma}$ inclus dans une face (un côté en dimension deux) de $\hat{\kappa}$ et $\hat{\pi}$ un opérateur linéaire continu de $H^{k+l+1}(\hat{\kappa})$ ($l \geq 0$) dans $H^{k+l+1}(\hat{\kappa})$ avec $k \geq 1$ et $l \geq 0$ vérifiant :

$$\forall \hat{p} \in P_k, \quad \hat{\pi} \hat{p} = \hat{p}.$$

Si κ est une partie de \mathbb{R}^d telle qu'il existe une transformation affine inversible F de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d pour laquelle κ est l'image par F de $\hat{\kappa}$, si γ est l'image par F de $\hat{\gamma}$ et si l'opérateur π est défini par :

$$\forall v \in H^{k+l+1}(\kappa), \quad \widehat{\pi v} = \hat{\pi} \hat{v},$$

où $\hat{v}(\hat{x}) = v(x)$, et si $\forall v \in P_{k+l}(\kappa)$:

$$\left| \int_{\gamma} \vec{\nabla}(v - \pi v) \cdot \vec{n} \, ds \right| = 0$$

alors $\exists \hat{C}$ tel que $\forall v \in H^{k+l+1}(\Omega)$:

$$\left| \int_{\gamma} \vec{\nabla}(v - \pi v) \cdot \vec{n} \, ds \right| \leq \hat{C} \frac{h_{\kappa}^{k+d+l}}{\rho_{\kappa}^{1+\frac{d}{2}}} |v|_{k+l+1, \kappa}$$

où \hat{C} ne dépend que de \hat{K} et $\hat{\pi}$.

Démonstration :

En appliquant Cauchy Schwartz, on obtient :

$$\left| \int_{\gamma} \vec{\nabla}(v - \pi v) \cdot \vec{n} \, ds \right| \leq |\gamma|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\gamma} |\vec{\nabla}(v - \pi v)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

On note :

$$F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$$

On a :

$$\int_{\gamma} |\vec{\nabla}(v - \pi v)|^2 \, ds \leq \|B^{-1}\|^2 \frac{|\gamma|}{|\hat{\gamma}|} \left(\int_{\hat{\gamma}} |\vec{\nabla}(\hat{v} - \hat{\pi} \hat{v})|^2 \right)$$

où $\frac{|\gamma|}{|\hat{\gamma}|} = 1$ en dimension 1. Or d'après le Théorème de trace :

$$\exists \hat{C}_1(\hat{\kappa}) > 0 : \int_{\hat{\gamma}} |\vec{\nabla}(\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v})|^2 \leq \hat{C}_1^2 \|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}\|_{2,\hat{\kappa}}^2$$

et donc a fortiori :

$$\int_{\hat{\gamma}} |\vec{\nabla}(\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v})|^2 \leq \hat{C}_1^2 \|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}\|_{k+l+1,\hat{\kappa}}^2$$

Or, d'après le résultat d'interpolation de degré k sur l'élément de référence,

$$\exists \hat{C}_2(\hat{\pi}, \hat{\kappa}) > 0 \text{ tel que } \|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}\|_{k+1,\hat{\kappa}}^2 \leq \hat{C}_2^2 |\hat{v}|_{k+1,\hat{\kappa}}^2 \leq \hat{C}_2^2 \|\hat{v}\|_{k+1,\hat{\kappa}}^2$$

et par continuité de $\hat{\pi}$:

$$\exists \hat{C}_3 : |\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{k+l+1,\hat{\kappa}} \leq \hat{C}_3 |\hat{v}|_{k+l+1,\hat{\kappa}}$$

d'où :

$$\int_{\hat{\gamma}} |\vec{\nabla}(\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v})|^2 \leq \hat{C}_1^2 \hat{C}_2^2 \hat{C}_3^2 \|\hat{v}\|_{k+l+1,\hat{\kappa}}^2.$$

où $\hat{C}_2 \hat{C}_3 = 1$ si $l = 0$ et $\hat{C}_3 = 1$ si $Im(\hat{\pi}) \subset P_{k+1}(\hat{\kappa})$.

En appliquant le lemme de Bramble Hilbert à $f(\hat{v}) = \int_{\hat{\gamma}} \vec{\nabla}(v - \pi v) \cdot \vec{n}$, on obtient :

$$\exists \hat{C}_4(\hat{\kappa}) > 0 : \left| \int_{\hat{\gamma}} \vec{\nabla}(v - \pi v) \cdot \vec{n} \, ds \right| \leq \hat{C}_1 \hat{C}_2 \hat{C}_3 \hat{C}_4 \|B^{-1}\| \frac{|\gamma|}{|\hat{\gamma}|^{\frac{1}{2}}} |\hat{v}|_{k+l+1,\hat{\kappa}}$$

Or $\forall v \in H^{k+1}(\kappa)$:

$$|\hat{v}|_{k+l+1,\hat{\kappa}} \leq \hat{C}_5 \|B\|^{k+l+1} |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{k+l+1,\kappa}$$

avec :

$$\|B\| \leq \frac{h_\kappa}{\hat{\rho}} \quad , \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_\kappa}$$

$$|\det(B)| \geq \frac{\rho_\kappa^d}{\hat{h}^d} \quad , \quad |\gamma| = O(h_\kappa^{d-1})$$

d'où le résultat.

Remarques :

- Si $h_\kappa \leq \sigma \rho_\kappa$ alors :

$$\left| \int_\gamma \vec{\nabla}(v - \pi v) \cdot \vec{n} \, ds \right| = O(h_\kappa^{k+l+\frac{d}{2}-1}) |v|_{k+l+1, \kappa}$$

- $l = 0$ convient toujours.
- si $\hat{\gamma}$ n'est pas inclus dans une seule face de $\hat{\kappa}$, alors en décomposant $\hat{\gamma}$ sur les faces, on obtient le même résultat à une puissance de $\frac{h}{\rho}$ près.

2.3 Résultat de convergence.

On suppose à partir de maintenant que les volumes de contrôle ont été obtenus par découpage de l'élément de référence :

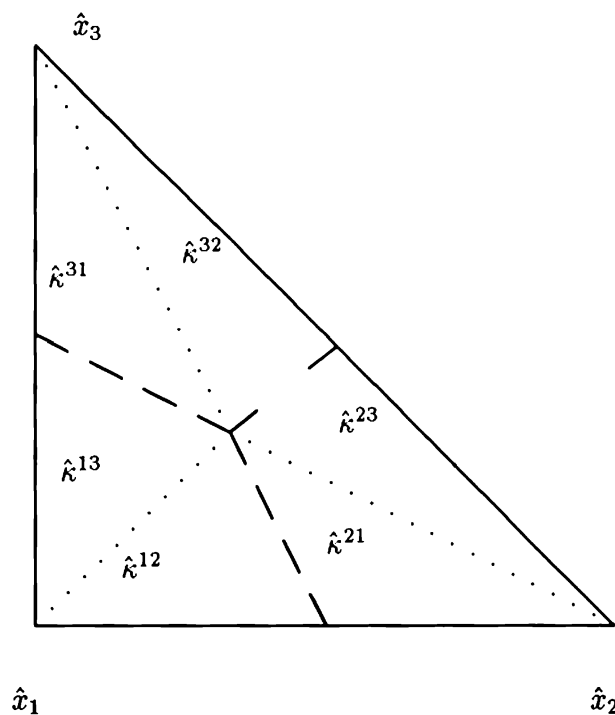
Notons $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ les nœuds de \hat{K} . On construit une partition polyédrique de \hat{K} en $\hat{\omega}_i : \hat{x}_i \in \hat{\omega}_i$, on note $\hat{\gamma}_{i,j} = \partial\hat{\omega}_i \cap \partial\hat{\omega}_j$ et on suppose que

$$\forall h, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall (x_i, x_j) \in K^2, \quad \exists (\hat{x}_i, \hat{x}_j) \in \hat{K}^2 : \gamma_{i,j} \cap K = F_K(\hat{\gamma}_{i,j})$$

où $x_i = F_K(\hat{x}_i)$.

On construit maintenant des domaines d'intégration s'appuyant sur les $\gamma_{i,j} \cap K$ pour estimer $\int_{\gamma_{i,j}} \vec{\nabla}(v - \pi_h v) \cdot \vec{n} \, ds$.

On note $\hat{\kappa}_{i,j}$ le polyèdre obtenu en joignant \hat{x}_i aux bords de $\hat{\gamma}_{i,j}$ et $\kappa_K^{(ij)} = F_K(\hat{\kappa}_{i,j})$.



Construction des κ^{ij}

cas du P_1

On choisit de munir $V_{h,0}$ de la norme discrète :

$$\|v\|_h \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (v(x_i) - v(x_j))^2 (h_K)^{d-2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemme 3.3 :

$$\exists C > 0 : \forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v \in V_h : \frac{1}{C} \|v\| \leq \|v\|_h \leq C \|v\|$$

où :

$$\|v\| = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} v) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (v(x_i) - v(x_j))^2 (h_K)^{d-2} &= \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} |\hat{v}(\hat{x}_i) - \hat{v}(\hat{x}_j)|^2 (h_K)^{d-2} \\ &= \left(\frac{h_K}{\hat{h}}\right)^{d-2} |\hat{v}|_{h, \hat{K}}^2 \end{aligned}$$

D'autre part, si \mathcal{T}_h est une famille régulière de triangulations :

$$\exists C' > 0, \frac{1}{C'} h_K^{\frac{d}{2}-1} |\hat{v}|_{1, \hat{K}} \leq |v|_{1, K} \leq C' h_K^{\frac{d}{2}-1} |\hat{v}|_{1, \hat{K}}$$

Il reste à remarquer que $\exists C_3 > 0$: $\frac{1}{C_3} |\hat{v}|_{1, \hat{K}} \leq |\hat{v}|_{h, \hat{K}} \leq C_3 |\hat{v}|_{1, \hat{K}}$.

On va appliquer le lemme 3.1 au cas de la méthode des *Volumes Éléments Finis* ($a_h, (\cdot, \cdot)_h$ définis ci-dessus).

Théorème 3.1 :

Si : $(a_h)_h$ vérifie uniformément la condition inf-sup ie :

$$\exists \alpha > 0 : \inf_{v_h \in V_{h,0}} \sup_{w_h \in V_{h,0}} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_h} \geq \alpha \|v_h\|_h \quad (3.4)$$

(où α est indépendant de h) et si la restriction de V_h à chaque élément contient les polynômes de degré inférieur ou égal à k , avec $k \geq 1$ alors :

$$\begin{aligned} \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \forall h, \exists ! u_h \in V_{h,0} : \\ a_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{h,0} \end{aligned}$$

et si $u \in H^{k+1}(\Omega)$, alors:

$$\exists C_1 > 0 : \forall h, \|u - u_h\|_h \leq C_1 h^k |u|_{k+1, \Omega}$$

si de plus : $\exists l \geq 0$ tel que $\forall \kappa \in \mathcal{T}_h \quad \forall v \in P_{k+l}(\kappa)$:

$$\forall (i, j), \int_{\gamma_{i,j} \cap \kappa} \vec{\nabla}(v - \pi_h v) \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

et $u \in H^{k+l+1}(\Omega)$, alors :

$$\exists C_2 > 0 : \|u - u_h\|_h \leq C_2 h^{k+l} |u|_{k+l+1, \Omega}$$

Démonstration :

On notera $e_I \stackrel{\text{def}}{=} u - \pi_h u$ l'erreur d'interpolation et $e_h = \pi_h u - u_h$ l'erreur discrète.
On a $\|e_I\|_h = 0$ d'où

$$\inf_{v_h \in \mathbb{V}_{h,0}} \left(\|u - v_h\|_h + \frac{1}{\alpha} \sup_{w_h \in \mathbb{V}_{h,0}} \frac{|a_h(u - v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right) \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{w_h \in \mathbb{V}_{h,0}} \frac{|a_h(e_I, w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

en prenant $v_h = \pi_h u$.

On a de plus :

$$\begin{aligned} a_h(e_I, v_h) &= - \sum_{i=1}^{N_{h,0}} \left(v_h(x_i) \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right) \\ &= - \sum_{i=1}^{N_h} \sum_j \left(v_h(x_i) \int_{\gamma_{i,j}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right) \\ &= - \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j>i} \left((v_h(x_i) - v_h(x_j)) \int_{\gamma_{i,j}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right) \end{aligned}$$

où \vec{n}_i est la normale extérieure de $\gamma_i = \partial\omega_i$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} |a_h(e_I, v_h)| &\leq \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j>i} \left(|v_h(x_i) - v_h(x_j)| \left| \int_{\gamma_{i,j}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right| \right) \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} \left(|v_h(x_i) - v_h(x_j)| \left| \int_{\gamma_{i,j} \cap K} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right| \right) \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} \left(|v_h(x_i) - v_h(x_j)| h_K^{\frac{d}{2}-1} \left| \int_{\gamma_{i,j} \cap K} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right| h_K^{1-\frac{d}{2}} \right) \end{aligned}$$

En appliquant Cauchy Schwarz, on fait apparaître la norme discrète de v_h :

$$|a_h(e_I, v_h)| \leq \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2-d} \left(\int_{\gamma_{i,j} \cap K} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or par construction des $\kappa_K^{(ij)}$, $\gamma_{i,j} \cap K = \gamma_{i,j} \cap \kappa_K^{(ij)}$, d'où :

$$|a_h(e_I, v_h)| \leq \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2-d} \left(\int_{\gamma_{i,j} \cap \kappa_K^{(ij)}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or le lemme 3.2 (avec $F = F_K$, $\hat{\kappa} = F_K^{-1} \kappa_K^{(ij)}$, et $\hat{\pi}$ est l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur \hat{K} .) implique qu'il existe $\beta_1 > 0$ tel que :

$$\int_{\gamma_{i,j} \cap \kappa_K^{(ij)}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \leq \beta_1 h_{\kappa_K^{(ij)}}^{(k+\frac{d}{2}+l-1)} |u|_{k+l+1, \kappa_K^{(ij)}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |a_h(e_I, v_h)| &\leq \beta_1 \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2-d} \left(h_{\kappa_K^{(ij)}}^{(k+\frac{d}{2}+l-1)} |u|_{k+l+1, \kappa_K^{(ij)}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \beta_1 \beta_2 \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2(k+l)} |u|_{k+l+1, \kappa_K^{(ij)}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \beta_1 \beta_2 (h_K)^{k+l} \|v_h\|_h |u|_{k+l+1, \Omega} \end{aligned}$$

où $\beta_2 \leq 1$ est le sup sur K, i, j des $\left(\frac{h_{\kappa_K^{(ij)}}}{h_K} \right)^{(k+\frac{d}{2}+l-1)}$, soit finalement :

$$\sup_{w_h \in \tilde{V}_{h,0}} \frac{|a_h(e_I, w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq C h^{(k+l)} |u|_{k+l+1, \Omega}$$

qui donne en utilisant le lemme 3.1 :

$$\|u - \pi_h u\|_h = \|\pi_h u - u_h\|_h \leq C h^{k+l} |u|_{k+l+1, \Omega}$$

Remarques :

- $l = 0$ convient toujours.
- Pour les éléments finis P_k continus, on a :

$$\|u - \pi_h u\| = O(h^k) |u|_{k+1, \Omega}$$

et en utilisant le lemme 3.3 :

$$\begin{aligned} \|\pi_h u - u_h\| &\leq C \|\pi_h u - u_h\|_h = O(h^{k+l}) |u|_{k+l+1, \Omega} \\ \|u - u_h\| &= O(h^k) |u|_{k+1, \Omega} \end{aligned}$$

2.4 Conclusion

On vient de montrer sous réserve de la vérification de la condition inf-sup uniforme (3.4) que la méthode des *Volumes Éléments Finis* est du même ordre de convergence que la méthode des *Éléments Finis*. Elle présente de plus l'avantage d'être localement conservative. Le résultat obtenu s'étend au problème :

$$-\operatorname{div} A \vec{\nabla} u = f$$

où A vérifie $\zeta^t A(x) \zeta \geq \alpha \zeta^t \zeta \quad \forall x \in \Omega$ avec $\alpha > 0$.

On peut consulter la thèse de Z. Cai [9] pour un résultat d'intégration numérique en dimension deux pour le P_1 . Le résultat s'étend évidemment aux méthodes construites à partir d'un nombre fini d'éléments de référence et un nombre fini de découpages.

3 Applications

3.1 Applications en dimension un.

Définitions et notations

On considère le problème modèle :

$$-u'' = f \quad \text{dans } \Omega = [0, 1]$$

avec les conditions aux limites homogènes :

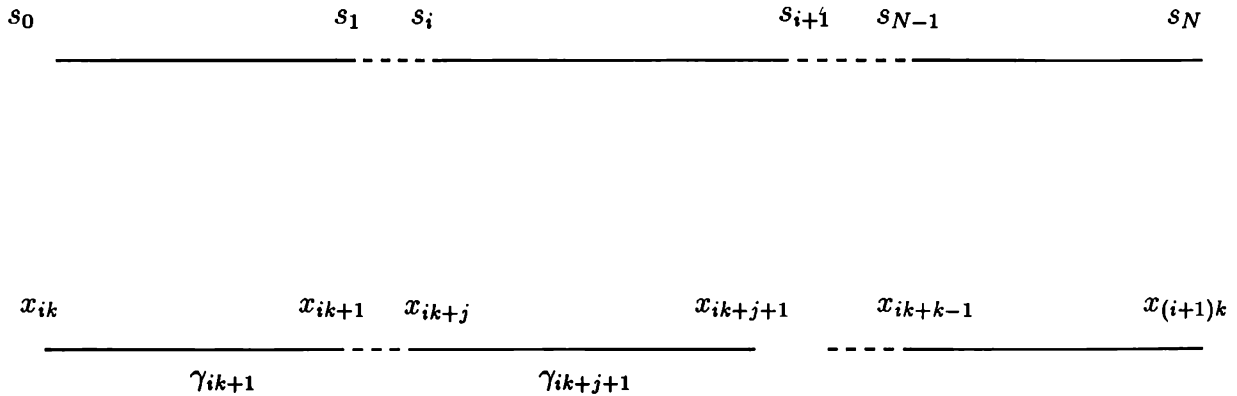
$$u(0) = 0 \quad ; \quad u(1) = 0$$

On se limite à des maillages uniformes pour alléger les notations : on se donne $h = \frac{1}{N}$ et on note $s_i = \frac{i}{N}$ pour $i = 0, \dots, N$ les sommets du maillage. On s'intéresse ici aux méthodes de Volumes Éléments Finis P_k . On note V_h l'espace des fonctions continues, polynômiales de degré inférieur ou égal à k par éléments et $V_{h,0}$ celui des fonctions de V_h nulles en 0 et en 1. On notera $x_i = \frac{i}{kN}$ pour $i = 0$ à kN , les nœuds du maillage. Afin de définir les volumes de contrôle, on se donne une suite $(\theta_j)_{j=1}^{j=k}$; $0 < \theta_j < 1$. On définit les γ_i par :

$$\gamma_{ki+j} = \theta_j x_{ki+j-1} + (1 - \theta_j) x_{ki+j}$$

Les volumes de contrôle sont alors définis par :

$$\omega_i =]\gamma_i, \gamma_{i+1}[\quad , \quad i = 1, \dots, kN - 1 \quad ; \quad x_i \in \omega_i$$



Le problème discret s'écrit :

Trouver $u_h \in V_{h,0}$:

$$u'_h(\gamma_i) - u'_h(\gamma_{i+1}) = \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f dx$$

On introduit la forme bilinéaire :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^{kN-1} ((u'_h(\gamma_i) - u'_h(\gamma_{i+1}))v_h(x_i))$$

soit en remarquant que $v_h(x_{kN}) = v_h(x_0) = 0$:

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^{kN} [v_h(x_i) - v_h(x_{i-1})] u'_h(\gamma_i)$$

et la forme linéaire :

$$L_h(v_h) = \sum_{i=1}^{kN-1} \left(\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f dx \ v_h(x_i) \right)$$

Le problème discret peut être mis sous la forme :

Trouver $u_h \in V_{h,0}$:

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_{h,0}$$

Analyse.

Comme on l'a vu précédemment, pour que la méthode soit d'ordre k , il suffit que a_h vérifie uniformément la condition inf sup (3.4).

Notons x_i^j les nœuds de $K_j = [s_{j-1}, s_j]$ et γ_i^j les $\gamma_i \in K_j$:



On définit :

$$a_h^j(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^k [v_h(x_i^j) - v_h(x_{i-1}^j)] u_h'(\gamma_i^j)$$

et

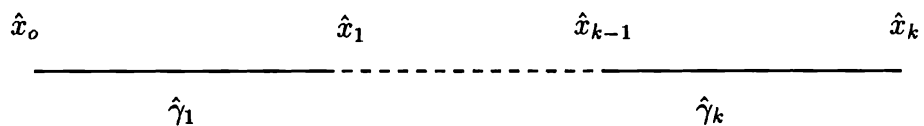
$$L_h^j(v_h) = \int_{s_{j-1}}^{\gamma_1^j} f v_h(s_j) + \sum_{i=1}^{i=k} \int_{\gamma_{i-1}^j}^{\gamma_i^j} f v_h(x_i^j) + \int_{\gamma_k^j}^{s_j} f v_h(s_j)$$

on a :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{j=1}^N a_h^j(u_h, v_h)$$

$$L_h(v_h) = \sum_{j=1}^N L_h^j(v_h)$$

Notons $\hat{K} = [0, 1]$, $\hat{x}_i = \frac{i}{k}$ et $\hat{\gamma}_i = \theta_i \hat{x}_{i-1} + (1 - \theta_i) \hat{x}_i$.



On définit :

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = \sum_{i=1}^{i=k} (\hat{v}(\hat{x}_i) - \hat{v}(\hat{x}_{i-1})) \hat{u}'(\hat{\gamma}_i)$$

de sorte que :

$$a_h^j(u_h, v_h) = \frac{1}{h} \hat{a}(\hat{u}_h^j, \hat{v}_h^j)$$

où :

$$\hat{u}^j(\hat{x}_i) = u_h(x_i^j)$$

Ainsi si \hat{a} vérifie :

$$\exists \alpha > 0 : \forall \hat{u} \in P_k(\hat{K}) : \hat{a}(\hat{u}, \hat{u}) \geq \alpha |\hat{u}|_{1,\hat{K}}^2 \quad (3.5)$$

alors on a aussi :

$$\forall u \in V_{h,0} : a_h(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

où $\|u\|^2 = \int_0^1 u'^2$ et donc la condition inf sup. Ainsi il suffit de vérifier la condition (3.5) sur l'élément de référence ce qui revient à montrer que :

$$\exists \beta > 0 : V^t \hat{A} V \geq \beta \|V\|^2 \forall V \in \mathfrak{R}^k : \sum_{i=1}^{i=k} V_i = 0$$

où la matrice élémentaire \hat{A} est définie par:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{i1} &= -\phi'_i(\hat{\gamma}_1) \\ \hat{A}_{ij} &= \phi'_i(\hat{\gamma}_{j-1}) - \phi'_i(\hat{\gamma}_j) \quad \forall j \in [2, k] \\ \hat{A}_{ik+1} &= \phi'_i(\hat{\gamma}_k) \end{aligned}$$

La condition (3.5) est également suffisante pour vérifier la condition inf sup uniforme pour a_h associée au problème : $-(au')' = f$ avec $a(x) \geq a_0 > 0$, on obtient alors :

$$\forall u \in V_{h,0} : a_h(u, u) \geq a_0 \alpha \|u\|^2$$

De plus, pour le problème modèle ($a = 1$), on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 3.2 :

En dimension un les méthodes de Volumes Éléments Finis P_k pour le problème modèle sont d'ordre k .

Démonstration :

On décompose $V_{h,0}$ sous la forme

$$V_{h,0} = V_{h,0}^1 + W_h$$

où :

$$W_h = \bigoplus_{j=1}^{j=N} W_{h,0}(K_j)$$

$$W_{h,0}(K_j) = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v \in H_0^1(K_j) \cap P_k(K_j); v|_{\Omega-K_j} = 0\}$$

et

$$V_{h,0}^1 = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \in P_1(K_j), \forall j\}$$

On décompose de la même façon u sous la forme :

$$u = u_1 + w$$

où u_1 est l'interpolé de Lagrange de degré 1 de u sur \mathcal{T}_h :

$$u_1(s_i) = u(s_i) \quad \forall i \quad \text{et} \quad u_1 \in V_{h,0}^1$$

On a :

$$(w)|_{K_j} \in (H^2(K_j) \cap H_0^1(K_j)) \quad \forall j$$

et :

$$a_h^j(w) = L_h^j(v_h) \quad \forall v_h \in W_{h,0}(K_j) \quad \forall j$$

en effet :

$$\begin{aligned} a_h^j(u_1, v_h) &= \sum_{i=1}^k [v_h(x_i^j) - v_h(x_{i-1}^j)] u_1'(\gamma_i^j) \\ &= (u_1)' \sum_{i=1}^k [v_h(x_i^j) - v_h(x_{i-1}^j)] \\ &= (u_1)' [v_h(x_k^j) - v_h(x_0^j)] \end{aligned}$$

d'où :

$$a_h^j(u_1, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in W_{h,0}(K_j)$$

On a donc obtenu N problèmes élémentaires:

Trouver $w_h^j \in W_{h,0}(K_j)$ tel que :

$$a_h^j(w_h^j, v_h) = L_h^j(v_h) \quad \forall v_h \in W_{h,0}(K_j)$$

auxquels on veut appliquer le Théorème 3.1. Or la condition inf sup est vérifiée par toutes les formes bilinéaires a_h^j sur $W_{h,0}(K_j)$ avec la même constante α positive:

$$\forall k \exists \alpha > 0 : \quad \forall j, \quad \forall h, \\ \inf_{u_h \in W_{h,0}(K_j)} \sup_{v_h \in W_{h,0}(K_j)} \frac{a_h^j(u_h, v_h)}{|v_h|_{1,K}} \geq \alpha |u_h|_{1,K}$$

En effet pour tout k et tout choix de cellule, la forme bilinéaire \hat{a} vérifie :
 $\exists \alpha > 0$:

$$\forall \hat{u} \in (\mathbf{H}_0^1(\hat{K}) \cap P_k(\hat{K})), \quad \sup_{\hat{v} \in (\mathbf{H}_0^1(\hat{K}) \cap P_k(\hat{K}))} \frac{\hat{a}(\hat{u}, \hat{v})}{|\hat{v}|_{1,\hat{K}}} \geq \alpha |\hat{u}|_{1,\hat{K}}$$

sinon :

$$\exists \hat{u} \in \mathbf{H}_0^1(\hat{K}) \cap P_k(\hat{K}) : \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbf{H}_0^1(\hat{K}) \cap P_k(\hat{K})$$

Pour $0 < i < k$, on choisit \hat{v} tel que $\hat{v}(\hat{x}_j) = \delta_{ij}$, $0 < j < k$, on obtient :

$$\hat{u}'(\hat{\gamma}_i) - \hat{u}'(\hat{\gamma}_{i+1}) = 0 \quad \forall 0 < i < k$$

\hat{u}' est donc un polynôme de degré $k-1$ s'annulant $k-1$ fois, d'où $\hat{u} \in P_1(\hat{K})$ et comme $\hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0$, on obtient $\hat{u} = 0$.

Soit maintenant $u_h \in W_{h,0}(K_j)$, on note $\hat{u}(\hat{x}) = u_h(x)$. Il existe \hat{v} tel que :

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) \geq \alpha |\hat{u}|_{1,\hat{K}} |\hat{v}|_{1,\hat{K}}$$

soit alors $v_h \in W_{h,0}(K_j)$ définit par $v_h(x) = \hat{v}(\hat{x})$, on a :

$$\begin{aligned} a_h^j(u_h, v_h) &= \frac{1}{h} \hat{a}(\hat{u}\hat{v}) \\ &\geq \frac{\alpha}{h} |\hat{u}|_{1,\hat{K}} |\hat{v}|_{1,\hat{K}} \\ &\geq \alpha |u_h|_{1,K} |v_h|_{1,K}; \end{aligned}$$

puisque $|v_h|_{1,K} = h^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{1,\hat{K}}$

Ainsi, on peut appliquer le Théorème 3.1 à chacun des problèmes élémentaires, et on obtient :

$$\begin{aligned} \forall k, \quad \forall h, \quad \forall j \quad \exists! \quad w_h^j \in W_{h,0}(K_j) : \\ a_h^j(w_h^j, v_h) &= L_h^j(v_h) \quad \forall v_h \in W_{h,0}(K_j) \\ &\text{et} \\ \exists C > 0 : |w - w_h^j|_{1,K_j} &\leq Ch^k |w|_{k+1,K_j} = Ch^k |u|_{k+1,K_j} \end{aligned}$$

de plus si:

$$\forall v \in H^{k+2}(\hat{K}) \quad \forall i \quad (v - \hat{\pi}v)'(\hat{\gamma}_i) = 0 \quad (3.6)$$

où $\hat{\pi}v$ est l'interpolé de Lagrange sur $P_k(\hat{K})$

alors

$$\exists C > 0 : |w - w_h^j|_{1,K_j} \leq Ch^{k+2}|w|_{k+2,K_j} = Ch^{k+2}|u|_{k+2,K_j}$$

où C ne dépend que de \hat{k} et de $\hat{\pi}$.

Il reste à remarquer que

$$\begin{aligned} a_h(u_1, v_h) &= L_h(v_h) - a_h(w_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_{h,0}^1 \quad \text{et} \\ a_h(v_h, v_h) &= |v_h|^2 \quad \forall v_h \in V_{h,0}^1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$u_h = u_1 + w_h$$

et :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega} \quad \text{et} \\ \|\pi_h u - u_h\| &\leq Ch^{k+2} |u|_{k+2,\Omega} \quad \text{si (3.6) est vraie.} \end{aligned}$$

Ainsi toutes les méthodes de Volumes Éléments Finis P_k sont d'ordre k en dimension 1 pour le problème modèle. De plus comme pour la méthode de Galerkin, on peut calculer w_h élément par élément en inversant une matrice de taille $k - 1$, puis calculer u_1 en inversant la matrice tridiagonale par Gauss tridiagonal.

Exemples pour le problème modèle.

On propose trois choix de cellule :

- Partition par les milieux :

$$\omega_i = \{x : |x - x_i| < |x - x_j| \quad \forall j\}$$

- Partition par la base nodale :

$$\omega_i = \{x : \phi_i(x) > \phi_j(x) \quad \forall j \neq i\}$$

où ϕ_i est la fonction de V_h qui vérifie : $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

- Partition par P_{k+1} exactitude des flux :

Tout polynôme u_{k+1} de degré inférieur ou égal à $k+1$ sur \hat{K} peut être écrit sous la forme :

$$u_{k+1} = u_k + \lambda \psi_{k+1}$$

où u_k est un polynôme de degré inférieur ou égal à k et ψ_{k+1} est le polynôme :

$$\psi_{k+1}(x) = \prod_{i=0}^{i=k} \left(x - \frac{i}{k}\right)$$

de sorte que si les $\hat{\gamma}_i$ sont choisis tels que :

$$\psi'_{k+1}(\hat{\gamma}_i) = 0 \tag{3.7}$$

alors, on aura :

$$\begin{aligned} \pi_h u_{k+1} &= u_k \\ (u_{k+1} - \pi_h u_{k+1})'(\hat{\gamma}_i) &= 0 \quad \forall u_{k+1} \in P_{k+1}(\hat{K}) \end{aligned}$$

Or (3.7) admet toujours une solution car ψ_{k+1} , s'annulant aux nœuds, sa dérivée s'annule entre les nœuds. Ce dernier choix permet d'obtenir :

$$\|u_h - \pi_h u\| = O(h^{k+1})|u|_{k+2}$$

Le P_1 en dimension un.

Pour le problème modèle, la matrice élémentaire est la même qu'en éléments finis quel que soit θ_1 .

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\psi_2 = x(x-1)$, $\psi'_2 = 2x-1$ d'où

$$\psi'_2(\hat{\gamma}_1) = 0 \Leftrightarrow \hat{\gamma}_1 = \frac{1}{2}$$

Les trois choix proposés ne font donc qu'un et on a:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq Ch|u|_{2,\Omega} \\ \|\pi_h u - u_h\| &\leq Ch^2|u|_{3,\Omega} \end{aligned}$$

Le P_2 en dimension un.

La matrice élémentaire est symétrique si $\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 = 1$, dans ce dernier cas, en notant $\gamma = \hat{\gamma}_1 < \frac{1}{2}$, on obtient la matrice élémentaire :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 - 4\gamma & 4(2\gamma - 1) & 1 - 4\gamma \\ 4(2\gamma - 1) & 8(1 - 2\gamma) & 4(2\gamma - 1) \\ 1 - 4\gamma & 4(2\gamma - 1) & 3 - 4\gamma \end{pmatrix}$$

Le premier choix donne :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \frac{1}{4} \quad \text{et} \\ \hat{\gamma}_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On obtient la même matrice que pour le P_1 sur le maillage de pas $\frac{h}{2}$:

$$\hat{A} = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\| \leq Ch^2 |u|_{3,\Omega}$$

Le deuxième choix donne :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \frac{1}{6} \quad \text{et} \\ \hat{\gamma}_2 &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

On obtient la même matrice qu'en éléments finis P_2 :

$$\hat{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

et la majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\| \leq Ch^2 |u|_{3,\Omega}$$

On a $\psi_3 = x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$, $\psi'_3 = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ d'où

$$\psi'_3(\hat{\gamma}_i) = 0 \Leftrightarrow \hat{\gamma}_i = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Le troisième choix est donc défini par :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right] \quad \text{et} \\ \hat{\gamma}_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

On obtient la matrice élémentaire :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} & -4\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ -4\frac{\sqrt{3}}{3} & 8\frac{\sqrt{3}}{3} & -4\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 & -4\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

et les majorations d'erreurs :

$$\begin{aligned}\|u - u_h\| &\leq Ch^2|u|_{3,\Omega} \\ \|\pi_h u - u_h\| &\leq Ch^3|u|_{4,\Omega}\end{aligned}$$

La résolution élément par élément conduit à :

$$u_h^{(2)}(x_{2i+1}) = \frac{h^2 f_{2i+1}}{8(\gamma_{2i+2} - \gamma_{2i+1})} f_{2i+1} = \frac{h f_{2i+1}}{\hat{A}_{22}}$$

où

$$f_{2i+1} = \int_{\gamma_{2i+1}}^{\gamma_{2i+2}} f dx$$

soit :

$$u_h^{(2)}(x_{2i+1}) = \frac{h}{4} f_{2i+1}$$

pour le premier choix,

$$u_h^{(2)}(x_{2i+1}) = \frac{3h}{16} f_{2i+1}$$

pour le second choix et

$$u_h^{(2)}(x_{2i+1}) = \frac{\sqrt{3}h}{8} f_{2i+1}$$

pour le troisième choix.

Le système tridiagonal à inverser s'écrit dans les trois cas :

$$-u_h^{(1)}(x_{2i-2}) + 2u_h^{(1)}(x_{2i}) - u_h^{(1)}(x_{2i+2}) = h \left(f_{2i} + \frac{f_{2i-1} + f_{2i+1}}{2} \right)$$

Remarque :

À partir du P_3 , il semble qu' il n'existe plus de choix de cellule permettant de retrouver la matrice élémentaire de Galerkin. En effet la méthode de Galerkin et la méthode *Volumes Éléments Finis* ne différencieraient alors que par le second membre tout en étant toutes deux exacte pour f polynôme de degré $k - 2$:

Notons u_h la solution *Volumes Éléments Finis*, u la solution *Éléments Finis*. Si f est une constante, on doit avoir $u = u_h$ pour $k \geq 2$ d'où :

$$\begin{aligned} |\omega_i| - \int_{\Omega} \phi_i &= 0 \quad \forall i \\ |\hat{\omega}_i| - \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

qui redonne en utilisant la formule de Simpson le deuxième découpage proposé pour le P_2 . Et pour $k = 2 + l$, on doit avoir $u = u_h$ si f est un polynôme de degré l d'où :

$$\int_{\hat{\omega}_i} x^j - \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i x^j = 0 \quad \forall i \quad \forall j \leq l$$

ce qui semble impossible.

3.2 Applications en dimension deux.

En dimension 2, on peut toujours définir

$$\begin{aligned} \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) &= \sum_i \int_{\hat{\gamma}_{i,j}} -\vec{\nabla} \hat{u} \cdot \hat{n} \hat{v}(\hat{x}_i) \\ a_h^K(u, v) &= \sum_{i: x_i \in K} \int_{\gamma_{i,j}} -\vec{\nabla} u \cdot n v(x_i) \\ a_h(u, v) &= \sum_K a_h^K(u, v) \end{aligned}$$

mais on n'a pas trouvé de relation entre a_h^K et \hat{a} permettant de prouver dans le cas général que si \hat{a} vérifie la condition d'ellipticité

$$\exists \alpha > 0 : \hat{a}(\hat{u}, \hat{u}) \geq \alpha \|u\|_{1, \hat{K}}^2 \quad \forall u \in \hat{P}$$

alors a_h vérifie la condition inf sup uniforme. Toutefois, on a :

$$\exists C > 0 : \hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) \geq C a_h^K(u, v)$$

-où C ne dépend que de σ - si les applications F_K sont des similitudes ce qui permet de conclure dans le cas des maillages structurés.

Le P_1 continu en dimension deux

C' est le seul élément pour lequel on sache montrer la condition inf sup uniforme pour des maillages généraux. En effet on montre -de la même façon que l'on montre le lemme 2.1. - l'identité :

$$a_h(u, v) = a(u, v) \quad \forall (u, v) \in V_h^2$$

dès que les volumes de contrôles sont obtenus en joignant les milieux des côtés des triangles à un point quelconque du triangle. Pour des triangulations générales, il est naturel de construire les volumes de contrôle en joignant les milieux des côtés au barycentre. En comparant les seconds membres obtenus par la méthode de Galerkin $B_i^G = \int_{\Omega} f \phi_i$ et la méthode des *Volumes Éléments Finis*, Hakbusch (ref [18]) a obtenu :

$$\|u_{VEF} - u_G\| = O(h)$$

dans le cas général et

$$\|u_{VEF} - u_G\| = O(h^2)$$

si on a choisi de relier les milieux des côtés aux barycentres où u_{VEF} est la solution du problème discret obtenu par la méthode des *Volumes Éléments Finis* et u_G est la solution du problème discret obtenu par la méthode de Galerkin.

Dans le cas des maillages structurés obtenus par division des rectangles en deux triangles rectangles, il semble intéressant de construire les cellules en joignant les milieux des côtés à l'orthocentre. On obtient alors $\forall v \in P_2 : \int_{\gamma_{i,j}} v - \pi_h v \, ds = 0$ si les rectangles d'origine sont identiques et en utilisant une technique similaire à celle présentée ici, Cai et Mc Cormick ont montré dans [?, cai2] que :

$$\|u_h - \pi_h u\| = O(h^2) |u|_{3,\Omega}$$

Le P_1 non conforme en dimension deux.

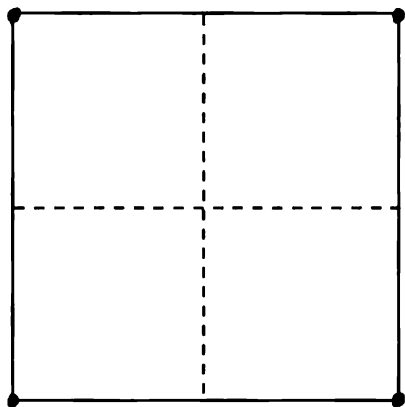
Comme on l'a vu au chapitre deux (lemme 2.1), on a :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, ds$$

ce qui montre la condition inf sup et la convergence en $O(h)$.

Le Q_1 en dimension deux

On ne sait pour l'instant conclure que dans le cas de maillages rectangulaires. Comme on l'a dit précédemment, il suffit alors de vérifier que \hat{a} est élliptique. Or si on construit les volumes de contrôles, en joignant dans \hat{K} les milieux des côtés :



, la matrice élémentaire s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

et on voit que :

$$a_h(u_h, u_h) = \|u_h\|_h^2 \quad \forall u_h \in V_h$$

de plus on a pour tout K et tout $\gamma_{i,j}$:

$$\forall v \in P_2, \int_{\gamma_{i,j} \cap K} \vec{\nabla}(v - \pi_h v) \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

et donc :

$$\|\pi_h(u) - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^2 |u|_{3,\Omega}$$

Ce résultat a été obtenu également par E. Suli (ref [21]) par une méthode plus dans l'esprit *Différences Finies*.

Le P_k en dimension deux.

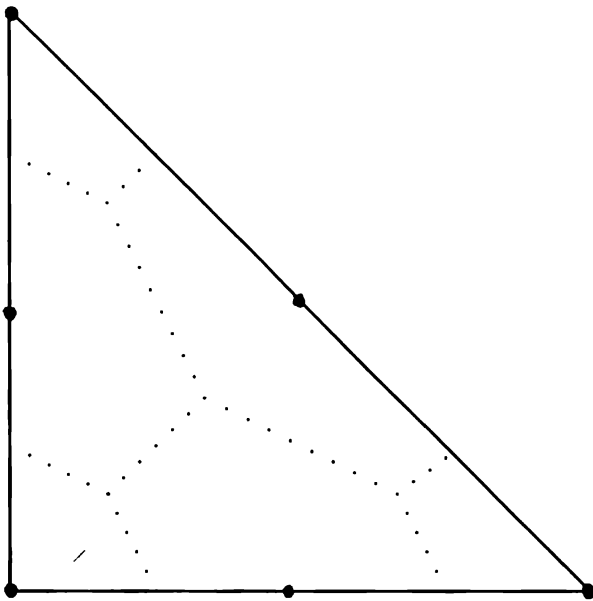
Ne sachant pas encore montrer la condition (3.4) on se contente ici de faire des propositions pour construire les cellules. On peut proposer les choix suivants pour construire les cellules :

- Cellules “iso P_1 ”
On découpe les triangles en k^2 sous triangles. On construit les cellules comme pour le P_1 mais sur la sous triangulation.

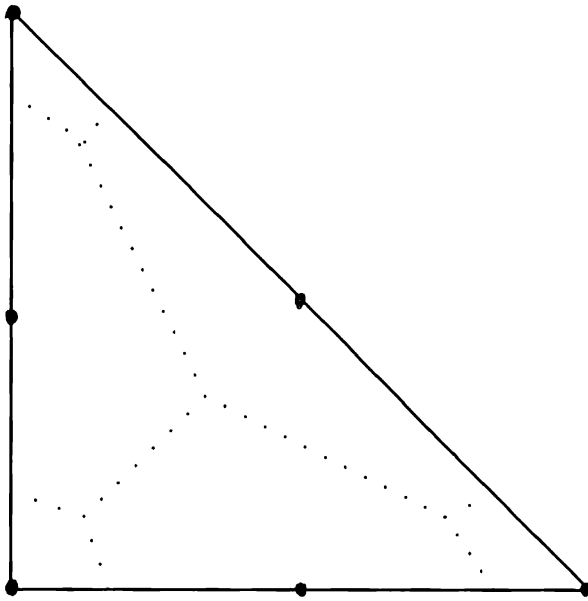
- Découpage par la base nodale.
On associe a chaque nœud x_i le volume de contrôle ω_i défini par :

$$\omega_i = \{x : \phi_i(x) \geq \phi_j(x) \quad \forall j\}$$

Par exemple, pour le P_2 , le premier choix conduit au découpage :



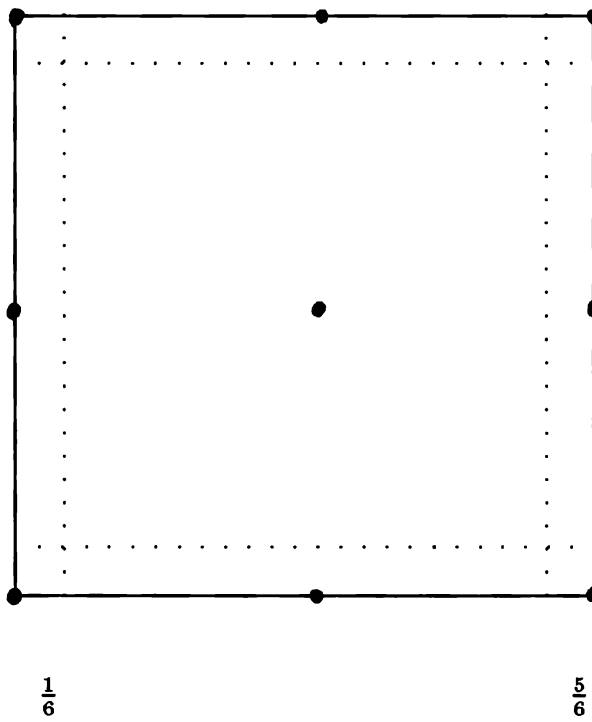
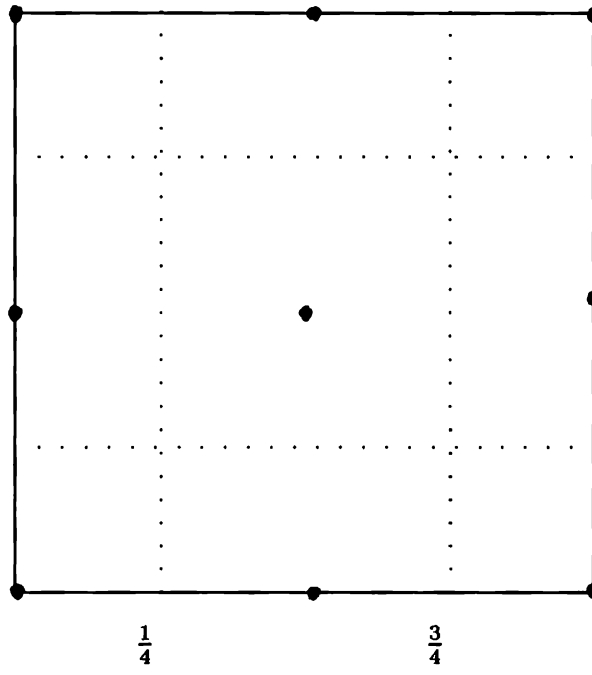
Toujours pour le P_2 , le second choix conduit au découpage :

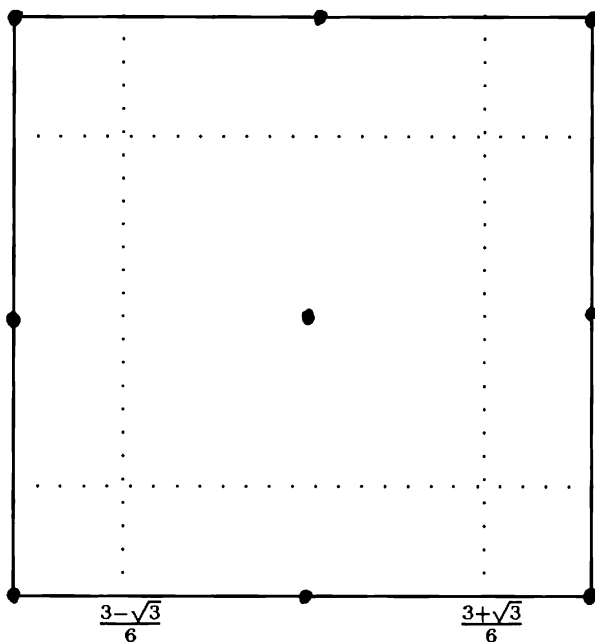


Le Q_k en dimension deux

On peut proposer de découper les côtés des rectangles de la même manière que pour le P_k en dimension un et de relier les points ainsi obtenus par des parallèles aux côtés :

Par exemple, pour le Q_2 , on obtient les trois découpages suivants :





3.3 Applications en dimension trois.

De même qu'en dimension deux, on sait montrer la condition inf sup pour le P_1 (conforme ou non).

4 Extension au problème de convection diffusion

On peut établir un résultat analogue au Théorème 3.1 mais il est improbable que l'on puisse vérifier la condition inf-sup uniformément sans introduire de décentrage.

4.1 Position du problème.

On considère un ouvert polyédrique $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et le problème :

$$-\Delta u + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} u = f \text{ dans } \Omega \quad (3.8)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (3.9)$$

On suppose toujours les données suffisamment régulières pour que :

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

On suppose de plus que $\vec{b} \in H(\text{div}; \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et que $\text{div} \vec{b} = 0$, ce qui implique que :

$$\vec{b} \cdot \vec{\nabla} u = \text{div}(u \vec{b})$$

4.2 Problème discret.

Trouver $u_h \in V_{h,0}$ tel que :

$$\forall 1 \leq i \leq N_{h,0} \int_{\gamma_i} (-\vec{\nabla} u_h \cdot \vec{n} + u_h \vec{b} \cdot \vec{n}) \, ds = \int_{\omega_i} f \, dV$$

On définit la forme bilinéaire :

$$a_h(u, v) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{i=1}^{i=N_h} (v(x_i) \int_{\gamma_i} (-\vec{\nabla} u \cdot \vec{n} + u \vec{b} \cdot \vec{n}) \, ds)$$

et la forme linéaire :

$$L_h(v) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{i=1}^{i=N_h} \left(v(x_i) \int_{\omega_i} f \, dV \right)$$

On peut alors écrire :

$$a_h(u_h, v_h) = a_h(u, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_{h,0}$$

On est dans la même situation que pour le problème de diffusion pure, le lemme suivant suffit donc pour obtenir une estimation en $O(h^k)|u|_{k+1,\Omega}$

Lemme 3.4 :

Soit $\hat{\kappa}$ un polyèdre de \mathbb{R}^d ($d \leq 3$), soit $\hat{\gamma} \subset \hat{\kappa}$ et $\hat{\pi}$ un opérateur linéaire continu de $H^{k+1}(\hat{\kappa})$ ($l \geq 0$) dans $H^{k+1}(\hat{\kappa})$ vérifiant :

$$\forall \hat{p} \in P_k, \quad \hat{\pi} \hat{p} = \hat{p}.$$

Si κ est une partie de \mathbb{R}^d telle qu'il existe une transformation affine inversible F de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d pour laquelle κ est l'image par F de $\hat{\kappa}$, si γ est l'image par F de $\hat{\gamma}$ et si l'opérateur π est défini par :

$$\forall v \in H^{k+l+1}(\kappa), \quad \pi v = \hat{\pi} \hat{v},$$

où $\hat{v}(\hat{x}) = v(x)$, alors $\exists \hat{C}$ tel que $\forall v \in H^{k+1}(\Omega)$:

$$\left| \int_{\gamma} (v - \pi v) \vec{b} \cdot \vec{n} \, ds \right| \leq C \frac{h_{\kappa}^{k + \frac{d+1}{2}}}{\rho_{\kappa}^{\frac{1}{2}}} |v|_{k+1, \kappa}$$

où \hat{C} ne dépend que de \hat{K} et $\hat{\pi}$.

Démonstration :

On ne donne que le schéma de la démonstration car elle est très semblable à celle donnée pour le Laplacien.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} (v - \pi v) \vec{b} \cdot \vec{n} \, ds \right| &\leq \|\vec{b}\|_{\infty} \left(\int_{\gamma} |(v - \pi v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\gamma} \|\vec{n}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 \|\vec{b}\|_{\infty} \left(\int_{\gamma} |(v - \pi v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\gamma|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$x = B\hat{x} + b$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\gamma} |(v - \pi v)|^2 \right) &\leq |\det(B)| \|B^{-1}\| \int_{\hat{\gamma}} (\hat{v} - \hat{\pi} \hat{v})^2 \\ &\leq C^2 |\det(B)| \|B^{-1}\| |\hat{v}|_{k+1, \hat{\kappa}} \end{aligned}$$

d'où le résultat. Remarquons que si $h_{\kappa} \leq \sigma \rho_{\kappa}$ alors :

$$\left| \int_{\gamma} (v - \pi v) \vec{b} \cdot \vec{n} \right| = O(h_{\kappa}^{k + \frac{d}{2}}) |v|_{k+1, \kappa}$$

Or pour obtenir une estimation d'erreur en $O(h^k)$ à partir des éléments finis P_k , il suffit d'avoir une majoration en $O(h^{k + \frac{d}{2} - 1})$. Cette remarque permet d'introduire des méthodes de décentrage. Pour la *Box method* par exemple on peut proposer le même décentrage qu'en 2.4.2, à savoir :

On approche $\int_{\gamma_{i,j}} u \vec{b} \cdot \vec{n}_i \, ds$ par :

$$\int_{\gamma_{i,j}} |\vec{b} \cdot \vec{n}_i| \frac{u_i - u_j}{2} + \vec{b} \cdot \vec{n}_i \frac{u_i + u_j}{2} \, ds$$

ce qui introduit une erreur de consistance en $O(h)$ et permet de vérifier la condition (3.4) car

$$\sum_i \sum_j \left[\left(\int_{\gamma_{i,j}} (u(x_i) \frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}_i| + \vec{b} \cdot \vec{n}_i}{2} + u(x_j) \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}_i - |\vec{b} \cdot \vec{n}_i|}{2} \, ds) u(x_i) \right) \right] \geq 0$$

Plus précisément, on peut introduire un terme de consistance dans le lemme 3.1 :

Lemme 3.5 :

Soient V un espace de Hilbert, $(V_h)_h$ une famille d'espaces de Hilbert de dimension finie - non nécessairement inclus dans V -, munis du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_h$, $(a_h)_h$ une famille de formes bilinéaires continues sur V_h , $(r_h)_h$ une famille de formes bilinéaires continues sur $V \times V_h$ et $u \in V$. On suppose que $(\cdot, \cdot)_h$ et $(a_h)_h$ se prolongent à $u \oplus V_h$. Si,

$$\exists \alpha_h > 0 : \quad \forall v_h \in V_h \sup_{w_h \in \dot{V}_h} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_h} \geq \alpha_h \|v_h\|_h$$

alors :

$$\forall u \in V \quad \exists ! u_h \in V_h : a_h(u - u_h, v_h) = r_h(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

de plus :

$$\|u - u_h\|_h \leq \inf_{v_h \in \dot{V}_h} (\|u - v_h\|_h + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{w_h \in \dot{V}_h} \frac{a_h(u - v_h, w_h)}{\|w_h\|_h} + \frac{1}{\alpha_h} |r_h| \|u\|_V)$$

où $|r_h|$ désigne la norme de la forme bilinéaire r_h

On a ici :

$$\begin{aligned} r_h(u, v_h) &= \sum_i \sum_j [(\int_{\gamma_{i,j}} (u(x_i) \frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}_i| + \vec{b} \cdot \vec{n}_i}{2} + u(x_j) \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}_i - |\vec{b} \cdot \vec{n}_i|}{2} - u \vec{b} \cdot \vec{n} \, ds) v_h(x_i)] \\ &\leq Ch |u|_{2,\Omega} \|v_h\|_h \end{aligned}$$

Toujours pour le P_1 , Hackbusch à montré dans (ref [18]) que le schéma centré vérifie la condition inf sup asymptotiquement :

$$\exists h_0, \quad \exists \alpha > 0 : \quad \forall h \leq h_0, \quad \forall u_h \in V_{h,0} \quad \exists v_h \in V_{h,0} : a_h(u_h, v_h) \geq \alpha \|u_h\| \|v_h\|$$

Chapitre 4

Analyse Numérique des méthodes de Volumes Éléments Finis pour le problème de Stokes.

Introduction

On s'intéresse ici à l'approximation du problème de Stokes par une méthode de *Volumes Éléments Finis*. On conserve les notations du chapitre trois.

1 Position du problème.

1.1 Le problème continu.

On considère un ouvert polyédrique $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et le problème :

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p &= \vec{f} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{u} &= \vec{0} \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

On suppose \vec{f} , Ω , Γ , telles que

$$\vec{u} \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right)^d$$

et

$$p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$$

où $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, ds = 0\}$.

A une famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$, on associe une famille d'espaces éléments finis pour la vitesse notés $\vec{X}_h = \bigotimes_{i=1}^{i=d} X_h$ et un espace éléments finis pour la pression noté Q_h . On note x_i les nœuds en vitesse, ω_i^u les volumes de contrôle associés, y_i les nœuds en pression et ω_i^p les volumes de contrôle de la masse. On suppose les nœuds x_i numérotés de 1 à N_h^u de sorte que seuls les $N_{h,0}^u$ premiers x_i soient internes ($x_i \notin \Gamma$), et les y_i numérotés de 1 à N_h^p .

1.2 Le problème discret.

Trouver $(\vec{u}_h, p_h) \in \vec{X}_h \times Q_h$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall i \leq N_{h,0}^u & : \int_{\gamma_i^u} (-\vec{\nabla} \vec{u}_h + pI) \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega_i^u} \vec{f} \, dV \\ \forall i > N_{h,0}^u & : \vec{u}_h(x_i) = 0 \\ \forall i \leq N_h^p & : \int_{\gamma_i^p} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds = 0 \end{aligned}$$

On définit $(\mathcal{S}_h \stackrel{\text{def}}{=} \vec{H}^2(\Omega) + \vec{X}_h)^2$, la forme bilinéaire sur $\mathcal{S}_h \times \mathcal{S}_h$:

$$a_h(\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i=1}^{i=N_h^u} (\vec{v}(x_i) \cdot \int_{\gamma_i^u} \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds)$$

, la forme linéaire sur \mathcal{S}_h :

$$L_h(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i=N_h^u} (\vec{v}(x_i) \cdot \int_{\omega_i^u} \vec{f} \, dV)$$

et sur $\mathcal{S}_h \times (H^1(\Omega) + Q_h)$ les formes bilinéaires :

$$b_{1h}(\vec{v}, p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i=N_h^u} (\vec{v}(x_i) \cdot \int_{\gamma_i^u} p \, \vec{n} \, ds)$$

$$b_{2h}(\vec{u}, q) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i=1}^{i=N_h^p} (q(y_i) \int_{\gamma_i^p} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds)$$

On peut alors récrire le problème discret (en abandonnant les notations vectorielles) sous la forme :

Trouver $(u_h, p_h) \in X_{h,0} \times Q_h$ tel que :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) + b_{1h}(v_h, p_h) &= L_h(v_h) \quad \forall v_h \in X_{h,0} \\ b_{2h}(u_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

2 Analyse.

2.1 Un résultat de convergence abstrait.

On montre ici un résultat d'existence et d'unicité de type Babuska Brezzi. Ce résultat est très voisin de celui obtenu par C. Bernardi, C.Canuto et Y. Maday dans [8], qui ont traité le cas à quatre espaces continus, trois formes bilinéaires continues $a(u \in X_1, v \in X_2)$, $b_1(u \in X_2, q \in M_1)$ et $b_2(u \in X_1, q \in M_2)$, et quatre espaces discrets, trois formes bilinéaires continues $a_h(u_h \in X_{1h}, v_h \in X_{2h})$, $b_{1h}(u_h \in X_{2h}, q_h \in M_{1h})$ et $b_{2h}(u_h \in X_{1h}, q_h \in M_{2h})$.

Lemme 4.1 :

Soit X (resp Q) un espace de Hilbert, $(X_h)_h$ (resp $(Q_h)_h$) une famille d'espaces de Hilbert de dimension finie - non nécessairement inclus dans X (resp Q) - , munis du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{X_h}$ (resp $(\cdot, \cdot)_{Q_h}$), $(a_h)_h$ une famille de formes bilinéaires continues sur $X_h \times X_h$, $(b_{1h})_h$ et $(b_{2h})_h$ deux familles de formes bilinéaires continues sur $X_h \times Q_h$ et (u, p) un couple de $(X \times Q)$. On suppose que $(\cdot, \cdot)_{X_h}$ (resp $(\cdot, \cdot)_{Q_h}$), a_h (resp $(b_{1h})_h$ et $(b_{2h})_h$) se prolongent à $(u \oplus X_h) \times (u \oplus X_h)$ (resp $(u \oplus X_h) \times (p \oplus Q_h)$) et que u est tel que $b_{2h}(u, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$.

On note :

$$K_{1h} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{v_h \in X_h; b_{1h}(v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}$$

$$K_{2h} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{v_h \in X_h; b_{2h}(v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}$$

On fait de plus les hypoth\u00e8ses suivantes :

$$\exists \alpha_h > 0, \forall u_h \in K_{2h}, \sup_{v_h \in K_{1h}} \frac{a_h(u_h, v_h)}{\|v_h\|_{X_h}} \geq \alpha_h \|u_h\|_{X_h} \quad (4.1)$$

$$\exists \beta_{1h} > 0, \forall q_h \in Q_h, \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_{1h}(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{X_h}} \geq \beta_{1h} \|q_h\|_{M_h} \quad (4.2)$$

$$\exists \beta_{2h} > 0, \forall q_h \in Q_h, \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_{2h}(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{X_h}} \geq \beta_{2h} \|q_h\|_{M_h} \quad (4.3)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \exists! (u_h, p_h) \in (X_h \times Q_h) : \\ \forall v_h \in X_h & : a_h(u - u_h, v_h) + b_{1h}(v_h, p - p_h) = 0 \\ \forall q_h \in Q_h & : b_{2h}(u_h, q_h) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{X_h} & \leq \inf_{v_h \in X_h} [\|u - v_h\|_{X_h} + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{z_h \in K_{1h}} \frac{a_h(u - v_h, z_h)}{\|z_h\|_{X_h}} \\ & + (1 + \frac{|a_h|}{\alpha_h}) \frac{1}{\beta_{2h}} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{b_{2h}(u - v_h, q_h)}{\|q_h\|_{Q_h}}] \\ & + \frac{1}{\alpha_h} \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{z_h \in K_{1h}} \frac{b_{1h}(z_h, p - q_h)}{\|z_h\|_{X_h}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{Q_h} & \leq \inf_{q_h \in Q_h} (\|p - q_h\|_{Q_h} + \frac{1}{\beta_{1h}} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b_{1h}(v_h, p - q_h)}{\|v_h\|_{X_h}}) \\ & + \frac{1}{\beta_{1h}} \inf_{v_h \in X_h} (\sup_{w_h \in X_h} \frac{a_h(u - v_h, w_h)}{\|w_h\|_{X_h}} + |a_h| \|u_h - v_h\|_{X_h}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $|a_h|$ désigne la norme de la forme bilinéaire a_h .

Démonstration :

Existence et unicité:

Soient (u_h^1, p_h^1) et (u_h^2, p_h^2) deux solutions, on a :

$$\begin{aligned} a_h(u_h^1 - u_h^2, v_h) + b_{1h}(v_h, p_h^1 - p_h^2) & = 0 \quad \forall v_h \in X_h \\ b_{2h}(u_h^1 - u_h^2, q_h) & = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

On a $(u_h^1 - u_h^2) \in K_{2h}$, en choisissant $v_h \in K_{1h}$ on a : $u_h^1 - u_h^2 = 0$ par (4.1)
d'où :

$$b_{1h}(v_h, p_h^1 - p_h^2) = 0 \quad \forall v_h \in X_h$$

soit par (4.2) : $p_h^1 = p_h^2$

Estimation d'erreur a priori :

L'hypothèse (4.3) implique :

$$\begin{aligned} & \forall v_h \in X_h, \exists z_h \in X_h : \\ & b_{2h}(z_h, q_h) = b_{2h}(v_h, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \\ \text{et } \|z_h\|_{X_h} & \leq \frac{1}{\beta_{2h}} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|b_{2h}(z_h, q_h)|}{\|q_h\|_{Q_h}} \end{aligned}$$

Soit alors $w_h = v_h - z_h$, on a $w_h \in K_{2h}$ et :

$$b_{2h}(z_h, q_h) = -b_{2h}(u - v_h, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h$$

car $b_{2h}(u, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$, d'où :

$$\|v_h - w_h\|_{X_h} = \|z_h\|_{X_h} \leq \frac{1}{\beta_{2h}} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|b_{2h}(u - v_h, q_h)|}{\|q_h\|_{Q_h}}$$

qui donne :

$$\|u - w_h\|_{X_h} \leq \|u - v_h\|_{X_h} + \frac{1}{\beta_{2h}} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{|b_{2h}(u - v_h, q_h)|}{\|q_h\|_{Q_h}} \quad (4.7)$$

De plus, comme $u_h, w_h \in K_{2h}$, on a, par (4.1):

$$\|u_h - w_h\|_{X_h} \leq \frac{1}{\alpha_h} \sup_{t_h \in K_{1h}} \frac{a_h(u_h - w_h, t_h)}{\|t_h\|_{X_h}}$$

Or, $\forall q_h \in Q_h, \forall t_h \in K_{1h}$:

$$a_h(u_h - w_h, t_h) = a_h(u - v_h, t_h) + a_h(v_h - w_h, t_h) + b_{1h}(t_h, p - q_h)$$

D'où: $\forall v_h \in X_h \quad \exists w_h \in K_{2h}$:

$$\begin{aligned} \|u_h - w_h\|_{X_h} & \leq \frac{|a_h|}{\alpha_h \beta_{2h}} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{b_{2h}(u - v_h, q_h)}{\|q_h\|_{Q_h}} \\ & + \frac{1}{\alpha_h} \sup_{t_h \in K_{1h}} \frac{a_h(u - v_h, t_h)}{\|t_h\|_{X_h}} \\ & + \frac{1}{\alpha_h} \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{t_h \in K_{1h}} \frac{b_{1h}(t_h, p - q_h)}{\|t_h\|_{X_h}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Il reste à écrire $\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|w_h - u_h\|$ et en utilisant (4.7) et (4.8) on obtient (4.5).

De plus :

$$\|p_h - q_h\|_{Q_h} \leq \frac{1}{\beta_{1h}} \sup_{z_h \in X_h} \frac{|b_{1h}(z_h, p_h - q_h)|}{\|z_h\|_{X_h}}$$

et :

$$\begin{aligned} b_{1h}(z_h, p_h - q_h) &= a_h(u - u_h, z_h) + b_{1h}(z_h, p - q_h) \\ &= a_h(v_h - u_h, z_h) + a_h(u - v_h, z_h) + b_{1h}(z_h, p - q_h) \\ &\leq |a_h| \|u_h - v_h\|_{X_h} \|z_h\|_{X_h} + a_h(u - v_h, z_h) + b_{1h}(z_h, p - q_h) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \beta_{1h} \|p_h - q_h\|_{Q_h} &\leq \sup_{z_h \in X_h} \frac{|b_{1h}(z_h, p - q_h)|}{\|z_h\|_{X_h}} \\ &\quad + \inf_{v_h \in X_h} \left(\sup_{z_h \in K_{1h}} \frac{a_h(u - v_h, z_h)}{\|z_h\|_{X_h}} + |a_h| \|u_h - v_h\|_{X_h} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Il reste à écrire $\|p - p_h\| \leq \|p - q_h\| + \|p_h - q_h\|$ et en utilisant (4.9) on obtient (4.6).

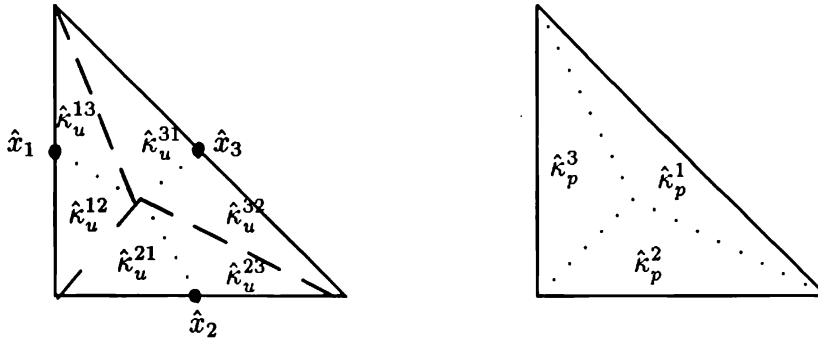
2.2 Résultat de convergence.

Comme pour le Laplacien, on suppose que les volumes de contrôle de la masse notés κ_p et de la quantité de mouvement notés κ_u ont été construits par affinités depuis l'élément de référence.

On construit $\kappa_{K,u}^{(ij)}$ en joignant le nœud x_i à $\gamma_{i,j}^u \cap K$ et $\kappa_{K,p}^{(ij)}$ en joignant le nœud y_i à $\gamma_{i,j}^p \cap K$.

Construction des κ ;

Exemple de l'élément de Crouzeix Raviart.



Les κ en vitesse seront utilisés pour estimer l'erreur de discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (a_h, b_{1h}) et les κ en pression pour estimer l'erreur de discrétisation de l'équation de conservation de la masse (b_{2h}). On choisit de munir \vec{X}_h de la norme discrète :

$$\|v\|_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} \|v(x_i) - v(x_j)\|^2 h_K^{d-2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui est équivalente à $\|v_h\| = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \vec{\nabla} v_h \vec{\nabla} v_h$, et Q_h de la norme discrète :

$$|q|_h \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_i |\omega_i^p| q(y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

qui est clairement équivalente à la norme $L^2(\Omega)$ sur Q_h .

Théorème 4.1 :

Si \vec{X}_h et Q_h vérifient les hypothèses du cadre abstrait, si :

$$\begin{aligned} & \exists \alpha > 0, \quad \exists a > 0, \quad \exists \beta_1 > 0, \quad \exists \beta_2 > 0 : \\ & \forall h, \alpha_h \geq \alpha \quad ; |a_h| \leq a \quad ; \beta_{1h} \geq \beta_1 \quad ; \beta_{2h} \geq \beta_2, \end{aligned}$$

si X_h contient les polynômes de degré $k \geq 1$ par élément, si Q_h contient les polynômes de degré $k - 1$ par élément, et si $u \in (H^{k+1}(\Omega))^d$, $p \in (H^{k+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))^d$ alors :

$$\|u - u_h\|_h + |p - p_h|_h \leq Ch^k (|u|_{k+1, \Omega} + |p|_{k, \Omega})$$

Démonstration :

On écrit l'estimation du cadre abstrait (Lemme 4.1) avec les interpolés de Lagrange respectifs de \vec{v} sur \vec{X}_h ($v_h = \pi_h u$) et de p sur Q_h ($q_h = \Pi_h p$).

Estimation de $\sup_{z_h \in K_{1h}} \frac{a_h(u - \pi_h u, z_h)}{\|z_h\|_h}$.

On note $\gamma_{i,j} = \gamma_{i,j}^u$, $\kappa = \kappa_u$, $v = \vec{v}$, $e_I = u - \pi_h u$ pour alléger les notations.

On a :

$$\sup_{z_h \in K_{1h}} \frac{a_h(u - \pi_h u, z_h)}{\|z_h\|_h} \leq \sup_{v_h \in \vec{X}_h} \frac{a_h(e_I, v_h)}{\|v_h\|_h}$$

$$\begin{aligned}
a_h(e_I, v_h) &= - \sum_{i=1}^{N_{h,0}} \left(v_h(x_i) \cdot \int_{\gamma_i} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right) \\
&= - \sum_{i=1}^{N_h} \sum_j \left(v_h(x_i) \cdot \int_{\gamma_{i,j}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right) \\
&= - \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j>i} \left((v_h(x_i) - v_h(x_j)) \cdot \int_{\gamma_{i,j}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right)
\end{aligned}$$

où \vec{n}_i est la normale à γ_i extérieure à ω_i .

$$\begin{aligned}
|a_h(e_I, v_h)| &\leq \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j>i} \left(\|v_h(x_i) - v_h(x_j)\| \left\| \int_{\gamma_{i,j}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right\| \right) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} \left(\|v_h(x_i) - v_h(x_j)\| \left\| \int_{\gamma_{i,j} \cap K} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right\| \right) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} \left(\|v_h(x_i) - v_h(x_j)\| h_K^{\frac{d}{2}-1} \left\| \int_{\gamma_{i,j} \cap K} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right\| h_K^{1-\frac{d}{2}} \right)
\end{aligned}$$

En appliquant Cauchy Schwarz, on fait apparaître la norme discrète de v_h :

$$|a_h(e_I, v_h)| \leq \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2-d} \left\| \int_{\gamma_{i,j} \cap K} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or par construction des $\kappa_K^{(ij)}$, $\gamma_{i,j} \cap K = \gamma_{i,j} \cap \kappa_K^{(ij)}$, d'où :

$$|a_h(e_I, v_h)| \leq \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2-d} \left\| \int_{\gamma_{i,j} \cap \kappa_K^{(ij)}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or le lemme 3.2 du chapitre 3 (avec $l = 0$, $F = F_K$, $\hat{\kappa} = F_K^{-1} \kappa_K^{(ij)}$, et $\hat{\pi}$ est l'interpolé de Lagrange sur \hat{K} .) implique qu'il existe $\beta_1 > 0$ tel que :

$$\left\| \int_{\gamma_{i,j} \cap \kappa_K^{(ij)}} \vec{\nabla} e_I \cdot \vec{n}_i \, ds \right\| \leq \beta_1 h_{\kappa_K^{(ij)}}^{(k+\frac{d}{2}+l-1)} |u|_{k+l+1, \kappa_K^{(ij)}}$$

D'où :

$$|a_h(e_I, v_h)| \leq \beta_1 \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2-d} \left(h_{\kappa_K^{(ij)}}^{(k+\frac{d}{2}+l-1)} |u|_{k+l+1, \kappa_K^{(ij)}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta_1 \beta_2 \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} (h_K)^{2(k+l)} |u|_{k+l+1, \kappa_K^{(ij)}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \beta_1 \beta_2 (h_K)^{k+l} \|v_h\|_h |u|_{k+l+1, \Omega}
\end{aligned}$$

où $\beta_2 < 1$ est le sup sur K, i, j des $(\frac{h_K^{(ij)}}{h_K})^{(k+\frac{d}{2}+l-1)}$, soit finalement :

$$\sup_{z_h \in K_{1h}} \frac{|a_h(e_I, z_h)|}{\|z_h\|_h} \leq C h^{(k+l)} |u|_{k+l+1, \Omega}$$

Estimation de $\sup_{v_h \in \mathcal{X}_h} \frac{b_{1h}(v_h, p - \Pi_h p)}{\|v_h\|_h}$.

$$\begin{aligned}
b_{1h}(v_h, p - \Pi_h p) &= \sum_{i=1}^{N_{h,0}} v_h(x_i) \cdot \int_{\gamma_i^u} (p - \Pi_h p) \vec{n} \, ds \\
&= \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{i < j} (v_h(x_i) - v_h(x_j)) \cdot \int_{\gamma_i^u} (p - \Pi_h p) \vec{n} \, ds \\
&\leq \|v_h\|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{(x_i, x_j) \in K^2} h_K^{2-d} \left\| \int_{\gamma_{i,j} \cap K} (p - \Pi_h p) \vec{n}_i \, ds \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|v_h\|_h h^k |p|_{k, \Omega}
\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.4 du chapitre 3.

Estimation de $\sup_{q_h \in \mathcal{Q}_h} \frac{b_{2h}(u - \pi_h u, q_h)}{|q_h|_{h,0}}$.

$$\begin{aligned}
b_{2h}(u - \pi_h u, q_h) &= \sum_i q_h(y_i) \int_{\gamma_i^p} e_I \cdot \vec{n} \, ds \\
&\leq |q_h|_h \left(\sum_i |\omega_i^p|^{-1} \left(\int_{\gamma_i^p} (u - \pi_h u) \cdot \vec{n} \, ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C |q_h|_h \left(\sum_i |\omega_i^p|^{-1} h_i^{2k+d} |u|_{k+1, \omega_i} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq C'' h^k |q_h|_h |u|_{k+1, \Omega}$$

Remarque: si $k = 1$ et $p \notin H^2(\Omega)$ on peut prendre pour Π_h , l'interpolé de Clément.

3 Applications.

3.1 Application à l'élément de Crouzeix Raviart.

On cherche les vitesses affines par éléments continues au milieu des faces et les pressions constantes par élément. Cet élément vérifie les propriétés suivantes (cf Lemme 2.1 et 2.2 du chapitre 2):

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h dV \quad \forall u_h, v_h \in V_h \quad (4.10)$$

$$b_{ih}(v_h, q_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \operatorname{div} v_h dV \quad i = 1, 2 \quad \forall v_h \in V_h \quad \forall q_h \in Q_h \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

La vérification des hypothèses du cadre abstrait est triviale et on obtient une estimation d'erreur d'ordre un.

3.2 Application à l'élément P_1 -bulle P_1 .

On choisit pour X_h le P_1 -bulle :

$$X_h = \left\{ v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}); v|_K \in P(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

où $P(K) = P_1(K) \oplus ev \{ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \}$ où les $\lambda_{i \{i=1,3\}}$ désignent les coordonnées barycentriques du triangle K . On notera $b_K = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ la fonction bulle associée au triangle K et ω_K le volume de contrôle associé. On choisit pour Q_h l'espace des fonctions continues affines par éléments :

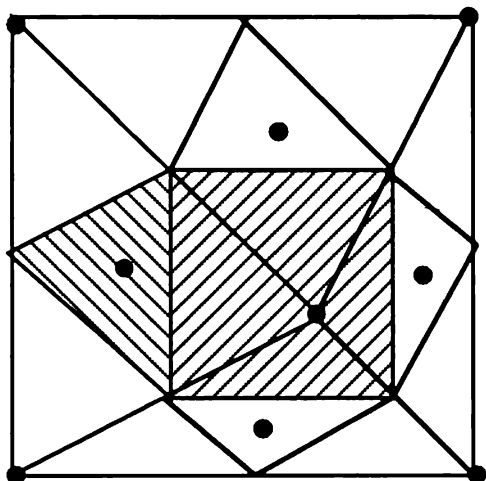
$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}); q|_K \in P_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$$

On notera X_h^1 la partie P_1 de X_h et X_h^b la partie bulle de X_h .

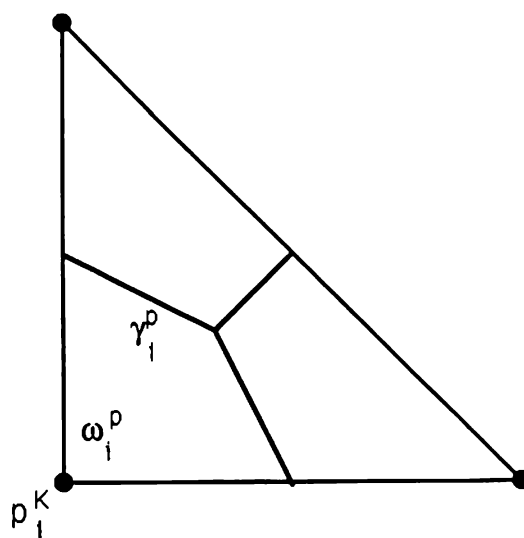
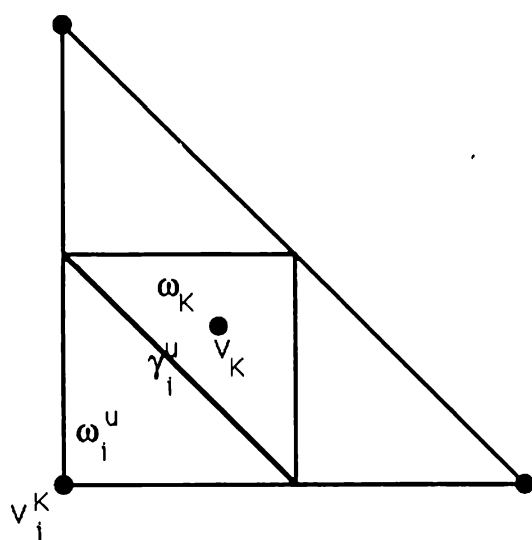
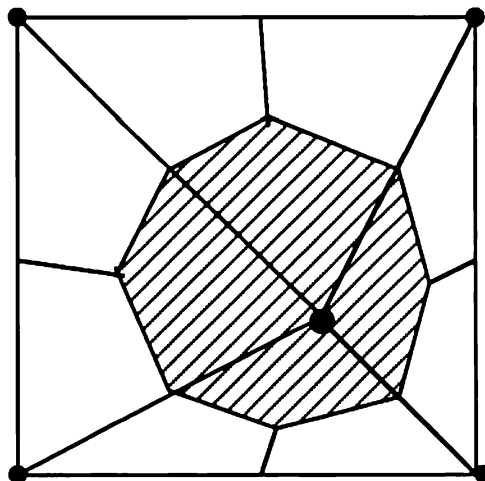
On construit les volumes de contrôle de la masse en joignant dans chaque triangle les milieux des côtés au centre de gravité. On construit les volumes de contrôle de la

quantité de mouvement en joignant dans chaque triangle les milieux des côtés entre eux.

Volumes de contrôle de la quantité de mouvement.



Volumes de contrôle de la masse.



On établit d'abord un lemme de comparaison entre la méthode des *Volumes Éléments Finis* et la méthode des *Éléments Finis* pour b , b_{1h} , b_{2h} où :

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{v}$$

Lemme 4.2 :

Pour tout $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_b \in \vec{X}_h$ où v_1 est la partie P_1 de \vec{v} et v_b la partie bulle, pour tout $q \in Q_h$, on a :

$$\begin{aligned} b_{1h}(\vec{v}, q) &= b(\vec{v}_1, q) + \frac{5}{9}b(\vec{v}_b, q) \\ b_{2h}(\vec{v}, q) &= b(\vec{v}_1, q) + \frac{55}{36}b(\vec{v}_b, q) \end{aligned}$$

Démonstration :

On note λ_i^K $i = 1, \dots, 3$ les coordonnées barycentriques, x_i^K les sommets et g_K le centre de gravité du triangle K , et :

$$\begin{aligned} \vec{v}_i^K &= \vec{v}(x_i^K) \\ q_i^K &= q(x_i^K) \end{aligned}$$

Si $\vec{v}_b = 0$, alors :

$$\vec{v}(g_K) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=3} \vec{v}(x_i^K) ,$$

d'où:

$$\begin{aligned} b_{1h}(\vec{v}, q) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{i=3} \vec{v}_i^K \cdot \left(\int_{\gamma_i^u \cap K} q \vec{n} \, ds + \frac{1}{3} \int_{\partial \omega_K} q \vec{n} \, ds \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{i=3} (\vec{\nabla} q)|_K \cdot \vec{v}_i^K \left(|\omega_i^u \cap K| + \frac{1}{3} |\omega_K| \right) \quad \operatorname{car}(\vec{\nabla} q)|_K = c^{te} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\vec{\nabla} q)|_K \cdot \sum_{i=1}^{i=3} \vec{v}_i^K |K| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\vec{\nabla} q)|_K \cdot \sum_{i=1}^{i=3} \vec{v}_i^K \int_K \lambda_i^K dV \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \vec{\nabla} q \cdot \vec{v} dV \\
&= b(\vec{v}, q)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
b_{2h}(\vec{v}, q) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{i=3} q_i^K \int_{\gamma_i^p \cap K} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{i=3} q_i^K \left(\int_{\omega_i^p \cap K} \operatorname{div} \vec{v} dV - \int_{\partial K \cap \omega_i^p} \vec{v} \cdot \vec{n} ds \right) \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} \vec{v})|_K \sum_{i=1}^{i=3} q_i^K \int_K \lambda_i dV
\end{aligned}$$

car la fonction $q_i^K \vec{v} \cdot \vec{n}_i$ est continue sur $\partial K \cap \omega_i^p$, et intervient avec les deux signes au cours de la sommation sur K , et $\int_K \lambda_i dV = |\omega_i^p \cap K|$.

$$b_{2h}(\vec{v}, q) = b(\vec{v}, q)$$

Si $\vec{v}_1 = 0$, $\vec{v} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vec{v}_K b_K$, alors :

$$\begin{aligned}
b_{1h}(\vec{v}, q) &= \frac{1}{27} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vec{v}_K \cdot \int_{\partial \omega_K} q \vec{n} ds \\
&= \frac{1}{27} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{4} \vec{v}_K \cdot (\vec{\nabla} q)|_K
\end{aligned}$$

Or

$$\int_K b_K = \frac{1}{60} |K|$$

d'où :

$$\begin{aligned}
b_{1h}(\vec{v}, q) &= \frac{5}{9} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\vec{\nabla} q)|_K \cdot \int_K \vec{v} dV \\
&= \frac{5}{9} b(\vec{v}, q)
\end{aligned}$$

et:

$$b_{2h}(\vec{v}, q) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{i=3} q_i^K \int_{\gamma_i^p \cap K} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i^p \cap K} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds &= \vec{v}_K \cdot \int_{\gamma_i^p \cap K} (b_K \vec{n}) \, ds \\ &= \vec{v}_K \cdot \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{i,j}^p \cap K} b_K \vec{n}_{ij} \, ds \end{aligned}$$

où $\gamma_{i,j}^p = \gamma_i^p \cap \gamma_j^p$ et \vec{n}_{ij} est la normale extérieure à ω_i^p sur $\gamma_{i,j}^p$.
Comme b_K est un polynôme de degré trois et \vec{n}_{ij} est constant sur $\gamma_{i,j}^p$, on a :

$$\int_{\gamma_{i,j}^p \cap K} b_K \vec{n}_{ij} \, ds = \frac{1}{6} (b_K(a) + 4b_K(b) + b_K(c)) |\gamma_{i,j}^p \cap K| \vec{n}_{ij}$$

où :

$$\begin{aligned} \lambda_i(a) = \lambda_j(a) &= \frac{1}{3} \quad ; \quad b_K(a) = \frac{1}{27} \\ \lambda_i(b) = \lambda_j(b) &= \frac{5}{12} \quad ; \quad b_K(b) = \frac{5^2}{3^3 \times 2^5} \\ \lambda_i(c) = \lambda_j(c) &= \frac{1}{2} \quad ; \quad b_K(c) = 0 \\ \frac{1}{6} (b_K(a) + 4b_K(b) + b_K(c)) &= \frac{33}{6^4} \end{aligned}$$

qui donne :

$$\int_{\gamma_{i,j}^p \cap K} b_K \vec{n}_{ij} \, ds = \frac{33}{6^4} |\gamma_{i,j}^p \cap K| \vec{n}_{ij}$$

on a donc obtenu :

$$\begin{aligned} b_{2h}(\vec{v}, q) &= -\frac{33}{6^4} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{i=3} q_i^K \vec{v}_K \cdot \int_{\gamma_i^p \cap K} \vec{n} \, ds \\ &= \frac{33 \times 60}{6^4} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\vec{\nabla} q)|_K \int_K \vec{v} \, dV \end{aligned}$$

car $\int_{\gamma_i^p \cap K} \vec{n} \, ds = -|K| \vec{\nabla} \lambda_i^K$ et $\int_K b_K = \frac{1}{60} |K|$ d'où :

$$b_{2h}(\vec{v}, q) = \frac{55}{36} b(\vec{v}, q)$$

Corollaire :

b_{1h} et b_{2h} vérifient uniformément la condition inf sup.

En effet, en définissant :

$$\begin{aligned}\Phi_1 & : \vec{X}_h \mapsto \vec{X}_h \\ \Phi_1(\vec{v}) & = \vec{v}_1 + \frac{5}{9}\vec{v}_b \\ \|\Phi_1(\vec{v})\| & \leq \|\vec{v}\| \\ \Phi_2 & : \vec{X}_h \mapsto \vec{X}_h \\ \Phi_2(\vec{v}) & = \vec{v}_1 + \frac{55}{36}\vec{v}_b \\ \|\Phi_2(\vec{v})\| & \leq \frac{55}{36}\|\vec{v}\|\end{aligned}$$

et :

$$\exists \beta > 0 : \forall q \in Q_h \sup_{v \in \vec{X}_h} \frac{b(\vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|} \geq \beta \|q\|_{0,2,\Omega},$$

on obtient :

$$\forall q \in Q_h \sup_{v \in \vec{X}_h} \frac{b_{1h}(\vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|} = \sup_{v \in \vec{X}_h} \frac{b_h(\Phi_1(\vec{v}), q)}{\|\Phi_1(\vec{v})\|} \geq \beta \|q\|_{0,2,\Omega}$$

et :

$$\forall q \in Q_h \sup_{v \in \vec{X}_h} \frac{b_{2h}(\vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|} = \sup_{v \in \vec{X}_h} \frac{b_h(\Phi_2(\vec{v}), q)}{\|\Phi_2(\vec{v})\|} \geq \frac{36}{55} \beta \|q\|_{0,2,\Omega}$$

Il nous reste à vérifier la condition inf sup sur a_h .

Lemme 4.3 :

$$\forall u \in X_h, \forall v \in X_h, a_h(u_h, v_h) = a(u_1, v_1) + \frac{5}{9}a(u_b, v_b) + a_h(u_b, v_1)$$

où $u = u_1 + u_b$ (resp $v = v_1 + v_b$) est la décomposition de u (resp v) sur $X_{h1} \oplus X_{hb}$ et $a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v$.

Démonstration :

On a:

$$a_h(u_1, v_1) = a(u_1, v_1)$$

- on le montre de la même façon que le lemme 2.1-

$$a_h(u_b, u_b) = \frac{5}{9}a(u_b, v_b)$$

En effet :

$$\begin{aligned} a_h(b_K, b_K) &= \frac{-1}{27} \int_{\partial\omega_K} \vec{\nabla} b_k \cdot \vec{n} ds \\ &= \frac{-1}{27} \int_{\omega_K} \Delta b_k dV \\ &= \frac{-1}{27 \times 4} \int_K \Delta b_k dV \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_K \Delta b_k dV &= 2 \int_K \lambda_1 dV \vec{\nabla} \lambda_2 \cdot \vec{\nabla} \lambda_3 \\ &+ 2 \int_K \lambda_2 dV \vec{\nabla} \lambda_3 \cdot \vec{\nabla} \lambda_1 \\ &+ 2 \int_K \lambda_3 dV \vec{\nabla} \lambda_1 \cdot \vec{\nabla} \lambda_2 \\ &= \frac{2}{3} |K| \sigma \end{aligned}$$

où $\sigma = \vec{\nabla} \lambda_1 \cdot \vec{\nabla} \lambda_2 + \vec{\nabla} \lambda_2 \cdot \vec{\nabla} \lambda_3 + \vec{\nabla} \lambda_1 \cdot \vec{\nabla} \lambda_3$. on a donc obtenu :

$$a_h(b_K, b_K) = \frac{-1}{3^4 \times 2} |K| \sigma$$

D' autre part :

$$\begin{aligned} a(b_K, b_K) &= \int_K \vec{\nabla} b_K \cdot \vec{\nabla} b_K dV \\ &= - \int_K \Delta b_k b_K dV \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_K \Delta b_k b_K dV &= 2 \int_K \lambda_1 b_K dV \vec{\nabla} \lambda_2 \cdot \vec{\nabla} \lambda_3 \\ &+ 2 \int_K \lambda_2 b_K dV \vec{\nabla} \lambda_3 \cdot \vec{\nabla} \lambda_1 \\ &+ 2 \int_K \lambda_3 b_K dV \vec{\nabla} \lambda_1 \cdot \vec{\nabla} \lambda_2 \\ &= 4 |K| \frac{2!}{6!} \sigma \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de :

$$\int_K \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} = 2|K| \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}$$

On à évidemment $a_h(u_1, b_K) = \frac{1}{27} \int_{\omega_K} \Delta u_1 \, dV = 0$.

Lemme 4.4 :

Pour tout $v \in X_{h1}$ et tout $u \in X_{hb}$, on a:

$$\forall h \quad \exists C \in \left[\frac{27}{\pi \sigma^2}, \frac{27 \sigma^2}{\pi} \right] : a_h(u, v) = C(u, v)_h$$

où σ est tel que $\forall h, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, h_K \leq \sigma \rho_K$, et $(\cdot, \cdot)_h$ est le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_h$.

Démonstration :

On à si $v \in X_{h1}$ et $u \in X_{hb}$:

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &= \sum_K \left[\left(\sum_{i=1}^{i=3} \int_{\gamma_i^u} -\vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, ds v_i^K \right) + v(g_K) \int_{\partial \omega_K} -\vec{\nabla} u_K \cdot \vec{n} \right] \\ &= \sum_K u_K \left[\left(\sum_{i=1}^{i=3} (v(g_K) - v_i^K) \right) \int_{\gamma_i^u} \vec{\nabla} b_K \cdot \vec{n} \, ds \right] \end{aligned}$$

Notons $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ les trois coordonnées barycentriques de K , on a:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1}{2} \quad \text{sur } \gamma_i^u \\ \lambda_j + \lambda_k &= \frac{1}{2} \quad \text{sur } \gamma_i^u \end{aligned}$$

d' où:

$$\vec{\nabla} b_K = \lambda_j \lambda_k \vec{\nabla} \lambda_i + \frac{1}{2} (\lambda_j \vec{\nabla} \lambda_k + \lambda_k \vec{\nabla} \lambda_j) \quad \text{sur } \gamma_i^u$$

Utilisant les expressions :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i^u} \lambda_j \, ds &= \int_{\gamma_i^u} \lambda_k \, ds = \frac{1}{4} |\gamma_i^u| \\ \vec{\nabla} \lambda_k + \vec{\nabla} \lambda_j &= -\vec{\nabla} \lambda_i \\ \int_{\gamma_i^u} \lambda_j \lambda_k \, ds &= \frac{1}{24} |\gamma_i^u|\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i^u} \vec{\nabla} b_K \cdot \vec{n} \, ds &= \frac{-1}{12} \int_{\gamma_i^u} \vec{\nabla} \lambda_i \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \frac{|K|}{12} (\vec{\nabla} \lambda_i \cdot \vec{\nabla} \lambda_i)\end{aligned}$$

Or :

$$(\vec{\nabla} \lambda_i \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) = \frac{|l_i|^2}{4|K|^2}$$

où l_i désigne la longueur du côté de K opposé au nœud x_i .

Il reste à remarquer que :

$$\begin{aligned}\pi \rho_K^2 &\leq 4|K|^2 \leq \pi h_K^2 \\ \rho_K &\leq l_i \leq h_K\end{aligned}$$

et que le pour tout $u \in X_h^b$ et tout $v \in X_h^1$, le produit scalaire $(u, v)_h$ s'écrit :

$$(u, v) = \frac{1}{27} \sum_K \left[u_K \sum_i (v(g_K) - v_i^K) \right]$$

En utilisant les lemmes 4.2 4.3 4.4, on montre la condition inf-sup sur a_h :

$$\forall u = u_1 + u_b \in K_{2,h}, v = u_1 + \frac{4}{11} u_b \in K_{1,h}$$

et :

$$\begin{aligned}a_h(u, v) &= a(u_1, u_1) + \frac{5}{9} a(u_b, u_b) + a_h(u_b, u_1) \\ &\geq \frac{5}{9} a(u, u) + C(u_1, u_b)_h \\ &\geq C'(u, u)_h\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de l'équivalence de la norme continue et de la norme discrète. Ainsi la méthode de *Volumes Éléments Finis* P_1 bulle P_1 est d'ordre un.

Conclusion

On a montré ici que la méthode des Volumes Éléments Finis pouvait être une alternative aux méthodes d'Éléments Finis pour l'approximation numérique des problèmes du Laplacien (resp. de Stokes) sous réserve de la vérification d'une (resp. de trois) condition(s) inf sup. En ce qui concerne le problème du Laplacien la condition inf sup est vérifiée pour les éléments finis P_1 (conforme ou non) sur des triangulations générales, et pour l'élément fini Q_1 pour des maillages structurés. Pour le problème de Stokes, on a montré que les trois conditions inf sup sont satisfaites pour les éléments P_1 non conforme / P_0 et P_1 bulle / P_1 pour des triangulations générales. La vérification des conditions inf sup a été obtenue en comparant les formes bilinéaires provenant de la méthode de Galerkin avec celles provenant de la méthode des Volumes Éléments Finis. La vérification des conditions inf sup pour d'autres choix d'éléments et de volumes de contrôle reste un problème ouvert.

Par rapport à la méthode de Galerkin, la méthode des Volumes Éléments Finis présente l'avantage d'être localement conservative, ce qui l'a rend attrayante pour la résolution approchée des équations de conservation modélisant les écoulements de fluides.

La question de savoir s'il existe un "meilleur choix" de volumes de contrôle pour une équation de conservation et un élément fini donné, n'a pas été traitée ici.

Il semble donc qu'il y ait dans l'étude des méthodes de Volumes Éléments Finis matière à de nombreux travaux.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] B. R. Baliga and S. V. Patankar. A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, 6:245–261, 1983.
- [3] J. Banaszek. Comparison of control volume and Galerkin finite element methods for diffusion-type problems. *Numerical Heat Transfer Part B*, 16:59–78, 1989.
- [4] J. Banaszek. A conservative finite element method for heat conduction problems. *Int. J. for Numer. Meth. in Engineering*, 20:2033–2050, 1987.
- [5] R. E. Bank and D. J. Rose. Some error estimate for the box method. *Siam J. Numer. Anal.*, 24:777–787, 1987.
- [6] J.H. Bramble and S.R. Hilbert. Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transform and spline interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 7:114–123, 1970.
- [7] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO ,Sér. Anal. Numer.*, 8:129–129, 1974.
- [8] C. Canuto C. Bernardi and Y. Maday. Generalized inf sup conditions for chebyshev spectral approximation of the Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25:1237–1256, 1988.
- [9] Z. Cai. *A theoretical foundation for the finite volume element method*. Ph. D. thesis, University of Colorado, Denver, CO, May.
- [10] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

- [11] M. Crouzeix and P.A. Raviart. Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equation. *RAIRO ,Sér. Anal. Numer.*, 7:33–33, 1973.
- [12] G. De Vahl Davis and I. P. Jones. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. *Int. J. for Numer. Meth. in Fluids*, 3:227–248, 1983.
- [13] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [14] V. Barthel et M. Villand. TRIO-VF note de presentation. *Note Cea, /Str/Lml/92-85*, 1992.
- [15] I. Faille. *Modélisation Bidimensionnelle de la Genèse et la Migration des Hydrocarbures dans un Bassin Sédimentaire*. Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble, 1991.
- [16] V. Girault. A combined finite element method and marker-and-cell method for solving Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 26:39–59, 1976.
- [17] V. Girault and P.A. Raviart. An analysis of a mixed finite element method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 33:235–271, 1979.
- [18] W. Hackbusch. On first and second order box schemes. *Computing*, 41:277–296, 1989.
- [19] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8.12:2182–2189, 1965.
- [20] B. Heinrich. *Finite Difference Methods on Irregular Networks*. Birkhauser Verlag, 1987.
- [21] E. Suli. Convergence of finite volume schemes for Poisson’s equation on nonuniform meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28:1419–1430, 1991.
- [22] R. S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall Inc., 1962.
- [23] J. Mandel Z. Cai and S. Mc Cormick. The finite volume element method for diffusion equations on general triangulations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28:392–402, 1991.



COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE GRENOBLE

UST/EC/PMC/REPROGRAPHIE/1997

RESUME

Dans le premier chapitre, on établit les équations modélisant les écoulements de fluides incompressibles sous forme d'équations de bilan et on présente brièvement les principes des méthodes de Volumes Finis.

Le second chapitre se veut une introduction aux méthodes de Volumes Eléments Finis. On y décrit la Box Method et on propose une méthode de Volumes Eléments Finis adaptée aux problèmes de Stokes et de Navier Stokes. Cette dernière méthode est décrite en détail et on donne des résultats numériques obtenus sur deux cas test classiques.

Le troisième chapitre présente une analyse d'erreur de la méthode des Volumes Eléments Finis pour le problème du Laplacien, et des applications en dimension un, deux ou trois.

Le quatrième chapitre prolonge les techniques du chapitre trois pour faire une analyse d'erreur de la méthode des Volumes Eléments Finis pour le problème de Stokes.
