

THESE

PRESENTEE PAR

CLEMENT Philippe

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
(arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

**DEVELOPPEMENTS ET APPLICATIONS DE METHODES
NUMERIQUES VOLUMES FINIS POUR LA
DESCRIPTION D'ECOULEMENTS OCEANIQUES**

Soutenue le 13 Mai 1996

Composition du jury :

Président :	Madame A. RAOULT
Rapporteurs :	Madame P. DELECLUSE Madame F. BROSSIER
Examineurs :	Monsieur C. LE PROVOST Monsieur F. X. LE DIMET Monsieur M. VILLAND

*Thèse préparée au sein du Laboratoire de Modélisation Thermohydraulique et Développement
de Logiciels - Commissariat à l'Energie Atomique - CEA Grenoble*

*A Flo,
pour son soutien quotidien, sa patience,
et son calme devant mon orthographe...*

“ Plus ça rate, plus on a de chances que ça marche .”

(premier principe de base de la logique Shadok)

Les Shadoks, Jacques ROUXEL, 1968

Remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier Dominique GRAND et Jean-Claude MICAELLI pour m'avoir proposé ce sujet aussi enrichissant que passionnant.

Mes remerciements s'adressent également à Christian LE PROVOST pour ses conseils scientifiques et ses éclairages indispensables concernant l'océanographie et à François-Xavier LE DIMET pour sa disponibilité et sa direction scientifique.

J'associe à ces remerciements Sylvie JOUSSAUME et Olivier MARTI du LMCE ainsi que Pascale DELECLUSE et Gurvan MADEC du LODYC pour avoir participé au suivi de cette thèse.

Je remercie spécialement Michel VILLAND qui a suivi mon travail au Laboratoire de Modélisation Thermohydraulique et développement de Logiciels pendant ces trois ans. Sa décontraction, son aide pour les développements concernant le code TRIO-VF et son soutien permanent ont contribué à faciliter mes investigations, même pendant les moments critiques de ce travail.

De même, j'exprime toute ma gratitude et mon admiration à Philippe EMONOT pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer et les multiples enseignements qu'il m'a apportés grâce à ses impressionnantes connaissances numériques et informatiques. Ses explications et son aide à la compréhension puis au développement des méthodes VEF ont notamment joué un rôle essentiel quant aux orientations du travail.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à tous les membres de l'équipe Trio-U du LMTL qui se sont intéressés, de près ou de loin, à mon travail. La liste exhaustive de ces personnes serait trop longue à énumérer mais je les associe en pensée à ces remerciements.

Par ailleurs, ce travail de recherche n'aurait pu avoir lieu sans les moyens informatiques mis à ma disposition au niveau du LMTL. Je tiens donc à remercier l'équipe chargée de l'installation et de la maintenance des outils informatiques (Bruno BROISE et Antoine JANICOT).

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à Françoise BROSSIER et Pascale DELECLUSE qui ont bien voulu juger ce travail et à tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu lui porter : Annie RAOULT, Christian LE PROVOST, François-Xavier LE DIMET et Michel VILLAND.

Résumé.

Ce travail aborde les problèmes généraux liés à la simulation numérique des écoulements océaniques. Dans ce contexte, on désire observer le comportement de méthodes numériques n'impliquant à priori aucune hypothèse limitative sur les échelles spatiales de la modélisation. Pour cela, on a adapté et développé des techniques de résolution des équations de Navier Stokes incompressibles par des méthodes de type volume fini.

Dans la première partie, nous présentons le principe et les modifications numériques entreprises sur l'application de cette technique à des maillages discrets structurés (logiciel TRIO-VF). La réponse de ce modèle concerne le comportement tridimensionnel, en présence de rotation constante, d'un écoulement uniforme, homogène ou inhomogène, passant au dessus d'une topographie sous-marine isolée dans un bassin de moyenne échelle. Les résultats de différentes configurations paramétriques s'accordent correctement aux descriptions physiques ou numériques disponibles dans la littérature.

La deuxième partie concerne l'extension plus conséquente d'une méthode volume fini s'appliquant à des maillages non-structurés. Le développement de nouveaux éléments bidimensionnels permet ainsi de retrouver divers mécanismes barotropes de circulation océanique horizontale de grande échelle. Par ailleurs, l'introduction d'un schéma de transport non-linéaire de type MUSCL contribue à l'amélioration de la qualité des simulations et fait l'objet d'une validation concluante sur une solution analytique bidimensionnelle originale. Enfin, nous discutons des problèmes actuels et des alternatives envisageables concernant les futures applications tridimensionnelles de ces méthodes de discrétisation aux simulations d'écoulements océaniques.

Abstract.

This report deals with numerical simulation of oceanic flows. In that context, we want to observe the behaviour of numerical methods that do not involve any restrictive hypothesis on modelisation's spatial scales. In order to do this, we have adapted and developed some resolution's techniques of Navier Stokes incompressible equations based on finite volume methods.

The first part of the study present the numerical principle and modifications realized on this kind of technique and applied on structured meshes. Model's response concern the three-dimensional behaviour of homogeneous or inhomogeneous uniform flow, in constant rotation, over isolated topography in a meso-scale basin. Results of a several sets of numerical simulations correctly fit to physical or other numerical descriptions available in literature.

The second part deals with more significant extension of a finite volume method applied on unstructured meshes. Development of new two-dimensional elements leads to some horizontal homogeneous oceanic circulation's mechanisms occuring in large scales basins. Moreover, for transport's terms, the introduction of a type MUSCL scheme improves the quality of non-linear phenomena's results. This scheme is also successfully validated with an original two-dimensional analytic solution. Finally, current problems and conceivable alternatives relating to prospective three-dimensional applications of these discretisation's methods for numerical studies of oceanic flows are discussed.

Table des matières

Notations.	9
Introduction.	13
Généralités : les modèles physico-numériques.	17
1 Equations de conservation.	17
2 Hypothèses et systèmes d'équations classiques.	18
2.1 Modèle quasi-géostrophique et ses dérivées.	18
2.1.a Le modèle quasi-géostrophique.	18
2.1.b Le modèle Shallow-Water.	20
2.1.c Conditions limites.	21
2.1.d Modèles multi-couches.	21
2.2 Modèles aux équations primitives.	22
2.2.a Hypothèses.	22
2.2.b Formulation : système d'équations PE.	24
2.2.c Spécificités de la technique de résolution.	25
2.3 Hypothèses sur les échelles sous-maïles.	25
2.3.a Modéliser la turbulence, généralités.	25
2.3.b Paramétrisation de la turbulence en océanographie.	27
3 Hypothèses retenues et formulations du système.	29
3.1 Hypothèses.	29
3.2 Formulations.	30
3.2.a Formulation vectorielle.	30
3.2.b Formulation conservative.	31
 I Le modèle numérique Volumes Différences Finies, maillage structuré.	 33
I.1 Principe et développements numériques.	35
1.1 Principe numérique, rappels.	35
1.1.1 Modèle VDF structuré, le code TRIO-VF.	35
1.1.2 Représentation et distribution spatiale.	35
1.1.3 Technique de résolution des équations.	37
1.2 Schémas et modifications numériques.	38
1.2.1 Extensions physiques : force de Coriolis.	38
1.2.2 Schémas temporels.	39

1.2.2.a	Le schéma leap-frog.	39
1.2.2.b	Éliminations du mode numérique.	40
1.2.2.c	Choix adopté.	40
1.2.3	Schéma de diffusion.	41
1.2.4	Schémas de convection et d'advection.	42
1.2.5	Conditions limites.	42
1.2.5.a	Condition de frontière ouverte.	42
1.2.5.b	Conditions limites classiques et initialisation.	46
1.2.6	Stabilité.	47
1.2.6.a	Condition de Courant.	47
1.2.6.b	Terme de diffusion.	48
1.2.6.c	Estimation d'un pas de temps, influences physiques.	48
1.2.7	Système linéaire, résolutions et algorithme.	49
I.2	Application 3D: topographie isolée.	51
2.1	Présentation de la simulation.	51
2.1.1	Le cas test.	51
2.1.1.a	Intérêts et objectifs.	51
2.1.1.b	Contexte général.	52
2.1.2	Caractérisation des phénomènes.	53
2.1.2.a	Paramètres caractéristiques.	53
2.1.2.b	Phénomènes physiques généraux.	54
2.1.2.c	Etudes de référence.	57
2.2	Modélisations barotropes.	60
2.2.1	Conditions des calculs.	60
2.2.1.a	Discrétisation.	60
2.2.1.b	Options de calcul.	60
2.2.2	$\mu=5$: effets d'inertie prédominants.	62
2.2.2.a	Phénomène et évolution.	62
2.2.2.b	Solution stationnaire.	62
2.2.2.c	Écoulement vertical.	66
2.2.3	$\mu=12.5$: effets d'inertie décroissants.	72
2.2.3.a	Période d'initiation ($t_{ad} < 1$).	72
2.2.3.b	Evolution et comparaisons.	72
2.2.3.c	Stationnarité.	74
2.2.4	$\mu=125$, régime d'ondes topographiques.	78
2.2.4.a	Phénomène et évolution.	78
2.2.4.b	Comparaisons.	78
2.2.4.c	Influence de la géométrie de la topographie.	83
2.3	Prise en compte d'une stratification thermique.	86
2.3.1	Conditions des calculs.	86
2.3.1.a	Domaine et conditions limites hydrauliques.	86
2.3.1.b	Paramètres et options.	86
2.3.1.c	Mise en œuvre des stratifications thermiques.	87
2.3.1.d	Initialisation des calculs.	89
2.3.2	Résultats et comparaisons.	89
2.3.2.a	Vorticité verticale.	89

2.3.2.b	Vitesses horizontales perturbées.	95
2.3.2.c	Vitesses verticales.	95
2.3.2.d	Températures perturbées.	102
2.4	Rôle du gradient de pression.	107
2.4.1	Equilibre géostrophique.	107
2.4.1.a	Formulation analytique.	107
2.4.1.b	Vérification numérique.	108
2.4.1.c	Effet de la topographie en mode barotrope.	108
2.4.2	Equilibre barocline.	110
2.4.2.a	Formulation et vérification.	110
2.4.2.b	Effet de la topographie en mode barocline.	116
2.5	Conclusion.	118
2.5.1	Résolution et performance.	118
2.5.2	Conclusion.	121

II Le modèle numérique Volumes Éléments Finis, maillage non-structuré. 123

II.1	Rappel du principe de discrétisation.	125
1.1	Méthode VEF et élément de Crouzeix Raviart.	125
1.2	Discrétisation des bilans.	127
1.2.1	Conservation de la masse.	127
1.2.2	Conservation de la quantité de mouvement.	127
1.2.2.a	Discrétisation du gradient de pression.	128
1.2.2.b	Discrétisation du terme de viscosité (laplacien).	128
1.2.2.c	Discrétisation du terme de transport non-linéaire.	128
1.2.2.d	Discrétisation du terme d'inertie temporelle.	129
1.2.2.e	Termes supplémentaires: force de Coriolis et frottement de fond.	129
1.3	Système linéaire, mise en œuvre et résolution.	130
1.3.1	Formulation matricielle et propriétés.	130
1.3.2	Schéma temporel et stabilité	130
1.3.3	Conditions limites.	131
1.3.4	Résolution.	131
II.2	Modifications 2D de l'élément en pression.	133
2.1	Introduction.	133
2.1.1	Pourquoi une modification.	133
2.1.2	Démarche des développements.	134
2.2	Le modèle P1-non conforme/P1-iso.	134
2.2.1	L'élément 2D.	134
2.2.2	Discrétisation de l'opérateur <i>gradient</i>	136
2.2.2.a	Contribution sur un volume de QDM.	136
2.2.2.b	Prise en compte des conditions limites.	137
2.2.3	Discrétisation de l'opérateur <i>divergence</i>	137
2.2.3.a	Intégration sur les volumes de masse centrés.	138

2.2.3.b	Intégration sur les volumes de masse liés aux sommets. . .	138
2.2.3.c	Conditions limites.	139
2.2.4	Matrice de pression, mise en œuvre et résolution.	140
2.2.5	Validation initiale.	141
2.3	Le modèle P1-non conforme/P1.	142
2.3.1	L'élément 2D.	142
2.3.2	Discrétisation de l'opérateur <i>gradient</i>	143
2.3.2.a	Contribution sur un volume de QDM.	143
2.3.2.b	Prise en compte des conditions limites.	144
2.3.3	Discrétisation de l'opérateur <i>divergence</i>	144
2.3.3.a	Intégration sur les volumes de masse liés aux sommets de la face.	145
2.3.3.b	Intégration sur les volumes de masse liés aux sommets opposés.	145
2.3.3.c	Conditions limites.	145
2.3.4	Matrice de pression, mise en œuvre et résolution.	147
2.3.5	Validation initiale.	147
2.4	Application 2D : forçages de type "vent de surface".	148
2.4.1	Présentation des simulations.	148
2.4.1.a	Contexte et phénomènes physiques.	148
2.4.1.b	Intérêts et objectifs.	148
2.4.1.c	Forçage et équations 2D en variables u, v, P	149
2.4.1.d	Paramètres caractéristiques, analogie aux simulations QG.	149
2.4.1.e	Prise en compte des paramètres pour modèle u, v, P	151
2.4.1.f	Post-traitements supplémentaires et maillages.	151
2.4.2	Comparaison des modèles VEF, problème de type Stommel.	154
2.4.2.a	Prise en compte numérique et solution analytique.	154
2.4.2.b	Tests linéaires.	154
2.4.2.c	Tests non-linéaires.	160
2.4.2.d	Problème lié au schéma P1, choix d'un modèle.	160
2.4.3	Ondes de Rossby, problème de type Munk en non-linéaire.	164
2.4.3.a	Prise en compte numérique.	164
2.4.3.b	Phénomène physique.	164
2.4.3.c	Mise en œuvre, résultat et comparaison.	164
2.4.4	Conclusion.	168
II.3	Modifications non-linéaires complémentaires.	169
3.1	Introduction: quelques comparaisons VEF/VDF.	169
3.2	Extension du schéma de transport.	172
3.2.1	Schéma MUSCL d'ordre 2, principe.	172
3.2.2	Evaluation du gradient, limiteur minmod.	173
3.2.3	Mise en œuvre pour le modèle VEF.	174
3.2.4	Retour au problème bidimensionnel de Munk.	175
3.3	Application sur une solution analytique 2D.	177
3.3.1	Présentation et mise en œuvre.	177
3.3.2	Choix du forçage.	178
3.3.3	Tests numériques et comparaisons.	180

3.3.3.a	Caractérisation des tests.	180
3.3.3.b	Résultats.	181
3.4	Conclusion.	184
II.4	Problématique de l'extension 3D.	185
4.1	Introduction.	185
4.2	Mise en œuvre de l'extension, principes.	185
4.3	Tests de validation, problèmes rencontrés.	187
4.4	Conclusion, alternative au tétraèdre.	188
	Conclusion générale.	191
	Annexes	194
A	Méthodologies générales.	195
1.1	Principe "volume fini" : formule de Green.	195
1.2	Solveur Navier Stokes : schéma de projection matricielle.	196
B	Schémas de transport Quick, maillage structuré.	197
C	Extension 3D VEF sur éléments tétraédriques.	199
3.1	Opérateur <i>gradient</i>	199
3.2	Opérateur <i>divergence</i>	200
D	Compromis VEF/VDF, éléments prismatiques.	203
	Bibliographie.	205

Notations.

Échelles caractéristiques :

- D Échelle verticale de longueur (profondeur de 4 à 5 km).
 L Échelle horizontale de longueur (de 100 à qq. milliers de km).
 U Échelle horizontale de vitesse: (U_0 pour la Partie I et U_s pour la Partie II, de 1cm.s^{-1} à 0.1 m.s^{-1}).
 t_{car} Échelle de temps: $t_{car} = L/U$.

Repère :

- $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Repère lié au bassin, $0\vec{i}$ dirigé vers l'Est, $0\vec{j}$ vers le Nord, $0\vec{k}$ du fond vers la surface.
 $O\vec{M}(x, y, z)$ Vecteur position de la particule $M(x, y, z)$: $O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Variables et coefficients dimensionnels :

Lettres alphabétiques :

- c_p Chaleur spécifique: $c_p = 4.18 \cdot 10^3 \text{ watt.s.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$.
 F_0 Accélération horizontale due au forçage de surface (ms^{-2}): $F_0 = \frac{\tau_0}{\rho_0 D}$
 \vec{F}_{vol} Terme source caractérisant les forces de volume (ms^{-2}).
 f Paramètre de Coriolis (s^{-1}): $f = 2\Omega \sin(\phi) = f_0 + \beta_0 y$.
 f_0 Paramètre de Coriolis au milieu du bassin: $f_0 = 2\Omega \sin(\phi_0) = 10^{-4} \text{s}^{-1}$ pour $\phi_0 = 45^\circ \text{N}$.
 \vec{g} Accélération de la pesanteur: $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.
 h Variation de la hauteur du fond en fonction de x et y (m).
 h_b Hauteur maximale de la topographie (m).
 k_{fr} Coefficient de frottement de fond (s^{-1}).
 N Fréquence de Brunt-Väisälä (s^{-1}): $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}}$.
 P_s Pression statique.
 P Somme de la pression statique et de sa composante hydrostatique: $P = P_s + \rho_0 \vec{g} \cdot O\vec{M}$.
 R_T Rayon de la terre: 6400km.
 S_{vol} Terme source dans l'équation d'énergie (°C.s^{-1}): $S_{vol} = \frac{Q_{vol}}{\rho_0 c_p}$.
 T Température (°C).

T_0	Température de référence: $T_0 = 20^\circ C$.
T_{per}	Température perturbée: $T_{per} = T(x, y, z) - T_{couche}(z)$.
T_x, T_y	Fonctions analytiques directionnelles décrivant le type de forçage de surface.
t_{fr}	Temps caractéristique lié au frottement de fond (s): $t_{fr} = 1/k_{fr}$.
t	Temps (s).
U_0	Module de la vitesse imposée à la face Ouest du domaine (Partie I).
\vec{U}	Vecteur vitesse de composantes $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$ ($m.s^{-1}$).
\vec{U}_h	Vecteur vitesse horizontale de composantes $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)$ ($m.s^{-1}$).
U_s	Vitesse de Sverdrup caractéristique d'un domaine à $n=1$ ou 2 cellules, ($m.s^{-1}$): $U_s = \frac{n\pi\tau_0}{\rho_0 D \beta_0 L} \text{ (Partie II).}$

Lettres grecques :

α	Diffusivité moléculaire: $\alpha = 1.430 \cdot 10^{-7} m^2.s^{-1}$ à $20^\circ C$.
α_h	Hyper-diffusivité sous maille horizontale ($m^2.s^{-1}$).
α_v	Hyper-diffusivité sous maille verticale ($m^2.s^{-1}$).
β_0	Gradient de Coriolis suivant la latitude: $\beta_0 = \frac{2\Omega \cos(\phi_0)}{R_T} \approx 2 \cdot 10^{-11} (ms)^{-1}$ pour $\phi_0 = 45^\circ N$.
β_t	Coefficient de dilatabilité thermique ($^\circ C^{-1}$), $\beta_t = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$.
ν	Viscosité moléculaire: $\nu = 1.004 \cdot 10^{-6}$ à $20^\circ C$.
ν_h	Hyper-viscosité sous maille horizontale ($m^2.s^{-1}$).
ν_v	Hyper-viscosité sous maille verticale ($m^2.s^{-1}$).
ω_z	Vorticité verticale relative (s^{-1}), se note également ξ : $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.
$\vec{\Omega}$	Rotation terrestre: $\Omega = 7.292 \cdot 10^{-5} rad.s^{-1}$.
ϕ	Latitude.
ϕ_0	Latitude au milieu du domaine.
Φ	Fonction de transport: $Hu = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right), Hv = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$.
Ψ	Fonction de courant: $u = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right), v = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$.
ρ	Masse volumique.
ρ_0	Masse volumique de référence: $\rho_0 = 1000 kg.m^{-3}$.
τ_0	Module de la tension du vent en surface ($dyn.cm^{-2}$ ou $Newton.m^{-2}$).
ξ	Vorticité verticale relative (s^{-1}), se note également ω_z .

Nombres adimensionnels :

B	Nombre de Burger: $B = \frac{N \times D}{f_0 \times L \times U}$.
ϵ	Nombre de Rossby: $\epsilon = \frac{U}{f_0 \times L}$ (Partie I).
γ	Valeur du paramètre du filtre Asselin ($\gamma = 0.1$).
γ_a	Nombre caractérisant la couche limite visqueuse $\gamma_a L$: $\gamma_a = 2 \left(\frac{Ro}{Re} \right)^{1/3}$.

γ_f	Nombre caractérisant la couche limite de frottement $\gamma_f L$: $\gamma_f = \frac{k_{fr}}{\beta_0 \times L}$.
γ_i	Nombre caractérisant la couche limite inertielle $\gamma_i L$: $\gamma_i = Ro^{1/2}$.
F	Nombre de Froude: $F = \frac{U}{Nh_b}$.
H	Hauteur relative de la colonne fluide: $H = 1 - \frac{h}{D}$.
Re	Nombre de Reynolds "turbulent": $Re = \frac{UL}{\nu_h}$.
Ri	Nombre de Richardson local: $Ri = \frac{N^2}{(\frac{\partial U_h}{\partial z})^2}$.
Ro	Nombre de Rossby associé à β_0 : $Ro = \frac{U}{\beta_0 \times L^2}$ (Partie II).
μ	Caractérisation de la dynamique liée à la topographie: $\mu = \frac{h_b}{D \times \epsilon}$.
t_{ad}	Temps adimensionnel: $t_{ad} = t/t_{car}$.
*	Indices indiquant des variables ou des opérateurs adimensionnels.

Opérateurs différentiels:

\wedge	Produit vectoriel.
\otimes	Produit tensoriel.
$\vec{\nabla}$	Opérateur gradient (se note aussi <i>grad</i>).
$\vec{\nabla} \cdot$	Opérateur divergence (se note aussi <i>div</i>).
$\vec{\nabla} \wedge$	Opérateur rotationnel, (se note aussi <i>rot</i>).
Δ	Opérateur laplacien: $\Delta = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla})$.
$\frac{\partial f}{\partial t}$	Dérivée partielle de f par rapport à t.
$\frac{D}{Dt}$	Dérivée lagrangienne: $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} f$.
$\frac{D_h}{Dt}$	Dérivée lagrangienne horizontale.

Opérateurs matriciels:

C	Matrice du gradient.
B	Matrice de divergence.
A	Matrice de dissipation (i.e. diffusion).
M	Matrice de masse.
$L(U)$	Matrice du transport non-linéaire.
E^0	Matrice de pression ($BM^{-1}C$).

Intégrales:

$\int_{\Omega_c} dV$	Intégrale sur un domaine borné Ω_c .
$\int_{\partial\Omega_c} ds$	Intégrale sur la frontière $\partial\Omega_c$ de Ω_c .
$\vec{n}_{\partial\Omega_c}$	Normale unitaire à $\partial\Omega_c$, extérieure à Ω_c .

Discrétisation:

\mathcal{T}_h	Partition discrète du domaine Ω_c considéré pour le calcul.
K	Elément de base de la partition \mathcal{T}_h .
Π	Volume de contrôle de masse (pour intégration de la continuité).
ω	Volume de contrôle de quantité de mouvement.
t	Indice de temporelle.

Partie structurée :

i, j, k	Notation indicielle classique des différences finies (localisation spatiale des variables et volumes de contrôle) .
$\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$	Pas d'espace concernant le volume $\Pi(i, j, k)$ (distance inter-vitesse).
$\Delta x_i^p, \Delta y_j^p, \Delta z_k^p$	Distance inter-pression suivant la direction Ox pour le volume $\omega_i(j, j, k)$ (respectivement Oy pour $\omega_j(j, j, k)$ et Oz pour $\omega_z(j, j, k)$).

Partie non-structurée :

$P0(K), P1(K)$	Espaces des fonctions polynomes respectivement constantes ou linéaires sur un élément K .
$mes(K), mes(S)$	Mesure d'un élément K ou d'une surface S ($mes(S)$ étant une longueur en 2D).
i, j, k, l	Indices de numérotation des faces variant de 1 à NFA (repérage des inconnues de vitesses et des volumes de QDM).
n_c, n_s	Indices de numérotation des éléments (n_c) variant de 1 à NT ou des sommets (n_s) variant de 1 à NS (repérage des volumes de masse).
n	Indice représentant la totalité des inconnues de pression (suivant le type de discrétisation, n varie de 1 à NT ($n = n_c$), 1 à NS ($n = n_s$) ou 1 à NS+NT ($n = n_c + n_s$)).
ϕ, ψ	Fonctions de formes discrètes représentant respectivement les inconnues de vitesses et de pression.
x	Variable de localisation spatiale (coordonnées d'un nœud).
\vec{S}_K^i	Surface normale à la face i , orientée extérieure à l'élément K .
\vec{S}_S^i	Surface normale à la face i (s'appuyant sur ses sommets), orientée suivant conventions liées aux éléments ayant la face i en commun.
\vec{S}_C^i	Surface normale s'appuyant sur les centres de gravité de chaque coté de la face i , orientée suivant conventions liées aux sommets de cette face (valable en 2D).

Abréviations :

VDF	Volumes Différences Finies, technique de type volumes finis sur un maillage structuré.
VEF	Volumes Eléments Finis, technique de type volumes finis sur un maillage non-structuré.

Introduction.

Ce travail, effectué au Laboratoire de Modélisation Thermohydraulique de Développement de Logiciels du CEA, a pour objet la simulation numérique d'écoulements de fluides incompressibles en milieu océanique.

Depuis plusieurs décennies, la modélisation numérique de la dynamique de l'océan représente un puissant outil de travail. A l'origine, elle a démontré son efficacité pour étendre, à des situations plus complexes, les modèles analytiques et les expérimentations de laboratoire développés pour comprendre les processus physiques mis en jeu. Actuellement, grâce aux augmentations constantes de la puissance de calcul des ordinateurs¹ et du flot de mesures disponibles², elle peut intervenir, de plus en plus efficacement, dans la simulation de phénomènes réalistes.

Physiquement, l'étude des mouvements océaniques concerne tous les états dynamiques possibles de la plupart des fluides incompressibles dits "industriels"³ (milieu non-linéaire, turbulent, instationnaire, inhomogène, avec prise en compte de géométrie complexe). Cependant, au niveau des équations du mouvement, les fluides océaniques subissent l'action d'un terme supplémentaire représentant l'entraînement du repère considéré par rapport à l'axe de rotation de la terre. Ce terme est communément appelé "force de Coriolis", il caractérise et conditionne le comportement dynamique des écoulements géophysiques en général. On parle également de modélisation "en milieu tournant".

Par ailleurs, il existe en milieu océanique, une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. Les mouvements à simuler concernent aussi bien des temps caractéristiques de l'ordre du millier d'années, pour des circulations à l'échelle du globe terrestre, que de l'ordre de quelques jours pour des phénomènes locaux de petites échelles (bassins d'une dizaine de kilomètres).

De plus, la profondeur ne dépasse que rarement les 6000 mètres et, globalement, les mouvements verticaux restent souvent très inférieurs à la dynamique horizontale. A grande et moyenne échelle, l'océan est donc généralement considéré comme une couche mince, quasi-bidimensionnelle, impliquant une forte anisotropie des mouvements.

1. L'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs concerne aussi bien la rapidité intrinsèque des processeurs et la capacité de leur taille mémoire que les nouvelles méthodes informatiques de calculs (calculs parallèles ou massivement-parallèles.)

2. Les observations in situ ou satellitaires fournissent de plus en plus d'informations précises, notamment sur la variabilité temporelle et spatiale des forçages dynamiques et thermodynamiques nécessaires aux simulations (techniques d'assimilation de données).

3. Par "fluides industriels" on considère les écoulements régis mathématiquement par les équations classiques de Navier Stokes et de transport de scalaires passifs ou à effets gravitaires.

Au niveau de la formulation des équations, ces contraintes physico-géométriques autorisent l'introduction d'hypothèses simplificatrices permettant de décrire l'évolution instationnaire des mouvements océaniques de grandes ou moyennes échelles. Dans les codes actuels les plus complexes⁴, l'échelle spatiale considérée vérifie correctement ces hypothèses. Toutefois, pour tous ces modèles, la difficulté majeure provient de l'interaction entre les différentes échelles et l'efficacité de leur paramétrisation numérique. En effet, de nombreux mouvements d'échelles spatiales réduites ont des effets sur les écoulements à plus grandes échelles, notamment au niveau des mélanges advectifs et convectifs ou de la description fine des écoulements engendrés par les topographies sous-marines et les contours côtiers.

Ainsi, dans le futur, il apparaît intéressant d'utiliser des modèles reposant sur des hypothèses capables de prendre en compte les interactions non-linéaires tridimensionnelles dans une gamme d'échelles la plus globale possible.

Notre travail d'investigation s'inscrit donc, en partie, dans cette perspective à long terme. A cet effet, nous avons adapté une technique de résolution des équations tridimensionnelles de Navier Stokes incompressibles, isothermes ou anisothermes, par une méthode de type "volumes finis", mise en œuvre sur des maillages discrets structurés (VDF). Par ailleurs, nous avons également utilisé un nouveau modèle de type volumes finis s'appliquant à des éléments discrets non-structurés (VEF). A l'instar des discrétisations de type éléments finis, cette dernière méthode discrète offre la possibilité de raffiner localement les maillages.

Ces techniques de volumes finis intègrent les équations de conservation sur un ensemble discret de volumes jointifs, appelés "volumes de contrôle", recouvrant totalement le domaine d'écoulement. La solution est ainsi approchée par ce système d'équations écrit sous forme "conservative" et par une caractérisation de la solution discrète⁵.

Initialement, les logiciels de calcul, sur lesquels nous nous sommes appuyés, ont été développés au CEA et dédiés aux modélisations de la thermohydraulique de fluides industriels, plutôt confinés et à faibles échelles isotropes.

Aussi, tout en leur conservant leur spécificité, nous avons adapté ces méthodes numériques et expérimenté leur comportement face aux sollicitations physico-numériques dues au contexte océanique de moyenne et grande échelle. Lors de cette étude de faisabilité générale, et devant l'étendue des développements et des possibilités d'application, nous avons validé ces adaptations sur des cas tests caractéristiques relativement simples et bien connus, afin de mieux qualifier et comparer la réponse des différents modèles.

Dans le chapitre initial, nous rappelons brièvement les équations physiques, les hypothèses et formulations numériques caractéristiques utilisées classiquement en modélisation

4. La complexité repose avant tout sur le nombre limité d'hypothèses prises en compte dans les équations tridimensionnelles du mouvement. Maintenant très répandues, les formulations aux "équations primitives" (ou modèles "PE") permettent, sans contraintes géographiques, de décrire les circulations océaniques tridimensionnelles en conservant l'influence et l'évolution instationnaire de différents scalaires (température, salinité). L'approximation la plus contraignante reste cependant l'hypothèse *hydrostatique* (cf. chapitre suivant).

5. Pour le modèle VEF, la représentation discrète des variables s'effectue dans des espaces de types éléments finis. Par contre, pour le modèle VDF, les différents bilans sont discrétisés par des schémas de types différences finies.

océanique. Nous indiquons également les spécificités mises en œuvre dans la formulation de type volumes finis pour résoudre les équations primitives du mouvement en variables vitesses, pression et température.

Par la suite, le mémoire est divisé en deux parties correspondant aux développements et aux tests effectués sur les deux types de discrétisations volumes-finis.

La première partie présente le principe discret du modèle “Volume Différences Finies” tridimensionnel (logiciel TRIO-VF). De plus, nous y précisons les modifications physico-numériques effectuées pour représenter des écoulements océaniques.

La réponse de ce modèle structuré concerne le comportement, sur le f -plan, d’un écoulement uniforme, homogène ou inhomogène, passant au dessus d’une topographie sous-marine isolée dans un bassin de moyenne échelle. Les résultats des différentes configurations sont notamment comparés à ceux obtenus par d’autres types de modèles numériques.

La deuxième partie décrit tout d’abord les développements plus fondamentaux dont a nécessité le modèle “Volume Eléments Finis” initialement élaboré par Emonot [21]. Nous y présentons les différentes corrections introduites en dimension deux pour augmenter l’ordre de la discrétisation de la variable représentant la pression. Ces modifications sont validées en retrouvant, sur le β -plan et en présence de forçages surfaciques caractéristiques, certains mécanismes élémentaires de circulation océanique de grande échelle.

Par la suite, nous présentons, également en dimension deux, l’implémentation et la validation d’un schéma d’advection de type MUSCL d’ordre deux.

Enfin, nous discutons de l’extension tridimensionnelle du modèle, des problèmes de l’élément de type tétraédrique utilisé et d’une alternative possible à cette description discrète.

La conclusion générale résume enfin les résultats positifs obtenus grâce aux développements entrepris et les limitations actuelles concernant les différents modèles. Par ailleurs, nous évoquons les principaux développements en cours ou à envisager et les perspectives qu’ils peuvent offrir à la simulation numérique des écoulements océaniques. Enfin, nous indiquons les types de tests intéressants pour lesquels la formulation volume fini utilisée pourrait, dès à présent, apporter une contribution complémentaire à l’étude de certains mécanismes dynamiques intervenant dans l’océan.

Généralités :

les modèles physico-numériques.

1 Equations de conservation.

La dynamique d'une particule fluide dans un milieu tournant à une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ se caractérise par plusieurs équations de conservation :

- L'équation de continuité.

Elle exprime le principe de *conservation de la masse* dans tout l'écoulement. Sous forme d'équation aux dérivées partielles, elle s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U}) = 0 \quad (0.1)$$

- L'équation de Navier Stokes.

Elle traduit la *conservation de la quantité de mouvement*. Pour un fluide Newtonien, on obtient, sous forme vectorielle :

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P_s + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot [\nu(\vec{\nabla} \vec{U})] + \vec{F}_{vol} \quad (0.2)$$

- L'équation de conservation de l'énergie.

Issue du 1^{er} principe de la thermodynamique, elle peut s'écrire, en fonction de la température, sous la forme :

$$\frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} T) + S_{vol} \quad (0.3)$$

Remarque:

L'équation d'évolution de la concentration d'un constituant secondaire (la salinité par exemple) s'exprime de la même façon que celle de l'énergie, en remplaçant la diffusivité α par celle de ce nouveau constituant.

2 Hypothèses et systèmes d'équations classiques.

En modélisation océanique, il existe plusieurs types de formulation basés sur les équations précédentes. Il n'est pas question ici de détailler de façon exhaustive ces modèles. Cependant, il peut être intéressant de montrer que, par un certain nombre d'hypothèses fondamentales caractéristiques de l'étude des courants océaniques, on parvient à tel ou tel systèmes d'équations à résoudre.

Nous avons donc choisi de rappeler les spécificités des formulations analytiques dites "*quasi-géostrophiques*" (QG) et "*aux équations primitives*" (PE). Précisons qu'il existe de nombreuses formulations intermédiaires (semi-géostrophiques, balanced-equations...) mais les modèles types QG et PE demeurent actuellement parmi les plus classiquement utilisés pour simuler l'évolution des mouvements océaniques tridimensionnels.

Par ailleurs, dans cette présentation puis dans la suite de notre travail, nous considérerons principalement la restriction de ces formulations à leur composante dite *barotrope*¹, sachant que l'objectif du travail est essentiellement d'ordre numérique et vise à examiner la faisabilité des méthodes présentées ultérieurement, pour aborder l'étude de la dynamique océanique.

2.1 Modèle quasi-géostrophique et ses dérivés.

Nous nous intéressons aux résultats principaux, aux approximations et aux différences sur lesquels se base le modèle analytique QG ainsi que le modèle Shallow-Water. Pour une formulation complète des équations, se reporter à : Pedlosky [49], Dumas [20] ou Branger [12].

Partant des équations tridimensionnelles de Navier Stokes et de conservation de la masse, ces modèles utilisent un système d'équations bidimensionnelles écrit sous forme vorticité-fonction de courant ou vorticité-fonction de transport. Pour la suite, nous précisons que les indices * représentent des variables ou des opérateurs adimensionnalisés.

2.1.a Le modèle quasi-géostrophique.

La formulation QG suppose diverses approximations résultant des échelles des phénomènes physiques à modéliser et de la nature des circulations océaniques à étudier. En effet, en définissant des échelles caractéristiques pour :

- la longueur L (de 100 à 1000 km),
- la profondeur D (≈ 4 km),
- la vitesse U (de 1 cm/s à 0.1 m/s),
- le temps $t_{car} = L/U$,

on admettra :

- la profondeur du bassin est "petite" devant sa longueur ($D/L \ll 1$). L'océan est une couche mince à l'échelle planétaire, c'est l'approximation *eau peu profonde*. En effet, on a typiquement D/L de l'ordre 0.04 à 0.004.

1. La composante barotrope concerne l'aspect hydraulique des mouvements océaniques, sans prise en compte des variations de la masse volumique, notamment par effets thermodynamiques.

- le nombre de Rossby $\epsilon = \frac{U}{f_0 L}$ est également "petit". Cette hypothèse, fondamentale pour les modèles de types QG, traduit le fait que la vorticité planétaire f_0 est supérieure à la vorticité relative U/L créée dans le domaine. Plus simplement, on dira que l'effet dynamique lié au paramètre de Coriolis f_0 est prépondérant sur l'effet inertiel généré dans le domaine. Pour un domaine situé aux latitudes moyennes où $f_0 \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$, ϵ varie classiquement entre 10^{-2} et 10^{-4} . Signalons que cette hypothèse n'est plus valable dans les zones équatoriales puisque f_0 tend vers zéro.
- la longueur du bassin L est petite devant le rayon de la terre R_T et ce rapport est de l'ordre du nombre de Rossby. Cette hypothèse est utile pour introduire l'approximation du β -plan (linéarisation du paramètre de Coriolis: $f = f_0 + \beta_0 y$) sur laquelle nous reviendrons ultérieurement. Elle est correctement vérifiée aux échelles moyennes mais pour des bassins de grandes échelles où les structures caractéristiques sont de l'ordre de 1000 km, elle devient discutable (ϵ vaut typiquement 0.001 alors que $L/R_T = 0.155$). Cette approximation sur la sphéricité est, cependant, traditionnellement utilisée dans ce type de modélisation.

En résumant la méthodologie et sans développer les calculs, rappelons les étapes qui permettent d'obtenir, à partir des équations (0.1) et (0.2) écrites en variables dimensionnelles u, v, w et P_s , un système d'équations simplifiées, généralement adimensionnel, portant sur la vorticité relative ξ^* et la fonction de courant Ψ^* .

- a. Utilisation de l'hypothèse eau peu profonde et de l'incompressibilité du fluide pour obtenir un système tridimensionnel simplifié (c'est l'équivalent des équations hydrauliques de la formulation PE dont nous reparlerons par la suite). On suppose de plus que la masse volumique reste constante par couche.
- b. Adimensionnalisation des variables du problème par les grandeurs caractéristiques U, L, D et t_{car} pré-définies puis développement des équations en fonction du paramètre de Rossby ϵ par la méthode des petits paramètres.
- c. A l'ordre 0 : détermination de l'approximation *géostrophique* traduisant l'équilibrage de la force de Coriolis par le gradient horizontal de pression. D'autre part, dans le fluide, l'écoulement horizontal est indépendant de z , et la vitesse verticale d'ordre 0 est nulle. Enfin, la propriété de champ de courant non-divergent permet d'introduire une fonction de courant Ψ^* .
- d. Avec l'ordre 1 : les développements conduisent à une équation prédictive sur la vorticité définie sur les vitesses adimensionnelles d'ordre 0. La connaissance de cette vorticité, moyennant la détermination de la vitesse verticale d'ordre 1, permet de calculer Ψ^* par la relation : $\xi^* = \Delta_h^* \Psi^*$.
- e. Intégration de l'équation de vorticité sur chaque couche et prise en compte de ces conditions limites (injonction de vorticité par forçage du vent en surface et diffusion par frottement au fond) par utilisation de la théorie de la couche d'Ekman. On détermine ainsi la vitesse w d'ordre 1.

Ces manipulations conduisent finalement à la formulation *quasi-géostrophique* qui, dans la restriction barotrope, peut s'exprimer sous forme adimensionnelle par le système bidimensionnel :

$$\frac{D_h^*}{D^* t^*} \left(\xi^* + \frac{\beta_0 L^2}{U} y^* + \frac{h(x, y)}{\epsilon D} \right) = \frac{\tau_0}{\rho f_0 U \epsilon D} \vec{k} \cdot \text{rot}^* \vec{\tau}^* - r \xi^* + \frac{\nu}{\epsilon f_0 L^2} \Delta_h^* \xi^* \quad (0.4)$$

$$\xi^* = \Delta_h^* \Psi^* \quad (0.5)$$

avec :

$h(x, y)$: variation de la hauteur du fond en mètres.

\vec{k} : vecteur unitaire vertical.

$\tau_0 \vec{\tau}^*$: contrainte du vent, de module τ_0 , appliquée à la surface.

r : paramètre adimensionnel caractéristique du frottement de fond.

Extension de la formulation QG.

Si nous nous attardons sur l'influence de la hauteur h_b d'éventuelles topographies, une analyse en ordre de grandeur montre que pour la formulation QG, cette hauteur relative maximale (h_b/D) doit être de l'ordre du nombre de Rossby, ou tout au moins $h_b/D \ll 1$. Cette nouvelle condition peut représenter une contrainte importante car elle implique que la formulation QG ne peut s'appliquer qu'à des topographies de faible amplitude vis à vis de la couche de hauteur D considérée. Il est toutefois possible de prendre en compte des hauteurs plus réalistes.

En effet, on peut améliorer la formulation précédente par l'introduction d'une fonction de transport Φ^* à la place de la fonction de courant. Ceci permet de relaxer la forte contrainte de non-divergence du champ de courant en considérant que ce n'est que le transport $H \vec{U}$ qui est à divergence nulle, avec $H = 1 - \frac{h(x, y)}{D}$. De fait, l'équation de la masse est vérifiée pour chaque colonne fluide au cours de son déplacement.

En reprenant l'intégration de l'équation prédictive sur la vorticité, cette extension de la formulation QG conduit au système :

$$\frac{D_h^*}{D^* t^*} \left(\xi^* + \frac{\beta_0 L^2}{U} y^* - \frac{\text{Log} H}{\epsilon} \right) = \frac{\tau_0}{\rho f_0 D U \epsilon H} \vec{k} \cdot \text{rot}^* \vec{\tau}^* - \frac{r}{H} \xi^* + \frac{\nu}{\epsilon f_0 L^2} \Delta_h^* \xi^* \quad (0.6)$$

$$\xi^* = \vec{\nabla}_h^* \cdot \frac{\vec{\nabla}_h^* \Phi^*}{H} \quad (0.7)$$

2.1.b Le modèle Shallow-Water.

Enfin, il est possible d'aborder le problème en partant de l'approximation *Shallow-Water*. Pour cela, on ne considère que l'hypothèse d'eau peu profonde ($L \gg D$) et la dénivellation de la surface libre est supposée négligeable devant la profondeur. Ainsi, en un point quelconque d'un fluide incompressible et homogène en milieu tournant f , l'équation de conservation de la vorticité potentielle s'écrit, sous forme dimensionnelle :

$$H \frac{D_h}{Dt} \left(\frac{\xi + f}{H} \right) = \nu \Delta_h \xi \quad (0.8)$$

On peut exprimer cette formulation de façon analogue aux précédentes en utilisant la linéarisation du paramètre de Coriolis f , les adimensionnalisations et en l'intégrant sur la tranche d'eau entre les deux couches limites d'Ekman de surface et de fond, comme pour le modèle QG. D'autre part, l'intégration de l'équation de continuité sur chaque colonne d'eau permet d'introduire également une fonction de transport Φ^* . Finalement, le modèle Shallow-Water peut s'écrire, sous forme adimensionnelle, par le système :

$$\frac{D_h^*}{D^* t^*} \left(\xi^* + \frac{\beta_0 L^2}{U} y^* - \frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{\tau_0}{\rho f_0 D U \epsilon H} \vec{k} \cdot \text{rot}^* \vec{\tau}^* - \frac{r}{H} \xi^* + \frac{\nu}{\epsilon f_0 L^2} \Delta_h^* \xi^* \quad (0.9)$$

$$\xi^* = \vec{\nabla}_h^* \cdot \frac{\vec{\nabla}_h^* \Phi^*}{H} \quad (0.10)$$

En définitive, la différence entre ces formulations repose sur la qualité de la prise en compte d'une éventuelle topographie. En effet, l'évaluation des effets instationnaires d'une topographie ne vérifiant pas forcément l'hypothèse $h_b/D \ll 1$ sera toujours minimisée dans le cas quasi-géostrophique par rapport à la formulation Shallow-Water (Branger [12], Nguyen [46]).

2.1.c Conditions limites.

Le calcul de ξ^* et Φ^* ou Ψ^* par ces différents systèmes, à l'intérieur d'un domaine, implique la connaissance de ces variables sur toute la frontière. Nous avons vu comment les frontières hautes et basses étaient traitées dans la formulation des modèles. Pour les frontières limitant l'espace horizontal du domaine, plusieurs solutions sont possibles. Ainsi, une condition de glissement à la paroi impose $\xi^* = 0$, une condition d'adhérence s'établit en annulant la dérivée normale de Φ^* ou Ψ^* à la paroi et une condition de Dirichlet en vitesse se fixe en imposant une constante à Φ^* ou Ψ^* sur les parois adjacentes afin de créer le gradient désiré (valable pour un domaine rectangulaire). Signalons également la possibilité de prendre en compte des frontières ouvertes à l'aide de conditions de radiations (Verron et Le Provost [56]).

2.1.d Modèles multi-couches.

Notons que ces formulations n'impliquent pas forcément que la densité ρ soit constante dans tout l'écoulement. L'étude de la prise en compte d'une stratification est actuellement souvent utilisée par l'intermédiaire de modèles dits "*multi-couches*" (Bernier [6], Le Provost [37]).

Pour cela, on suppose que l'océan est composé de N couches superposées de densité différente. Les équations de vorticité de chaque couche restent analogues à celles présentées précédemment. Il est toutefois nécessaire de compléter le système par des conditions de continuité de la pression entre les couches et de conservation de la masse à chaque interface. Il faut remarquer, enfin, que le terme représentant la tension du vent n'intervient que dans la couche supérieure. De même, l'effet de la variation éventuelle de la hauteur du fond ainsi que le terme de dissipation par frottement apparaissent uniquement dans la couche du fond.

2.2 Modèles aux équations primitives.

Bien que les modèles QG permettent de réaliser des études paramétriques détaillées avec des temps de calculs intéressants, il semble que certains processus océaniques ne puissent être correctement étudiés que dans un contexte général de circulation tridimensionnelle (suivi de l'écoulement autour des topographies, modélisation des zones équatoriales où le nombre de Rossby n'est plus défini, transport de scalaire).

2.2.a Hypothèses.

Comme le nom l'indique, les modèles aux équations primitives traitent "directement" les équations tridimensionnelles en variables pression-vitesses, afin de prendre en compte des mouvements allant des plus grandes échelles (échelles de la planète) aux plus petites (de l'ordre du millimètre).

En ce qui concerne les hypothèses associées à la formulation, elles sont aussi présentes mais de manière moins "fortes" que pour les modèles QG. En effet, généralement ces approximations sont également utilisées pour les modèles QG en amont des développements que nous venons de rappeler.

Quoiqu'il en soit, ces hypothèses ont pour but de faciliter l'intégration numérique en filtrant les mouvements qui influent peu ou pas sur la dynamique à grande échelle. L'objectif est, quoi qu'il en soit, de reproduire aussi fidèlement que possible la réalité de cette dynamique océanique. Ainsi, la plupart de ces modèles prennent en compte les diverses approximations suivantes.

L'hypothèse hydrostatique.

Elle résulte de l'analyse dimensionnelle des termes de l'équation de quantité de mouvement dans la direction verticale. A partir de l'hypothèse "eau peu profonde", pour laquelle l'échelle verticale D est supposée très inférieure à l'échelle horizontale L , les termes d'accélération $\frac{\partial w}{\partial t}$, d'advection $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} w$, de diffusion $\nu \Delta w$ ainsi que la composante verticale de la force de Coriolis sont négligés devant le gradient vertical de pression $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_s}{\partial z}$ et la pesanteur. Ainsi, cette équation prédictive pour la vitesse verticale w se réduit à une équation diagnostique pour la pression :

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (0.11)$$

Cette hypothèse n'est cependant plus valable lorsque les échelles verticales et horizontales deviennent du même ordre. En effet, elle ne permet plus, dans ce cas, la représentation explicite des mouvements verticaux d'advection et de mélange par diffusion turbulente.

L'hypothèse d'incompressibilité.

Cette hypothèse consiste à ne conserver dans l'équation de continuité (0.1) que le terme $\vec{\nabla} \cdot (\vec{U})$. Pour cela, les différences de densité sont supposées faibles et affectent peu le bilan de masse d'où :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot (\vec{U}) = 0 \quad (0.12)$$

L'hypothèse de Boussinesq.

Son utilisation permet de négliger les variations de masse volumique dans les équations horizontales de quantité de mouvement. On suppose donc que $\rho = \rho_0$, valeur moyenne constante. Cette approximation est notamment valable pour les écoulements océaniques car la masse volumique n'y varie que de quelques pour cent.

Ces variations sont toutefois conservées selon la verticale dans le terme représentant la force d'Archimède.

Pour obtenir cette masse volumique variable, différentes mises en œuvres sont possibles.

- La méthode la plus courante suggère l'utilisation d'une *fonction d'état* donnant ρ de manière diagnostique en fonction de la température, de la salinité, et même de la profondeur (Marti [43], Bryan et Cox [14], Freidrich et Levitus [24], Chartier [17]).
- Une autre méthode consiste à prendre en compte une équation pronostique de bilan d'énergie interne pour la masse volumique "perturbée", représentant la variation faible de ρ autour de ρ_0 . Cette équation d'évolution est analogue à celle utilisée pour la température (Nguyen [46]).

L'hypothèse du toit rigide.

Dans un modèle de circulation océanique, les ondes externes d'inertie-gravité sont un facteur limitatif du pas de temps d'intégration, en raison de leur propagation rapide. En effet, si nous considérons un domaine de 4000 m de profondeur, la vitesse de propagation c de telles ondes, calculées par $c = \sqrt{2gD}$, donne 280 ms^{-1} . La vitesse caractéristique des écoulements océaniques est donc au moins mille fois plus lente que celle des ondes externes d'inertie-gravité. Le pas de temps limite utilisable calculé par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy chuterait du même facteur.

Aussi, pour filtrer sélectivement ces ondes, la force de rappel gravitationnel est éliminée en annulant la vitesse verticale du fluide à la surface, soit :

$$w(x, y, z = 0) = 0 \quad (0.13)$$

Vis à vis de cette hypothèse, deux remarques s'imposent :

- Tout d'abord, l'élimination du déplacement de la surface libre par l'approximation du toit rigide n'est valable que lorsque la dénivellation de cette surface est petite devant la profondeur caractéristique. Pour un courant océanique, le rapport d'un pour mille justifie largement l'hypothèse.

Par contre, plus la profondeur prise en compte sera petite, plus l'effet dynamique lié à la variation de la dénivellation de la surface peut devenir important. Ainsi, dans les modèles où l'on s'intéresse à de plus faibles échelles (écoulements côtiers par exemple), il est nécessaire d'utiliser, à la place du toit rigide, une équation décrivant la variation et l'évolution de la surface libre et, de fait, d'introduire dans le système cette équation représentant les ondes de gravité (voir par exemple Lynch et Werner [41], [42] ou Freeman [23]).

- D'autre part, cette hypothèse fait apparaître une nouvelle variable : la pression de surface qui s'exerce sur le toit. Ne disposant pas d'équation de prédiction pour cette pression, elle est éliminée au niveau de la formulation PE en décomposant la résolution en deux parties (parties barotrope et barocline, cf. §2.2.c)

L'hypothèse du β -plan.

Cette approximation sur le calcul du paramètre de Coriolis n'est pas obligatoire dans les modèles PE, toutefois, elle est utilisée dans un grand nombre d'études paramétriques où l'échelle caractéristique L n'est pas trop importante. Elle permet de linéariser $f = 2\Omega \sin \phi$ suivant la latitude ϕ . En effet, en développant, en fonction d'une latitude ϕ_0 , le terme f en série de Taylor, on obtient :

$$f = 2\Omega \{ \sin \phi_0 + (\phi - \phi_0) \cos \phi_0 - 0.5(\phi - \phi_0)^2 \sin \phi_0 + \dots \}$$

En remarquant que $(\phi - \phi_0) = \frac{y}{R_T}$, si $\frac{y}{R_T}$ est petit, le paramètre f se linéarise en :

$$f = f_0 + \beta_0 y \quad (0.14)$$

avec :

- y la latitude variable dans le domaine,
- $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ si $\phi_0 = 45^\circ N$,
- $\beta_0 = \frac{2\Omega \cos \phi_0}{R_T} \approx 2.10^{-11} \text{ (m.s)}^{-1}$ si $\phi_0 = 45^\circ N$.

Nous retrouvons ici l'approximation sur la sphéricité $L/R_T \ll 1$, déjà discutée lors de la présentation de la formulation QG.

De plus, signalons que lorsque le domaine est dit de "mésos-échelle" ($L = \text{qq. centaines de km}$), il est courant de considérer l'hypothèse du f -plan, c'est-à-dire $f = f_0$ dans tout le domaine. On parle alors de "modélisation sur le f -plan". Ainsi, différents types de réponses dynamiques, engendrées par la force de Coriolis, peuvent être sélectionnés en utilisant ou pas l'effet du gradient de Coriolis β_0 suivant la latitude.

2.2.b Formulation : système d'équations PE.

Compte tenu de certaines de ces différentes approximations, le système d'équations simplifié à discrétiser se compose :

- de deux équations pronostiques de quantité de mouvement en u et v caractérisant l'écoulement horizontal \vec{U}_h :

$$\frac{D\vec{U}_h}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla}_h P_s - f \vec{k} \wedge \vec{U}_h + \vec{\nabla} \cdot [\nu (\vec{\nabla} \vec{U}_h)] + \vec{F}_{vol} \quad (0.15)$$

- d'une équation de continuité : $\text{div} \vec{U} = 0$, qui servira d'équation diagnostique pour la vitesse verticale w ,
- d'équations pronostiques de transport de type (0.3) pour chaque scalaire (et éventuellement pour ρ aussi),
- d'une relation diagnostique pour la pression (0.11),

- d'une équation d'état diagnostique pour la densité ρ (éventuellement pas d'équation d'état si ρ est une variable pronostique).

Le choix des conditions limites est généralement laissé très ouvert. Outre la condition de toit rigide (0.13), toutes les combinaisons entre conditions de type Dirichlet (variable imposée) ou de type Neuman (flux imposé) sont à priori possibles sur les différentes frontières.

2.2.c Spécificités de la technique de résolution.

Globalement, à partir de ce système d'équations, ces modèles vont tout d'abord résoudre les équations d'évolution temporelle concernant la vitesse horizontale puis celle des traceurs. De manière diagnostique, on en déduit ensuite la masse volumique par l'utilisation de l'équation d'état, la pression dynamique par l'approximation hydrostatique, et la vitesse verticale par l'équation de continuité.

Cependant, signalons que pour la plupart des modèles PE, il existe une particularité physique dans la manière de résoudre le mouvement horizontal. En effet, nous avons vu que l'hypothèse (0.13) du toit rigide fait apparaître dans les équations, une variable nouvelle, la pression de surface qui s'exerce sur le toit. Ne disposant pas d'équation de prédiction pour cette pression, elle est éliminée en décomposant la détermination de la vitesse horizontale totale de chaque pas de temps d'intégration en deux parties :

- une partie où l'on détermine la valeur moyenne de la vitesse horizontale suivant la direction verticale, c'est la vitesse barotrope,
- l'autre exprime la différence entre la valeur totale de la vitesse horizontale et la valeur moyenne précédemment définie, c'est la vitesse barocline. Soulignons que pour cette partie, cette dernière définition permet effectivement l'élimination de la pression de surface inconnue.

Pour résumer le principe de résolution découlant de cette décomposition, disons que la non divergence de l'écoulement barotrope permet d'introduire une fonction de courant Ψ dont dérive cette vitesse. En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation horizontale du mouvement barotrope, la pression de surface disparaît (le rotationnel d'un gradient est nul). En définitive, le calcul du mouvement barotrope consiste en la résolution d'une équation elliptique (système linéaire écrit en Ψ , ou en $\partial\Psi/\partial t$ suivant les modèles : Delecluse, Madec et al. [19], Nguyen [46]). Il est ainsi possible, moyennant certaines conditions limites sur Ψ ou $\partial\Psi/\partial t$, de calculer la partie barotrope de la vitesse horizontale.

Enfin, la vitesse horizontale totale est recomposée soit par le calcul explicite de la vitesse barocline résultant d'une intégration temporelle, soit en intégrant directement, en fonction du temps, la somme des accélérations de la vitesse barotrope et barocline.

2.3 Hypothèses sur les échelles sous-mailles.

2.3.a Modéliser la turbulence, généralités.

Dans toutes formulations impliquant notamment des termes non- linéaires, il y a nécessité de prendre en compte, par l'intermédiaire d'hypothèses de fermeture turbulente, l'influence physique des échelles "sous-mailles" non résolues sur les mouvements de plus

grandes échelles.

En effet, nous avons vu que les équations de Navier Stokes faisaient intervenir un terme de diffusion moléculaire ν . Ce terme, valable localement en milieu continu, devient négligeable en milieu discret devant les effets des mouvements caractéristiques des échelles inférieures à la maille élémentaire considérée. Il apparaît indispensable de diffuser correctement au niveau sous-maille afin d'éviter toute accumulation d'ensrophie susceptible de provoquer des instabilités non-physiques. Ainsi, la manière de paramétrer ces structures sous-maillages virtuelles est très importante puisqu'une petite erreur localisée aux petites échelles peut affecter, par interaction non linéaire, toutes les échelles de la modélisation, et notamment celles résolues (concept de transfert d'énergie inter-échelles, Lesieur [38]). Pour aborder d'un point de vue plus théorique ces interactions entre échelles, rappelons globalement quelques principes de turbulence.

Dans les équations de la dynamique, la prise en compte des structures fines se fait en décomposant la vitesse \vec{U} (mais également les scalaires T ou P_s) en deux composantes :

- une partie $\bar{\vec{U}}$ représentant l'écoulement moyen résolu par le modèle,
- une autre \vec{u}' caractérisant les fluctuations de \vec{U} autour de la valeur moyenne $\bar{\vec{U}}$.

L'introduction de cette décomposition statistique dans les équations de la dynamique (Lesieur [39]), conduit à l'évaluation de termes de corrélation du second ordre du type $\overline{(\vec{u}'\vec{u}')}$ dans les équations de la dynamique du premier ordre en $\bar{\vec{U}}$ (respectivement $\overline{(T'\vec{u}')}$ pour l'équation de transport d'un scalaire \bar{T}).

Ainsi, découlant de la moyenne statistique de l'équation de Navier Stokes (0.2), cette nouvelle équation est couramment appelée équation de Reynolds. En omettant les notations représentant l'écoulement moyen ($\vec{U} = \bar{\vec{U}}$), elle s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \overline{(\vec{u}'\vec{u}')} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P_s + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot [\nu(\vec{\nabla} \vec{U})] + \vec{F}_{vol} \quad (0.16)$$

Le même type de formulation peut être présenté pour l'équation de transport d'un scalaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot \overline{(T'\vec{u}')} = \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} T) + S_{vol} \quad (0.17)$$

La mise en œuvre d'une hypothèse de fermeture turbulente implique donc la paramétrisation, ou le calcul plus ou moins explicite, des termes $\overline{(\vec{u}'\vec{u}')}$ et $\overline{(T'\vec{u}')}$, appelés couramment tenseurs de Reynolds ou tenseurs sous-maille.

A partir de ces considérations, de nombreuses hypothèses et techniques se sont développées pour estimer les grandeurs caractéristiques de la turbulence liées à ces moments d'ordre deux. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces différentes techniques généralement utilisées en modélisation numérique industrielle (modèles k- ϵ : Grand [26], modèles de Simulations des Grandes Echelles: Fallon [22]). Précisons simplement que bien souvent, soit elles reposent sur des concepts de turbulence plus ou moins isotropes limitant leurs champs d'application, soit leur lourdeur (résolution de 2 à 7 équations de transport supplémentaires) implique des temps d'intégration très importants. Aussi, nous allons plutôt nous intéresser aux spécificités des paramétrisations des échelles sous-maillages dans le cadre des modélisations océaniques.

2.3.b Paramétrisation de la turbulence en océanographie.

Concernant la modélisation de la circulation océanique, l'objectif de la paramétrisation de la turbulence est toujours de dissiper l'enstrophie stockée à l'échelle de la maille élémentaire afin d'éviter "l'explosion" de la simulation et donc la divergence des calculs. Une hypothèse de fermeture turbulente classiquement adoptée, pas uniquement en océanographie d'ailleurs, conduit à l'utilisation du concept de *viscosité-diffusivité turbulente*, par analogie à la viscosité et la diffusivité moléculaire. En effet, cette approximation suppose que les tenseurs de corrélation des fluctuations à petites échelles sont proportionnels aux gradients des grandeurs moyennes, le coefficient étant assimilé à une viscosité (ν_t) ou une diffusivité (α_t) turbulente sous-maille. On écrit donc :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}'\vec{u}') = -\vec{\nabla} \cdot (\nu_t \vec{\nabla} \vec{U}) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (T'\vec{u}') = -\vec{\nabla} \cdot (\alpha_t \vec{\nabla} T) \quad (0.18)$$

Cette modélisation introduit donc une forme analogue à la dissipation moléculaire mais avec des coefficients de viscosité et de diffusivité turbulentes sous-maillages artificielles beaucoup plus importants que les valeurs moléculaires ν et α .

De plus, à cause de la différence entre les échelles horizontales et verticales, les lignes d'iso-densité (isopycnes) sont quasi-horizontales (loin des frontières). Ainsi, les gradients verticaux sont beaucoup plus forts que les gradients horizontaux. Les flux verticaux et horizontaux sont donc traités de façon anisotrope. Le flux total est scindé en deux et on introduit, suivant ces deux directions privilégiées, des coefficients de viscosité (ν_h, ν_v) et diffusivité (α_h, α_v) sous-maillages de valeurs différentes. Quantitativement, l'ordre de grandeur entre ces deux valeurs directionnelles donne typiquement $\nu_v/\nu_h \approx (D/L)^2 = 1.6 \cdot 10^{-4}$ pour $L=100$ km et $D=4$ km.

Dès lors, pour les deux équations pronostiques de mouvement horizontal \vec{U}_h traitées dans les modèles PE, le flux dissipatif turbulent F_T remplace le flux moléculaire $\vec{\nabla} \cdot [\nu(\vec{\nabla} \vec{U}_h)]$ et prend généralement la forme :

$$F_T(\vec{U}_h) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_v \frac{\partial}{\partial z} \vec{U}_h \right) + \nu_h \vec{\nabla}_h^2 \vec{U}_h$$

La formulation du flux turbulent pour l'équation de transport des scalaires est équivalente, en remplaçant ν_h, ν_v et \vec{U}_h par α_h, α_v et T . Pour les modèles de type QG, une viscosité sous-maille ν_h est également utilisée à la place de ν devant l'opérateur de diffusion horizontale $\Delta_h \xi$ (appelée aussi "diffusion latérale").

Il est bon de souligner que de nombreux modèles (QG ou PE) font intervenir ce type de paramétrisation sur des opérateurs du style $\vec{\nabla}_h^{2n}$. Pour $n=1$, nous retrouvons le laplacien Δ_h classique et $n=2$ correspond à un opérateur biharmonique. Pour mémoire, rappelons que la dissipation est d'autant plus concentrée aux échelles de troncature (échelles de la maille élémentaire), que n est grand. Cela signifie que l'opérateur bilaplacien est plus efficace que le laplacien au niveau des échelles dissipatives (Nguyen [46]). En effet, cette dissipation artificielle ne doit pas être trop forte pour que son influence sur la dynamique des échelles physiques résolues soit faible. Néanmoins, pour conserver la stabilité du modèle, il semble que la valeur $n=4$ soit une limite à ne pas dépasser.

Cependant, pour la modélisation de l'océan, ces modèles d'ordre supérieur peuvent poser des problèmes car la dissipation s'effectue principalement dans la couche de bord où il faut pouvoir et savoir traiter correctement les conditions limites mises en jeu.

Parmi les types de paramétrisation utilisés pour obtenir les coefficients sous-maillages, historiquement, le plus employé et le plus simple consiste à prendre chaque coefficient uniforme et constant. Cette modélisation est couramment utilisée par la plupart des modèles QG et par les modèles PE, notamment pour des simulations en milieu barotrope (coefficient de viscosité verticale ν_v négligeable et pas de coefficient de viscosité diffusivité car pas d'équation de transport de scalaire). Certains auteurs, par souci de simplification informatique, conservent cette paramétrisation en modélisation barocline pour les modèles PE (Bryan [13], Chartier [17], Nguyen [46]).

Cependant, en milieu barocline et en raison de la forte stratification de l'océan, il peut être judicieux de calculer les coefficients verticaux de viscosité et de diffusivité sous-maillages en fonction de la stabilité dynamique verticale de l'océan. Ainsi, il existe de nombreuses formes de paramétrisation de ces coefficients en fonction notamment de la profondeur (Weaver et Sarachik [58]) ou du nombre de Richardson local (Pacanowski et Philander [48]), nombre évaluant le rapport des forces stabilisantes de flottabilité sur les forces destabilisantes de cisaillement vertical.

D'autre part, nous rappelons que le nombre de Prandtl permet de relier les différentes viscosités et diffusivités turbulentes ($Prt = \nu_t/\alpha_t$). Ce nombre est généralement voisin de 1. Cependant, certains auteurs suggèrent une éventuelle variation de cette valeur suivant celle du nombre de Richardson local (Delecluse et al. [19]).

Signalons enfin que ces coefficients verticaux peuvent être le résultat de fermetures turbulentes, à priori plus efficaces dans la description de phénomènes physiques caractéristiques de certaines régions océaniques (comme par exemple les couches de mélange des régions équatoriales). En effet, ces fermetures utilisent notamment des équations pronostiques pour l'énergie cinétique turbulente ou la longueur de mélange, modélisant le transport des fluctuations turbulentes des vitesses (Blanke et Delecluse [7], Blumberg et Mellor [9]).

Quoiqu'il en soit, cette étape de paramétrisation est reconnue comme étant la plus délicate car ses conséquences sur la dynamique peuvent être importantes. Par ailleurs, si certains types de modélisation des coefficients turbulents sous-maillages trouvent leur justification (par mesures in-situ ou études numériques), leur validité est généralement soumise à un domaine de variation. Il est donc bien souvent difficile d'ajuster proprement ces coefficients puisque leur calcul et leur validité reposent généralement sur des considérations caractérisant la physique d'un domaine ou d'une région océanique particulière (paramètres ajustables ou constantes spécifiques).

3 Hypothèses retenues et formulations du système.

3.1 Hypothèses.

Comme nous l'avons rappelé lors de l'introduction, notre objectif est de tester l'adaptation, à la description d'écoulements océaniques, de la technique de résolution des équations de Navier Stokes par des méthodes de types Volumes-Finis. De fait, cette technique de résolution nous impose quelques contraintes quant à la mise en œuvre de certaines des hypothèses classiquement admises en modélisation océanographique et décrites précédemment.

Cependant, certaines approximations sont conservées telles quelles, dont :

- *l'incompressibilité* (0.12),
- *le toit rigide* (0.13),
- *la modélisation du β -plan* (0.14).

De même, *l'hypothèse de Boussinesq* est utilisée pour permettre une variation de la densité suivant la direction verticale et conserver, suivant l'horizontale, une densité constante ($\rho_h = \rho_0$). La variation de ρ intervient en tant que force de volume dans l'équation verticale de quantité de mouvement et s'écrit :

$$\vec{F}_{vol} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \vec{g} \quad (0.19)$$

La masse volumique ρ variant faiblement autour de ρ_0 , nous pouvons exprimer, en première approximation, la fonction d'état par une variation linéaire du type :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_t (T - T_0)) \quad (0.20)$$

avec :

- β_t la dilatabilité thermique,
- T_0 la température de référence.

Cette approximation peut paraître grossière, mais elle est suffisante pour nos études. Ainsi, la force de flottabilité, représentant le couplage entre l'équation de la température et la dynamique de l'écoulement donne :

$$\vec{F}_{vol} = \beta_t (T - T_0) \vec{g} \quad (0.21)$$

Notons que la prise en compte du couplage avec une équation de transport supplémentaire consiste simplement à rajouter, à la force de volume, la contribution correspondante (par exemple du type $\beta_s (S - S_0) \vec{g}$ si S est la salinité).

En ce qui concerne *la modélisation des échelles sous-mailles*, l'hypothèse de viscosité turbulente est retenue (0.18). De plus, la forte anisotropie des coefficients de dissipation turbulente induite par le facteur d'échelle entre les directions horizontales et verticales, nous oblige également à conserver la séparation du traitement des flux diffusifs.

Par ailleurs, la dissipation nécessaire à nos calculs pourra éventuellement prendre une autre forme. Nous avons vu, lors de la présentation des modèles QG bidimensionnels, qu'un autre type de dissipation que celui dû au terme visqueux pouvait intervenir. En effet, le terme de frottement de fond induit également une dissipation. Aussi, par analogie aux formulations QG, nous prendrons en compte, le cas échéant, un processus de dissipation similaire à une perte de charge. Cette modélisation, utilisée essentiellement lors de la description d'écoulements bidimensionnels horizontaux (Partie II), peut être assimilée à une force de volume supplémentaire et, à ce titre, intégrée dans le terme \vec{F}_{vol} . Dans le cas bidimensionnel horizontal, elle s'écrit sous la forme :

$$\vec{F}_{frot} = -k_{fr} \vec{U}_h \quad (0.22)$$

avec :

- k_{fr} le coefficient de frottement de fond (ou de perte de charge).

Enfin, *l'approximation hydrostatique*, bien qu'elle repose sur des bases physiques, n'est pas applicable pour notre formulation. En effet, nous ne pouvons pas numériquement éliminer le terme d'inertie $\frac{\partial w}{\partial t}$ de l'équation verticale de quantité de mouvement puisqu'il participe à l'élaboration d'un système en pression, cœur de notre principe de résolution. Nous précisons lors des chapitres consacrés aux modèles numériques comment ce système est généré.

De fait, nous prenons l'option de conserver a priori une équation verticale de quantité de mouvement complète (inertie, non-linéarité et diffusion) sachant que, suivant les échelles de la modélisation, certains termes seront vraisemblablement négligeables.

3.2 Formulations.

3.2.a Formulation vectorielle.

Découlant de l'incompressibilité, l'équation de continuité est donc donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (0.23)$$

Nous reformulons l'équation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement (0.2) en utilisant :

- l'approximation du β -plan,
- la conséquence (0.21) de l'approximation de Boussinesq,
- la modélisation des échelles sous-maîles,
- l'expression du terme non linéaire $\vec{U} \vec{\nabla} \vec{U}$ sous la forme $\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \otimes \vec{U})$, sous condition de divergence nulle de la vitesse,
- la pression modifiée P (somme des pressions statiques et hydrostatiques) et le tenseur unité I_d .

On obtient alors :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\vec{U} \otimes \vec{U} - \nu_v \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} - \nu_h \vec{\nabla}_h \vec{U} + \frac{P}{\rho_0} I_d] = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} + \beta_t(T - T_0)\vec{g} + \vec{F}_{vol} \quad (0.24)$$

De même, l'équation de l'énergie, sans terme source, s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [T\vec{U} - \alpha_v \frac{\partial T}{\partial z} - \alpha_h \vec{\nabla}_h T] = 0 \quad (0.25)$$

Le système à résoudre, formé de ces trois équations vectorielles en variables \vec{U} , P et T , peut se ranger dans la catégorie des modèles aux équations primitives.

Cependant, par rapport aux modèles PE classiquement utilisés et a fortiori vis à vis des modèles de types QG, nous constatons que notre formulation révèle un "degré de primitivité" supérieur. En effet, nous allons traiter le mouvement vertical de la même manière que le mouvement horizontal, sans prise en compte "forte" de l'hypothèse liée à la différence entre les échelles (pas d'approximation hydrostatique, juste séparation des flux diffusifs).

De plus, la résolution de ces mouvements se réalise "simultanément", par l'intermédiaire d'un système numérique concernant la pression P (cf. chapitres suivants). Contrairement à la formulation PE, nous n'obtiendrons donc pas la composante verticale de la vitesse par une équation diagnostique.

Au niveau des conditions limites, les possibilités sont les mêmes que pour les modèles PE classiques.

3.2.b Formulation conservative.

Enfin, nous pouvons également aborder la formulation du système précédent sous forme *conservative*. Si nous intégrons ces trois équations (0.23), (0.24) et (0.25) sur un domaine borné continu Ω_c de frontière $\partial\Omega_c$, l'utilisation du théorème de Gauss² nous permet de reformuler le système en :

$$\int_{\partial\Omega_c} \vec{U} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (0.26)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right) dV = & - \int_{\partial\Omega_c} \left[\vec{U} \otimes \vec{U} - \nu_v \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} - \nu_h \vec{\nabla}_h \vec{U} + \frac{P}{\rho_0} I_d \right] \cdot \vec{n} \, ds \\ & + \int_{\Omega_c} [-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} + \beta_t(T - T_0)\vec{g} + \vec{F}_{vol}] dV \end{aligned} \quad (0.27)$$

$$\int_{\Omega_c} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dV = - \int_{\partial\Omega_c} \left[T\vec{U} - \alpha_v \frac{\partial T}{\partial z} - \alpha_h \vec{\nabla}_h T \right] \cdot \vec{n} \, ds \quad (0.28)$$

où :

- \vec{n} est le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega_c$, orienté extérieur à Ω_c ,

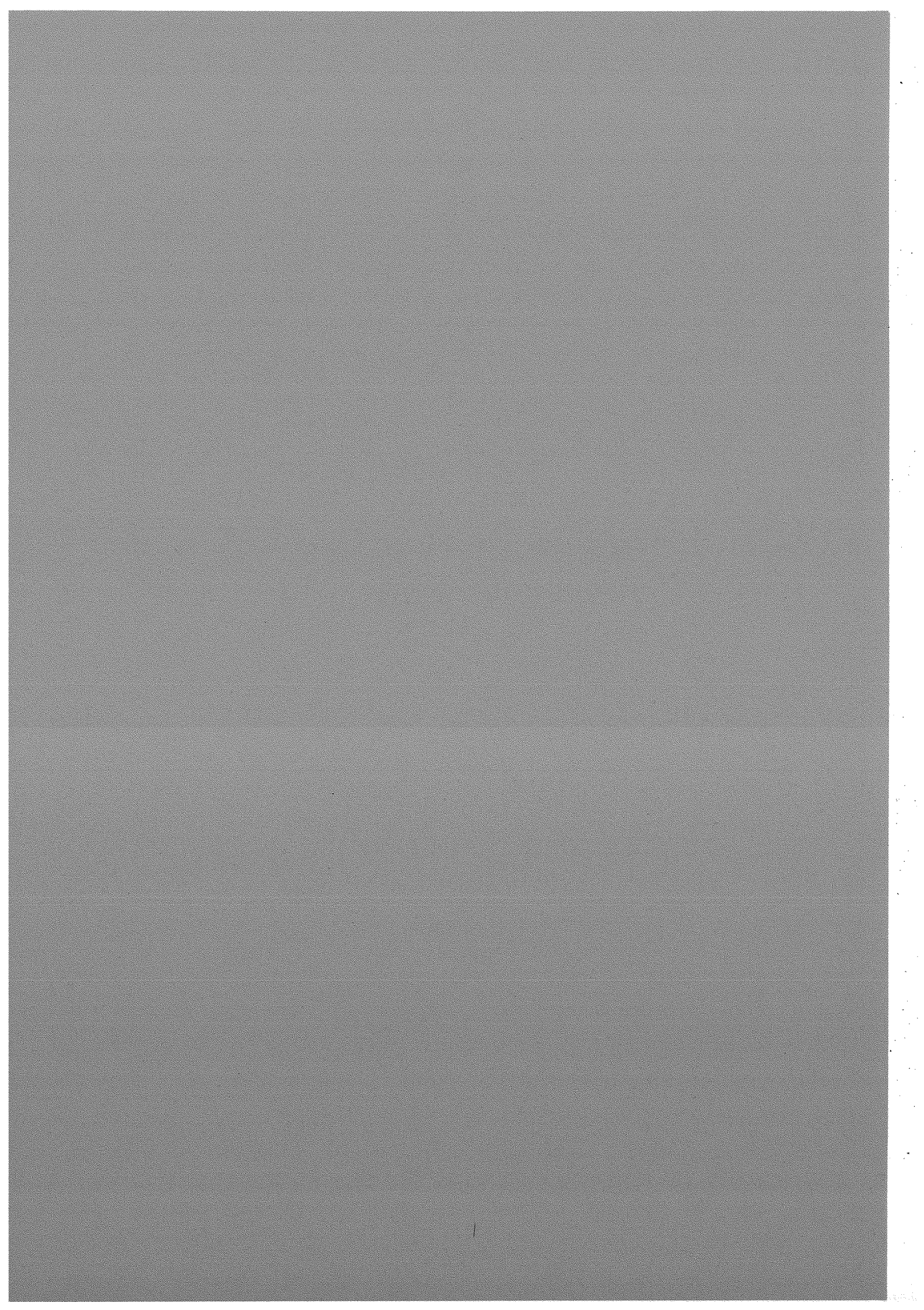
2. ou théorème de la divergence ou plus généralement formule de Green, voir annexe.

- dV et ds représentent respectivement les mesures des éléments de volume et de surface (on conservera cette notation même en 2D où dV et ds deviennent respectivement des éléments de surface et de longueur).

Cette formulation intégrale du système est plus directement orientée vers le principe des méthodes des *Volumes finis* puisque les intégrales sur la frontière $\partial\Omega_c$ représentent des flux, introduisant ainsi une notion de bilan sur les éléments de discrétisation du domaine Ω_c .

Première partie

Le modèle numérique Volumes
Différences Finies, maillage
structuré.



chapitre I.1

Principe et développements numériques.

Intégrées par le théorème de Gauss sur un domaine borné Ω_c quelconque, les équations continues de conservation (0.26), (0.27) et (0.28) vont être discrétisées tout d'abord par une technique numérique de type Volumes Différences Finies (notée également "VDF").

1.1 Principe numérique, rappels.

1.1.1 Modèle VDF structuré, le code TRIO-VF.

Précisons tout d'abord la signification de l'appellation "VDF structuré". L'aspect "*volumes finis*" consiste à approcher la solution continue en variables \vec{U} , P et T d'un système d'équations aux dérivées partielles par une solution discrète, en se donnant une partition \mathcal{T}_h du domaine Ω_c . On associe, à chaque élément K de \mathcal{T}_h appelé couramment "volumes de contrôle", des inconnues discrètes. Les différents flux de conservation sont ainsi évalués sur la frontière de chaque élément K .

Le terme "*structurés*" indique que la partition \mathcal{T}_h est effectuée par l'intermédiaire de volumes parallélépipédiques, dont les faces sont orthogonales aux axes de coordonnées (rectangulaire en deux dimensions). Dans notre cas, les coordonnées sont cartésiennes. La représentation discrète tridimensionnelle des variables est indicée classiquement en i, j, k . Enfin, les flux aux frontières des volumes de contrôle s'expriment par des développements de Taylor tronqués, de manière similaire aux descriptions de type "*différences finies*".

Pour certains opérateurs, la représentation discrète VDF reste équivalente à celle des différences finies. Cependant, grâce à l'intégration sous forme de bilan, la méthode VDF offre la possibilité d'utiliser une notion de "porosité" surfacique et volumique permettant la prise en compte de volumes et de surfaces d'échange partiellement obstrués.

Cette technique VDF est mise en œuvre dans le logiciel de calcul thermohydraulique tridimensionnel monophasique TRIO-VF, développé au CEA (Barthel et Villand [5]). Nous avons donc utilisé et adapté cet outil afin de décrire des écoulements océaniques.

1.1.2 Représentation et distribution spatiale.

Le modèle VDF se caractérise tout d'abord par son type de distribution spatiale des variables discrètes sur un élément K de \mathcal{T}_h . En effet, toutes ces variables discrètes ne

sont pas évaluées au même point, nous utilisons la technique du *maillage entrelacé* où il apparaît différentes partitions du domaine. La figure I.1.1 permet de localiser, pour une cellule $K(i, j, k)$ donnée, ces volumes de contrôle et la position des variables discrètes. Vis à vis de ces variables et des équations de conservation associées, deux types de volumes entrelacés sont considérés :

- les variables scalaires (pression P_{ijk} , température T_{ijk} ...) sont évaluées au centre A_0 du volume de contrôle $\Pi(i, j, k)$, équivalent au volume $K(i, j, k)$, servant à l'évaluation des bilans de masse (0.26) et des équations de transport (0.28),
- les composantes u_{ijk} , v_{ijk} , et w_{ijk} de la vitesse \vec{U}_{ijk} sont estimées sur les faces du volume $\Pi(i, j, k)$, au centre respectif A_i , A_j , et A_k de leur volume de contrôle $\omega_i(i, j, k)$, $\omega_j(i, j, k)$ et $\omega_k(i, j, k)$. Sur ces volumes entrelacés, on effectue donc les bilans des projections suivant les axes O_x , O_y et O_z de l'équation de quantité de mouvement (0.27).

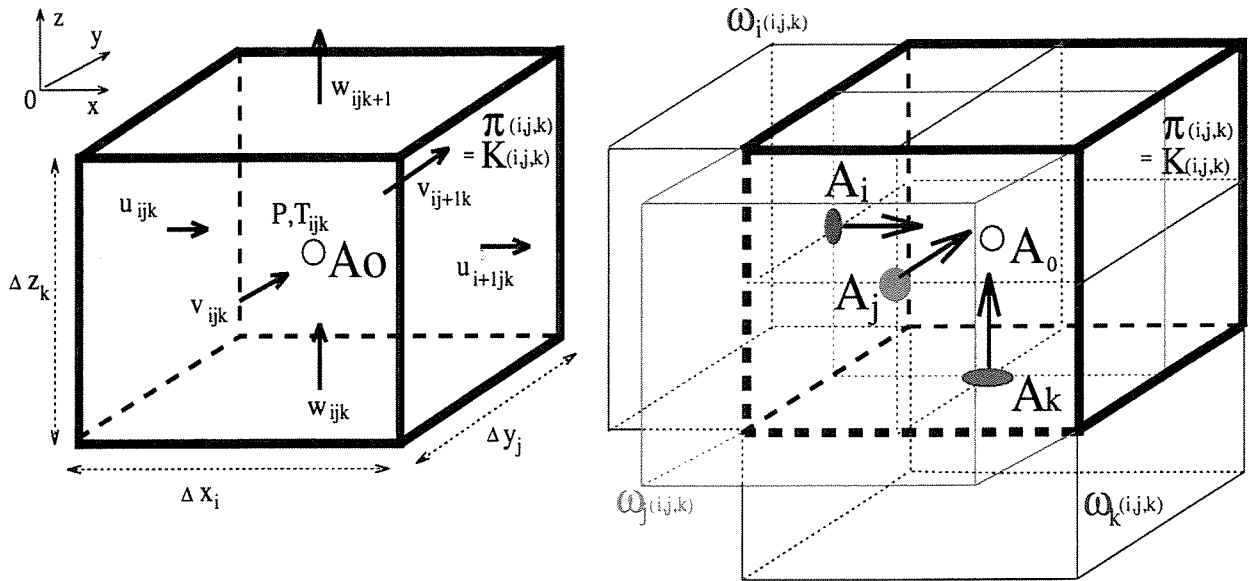


FIG. I.1.1 - Position des variables discrètes associées au volume de masse $K(i, j, k)$, localisation des volumes de QDM entrelacés $\omega_i(i, j, k)$, $\omega_j(i, j, k)$ et $\omega_k(i, j, k)$.

Notons que ce type de grille, appelé couramment "grille C", correspond à la distribution des variables de calcul pour la méthode aux différences finies utilisée classiquement par les modèles PE en simulation océanique. A cet égard, citons le modèle OPA (Delecluse, Madec et al.[19]) qui se sert d'un type de grille tridimensionnelle entrelacée similaire. D'autres modèles conservent horizontalement cette grille mais paramétrisent la direction verticale avec d'autres types de coordonnées (modèle SPEM, Nguyen [46] : coordonnées σ avec discrétisation semi-spectrale, modèle MICOM, Bleck et Boudra [8] : coordonnées isopycnales).

Quoiqu'il en soit, tous les auteurs s'accordent à dire que la grille C, à condition que la résolution discrète soit suffisante, offre une bonne précision numérique, notamment concernant la propagation des ondes planétaires basses-fréquences (Chartier [17]), phénomène susceptible de nous intéresser également.

1.1.3 Technique de résolution des équations.

La seconde caractéristique du modèle concerne le type de solveur du système d'équations. Cette technique n'est pas spécifique au type de discrétisation utilisée et elle est relativement courante dans les modèles volumes finis incompressibles.

Le principe de résolution est dérivé de la méthode SOLA développée initialement par Hirt, Nichols et Romero [28]. Schématiquement, et sans spécifier la discrétisation, la démarche consiste à écrire de manière "implicite" le gradient de pression dans les trois équations de quantité de mouvement (0.27) projetées. De même, l'équation de continuité (0.26) est également décrite implicitement.

En combinant quantité de mouvement et continuité, les vitesses inconnues au temps $t + 1$ issues d'un schéma d'avance temporelle sont éliminées. On obtient un système linéaire relatif à la pression, dont les coefficients de la matrice sont uniquement liés à la géométrie des éléments K et dont le second membre est notamment constitué des différents flux et autres forces de volumes évalués explicitement sur les frontières ou à l'intérieur des volumes ω_i , ω_j et ω_k .

Remarques :

- L'obtention de ce système linéaire en pression peut également être décrite par une autre approche. Il est possible de parler de cette technique comme étant un schéma de projection de l'accélération, indépendant de l'opérateur choisi pour la discrétisation temporelle (Emonot [21]).

En effet, la combinaison évoquée précédemment, consiste en fait à appliquer l'opérateur discret *divergence* à l'équation (0.27). Par ce schéma de résolution, la pression est mathématiquement appelée : *le multiplicateur de Lagrange de la contrainte à la divergence nulle de la vitesse*. Autrement dit, pour conserver la masse, ce système impose à la pression d'intégrer, par son gradient, toute variation de la dérivée temporelle de la vitesse $\partial \vec{U} / \partial t$ ne vérifiant pas $\vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{U} / \partial t) = 0$. Cette variation est assurée, à chaque pas de temps, par l'évaluation explicite des flux et des forces de volumes dans l'équation de quantité de mouvement (0.27).

Une description plus formelle de ce schéma général de résolution figure dans l'annexe A.

- En conséquence, la pression n'a plus forcément le sens physique habituel. Ce rôle particulier permettra de comprendre l'effet et les contraintes de la force de Coriolis sur la pression et son gradient, puisque justement, la prise en compte de Coriolis dans les équations du mouvement n'est pas à divergence nulle.
- Enfin, dans ce type de résolution, la connaissance de la pression de surface au dessus du toit rigide n'est pas nécessaire à la mise en œuvre du système linéaire et à son inversion.

1.2 Schémas et modifications numériques.

Nous n'allons pas décrire le détail du codage discret de l'intégration des équations tridimensionnelles de conservation sur leur volume de contrôle respectif, ceci étant disponible dans la référence [5]. Par contre nous allons présenter les modifications numériques implantées dans le code initial et nécessaires à la représentation d'écoulements océaniques. D'autre part, nous précisons les schémas discrets des opérateurs mis en œuvre pour le calcul des différents flux dans les équations de quantité de mouvement, mais, par souci de simplification, principalement dans un cas bidimensionnel horizontal (cf. figure I.1.2) et sans l'utilisation de porosité. La généralisation au cas tridimensionnel ou au calcul des flux dans l'équation de transport de la température s'appuie sur le même type de démarche discrète et ne pose donc pas de difficulté supplémentaire.

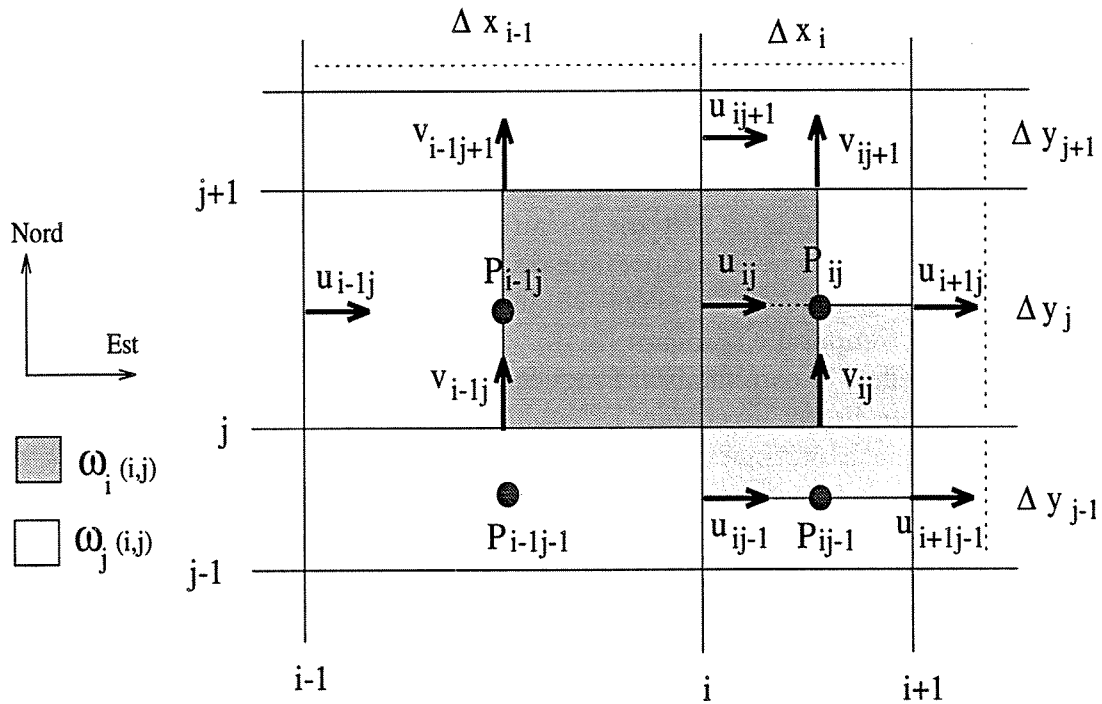


FIG. I.1.2 - Localisation des variables discrètes sur un plan horizontal.

1.2.1 Extensions physiques : force de Coriolis.

Après projection du terme $\int_{\omega} -2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} dV$ suivant les trois directions du repère terrestre en rotation, nous conservons uniquement les composantes de la force de Coriolis intervenant dans les équations horizontales de quantité de mouvement (0.27),¹ sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i} \frac{\partial u}{\partial t} dV &= \int_{\omega_i} f v dV + \dots \int_{\partial \omega_i} (\text{advec.}, \text{diff.}, \text{pression}) ds \\ \int_{\omega_j} \frac{\partial v}{\partial t} dV &= \int_{\omega_j} -f u dV + \dots \int_{\partial \omega_j} (\text{advec.}, \text{diff.}, \text{pression}) ds \end{aligned}$$

1. La composante verticale de la force de Coriolis peut être dynamiquement négligée vis à vis de la pesanteur g et horizontalement, la contribution dépendant de la vitesse verticale est également éliminée.

où f est calculé par l'approximation du β -plan (0.14) : $f = f_0 + \beta_0 y$. Discrètement, f_j est évalué au centre des différents volumes de contrôle de masse $K(j)$ (au niveau des nœuds de pression).

En tenant compte du maillage entrelacé, les valeurs discrètes, utilisées pour exprimer u sur un volume ω_j et v sur un ω_i , sont déterminées explicitement par une moyenne des contributions des quatres composantes u entourant v (respectivement v entourant u).

A partir de la figure I.1.2, la discrétisation de ces contributions pour une position i, j s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i(i,j)} f v dV &= f_j \left(\frac{v_{i-1j+1} + v_{ij+1} + v_{ij} + v_{i-1j}}{4} \right) \times \Delta y_j \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}{2} \\ \int_{\omega_j(i,j)} -f u dV &= - \left(f_j - \frac{\beta_0 \Delta y_i}{2} \right) \left(\frac{u_{ij} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{i+1j-1}}{4} \right) \times \Delta x_i \frac{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})}{2} \end{aligned} \quad (\text{I.1.1})$$

1.2.2 Schémas temporels.

En modélisation d'écoulements géophysiques, les schémas d'avance temporelle d'ordre un, comme le schéma d'Euler (ou Forward) utilisé classiquement dans TRIO-VF, sont généralement écartés à cause de leur faible précision et de leur mauvaise stabilité numérique vis à vis de la force de Coriolis. Même un schéma d'ordre deux comme celui de Runge-Kutta, également disponible dans la version standard de TRIO-VF, a montré son insuffisante stabilité, dans ce type de modélisation, pour des intégrations à long terme (Sanchez [52]).

En raison de leurs grands nombres (Young [59]), la liste des schémas d'avance temporelle susceptibles d'être implantés dans TRIO-VF ne saurait être close. Quoiqu'il en soit, nous avons voulu tester un type de méthode explicite couramment utilisé en modélisation numérique océanique et relativement simple à mettre en œuvre dans TRIO-VF. Ainsi, nous avons implanté, dans le code initial, le schéma d'avance temporelle "*leap-frog*".

1.2.2.a Le schéma leap-frog.

L'équation à intégrer peut se ramener à la simple équation différentielle partielle du type :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Theta(\vec{x}, t) = F(\Theta) \quad (\text{I.1.2})$$

où Θ est dans notre cas soit u , v , w ou même T , et t désigne le temps.

Pour la résoudre, le schéma leap-frog se présente de la manière suivante :

$$\Theta^{t+1} - \Theta^{t-1} = 2\Delta t \times F(\Theta^t) \quad (\text{I.1.3})$$

C'est un schéma explicite, d'ordre deux et à trois niveaux². Il est conditionnellement stable, il doit respecter le critère de Courant-Freidrich-Lewy (CFL) et sa mise en œuvre informatique est relativement simple.

Néanmoins, il existe un inconvénient gênant à son utilisation, c'est l'apparition d'un mode

2. calcul du niveau temporel discret ($t + 1 = t + \Delta t$) à partir des niveaux (t) et ($t - 1 = t - \Delta t$)

numérique stable. Il a même été remarqué (Arakawa et Lamb [2]) que l'application du schéma leap-frog à un problème non-linéaire avait tendance à amplifier ce mode numérique. Ce problème semble être imputable à la discrétisation même du schéma qui conduirait à une divergence de la solution en deux modes totalement séparés (pair et impair). Il est donc nécessaire d'éliminer ce mode numérique d'une manière peu coûteuse informatiquement, tout en déformant le moins possible le mode physique (solution approchée de la solution vraie cherchée).

1.2.2.b Éliminations du mode numérique.

Il existe plusieurs solutions pour supprimer ce mode numérique. Tout d'abord, il est possible de recoller les deux modes en appliquant périodiquement un schéma convenable, par exemple un schéma à deux niveaux comme le schéma d'Euler (Bryan [13]) du type :

$$\Theta^{t+1} - \Theta^t = \Delta t \times F(\Theta^t) \quad (\text{I.1.4})$$

Des comparaisons ont été faites par Nguyen [46], avec une autre variante du leap-frog, le schéma *leap-frog trapézoïdal*. C'est un schéma à trois niveaux de type *prédicteur-correcteur* dont le principe est le suivant :

$$\begin{aligned} \Theta^* - \Theta^{t-1} &= 2\Delta t \times F(\Theta^t) \\ \Theta^{t+1} - \Theta^{t-1} &= \Delta t \times (0.5 \times F(\Theta^t) + 0.5 \times F(\Theta^*)) \end{aligned} \quad (\text{I.1.5})$$

Il est conditionnellement stable et il fournit un amortissement efficace des erreurs numériques. Les comparaisons indiquent notamment que l'utilisation du schéma leap-frog trapézoïdal seul conduit à une meilleure rentabilité en terme de "temps de calcul/ temps physique" que l'utilisation du schéma leap-frog classique avec insertion périodique d'un pas de leap-frog trapézoïdal.

Enfin, l'application à chaque pas de temps d'un *filtre temporel* (Delecluse et al. [19]), associé au schéma leap-frog, donne une procédure qui amortit correctement les fréquences parasites introduites par le schéma leap-frog. Cependant, l'utilisation du filtre dégrade la précision du schéma du deuxième au premier ordre. Ce filtre temporel de type Robert-Asselin (Asselin [3]) est défini par :

$$\Theta_c^{t-1} = \Theta^{t-1} + \gamma \times (\Theta_c^{t-2} - 2\Theta^{t-1} + \Theta^t) \quad (\text{I.1.6})$$

avec γ , le paramètre du filtre (en général, $0.01 \leq \gamma \leq 0.1$). Le schéma leap-frog associé peut alors s'écrire :

$$\Theta^{t+1} - \Theta_c^{t-1} = 2\Delta t \times F(\Theta^t) \quad (\text{I.1.7})$$

1.2.2.c Choix adopté.

Concernant la description hydraulique, nous avons décidé, après différents essais, d'utiliser le filtre Asselin, associé au schéma leap-frog. Il nécessite le stockage informatique supplémentaire d'un seul nouveau champ de variables (Θ^{t-1}). Il en est de même pour l'implémentation de la procédure liée au filtre Asselin (champ Θ_c^{t-2} à stocker). De plus,

dans sa manière de recoller les deux modes numériques, l'application du filtre temporel à chaque pas de temps reste une procédure relativement régulière et continue. En effet, vis à vis de notre type de résolution, chaque insertion périodique d'un pas de temps d'Euler s'accompagnait d'un léger choc sur l'évolution temporelle des variables. D'autre part, l'implémentation du schéma leap-frog trapézoïdal demeure, vis à vis de notre technique d'inversion du système en pression, beaucoup moins évidente et sa mise en œuvre nécessite deux fois le calcul de la fonction F (estimation et correction) dont le coût calcul peut s'avérer relativement cher.

Pour l'équation de transport de la température, nous conservons le schéma d'avance temporelle d'Euler du premier ordre.

1.2.3 Schéma de diffusion.

Rappelons que nous avons choisi de modéliser la turbulence anisotrope océanique par des coefficients de viscosité et de diffusivité constants et uniformes sur un opérateur de type laplacien. Sur chaque volume de quantité de mouvement pour les vitesses ou de masse pour les scalaires, l'évaluation du flux associé à cette modélisation se ramène à la discrétisation explicite d'un gradient sur chaque face des volumes de contrôle respectifs (équation 0.27) par un schéma de type différence finie. Le flux diffusif total concernant chaque variable est ainsi constitué de la somme des différents flux discrétisés sur les faces de son volume de contrôle.

Pour illustrer cette discrétisation dans notre cas structuré, réexprimons le flux diffusif lié à la première composante u de la vitesse \vec{U} sur son volume de contrôle bidimensionnel ω . Nous avons donc à discrétiser :

$$\int_{\omega} \nu_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dV = \int_{\partial\omega} \nu_h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_y \right) ds$$

avec n_x et n_y les composantes du vecteur normal et unitaire, orientées vers l'extérieur de ω . Dans notre cas structuré, nous aurons toujours $n_x = 1$ sur les faces *est* et -1 sur les faces *ouest*, $n_y = 1$ sur les faces *nord* et -1 sur les faces *sud*.

Nous considérons, par exemple, l'expression du flux discret concernant la variable u_{ij} sur son volume $\omega_i(i, j)$. Par rapport à la figure I.1.2, la contribution discrète de chaque flux diffusif directionnel $FD^x(u_{ij})$ suivant x et $FD^y(u_{ij})$ suivant y s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} \nu_h \sum_{\partial\omega_i(i,j)} (FD^x(u_{ij})) &= \nu_h \left(\left(\frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{\Delta x_i} \right) - \left(\frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{\Delta x_{i-1}} \right) \right) \Delta y_j \\ \nu_h \sum_{\partial\omega_i(i,j)} (FD^y(u_{ij})) &= \nu_h \left(\left(\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \right) - \left(\frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})} \right) \right) \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2} \end{aligned}$$

En tenant compte de la division par le volume total issu de la discrétisation temporelle, on remarque que cette intégration de type volume fini est équivalente à la discrétisation centrée classique de type différence finie de l'opérateur laplacien (sur trois points).

1.2.4 Schémas de convection et d'advection.

Les flux non linéaires de convection ou d'advection, à discrétiser explicitement sur les faces d'un volume de contrôle peuvent s'exprimer de manière générique sous la forme :

$$FC(\varphi_{te}) = \int_{\partial\omega_{te}} [(u_{ta} \cdot \varphi_{te}) \cdot n_x + (v_{ta} \cdot \varphi_{te}) \cdot n_y + (w_{ta} \cdot \varphi_{te}) \cdot n_z] ds$$

φ_{te} représente soit u , v , w ou T et définit la propriété transportée sur les différentes faces de leur volume par les vitesses transportantes u_{ta} , v_{ta} et w_{ta} normales à ces faces.

L'évaluation discrète des vitesses transportantes ne pose en général pas de problème. Dans le cas du flux concernant la température, ces vitesses sont connues par construction des volumes de contrôle. Pour les flux de quantité de mouvement, elles sont obtenues par moyenne des deux vitesses entourant la face considérée.

Par contre la détermination de φ_{te} par une simple interpolation linéaire centrée conduit à des oscillations numériques non acceptables rendant ce type de schéma très instable. Une solution consiste à utiliser une interpolation décentrée. La valeur de φ_{te} est choisie en amont, d'après le signe de la vitesse transportante à la face.

Suivant ce principe, TRIO-VF dispose d'un schéma du premier ordre (*upwind*). Considérons plus particulièrement, à titre d'illustration, le flux concernant la vitesse discrète u_{ij} sur la face *est* du volume $\omega_i(i, j)$ (figure I.1.2). Les approximations discrètes de u_{ta} et de φ_{te} sur cette face s'exprimeront par :

$$\varphi_{te}^{est}(u_{ij}) = \begin{cases} u_{ij} & \text{si } u_{ta}^{est} = \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2} \geq 0 \\ u_{i+1j} & \text{si } u_{ta}^{est} = \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2} < 0 \end{cases} \quad (I.1.8)$$

Ce type de schéma est cependant à proscrire pour des écoulements où les non-linéarités sont prépondérantes car il introduit une dissipation numérique non négligeable. Cette viscosité numérique peut dans certains cas engendrer une diffusion perturbant le transport ou le développement de structures tourbillonnaires.

Aussi, il est possible d'utiliser dans TRIO-VF un schéma convectif et advectif d'ordre supérieur : le schéma QUICK. Ce schéma du troisième ordre (Léonard [34]) consiste en une interpolation quadratique sur trois points (2 en amont et 1 en aval) de la variable transportée φ_{te} . Des problèmes d'oscillations numériques potentielles sont éliminés par l'utilisation de filtres (*Sharp* pour l'hydraulique et *Fram* pour les scalaires). Des précisions sont apportées en annexe mais la référence [31] présente en détail la mise en œuvre de ce type de schéma pour le logiciel TRIO-VF.

1.2.5 Conditions limites.

1.2.5.a Condition de frontière ouverte.

Position du problème.

Pour retrouver certains phénomènes dynamiques de faible échelle spatiale, il est nécessaire de mettre en œuvre des domaines de simulations où les limites sont totalement ou partiellement des frontières fluides. Ainsi, pour l'étude du comportement du champ tourbillonnaire en présence de diverses excitations ou forçages, la présence de phénomènes advectifs impose l'application de conditions de sortie libre adéquates.

Une de nos applications a mis en évidence la nécessité d'une prise en compte plus fine de la sortie libre du domaine. En effet, les premières modélisations utilisaient des conditions de type Neuman en pression, ou de type Dirichlet, soit sur la pression, soit sur la vitesse. Elles ont montré la création et l'amplification de fortes instabilités sur la frontière (réentrée de fluide importante), conduisant même à la divergence du calcul. Une condition de type périodique pourrait être une alternative, mais elle ne permet pas l'intégration à long terme (recirculation des structures advectées en entrée).

Constatant l'existence d'une interaction et d'un couplage importants entre la dynamique locale, notamment aux frontières, et la circulation générale dans le domaine, il paraît indispensable d'implémenter dans le code une condition limite de sortie libre s'adaptant à la prise en compte de la force de Coriolis et garantissant une advection correcte des structures, sans perturbation de la dynamique générale interne au domaine.

Condition de radiation, formulation d'Orlanski.

Un grand nombre d'auteurs se sont penchés sur ces problèmes. Mais globalement, les types de conditions aux frontières les plus classiques ayant donné les meilleurs résultats sont soit des formules d'extrapolations, soit l'utilisation de conditions de radiation de Sommerfeld. Des études comparatives, entreprises notamment par Miller et Thorpe [45] et Chapman [16], tendent à montrer la supériorité des conditions de radiation au niveau précision. Verron et Le Provost [56] ont utilisé avec succès une adaptation de cette condition de radiation lors de calculs d'écoulements océaniques barotropes dans un modèle QG. De même, Verron [57] a obtenu des résultats très corrects en la réutilisant dans un modèle océanique QG bi-couche (prise en compte des effets baroclines). Enfin, Nguyen [46] l'a également adaptée dans un modèle océanique PE barotrope et barocline.

La condition de radiation de Sommerfeld est la base de la formulation utilisée pour évaluer des variables sur une frontière. Elle stipule que la variation de toute variable Θ sur une frontière peut s'exprimer sous la forme d'une équation d'onde de type :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + C_{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{I.1.9})$$

La direction n représente la direction perpendiculaire à la frontière au point considéré et C_{Θ} , la vitesse de phase, est une vitesse de propagation.

Pour évaluer ces variables à la frontière, Orlanski [47] a proposé une discrétisation de cette équation spatio-temporelle selon des schémas explicites d'ordre 2.

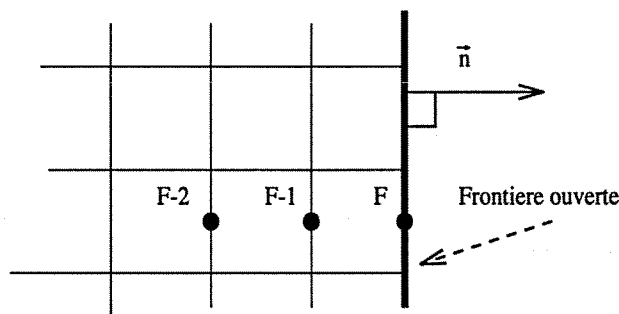


FIG. I.1.3 -

En se basant sur les notations et l'orientation de la frontière de la figure I.1.3, la discrétisation

tisation de l'équation I.1.9 donne donc :

$$\frac{\Theta_F^{t+1} - \Theta_F^{t-1}}{2\Delta t} + C_\Theta \frac{\Theta_F^{t+1} + \Theta_F^{t-1} - 2\Theta_{F-1}^t}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{I.1.10})$$

La détermination de la vitesse de phase C_Θ permettra de calculer la valeur limite Θ_F recherchée au temps $t + 1$. Pour cela, on applique à nouveau cette formulation discrétisée au point $F - 1$ précédent de la frontière et au temps $t - 1$:

$$\frac{\Theta_{F-1}^t - \Theta_{F-1}^{t-2}}{2\Delta t} + C_\Theta \frac{\Theta_{F-1}^t + \Theta_{F-1}^{t-2} - 2\Theta_{F-2}^{t-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{I.1.11})$$

En supposant que la vitesse de propagation soit constante entre les points $F - 1$ et F , nous obtenons une vitesse adimensionnelle de la forme :

$$V_\Theta = C_\Theta \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Theta_{F-1}^{t-2} - \Theta_{F-1}^t}{\Theta_{F-1}^t + \Theta_{F-1}^{t-2} - 2\Theta_{F-2}^{t-1}} \quad (\text{I.1.12})$$

La substitution de V_Θ dans I.1.11 détermine Θ_F^{t+1} , soit :

$$\Theta_F^{t+1} = \frac{1 - V_\Theta}{1 + V_\Theta} \Theta_F^{t-1} + \frac{2V_\Theta}{1 + V_\Theta} \Theta_{F-1}^t \quad (\text{I.1.13})$$

L'expression de Θ_F^{t+1} est non-linéaire et fait intervenir 3 niveaux temporels sur 2 pas d'espace.

Pour assurer la stabilité numérique, la vitesse de propagation C_Θ doit être inférieure au CFL ($\Delta x / \Delta t$), de fait, théoriquement $V_\Theta \leq 1$. En pratique, si $V_\Theta > 1$, on prend $V_\Theta = 1$, ce qui correspond à la plus grande vitesse numérique possible. Cette condition impose :

$$\Theta_F^{t+1} = \Theta_{F-1}^t \quad (\text{I.1.14})$$

De même, la valeur $V_\Theta \leq 0$ indiquera que l'écoulement est rentrant ou plutôt qu'une perturbation sort du domaine. On choisira alors, pour valeur limite, $V_\Theta = 0$. Il vient donc :

$$\Theta_F^{t+1} = \Theta_F^{t-1} \quad (\text{I.1.15})$$

Cette dernière condition montre que la frontière conserve une "mémoire" de l'évolution des conditions initiales, évolution engendrée par le passage d'éventuelles perturbations. Néanmoins, ce cas limite où $V_\Theta = 0$ peut être source d'instabilités. En effet, les études menées par Verron [57] sur un modèle QG à 2 couches ont montré qu'il était préférable d'extrapoler la variable Θ_F^{t+1} sous la forme :

$$\Theta_F^{t+1} = 2\Theta_{F-1}^{t-1} - \Theta_{F-2}^{t-1} \quad (\text{I.1.16})$$

Cette évaluation lui a permis d'éviter le maintien d'éventuelles erreurs numériques sur Θ_F^{t-1} , notamment dans le cas où la perturbation se déplace tangentiellement à la frontière.

Mise en oeuvre pour TRIO-VF.

L'application de cette condition de frontière ouverte ne dispose d'aucune théorie, tant au niveau du modèle numérique que du type de maillage mis en oeuvre. De plus, l'évolution aux frontières des variables concernées dépend fortement de la dynamique du problème étudié. Nguyen a adapté cette formulation sur un maillage entrelacé de type C. Ainsi, bien que les méthodes numériques de résolution soient assez différentes, l'adaptation pour TRIO-VF est envisageable.

Les variables Θ que l'on peut déterminer aux frontières considérées sont, dans notre cas : la pression, la température et les vitesses u , v , w . Comme l'a souligné Nguyen, en raison du maillage entrelacé, la vitesse de propagation V_Θ est déterminée de manière indépendante pour chaque variable. Pour une frontière, cela nécessite le stockage de chaque valeur sur trois pas d'espaces, aux instants t , $t-1$, et $t-2$. Connaissant toutes ces valeurs discrètes perpendiculaires à la frontière, il suffit d'appliquer la formulation d'Orlanski en chaque point de cette frontière afin d'extrapoler la variable considérée.

Le problème est de définir, en fonction du calcul des différents flux à la frontière et vis à vis du maillage entrelacé, la localisation des variables à évaluer ou à réévaluer par Orlanski. Cette localisation est illustrée sur la figure I.1.4 dans le cas où la frontière ouverte est définie sur le bord *est* du domaine.

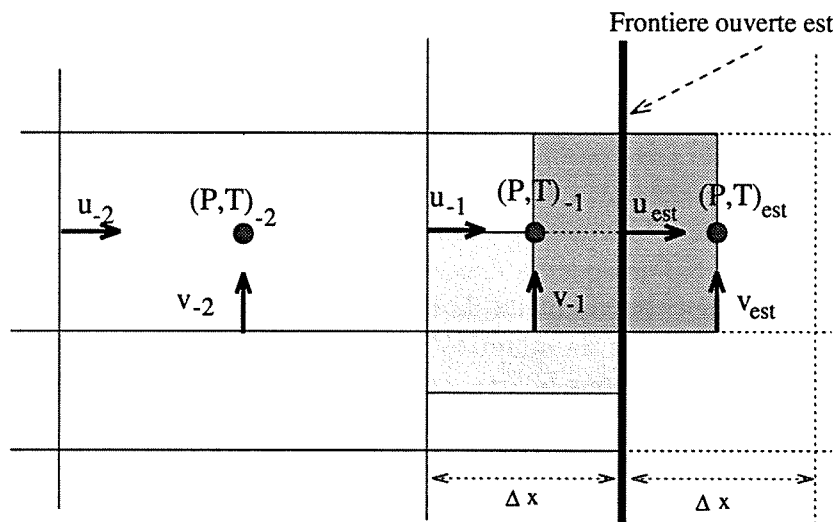


FIG. I.1.4 - Localisation des variables pour le maillage entrelacé VDF au niveau de la frontière est.

La formulation d'Orlanski est appliquée aux variables de la frontière en début de boucle temporelle. Les vitesses u_{est} , v_{est} sont ainsi extrapolées afin de fournir des conditions de Dirichlet au calcul des différents flux de quantité de mouvement concernant les variables internes (u_{-1} , v_{-1}). Le scalaire T_{est} joue le même rôle, pour les flux diffusifs et advectifs concernant la face *est* du volume de contrôle affecté à la variable T_{-1} .

Nous pourrions nous arrêter ici puisque ces vitesses permettent de fermer le système. En pratique, nous avons observé, dans cette configuration, des instabilités. En effet, la vitesse u_{est} évaluée par Orlanski n'est pas forcément à divergence nulle sur toute la face *est*. Aussi, nous avons redéterminé la valeur de u_{est} dans l'équation de Navier Stokes par l'intermédiaire du système en pression. Pour cela, la pression P_{est} est également extrapolée

par la formulation d'Orlanski et permet d'évaluer explicitement une partie du gradient de pression dans le second membre affecté à la vitesse u_{est} :

$$\frac{u_{est}^{t+1}}{2\Delta t} = \frac{P_{-1}^{t+1}}{\Delta x} + \left(\frac{u_{est}^{t-1}}{2\Delta t} - \frac{P_{est}}{\Delta x} + Flux(diff, conv) \right) \quad (I.1.17)$$

Ainsi, la contrainte de divergence nulle concernant u_{est} est prise en compte par la détermination de P_{-1} lors de l'inversion du système linéaire en pression. Cette double séquence d'évaluation de u_{est} par Orlanski pour obtenir une condition de Dirichlet, puis de correction de u_{est} par l'équation de Navier Stokes peut paraître redondante mais cette configuration nous donne, dans la pratique, les meilleurs résultats.

Quoiqu'il en soit, cette description d'une frontière ouverte semble conserver certaines limites. En effet, lorsque l'intensité des structures à évacuer augmente, Nguyen a montré, pour son modèle PE, que cette condition limite, caractérisant la propagation d'une onde progressive, n'était plus forcément capable de représenter correctement le phénomène. Aussi, l'utilisation d'une "couche tampon", dans laquelle on dissipe numériquement les structures, peut permettre une évacuation sans perturbation parasite. Lors de nos essais, la frontière ouverte a correctement joué son rôle, sans intervention d'une dissipation numérique supplémentaire. Cependant, son application à une gamme différente d'intensité tourbillonnaire et de propagation d'ondes reste à tester.

1.2.5.b Conditions limites classiques et initialisation.

Conditions limites.

Un grand nombre de conditions limites classiques sont envisageables dans TRIO-VF (glissement, non glissement, vitesses, pression ou gradient de pression imposés, flux de chaleur diffusif ou convectif imposé, paroi adiabatique...). En océanographie, certaines conditions aux limites sont plus spécifiquement définies et utilisées.

Flux à la surface : la condition de toit rigide impose $w = 0$ à la surface, et dans le cadre de forçage par un flux de quantité de mouvement dû à une tension de vent $\vec{\tau}_s(x, y, t)$, on injecte ce flux donné sous la forme d'un flux explicite dû à la viscosité turbulente verticale s'effectuant à travers la face haute des volumes de contrôle des variables u et v définis sous la surface. Cette condition non standard pour TRIO-VF nécessite une procédure spécifique. Par contre, la prise en compte d'un flux de chaleur diffusif imposé en surface est possible.

Glissement sans frottement : appliquée à une frontière, cette condition impose à la composante normale de la vitesse d'être nulle. De plus, les frottements tangentiels à la paroi sont également imposés nuls. Pour réaliser la condition de toit rigide, on peut imposer ce type de condition.

Non glissement : la composante normale de la vitesse est également nulle et la vitesse tangentielle permet de calculer le cisaillement à la paroi. On calcule donc un flux diffusif fonction de la vitesse tangentielle, de la distance à la paroi et du coefficient de viscosité adéquat. A cause du maillage entrelacé, cette condition ne peut être exacte dans le domaine. Aussi, remarquons qu'en l'absence de viscosité, la condition de non glissement est équivalente à la condition de glissement. On parle de "condition faible" car un seul degré de liberté est réellement imposé.

Frottement de fond : l'application d'une condition de glissement avec frottement de fond est fréquemment utilisée en océanographie. Le gradient vertical de la vitesse horizontale

caractérisant cette diffusion se paramétrise souvent par une fonction de la vitesse correspondante. On remplace donc la paramétrisation de ce flux par une dissipation volumique concernant les vitesses horizontales internes proches de la paroi. Une modélisation type “ $-k_{fr}\vec{U}_h$ ”, souvent utilisée par les modèles QG, a été mise en œuvre. Elle provoque ainsi une dissipation stabilisante, analogue à une perte de charge locale.

Procédures d’initialisation.

Nous partons généralement avec un écoulement au repos et, pour la thermique, la spécification d’une stratification stable donnée.

Dans le cas de conditions limites hydrauliques où la mise en mouvement du fluide réalisée n’affecte que des domaines “fermés” (conditions de glissement ou d’adhérence), il n’y a pas de problème d’initialisation.

Par contre, les valeurs initiales nécessaires à l’extrapolation des variables à la frontière ouverte par la formulation d’Orlanski sont susceptibles de générer des perturbations durant la phase transitoire. En effet, la force de Coriolis et la stratification imposent au gradient de pression un équilibre spécifique (équilibre géostrophique et barocline). Afin d’intégrer correctement en sortie ces phénomènes intervenant dès les premiers pas de temps, des procédures de montées en régime hydrauliques ont été implémentées pour initialiser des écoulements en entrée (*spin-up* du type $U_0 \tanh(t/t_0)$ sur un temps t_0). Elles permettent ainsi à la condition de frontière ouverte de prendre en compte l’influence de l’équilibre géostrophique de manière moins brutale. De même, en présence de stratification, le premier pas de temps est réalisé avec une condition de type périodique afin d’évaluer et d’initialiser, conformément à l’équilibre barocline, les valeurs de pression aux instants $t - 1$ et $t - 2$ pour la condition d’Orlanski.

1.2.6 Stabilité.

Les termes convectifs et diffusifs étant discrétisés explicitement, il en résulte une limitation du pas de temps de calcul. L’analyse de Fourier donne une expression du pas de temps optimum à utiliser. Ce pas de temps est calculé dans TRIO-VF au début de chaque itération temporelle.

1.2.6.a Condition de Courant-Friedrich-Lewy.

Cette condition (CFL) permet de formuler une exigence sur la stabilité du pas de temps en relation avec la vitesse calculée discrètement. Physiquement, elle assure que la vitesse ne puisse pas “sauter” une maille au cours d’un pas de temps d’intégration. Autrement dit, on interdit à la vitesse numérique (typiquement $\Delta x/\Delta t$) de devenir supérieure à la vitesse du calcul. Dans le cas tridimensionnel structuré, le CFL peut s’écrire comme une moyenne harmonique des CFL dans la maille suivant les trois directions, soit :

$$\Delta t_{conv} = \frac{1}{\max \left[\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]} \quad (\text{I.1.18})$$

Notons que ce résultat provient de l’analyse d’une équation discrétisée par un schéma temporel d’Euler et un schéma spatial décentré amont du premier ordre (Upwind). Cette

condition n'est pas suffisante avec l'utilisation de schémas plus précis, comme le Quick. Pour éviter certaines oscillations numériques, il est recommandé de réduire le pas de temps d'un facteur d'au moins 2 (Léonard [34]), le calcul du CFL étant dans ce cas relativement délicat car très dépendant de la nature non-linéaire locale de l'écoulement.

1.2.6.b Terme de diffusion.

Le même type d'analyse de Fourier pour le schéma de diffusion permet de définir une stabilité sur le pas de temps de diffusion :

$$\Delta t_{diff} = \frac{1}{\max \left[2\gamma_h \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + 2\gamma_v \left(\frac{1}{\Delta z^2} \right) \right]} \quad (\text{I.1.19})$$

avec $\gamma_h = \max(\nu_h, \alpha_h)$ et $\gamma_v = \max(\nu_v, \alpha_v)$.

Signalons, de plus, que l'utilisation du schéma temporel leap-frog avec une discrétisation spatiale centrée du terme diffusif au temps intermédiaire t est notoirement reconnue, dans la littérature, comme instable (Dumas [20], Chartier [17]). Le terme de diffusion est donc discrétisé au pas de temps $t-1$. Ainsi, le schéma temporel vu par l'opérateur diffusif reste un schéma de type Euler.

La condition généralisée de stabilité s'exprime alors par :

$$\Delta t_{calcul} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta t_{conv}} + \frac{1}{\Delta t_{diff}}} \quad (\text{I.1.20})$$

1.2.6.c Estimation d'un pas de temps, influences physiques.

Avec l'utilisation du schéma temporel leap-frog, il est préférable d'utiliser des pas de temps fixes afin d'assurer une avance temporelle relativement régulière. Ainsi, il peut être judicieux d'avoir une estimation des pas de temps envisageables en fonction de la physique mise en œuvre lors du calcul. Ces évaluations de stabilité dépendent énormément de la physique du problème considéré. Elles ne proviennent pas directement de l'étude discrète d'un opérateur en rapport avec celle de l'opérateur temporel. Toutefois, il est toujours possible, d'après le critère du CFL, d'imposer, à la plus rapide célérité d'un phénomène physique connu, une limitation en rapport avec la vitesse numérique caractéristique ($\Delta x/\Delta t$). L'incompressibilité filtre l'onde sonique et l'hypothèse du toit rigide l'onde externe d'inertie-gravité. Cependant, en océanographie, deux principaux types de mouvements ondulatoires sont susceptibles d'influencer la stabilité numérique des simulations effectuées et donc le choix d'un pas de temps.

- Le premier concerne la propagation de l'onde interne de gravité (haute-fréquence) générée par la présence d'une stratification et dépendante de la qualité discrète du milieu spatial et l'intensité de cette stratification.
- Le deuxième s'applique à la propagation de différentes ondes planétaires basses-fréquences dépendantes notamment de la force de Coriolis (influence du β -plan) et des dimensions du domaine (Branger [12]).

Nous reviendrons sur ces aspects lors des applications concernées.

1.2.7 Système linéaire, résolutions et algorithme.

En définitive, l'évaluation des différents flux concernant les vitesses sur leur volume de contrôle de quantité de mouvement respectif permet de formuler discrètement le système tridimensionnel sous la forme générique :

$$\frac{u_{ijk}^{t+1}}{2\Delta t} = SMX_{ijk}^{t, t-1} - \frac{P_{ijk}^{t+1} - P_{i-1jk}^{t+1}}{\Delta x_i^p} \quad (\text{I.1.21})$$

$$\frac{v_{ijk}^{t+1}}{2\Delta t} = SMY_{ijk}^{t, t-1} - \frac{P_{ijk}^{t+1} - P_{ij-1k}^{t+1}}{\Delta y_j^p} \quad (\text{I.1.22})$$

$$\frac{w_{ijk}^{t+1}}{2\Delta t} = SMZ_{ijk}^{t, t-1} - \frac{P_{ijk}^{t+1} - P_{ijk-1}^{t+1}}{\Delta z_k^p} \quad (\text{I.1.23})$$

$$\frac{T_{ijk}^{t+1}}{\Delta t} = SMT_{ijk}^t \quad (\text{I.1.24})$$

Les termes SMX , SMY et SMZ représentent les flux diffusifs, convectifs et les termes sources connus aux temps t ou $t - 1$. Remarquons que le gradient de la pression intégré en volumes finis structurés redonne, après division par le volume issu de l'intégration temporelle, un schéma de type différence finie.

L'équation de continuité intégrée sur son volume de masse sous la forme :

$$\begin{aligned} & (u_{i+1jk}^{t+1} - u_{ijk}^{t+1}) \Delta y_j \Delta z_k + (v_{ij+1k}^{t+1} - v_{ijk}^{t+1}) \Delta x_i \Delta z_k + \\ & (w_{ijk+1}^{t+1} - w_{ijk}^{t+1}) \Delta x_i \Delta y_j = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.25})$$

permet, en utilisant les équations I.1.21, I.1.22 et I.1.23, d'obtenir un système tridimensionnel et linéaire concernant la pression pouvant s'écrire matriciellement :

$$E^0 P^{t+1} = DSM^{t, t-1} \quad (\text{I.1.26})$$

Les composantes de la matrice DSM sont ainsi calculées par la divergence discrète, sur chaque volume de masse, des différents seconds membres SMX , SMY et SMZ des équations de quantité de mouvement. La matrice E^0 obtenue ne dépend que des grandeurs géométriques (coefficients du type surface carré sur volume). C'est une matrice creuse (hepta-diagonale), symétrique et définie positive. Elle est assemblée, suivant le type de résolution, en début de programme.

Les méthodes destinées à l'inversion et à la résolution de ce système sont :

- soit une méthode directe dite de "Cholesky" (décomposition de la matrice E en deux matrices triangulaires inférieures et supérieures puis algorithme de descente-remontée) nécessitant une place mémoire relativement importante.
- soit une méthode itérative de type "gradient conjugué" (Bonnet et Meurant [10]) qui permet de réduire l'encombrement mémoire et dont un des facteurs importants est le conditionnement de la matrice pour assurer une bonne convergence. Le préconditionnement utilisé dans TRIO-VF est réalisé suivant la méthode SSOR (Axelsson [4], Laroche [33]).

Une fois le champ de pression obtenu, le champ de vitesse se déduit par la résolution des équations I.1.21, I.1.22 et I.1.23. La démarche algorithmique générale peut être résumée comme suit :

- initialisation des variables, évaluation des conditions aux limites,
- évaluation des flux explicites de quantité de mouvement et des forces de volumes pour les trois composantes de la vitesse,
- calcul du second membre du système linéaire,
- résolution du champ de pression,
- calcul des champs de vitesse,
- calcul du champ de température par l'équation explicite I.1.24.

La procédure est itérative en temps.

chapitre I.2

Application 3D: topographie isolée.

2.1 Présentation de la simulation.

2.1.1 Le cas test.

2.1.1.a Intérêts et objectifs.

Physiquement parlant, nous verrons que cette étude est déjà relativement bien connue. Cependant, par rapport à l'adaptation de la méthode et aux divers développements qui en résultent, les intérêts ainsi que les objectifs de cet essai spécifique de simulation d'écoulement océanique ne sont pas négligeables.

Tout d'abord, cette étude va nous permettre d'étudier la réponse numérique du code vis à vis de ce type de modélisation tridimensionnelle, à savoir l'évolution d'un écoulement non-linéaire de méso-échelle à faible nombre de Rossby, en milieu tournant, et surtout en présence d'un obstacle d'axe vertical et d'un facteur d'échelle important. Ainsi, nous pourrions observer le comportement, le potentiel et éventuellement les sensibilités de la méthode dans son principe de résolution tridimensionnelle d'écoulements thermohydrauliques¹.

D'autre part, nous souhaitons, en retrouvant les caractéristiques physiques de cette modélisation, pouvoir tester la prise en compte tridimensionnelle des modifications effectuées sur le code original².

Cette simulation a de plus l'avantage de permettre, au cours de l'intégration temporelle, la description physique de différentes périodes typiques et distinctes, dépendantes du choix de la valeur initiale de paramètres caractéristiques. Chacune de ces étapes, assez bien connues qualitativement ou quantitativement, implique la représentation séquentielle d'une phénoménologie de dynamique spécifique mais relativement simple à aborder³.

Enfin, outre le nombre important d'études théoriques ou expérimentales existantes à ce sujet, nous avons la possibilité d'effectuer certaines comparaisons qualitatives et quantitatives avec les résultats numériques de certains auteurs ayant déjà travaillé sur ce thème, notamment avec les modèles numériques abordés précédemment (QG et PE).

1. équations de quantité de mouvement complètes, système numérique en pression, prise en compte du couplage thermique.

2. modèle de dissipation et de diffusion par hyper-viscosité et hyper-diffusivité anisotropes, frontière ouverte avec ou sans stratification thermique.

3. initiation tourbillonnaire, instationnarité liées aux termes non-linéaires, solution stationnaire ou ondes topographiques, effets de la stratification stable sur toutes les différentes phases de la dynamique.

2.1.1.b Contexte général.

Nous considérons un écoulement dans un canal océanique généralement carré, placé dans un milieu tournant à la vitesse angulaire f . Les dimensions horizontales L_x et L_y de ce pavé d'océan sont dans la plupart des cas de 500 X 500 kilomètres, la profondeur D est fixée à 4000 mètres. Nous nous plaçons donc dans une modélisation dite de "mésos-échelle".

Nous disposons au centre et sur le fond de ce domaine une topographie isolée de hauteur h_b . Nous reviendrons ultérieurement sur la mise en œuvre spécifique de cette topographie dans le code. Le diamètre L typique de l'obstacle correspond à l'échelle caractéristique de longueur de cet écoulement, soit $L=100$ kilomètres.

La description discrète de ces simulations est introduite dans un système de coordonnées cartésiennes et, pour orienter les axes, nous prenons la convention classique des géophysiciens⁴.

Le domaine a deux frontières ouvertes à l'est et à l'ouest. Les autres frontières sont solides. En l'absence de frottement et de forçage à la surface, la condition limite de glissement sera appliquée aux parois latérales nord et sud ainsi qu'au fond et à la surface (hypothèse du toit rigide).

L'écoulement est initialement au repos et nous allons imposer une vitesse entrante uniforme et constante sur la face ouest du domaine. Cette vitesse est de la forme :

$$u = U_0 \quad \text{et} \quad v = w = 0$$

A l'est, la frontière ouverte est donc une frontière dite de sortie libre sur laquelle nous appliquerons la condition d'Orlanski décrite précédemment.

De même, la prise en compte d'effets baroclines se réalise en imposant une stratification thermique stable dans le domaine et en entrée, à l'est, la condition de sortie libre est également appliquée. Ailleurs, nous utiliserons généralement des conditions adiabatiques. La figure I.2.1 résume le contexte général des expériences.

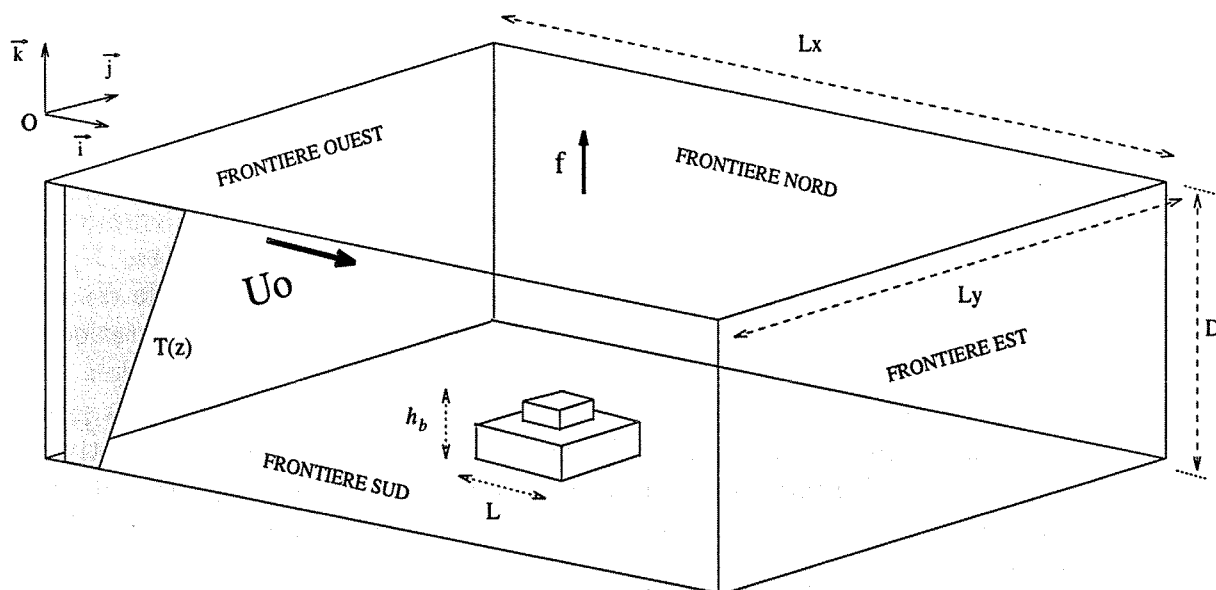


FIG. I.2.1 - Circulation océanique au dessus d'une topographie isolée, Schéma du contexte général des simulations.

4. axe $O\vec{i}$ dirigé vers l'est, axe $O\vec{j}$ vers le nord, axe $O\vec{k}$ ascendant.

2.1.2 Caractérisation des phénomènes.

2.1.2.a Paramètres caractéristiques.

Pour appréhender les phénomènes physiques mis en jeu, il nous faut tout d'abord définir différents paramètres qui permettent de caractériser ces écoulements océaniques et leur dynamique.

On pose $U = U_0$, la vitesse caractéristique de l'écoulement. Afin de pouvoir modéliser différentes variétés de phénomènes physiques, les valeurs choisies pour la vitesse entrante U_0 sont de 0.1 ms^{-1} ou 0.01 ms^{-1} .

D'autre part, L , l'échelle spatiale significative des phénomènes, est fixée à 100 kilomètres, taille typique des phénomènes engendrés lors de la modélisation. Cette longueur correspond classiquement au diamètre de base de la topographie utilisée. Nous verrons que, dans notre cas discret, ce "diamètre" est plutôt de l'ordre de 70 kilomètres. Néanmoins, nous conservons pour nos études cette valeur L généralement utilisée. En effet, la dynamique globale des phénomènes est davantage influencée par la hauteur de la topographie que par les dimensions de son diamètre.

Pour le paramètre de Coriolis f , nous utilisons l'hypothèse du f -plan où l'effet dû au gradient de la force de Coriolis est négligé. Le paramètre f est ainsi égal à f_0 , valeur constante et uniforme dans tout le domaine. Cette vitesse angulaire est fixée à 10^{-4} s^{-1} . Elle correspond donc à un domaine situé à une latitude moyenne.

On redéfinit maintenant le **nombre de Rossby** ϵ qui s'écrit :

$$\epsilon = \frac{U}{f_0 \times L} \quad (\text{I.2.1})$$

Ce paramètre adimensionnel traduit le rapport entre la vorticité relative U/L générée dans le domaine et la vorticité planétaire f_0 . En tenant compte des valeurs de U et L , on obtient $\epsilon = 10^{-2}$ ou 10^{-3} .

De plus, nous introduisons le **paramètre** μ :

$$\mu = \frac{h_b}{\epsilon \times D} \quad (\text{I.2.2})$$

Ce nombre représente l'effet de la topographie vis à vis de la dynamique de l'écoulement. Il permet de relier les influences combinées du nombre de Rossby et de la hauteur relative de la topographie h_b/D aux différents mécanismes qui peuvent apparaître et se développer dans le domaine.

Enfin, pour qualifier l'intensité de la stratification thermique, nous utiliserons le **nombre de Burger** B :

$$B = \frac{N \times D}{f_0 \times L} \quad (\text{I.2.3})$$

où N est la fréquence de Brunt-Väisälä qui s'exprime, compte tenu de la forme de notre fonction d'état, par :

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} = g \beta_t \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (\text{I.2.4})$$

Cette fréquence est définie dans le cas où les stratifications sont stables ($\partial T/\partial z > 0$ ou $\partial \rho/\partial z < 0$). Elle caractérise l'apparition d'ondes internes d'inertie-gravité (Lesieur [38]). Ces stratifications étant linéaires ($N=\text{cste}$), chaque cas pourra être caractérisé par une valeur de B valable pour tout le domaine. Nous utiliserons deux cas typiques d'intensité des effets de flottabilité :

- $B=0,352$ pour une faible stratification ($N=8.8.10^{-4} \text{ s}^{-1}$),
- $B=1,056$ pour une forte stratification ($N=2.64.10^{-3} \text{ s}^{-1}$).

Remarque :

Nous avons choisi de qualifier l'effet du couplage thermique par le nombre de Burger afin de nous conformer à une certaine étude de référence (Nguyen [46]). Cependant, rappelons l'utilisation par certains auteurs, (Laroche [33], Hunt et Snyder [29]), du **nombre de Froude** défini par : $F = \frac{U}{Nh_b}$.

Il quantifie le rapport du temps caractéristique des effets de flottabilité $1/N$ et du temps dynamique lié à la topographie h_b/U . Pour une hauteur de topographie $h_b=200$ mètres, les deux cas de stratification étudiés correspondent donc à :

- $F=0.568$ pour la faible stratification ($B=0,352$),
- $F=0.189$ pour la forte stratification ($B=1,056$).

2.1.2.b Phénomènes physiques généraux.

Il n'est pas question ici de résumer de manière exhaustive tous les aspects dynamiques et toutes les influences physiques impliquées dans ce type de modélisation. Il existe pour cela de nombreuses études approfondies, numériques ou théoriques, caractérisant ces effets. Cependant, pour les tests qui nous concernent, nous allons rappeler le comportement physique des principaux phénomènes observables lorsqu'un écoulement en milieu tournant passe au dessus d'une topographie isolée.

Formation des tourbillons topographiques à ρ constant.

Nous nous plaçons, en premier lieu, dans une période $t < L/U$, c'est à dire une période d'initiation de l'écoulement, durée pendant laquelle il va se former des tourbillons autour et à cause de la topographie. La base théorique permettant d'expliquer la réponse dynamique de l'écoulement pendant cette phase est concentrée dans l'utilisation du théorème de Kelvin.

Ce théorème provient de la reformulation de l'équation de Navier Stokes en terme de vorticité relative $\vec{\omega}$ et absolue $\vec{\omega}_a$ avec : $\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega}$ et $\vec{\Omega}$ la vorticité du mouvement de rotation solide (Lesieur [38]).

En considérant que ρ est uniforme et en se plaçant dans un fluide parfait⁵, le théorème de Kelvin s'applique à un élément de surface fluide ds , orientée par un vecteur unitaire \vec{n} , que l'on suit dans son mouvement. Il s'énonce donc par :

$$\frac{D}{Dt}[\vec{\omega}_a \cdot \vec{n} ds] = 0 \quad (\text{I.2.5})$$

5. Nous considérons donc que l'écoulement est barotrope et que le terme de diffusion peut être négligé pendant la phase d'initiation.

Ce résultat traduit la conservation, en suivant le mouvement, du flux de vorticité absolue. Il s'interprète également comme la conservation de la circulation de la vitesse absolue sur un contour matériel. La conséquence de ce théorème est donc que les filaments vortex absolus, lignes tangentes en tout point à la vorticité absolue (ou lignes d'iso-vorticité), se conservent dans le mouvement du fluide.

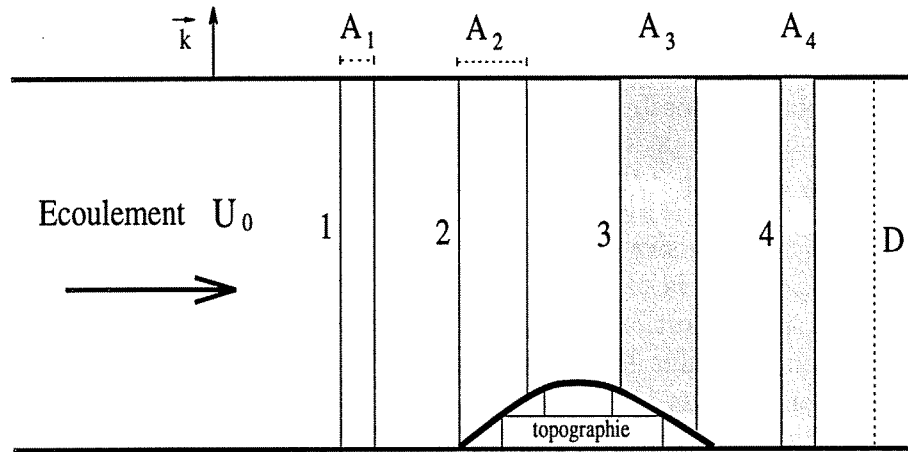


FIG. I.2.2 - Application du théorème de Kelvin, formation des tourbillons topographiques.

Application :

Si \vec{k} est le vecteur unitaire définissant la verticale locale, la vorticité relative $\vec{\omega}$ s'écrit également $\xi \vec{k}$, avec ξ la vorticité verticale relative. De même, le paramètre de Coriolis f définit la projection de la vorticité du mouvement de rotation planétaire sur la verticale locale. Dans ce cas, le théorème de Kelvin peut s'écrire :

$$\frac{D}{Dt}[(\xi + f) ds] = 0 \quad (\text{I.2.6})$$

La figure I.2.2 représente un écoulement sur une topographie isolée en coupe verticale. Considérons tout d'abord une colonne de fluide qui se trouve initialement à la position 1. Elle est advectée par l'écoulement moyen U_0 et se retrouve à la nouvelle position 2. On note ensuite, A_1 et A_2 , les aires respectives des sections horizontales de la colonne d'eau en 1 puis 2.   cause de la topographie, cette colonne est compressée. De fait, pour respecter la loi de conservation de la masse, l'aire A_1 est augmentée et devient A_2 . Nous avons ainsi $A_2 > A_1$. L'application du théorème de Kelvin montre que dans ce cas, il se produit un tourbillon anticyclonique dans cette région. En effet, la conservation du flux de vorticité absolue entre ces deux positions donne :

$$\begin{aligned} \xi_1 A_1 + f A_1 &= \xi_2 A_2 + f A_2 \\ \text{soit :} \quad \xi_2 &= \frac{A_1}{A_2} \xi_1 - f \frac{(A_2 - A_1)}{A_2} \end{aligned}$$

En supposant qu'il n'y a pas de vorticité relative pour la colonne 1 avant la compression ($\xi_1 = 0$) et comme $A_2 > A_1$, on obtient :

$$\xi_2 < 0$$

Nous avons donc formation d'un tourbillon anticyclonique en amont de la topographie. Après sa création, il va rester quasiment stable au dessus de la topographie. De même,

à l'aval, le phénomène opposé se produit. La colonne de position 3 est maintenant étirée dans son advection jusqu'en 4. L'application du théorème entre ces deux positions donne :

$$\xi_4 > 0$$

Un tourbillon cyclonique est ainsi formé dans la région aval à la topographie.

Rappelons également qu'en milieu homogène, ce type d'écoulement géophysique, où la vorticité relative est généralement faible devant la vorticité planétaire (ϵ petit), a la propriété d'être indépendant de la verticale z . De fait, pour un écoulement barotrope à faible nombre de Rossby, les structures générées sont quasi-bidimensionnelles⁶.

Evolution des tourbillons à ρ constant.

Par ces phénomènes d'étirement et de compression des colonnes fluides, on comprend comment, pendant la phase d'initiation de l'écoulement barotrope, deux vortex de signes opposés et d'axe vertical sont engendrés autour et au dessus de la topographie. Par la suite, l'évolution dans le temps (période $t > L/U$) de ces deux tourbillons résulte de la combinaison de deux principaux mécanismes :

- les *interactions vorticitaires* qui sont fonction de la topographie et des caractéristiques de l'écoulement entrant,
- les *phénomènes d'advection* dont l'intensité est fonction de la valeur de la vitesse d'entrée.

Aussi, pour caractériser la combinaison de ces deux mécanismes, nous utilisons le paramètre μ défini précédemment. Suivant les valeurs du nombre de Rossby et de la hauteur relative de la topographie, différents régimes d'écoulement sont possibles.

- Lorsque l'effet du courant est fort (U_0 important, h_b pas trop élevée $\Leftrightarrow \mu$ faible), c'est le phénomène d'advection qui joue un rôle dominant. De fait, le tourbillon cyclonique formé en aval de la topographie est rapidement advecté vers l'aval du domaine et à travers la sortie libre (frontière est). La vitesse d'advection de celui-ci tendra vers la vitesse moyenne de l'écoulement U_0 . Le tourbillon anticyclonique reste, pour sa part, piégé au dessus de la topographie.
- En revanche, lorsque les effets vorticitaires non-linéaires sont supérieurs à ceux d'advection (U_0 faible, h_b élevée $\Leftrightarrow \mu$ grand), le tourbillon cyclonique reste aux alentours de la topographie, à la droite du tourbillon anticyclonique. Dans ce cas, un phénomène d'onde circulaire est observé : les deux vortex oscillent périodiquement autour de la topographie. L'interaction entre les deux tourbillons et la pulsation de leur rotation peuvent être plus ou moins importantes suivant la valeur du paramètre μ . L'existence de cette onde circulaire est très nette lorsque l'effet de la topographie est de plus en plus fort (μ augmente).

Signalons enfin que dans le cas où μ est grand, il peut apparaître une structure appelée, en milieu barotrope, "colonne de Taylor". Cette colonne représente une zone fluide isolée autour de laquelle le fluide environnant se déplace de manière quasi-indépendante⁷. Cette zone de recirculation se caractérise par des lignes fermées de la fonction de courant et dépend notamment de la forme de la topographie.

6. application du théorème de Taylor-Proudman, approximation géostrophique, Lesieur [38].

7. "quasi" car il existe toujours une influence des termes visqueux.

Influences de la variation de ρ .

Dans un fluide linéairement stratifié de manière stable, la force de flottabilité agit comme une force de rappel et a tendance à s'opposer aux mouvements verticaux.

De fait, plus le fluide est stratifié, plus les vitesses verticales sont inhibées et plus l'écoulement tend à contourner l'obstacle en se renforçant plutôt que de passer au-dessus. A forte stratification, la partie de l'écoulement située au dessus de la topographie devient quasi-bidimensionnelle : sa structure suit les plans horizontaux.

Par contre, pour des intensités de stratification faibles, le fluide possède plus d'énergie et peut plus facilement surmonter la topographie. Ainsi, l'écoulement est moins bidimensionnel et les perturbations engendrées par la présence de l'obstacle se propagent davantage dans la direction verticale.

Il est également possible d'aborder le problème de l'influence de la variation de la masse volumique sur l'écoulement par l'équation généralisée *du vent thermique*.

En effet, pour un fluide géostrophique, stationnaire et dont les influences de la stratification et de la rotation sont importantes, l'équation de la vorticité relative dynamique se réduit à (Lesieur [38]) :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0 f_0} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{g} \quad (\text{I.2.7})$$

En projection sur le plan horizontal, les équations montrent qu'un gradient vertical de la vitesse horizontale correspond à un gradient horizontal de densité. Aussi, aux alentours de la topographie, les perturbations horizontales locales du champ de température provoqueront, sur les vitesses u et v , un cisaillement vertical responsable du renforcement de l'écoulement dans les basses couches.

Enfin, en milieu stratifié, une des propriétés de ce cisaillement des vitesses horizontales est la transformation de la colonne de Taylor barotrope en un cône. En règle générale, l'intensité croissante de la stratification a tendance à favoriser l'apparition du cône dans les basses couches mais, par contre, limite son extension vers la surface.

2.1.2.c Etudes de référence.

De nombreuses observations in-situ montrent que l'influence de la topographie sur les écoulements océaniques et atmosphériques à grande ou à moyenne échelle est un facteur important quant à la dynamique. De plus, dans une étude bibliographique relativement complète, Nguyen [46] cite et décrit plusieurs études expérimentales réalisées par différents auteurs ayant pour objectif l'étude de cette influence, en milieu barotrope comme en présence d'une stratification en densité.

Citons, à ce sujet, les expériences de Hunt et Snyder [29] en milieu non tournant et Boyer [11] en milieu tournant. Ces expériences se sont attachées à décrire l'influence de la stratification sur des topographies isolées tridimensionnelles. Pour résumer, tous suggèrent que l'augmentation de l'intensité de la stratification favorise le passage de l'écoulement autour de la topographie plutôt qu'au dessus. Ce phénomène est de plus en plus net lorsque le nombre de Froude devient inférieur à 0.2, il peut même conduire, dans les zones profondes, au développement d'instabilités tourbillonnaires. Par contre, pour de faibles

stratifications (F voisin ou supérieur à 0.4), le profil des vitesses horizontales est verticalement moins cisailé et la topologie de l'écoulement tend davantage vers celle observable en milieu barotrope. Ces considérations sont réaffirmées par les modélisations numériques qui nous serviront de points de comparaison.

Au niveau théorique, Huppert [30] a montré que pour un écoulement barotrope où les phénomènes d'advection sont prépondérants, le vortex anticyclonique piégé au dessus de la topographie se présentait comme la solution stationnaire du phénomène. De plus, en l'absence de forçage, en négligeant l'effet dû à la dissipation et lorsqu'il n'existe pas de ligne de courant fermée (c'est-à-dire pas de colonnes de Taylor $\Leftrightarrow \mu$ faible). Huppert a établi une relation définissant le minimum de la vorticité verticale dimensionnelle stationnaire induite par une topographie de type cylindrique et symétrique :

$$\xi_{min} = -f_0 \times \frac{h_b}{D} \quad (I.2.8)$$

Ce type de régime produira donc une vorticité stationnaire dont l'intensité est indépendante de la vitesse U_0 . D'autre part, Rhines [50] a décrit le phénomène d'onde circulaire topographique, à partir d'écoulements QG et pour une topographie de type exponentielle paraboloidé, en terme de pulsation.

Concernant l'étude numérique d'écoulements en présence d'une topographie isolée, signalons les travaux de thèse de Laroche [33] effectués en simulation directe sur le même type de modèle numérique que le nôtre. Il a traité l'écoulement stablement stratifié autour d'une topographie en forme de parall lepip de mais en milieu non tournant. Globalement, il retrouve les deux tourbillons contra-rotatifs d'axe vertical et les effets de confinement de l'écoulement dans les basses couches dus   la stratification. Néanmoins, la différence entre les échelles et l'effet important de la rotation ne sont pas pris en compte dans son étude. La comparaison n'est donc pas évidente.

Par contre, dans le cadre de l'étude numérique sur le comportement spécifique des écoulements océaniques en présence d'une topographie isolée, nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux modélisations numériques entreprises par Verron et Le Provost [56], Nguyen [46], Lott, Madec et Verron [40]. En effet, pour faciliter les comparaisons, nous avons choisi de tester notre modèle sur des domaines discrets et des caractéristiques dynamiques de l'écoulement conformes à la plupart de ces simulations.

Verron et Le Provost [56] ont étudié numériquement un écoulement entrant uniforme, constant et barotrope passant sur une faible montagne sous-marine isolée de forme gaussienne et de base circulaire par l'intermédiaire d'un modèle QG. En f -plan, ils retrouvent, grâce à l'implémentation de frontière ouverte, la solution stationnaire caractéristique où la vorticité verticale créée dans le domaine correspond à un tourbillon anticyclonique piégé au dessus de la topographie. Ils rapportent également très bien les différentes étapes transitoires de l'instationnarité de ces écoulements vis-à-vis du paramètre μ . D'autre part, ils donnent des valeurs critiques de μ à partir desquelles il est possible d'observer l'apparition de colonnes de Taylor ($\mu_c = 6.3$ pour ce type de topographie) puis celle des interactions tourbillonnaires ($\mu_d = 11$) débouchant sur les ondes topographiques. A ce propos, adaptant les travaux de Rhines [50] sur les ondes topographiques, ils vérifient la linéarité de

la variation entre la pulsation associée aux interactions des tourbillons et la valeur de μ caractérisant, dans ce cas, l'intensité de ces interactions. Les calculs réalisés grâce aux modèles PE reproduisent, dans ce genre de configuration, des résultats similaires. Néanmoins, il faut noter que pour des topographies de hauteurs importantes, les solutions des modèles QG et PE pendant la phase instationnaire de l'écoulement sont différentes. En effet, la solution calculée par le modèle QG s'éloigne de celle donnée par le modèle PE en raison de l'utilisation de l'hypothèse restrictive $h_b/D \ll 1$. Ainsi, les cas traités sont limités à une valeur de μ voisine de 30. Rajoutons que cette étude ne prend pas en compte l'influence de la thermique.

Aussi, la description la plus complète des phénomènes que nous voulons modéliser est donnée dans les travaux de thèse de Nguyen [46]. Pour entreprendre ces études similaires⁸, il a développé et exploité un modèle PE utilisant une discrétisation verticale en coordonnées de type σ (SPEM, Haidvogel [27]). Ces coordonnées permettent une meilleure prise en compte des topographies de pentes douces. Cependant, contrairement au modèle QG, la condition $h_b/D \ll 1$ n'est pas obligatoire et la mise en œuvre de topographies importantes est possible. Tout en retrouvant les phénomènes physiques concernant le milieu barotrope, énoncés par Verron et Le Provost, ce modèle a permis d'effectuer des tests tridimensionnels en milieu stablement stratifié (équation d'évolution de la masse volumique perturbée). Ainsi, il a pu notamment représenter la formation de deux zones de masses volumiques perturbées, une zone dite "froide", plus dense et rattachée à la topographie et une zone dite "chaude" plus lourde généralement advectée par l'écoulement moyen. De plus, l'étude de l'augmentation de l'intensité de la stratification met en valeur toute une série de modifications de l'écoulement barotrope (renforcement de l'écoulement dans les basses couches, cisaillement vertical des vitesses horizontales, apparition de "cônes de Taylor"), modifications que nous désirons pouvoir reproduire.

Enfin, l'étude réalisée par Lott, Madec et Verron tend, sur ce même type de modélisation, à comparer le modèle aux équations primitives SPEM, précédemment cité, avec celui développé par l'équipe du LODYC (OPA, Delecluse et al. [19]), basé notamment sur une discrétisation verticale en coordonnées z classiques. Comme dans notre modèle, la topographie est donc prise en compte sous forme de marches d'escalier. Néanmoins, les deux modèles SPEM et OPA conservent des modes de résolution très similaires, ne différant que dans le type de discrétisation verticale. Ils examinent plus particulièrement deux régimes d'écoulement barotrope en f -plan : $\mu=12.5$ et $\mu=125$, ce qui correspond à une vitesse d'entrée U_0 de respectivement 0.1ms^{-1} et 0.01ms^{-1} , la topographie étant fixée à 500 mètres et le paramètre f_0 à 10^{-4}s^{-1} . Ces comparaisons sont principalement caractérisées par la valeur de la pulsation des ondes topographiques générées, mesurables par la variation temporelle de l'énergie cinétique perturbée dans le domaine. Ainsi, la représentation en marches d'escalier semble, vis-à-vis de la représentation σ , provoquer des oscillations numériques dans les basses couches susceptibles de perturber la dynamique autour de la topographie. Cependant, une prise en compte discrète plus fine de la topographie permet au modèle OPA de corriger correctement ce problème numérique.

8. topographie isolée de type \cos^2 , écoulement entrant uniforme et constant, moyenne échelle, f -plan, frontière ouverte.

2.2 Modélisations barotropes.

2.2.1 Conditions des calculs.

2.2.1.a Discrétisation.

Afin de se rapporter aux études de référence dont nous disposons (Verron et Le Provost [56], Nguyen [46], Lott et al [40]), nous avons choisi un maillage horizontal régulier d'un pas d'espace de 8333 mètres, soit une résolution de 60×60 pour un domaine de 500×500 kilomètres. Verticalement, le pas d'espace conditionne la hauteur de la topographie à prendre en compte. En effet, rappelons que la méthode Volumes Différences Finis, mise en œuvre dans le code de calcul TRIO-VF, utilise un maillage structuré. Ainsi, nous maillons les structures complexes internes au domaine par l'utilisation de volumes opaques qui s'appuient sur le maillage discret. Dans les études de références, la topographie prise en compte est de forme parabolique (de type \cos^2 ou gaussienne), avec une base circulaire d'un diamètre de 100 kilomètres.

Dans TRIO-VF, la forme des topographies que l'on peut mettre en œuvre résulte donc de l'empilement et de la juxtaposition de plusieurs volumes opaques. Ces formes se limitent donc à des structures en "marche d'escalier". Néanmoins, il est possible de définir une notion de "plaques inclinées" entre les volumes opaques. Leur mise en œuvre permet de mieux décrire des formes complexes en modifiant les bilans de quantité de mouvement dans les mailles concernées par l'intermédiaire de porosités volumiques et surfaciques.

Nous avons utilisé deux hauteurs maximales caractéristiques de topographie, l'une de 500 mètres, l'autre de 200. Sur la figure I.2.3, les deux coupes verticales montrent la discrétisation choisie et la forme des topographies. La coupe horizontale présente également la résolution et définit la base de la topographie. On peut remarquer que le diamètre n'est que d'environ 70 kilomètres. Avec la discrétisation adoptée et par rapport aux références, nous avons privilégié l'ajustement à la hauteur plutôt qu'au diamètre. En effet, nous avons vu que la hauteur de la topographie est un des paramètres important quant à la dynamique de ces écoulements. Notons enfin qu'avec une résolution verticale de 10 niveaux, nous obtenons 36000 éléments à traiter.

2.2.1.b Options de calcul.

On rappelle que, pour conditions limites, nous utilisons le glissement aux parois latérales nord et sud, ainsi qu'à la surface. Il en est de même pour le fond et la topographie. La condition d'Orlanski est mise en œuvre, sur la face Est, pour toutes les variables (vitesse et pression). Sur la face ouest, la condition type Dirichlet de vitesse entrante est appliquée.

Pour le schéma d'intégration temporel, le paramètre du filtre Asselin associé au schéma leap-frog est fixé à 0,1. Le pas de temps d'intégration est imposé à 25 minutes.

Le coefficient horizontal de viscosité turbulente ν_h , constant et uniforme dans le domaine, est fixé à $100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. A titre indicatif, pour une vitesse caractéristique de 0.1 m s^{-1} nous obtenons ainsi un nombre de Reynolds turbulent construit à l'échelle de la maille de l'ordre de 10. En modélisation barotrope, le coefficient vertical de viscosité turbulente ν_v n'a pas d'influence. Il est donc imposé à 0.

De plus, la plupart des calculs ont été effectués avec les options de calcul suivantes : le schéma d'advection Quick-Sharp et une résolution du système linéaire en pression de type

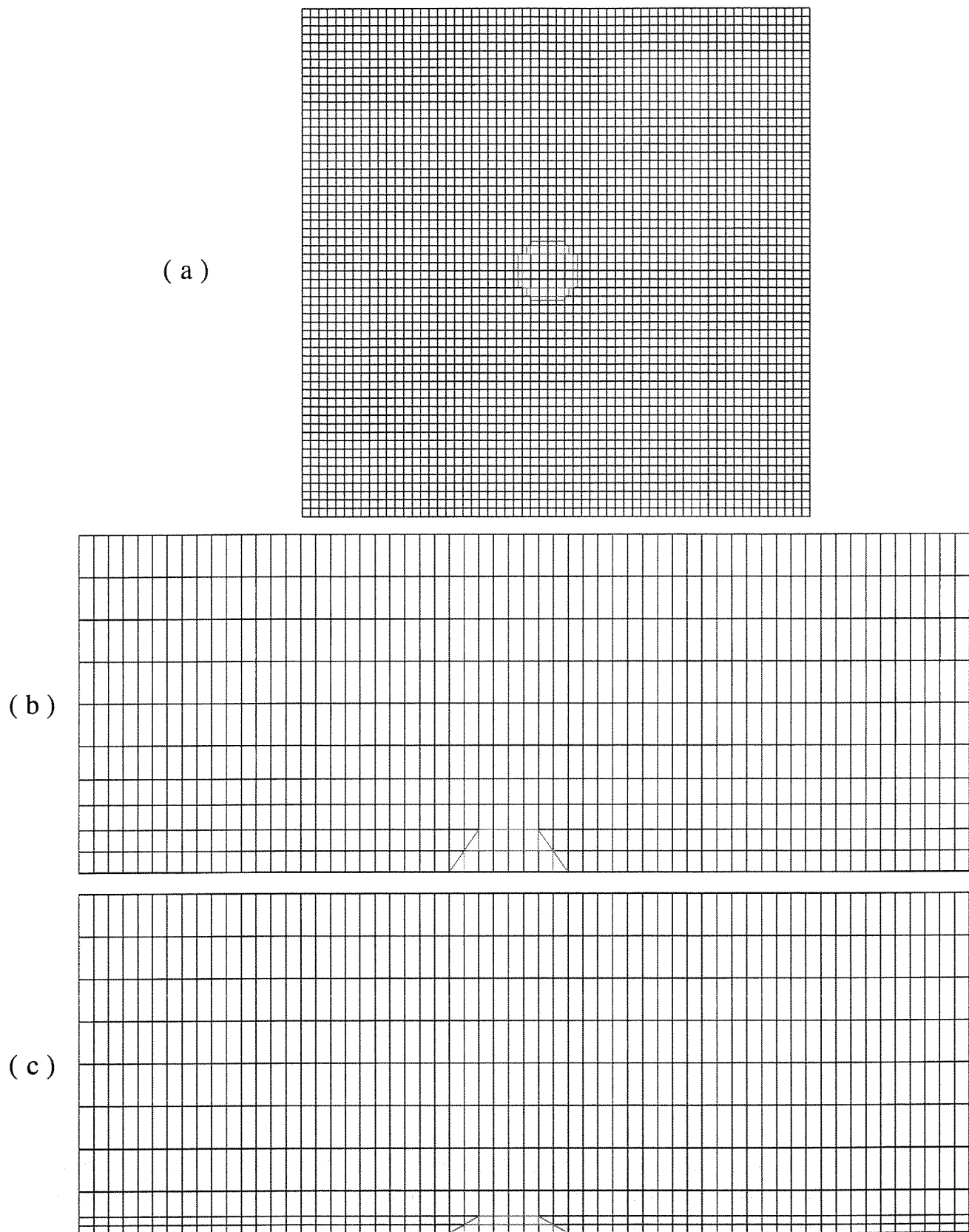


FIG. I.2.3 - Maillages horizontaux et verticaux du domaine : (a) : Coupe horizontale à la base de la topographie ($500 \times 500 \text{ km}$, 60×60 , $\Delta x = \Delta y = 8333 \text{ m}$), (b) : Coupe verticale au milieu du domaine pour $h_b = 500 \text{ m}$ ($500 \times 4 \text{ km}$, 60×10 , $\Delta z_{\min} = 250 \text{ m}$, $\Delta z_{\max} = 500 \text{ m}$), (c) : Idem pour $h_b = 200 \text{ m}$ ($\Delta z_{\min} = 100 \text{ m}$, $\Delta z_{\max} = 500 \text{ m}$).

Cholesky (résolution directe). Enfin, l'initialisation de certains calculs a dû faire l'objet d'une procédure de montée en régime de l'écoulement (cas $\mu = 125$).

2.2.2 $\mu=5$: effets d'inertie prédominants.

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas $\mu=5$ et $\epsilon=0.01$ ($U_0 = 0.1 \text{ ms}^{-1}$, $h_b = 200 \text{ m}$). Cette valeur correspond donc à un régime d'écoulement où, vis à vis de la topographie, les effets advectifs dus à l'inertie sont prédominants par rapport à l'influence de la rotation engendrée par la force de Coriolis.

2.2.2.a Phénomène et évolution.

La figure I.2.4 présente une séquence de cartes instantanées de la vorticité verticale pendant la phase instationnaire. Les coupes sont effectuées dans un plan horizontal proche de la surface (première maille).

Le premier temps ($t_{ad} = 0.86$) illustre bien la formation des deux tourbillons dans la période $t < (L/U_0)$ (ici $L/U_0 = 10^6$ secondes soit environ 11.5 jours). Le vortex anticyclonique est localisé au dessus de la topographie, le vortex cyclonique est bien situé en aval de celle-ci.

Par la suite ($t_{ad} > 1$), nous observons bien le phénomène d'advection du tourbillon cyclonique par l'écoulement moyen U_0 , le tourbillon anticyclonique restant piégé au dessus de la topographie. On vérifie, par ailleurs, le bon comportement de la frontière ouverte qui permet l'advection du vortex positif en dehors du domaine, sans perturbation ni problème particulier de l'écoulement interne.

Ces structures tourbillonnaires peuvent également être illustrées sur le même type de cartes par la vitesse perturbée horizontale (figure I.2.5). Elle est obtenue par différence entre la vitesse totale calculée et la vitesse imposée en entrée (composantes zonale $u - U_0$ et méridienne v).

La comparaison qualitative avec les résultats donnés par Nguyen [46] avec le modèle SPEM sur le même écoulement, mais avec une discrétisation horizontale beaucoup plus faible, montre néanmoins une bonne concordance temporelle quant à l'advection et l'évacuation du tourbillon cyclonique (figure I.2.6).

2.2.2.b Solution stationnaire.

Nous avons poussé la simulation jusqu'à un temps physique de 140 jours ($t_{ad} = 12, 1$). Nous pouvons considérer qu'à ce moment une solution quasi-stationnaire est obtenue. Toutefois, nous constatons que l'évolution temporelle des vitesses et de la topologie de l'écoulement ne présente plus de grosse variation dès 40 jours, c'est à dire aussitôt après l'évacuation complète du vortex cyclonique.

La figure I.2.7 montre, pour la vorticité verticale (a) et le champs de vitesse perturbée (b), la solution stationnaire du phénomène calculée à 140 jours. C'est bien un tourbillon anticyclonique piégé au dessus de la topographie.

D'autre part, nous avons reproduit, sur la figure I.2.8, les solutions du même calcul réalisées par SPEM avec une résolution horizontale cette fois-ci équivalente. Nous constatons une bonne correspondance qualitative entre les résultats. Une remarque peut cependant être faite quant aux lignes d'isovorticité stationnaire. En effet, la différence d'aspect observable entre les deux tourbillons provient des discrétisations adoptées, ces lignes d'iso-

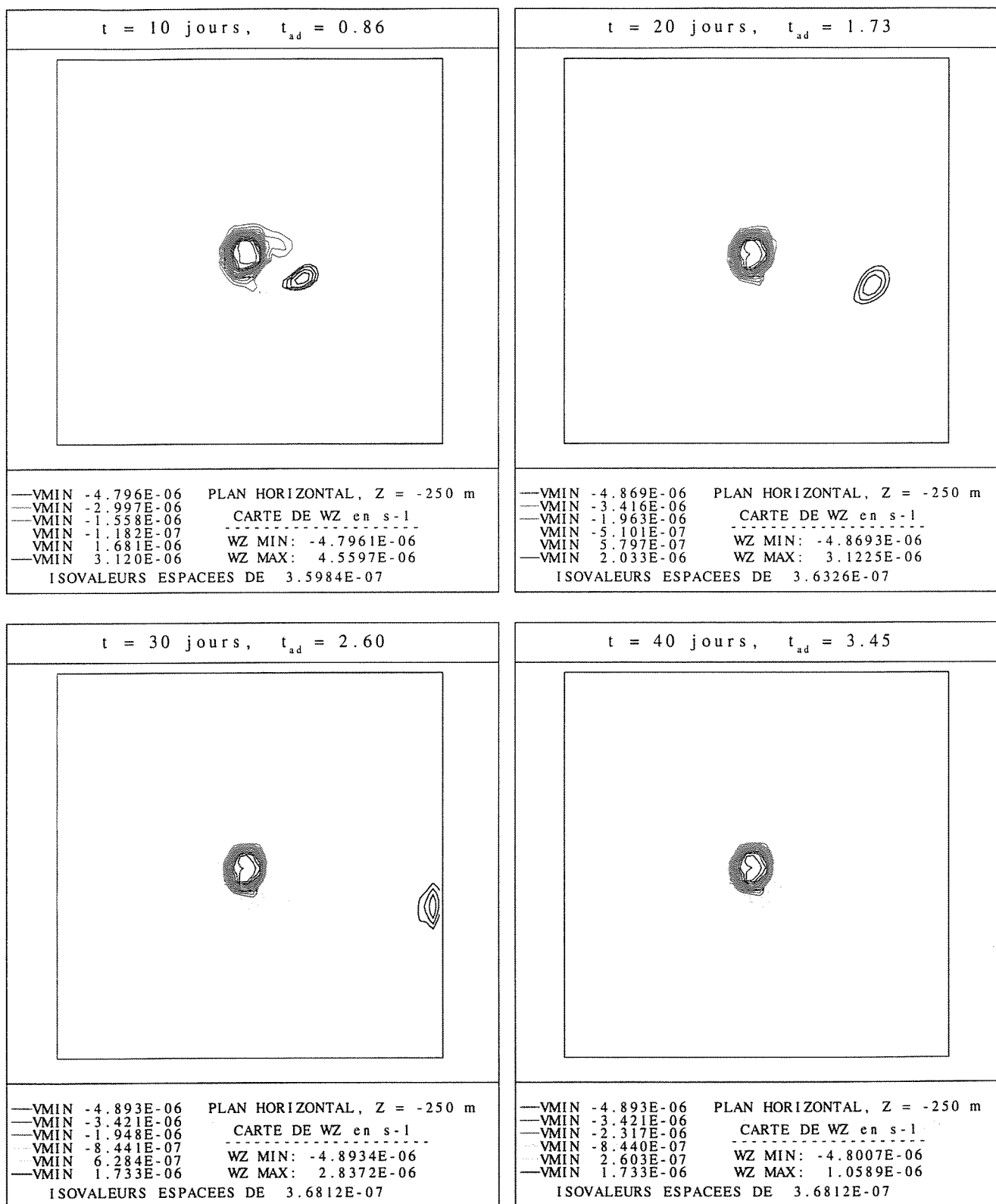


FIG. I.2.4 - Champs de vorticité verticale d'un écoulement barotrope pendant la phase instationnaire. $\mu = 5$, $U_0 = 0.1 \text{ ms}^{-1}$, $h_b = 200 \text{ m}$, $\nu_h = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

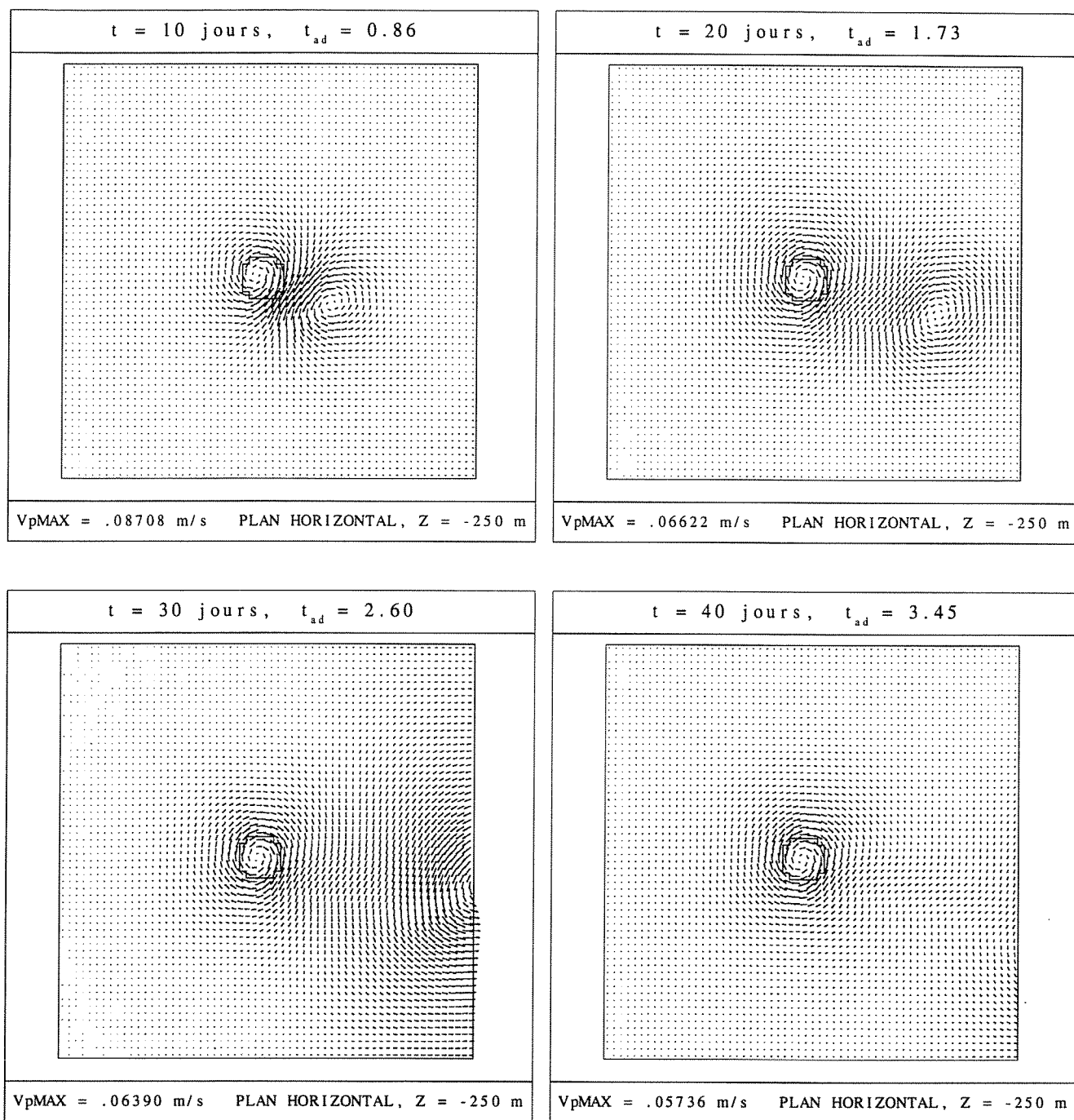


FIG. I.2.5 - Champs de vitesse perturbée horizontale, paramètres identiques à la figure précédente.

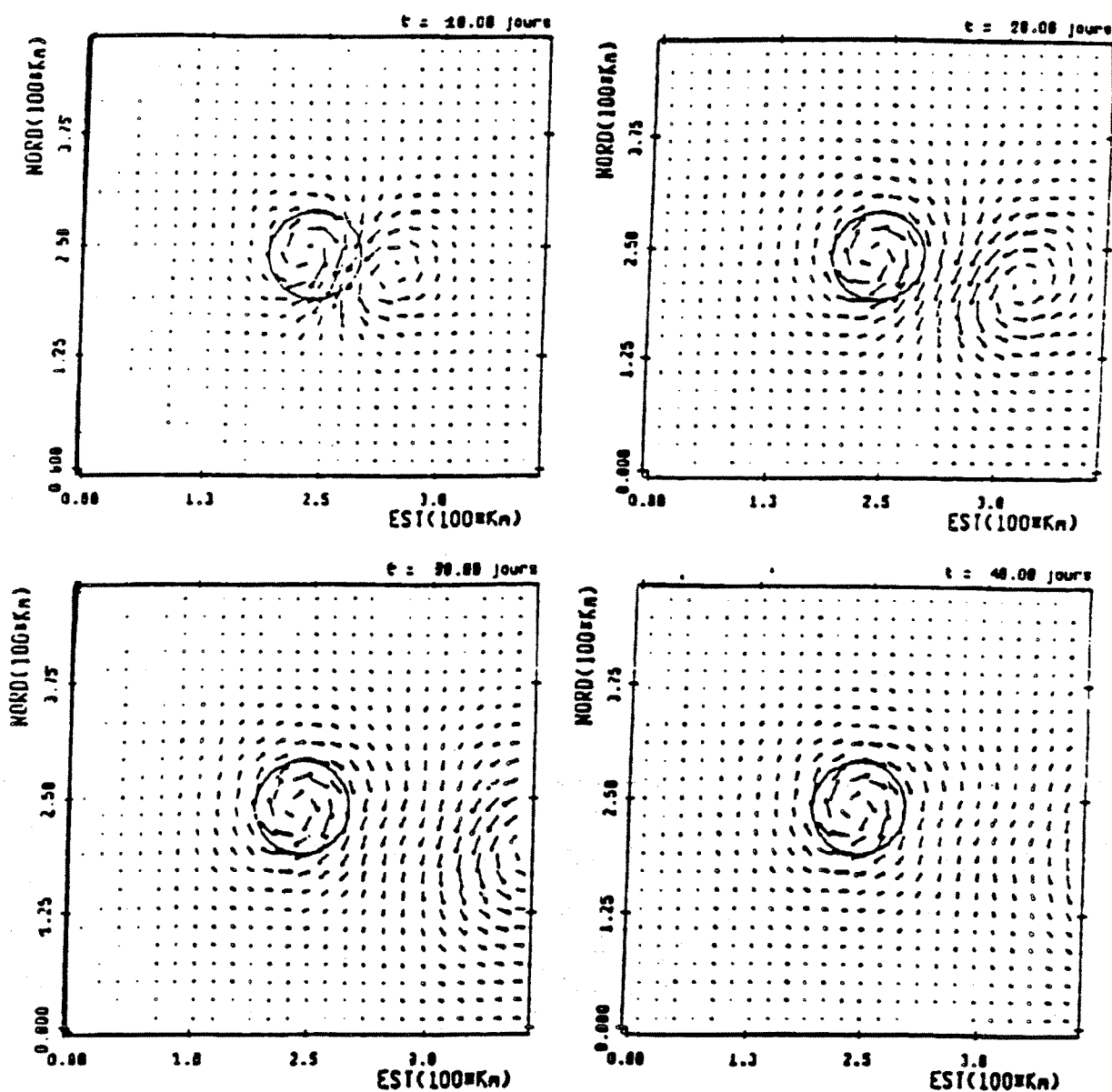


FIG. I.2.6 - Champs de vitesse perturbée horizontale, modèle SPEM (Nguyen [46]), paramètres identiques à la figure précédentes.

valeurs correspondant aux courbes de niveaux de la topographie associée. De plus, notre modèle semble maintenir une faible zone de vorticité positive, à coté du tourbillon anticyclonique (sud-est). Cette zone tr  localisée semble agir comme un foyer et induire une légère trainée stable derrière l'obstacle. Une fois de plus, la discrétisation z utilisée peut expliquer le piégeage local d'une telle zone à l'aval de l'obstacle.

Au niveau quantitatif, la comparaison avec la solution théorique proposée par Huppert [30] montre une valeur de la vorticité stationnaire minimale très proche de cette solution. Effectivement, pour cette modélisation, la théorie prédit une valeur numérique de $-5,10^{-6}s^{-1}$. Nos calculs proposent $-4,83 \cdot 10^{-6}s^{-1}$ (différence de 5,4%) contre $-4,5 \cdot 10^{-6}s^{-1}$ pour le modèle SPEM (différence de 10%). Vis à vis de la valeur théorique, ces petits écarts s'expliquent par l'effet de la dissipation turbulente qui tend à diminuer les intensités et par l'utilisation d'un maillage assez grossier. D'autre part, la qualité numérique du schéma d'advection peut également jouer un rôle sur cette valeur.

2.2.2.c écoulement vertical.

Pour illustrer le fait qu'au dessus de la topographie l'écoulement horizontal n'est quasiment pas modifié suivant la verticale, nous présentons sur la figure I.2.9, les vitesses perturbées stationnaires sur différents plans horizontaux au dessus de l'obstacle, à 140 jours. La répartition de la vitesse reste bien identique suivant la verticale. Notons tout de même que l'influence de la topographie commence à se faire sentir sur le plan $z = -3650m$ correspondant à la maille juste au dessus de la topographie. Néanmoins, cet effet reste localisé. De même, pour les plans horizontaux concernant l'obstacle (e et f), les perturbations engendrées ne concernent que la proximité de la topographie.

Pour observer la structure de l'écoulement vertical et la comparer à celle obtenue par le modèle SPEM, nous nous sommes placés à 70 jours. Nous considérons déjà la quasi-stationnarité de la solution (par rapport à 140 jours, variations de l'ordre de 1%). La répartition des vitesses verticales w , sur le plan zonal vertical passant par le centre de la topographie (figure I.2.10), révèle deux écoulements verticaux en sens inverse, localisés autour de l'obstacle: un écoulement montant en amont (signe positif) et un deuxième descendant en aval (signe négatif).

Qualitativement, nous constatons que ces deux zones ne sont pas symétriques par rapport au milieu de la topographie. De plus, ces régions se situent juste au niveau de la topographie, diminuent selon la verticale et peuvent localement engendrer de faibles perturbations oscillatoires qui demeurent localisées à l'obstacle et de faibles amplitudes. Le modèle SPEM trouve qualitativement le même type de phénomène (figure I.2.12) mais présente cependant une parfaite symétrie des deux zones et une absence de perturbation résiduelle aux alentours de la topographie.

Quantitativement, des différences sont clairement observables. En effet, notre calcul produit des valeurs maximales de la vitesse verticale beaucoup plus importantes que SPEM (2 à 3 fois supérieures). Ces résultats sont également constatables sur les coupes horizontales des figures I.2.11 (TRIO-VF) et I.2.13 (SPEM). Notons, d'autre part, que notre vitesse verticale est un peu influencée par la disymétrie *nord-sud* de l'écoulement horizontal autour de l'obstacle, disymétrie liée à l'effet de la force de Coriolis. Ce phénomène n'est pas observé sur les résultats du modèle SPEM.

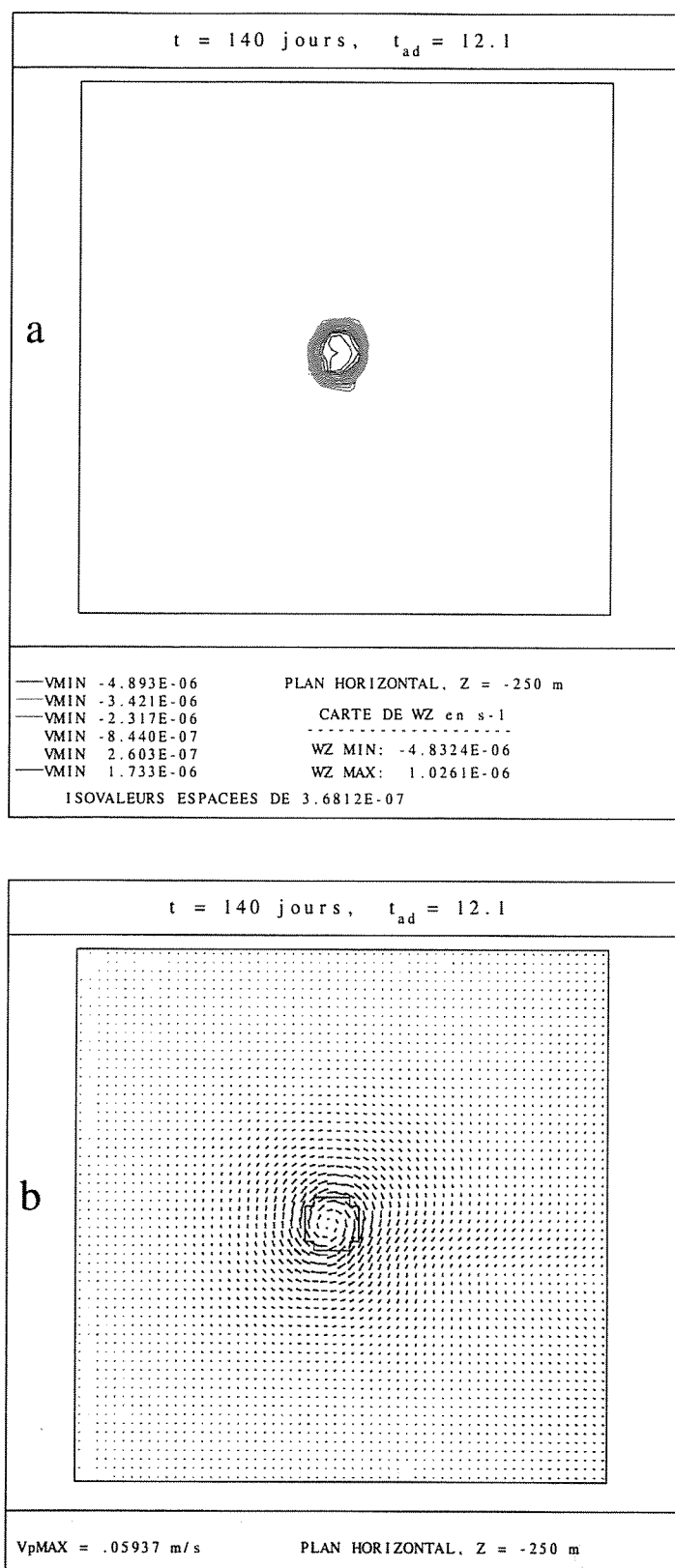


FIG. I.2.7 - Champs stationnaires de porticité verticale (a) et de vitesse perturbée horizontale (b) (paramètres identiques à la figure précédentes).

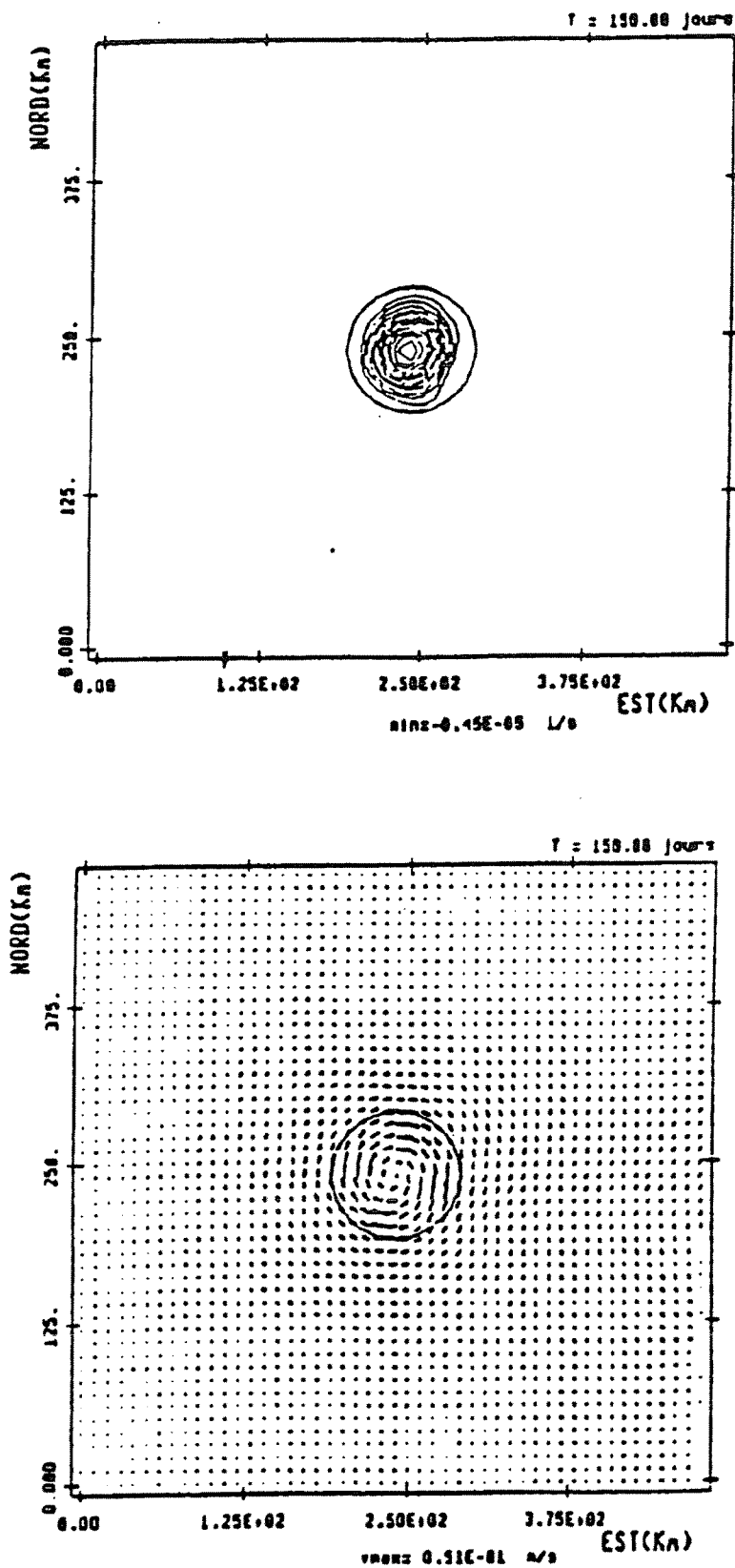


FIG. I.2.8 - Identique à la figure précédentes mais modèle SPEM (Nguyen [46]).

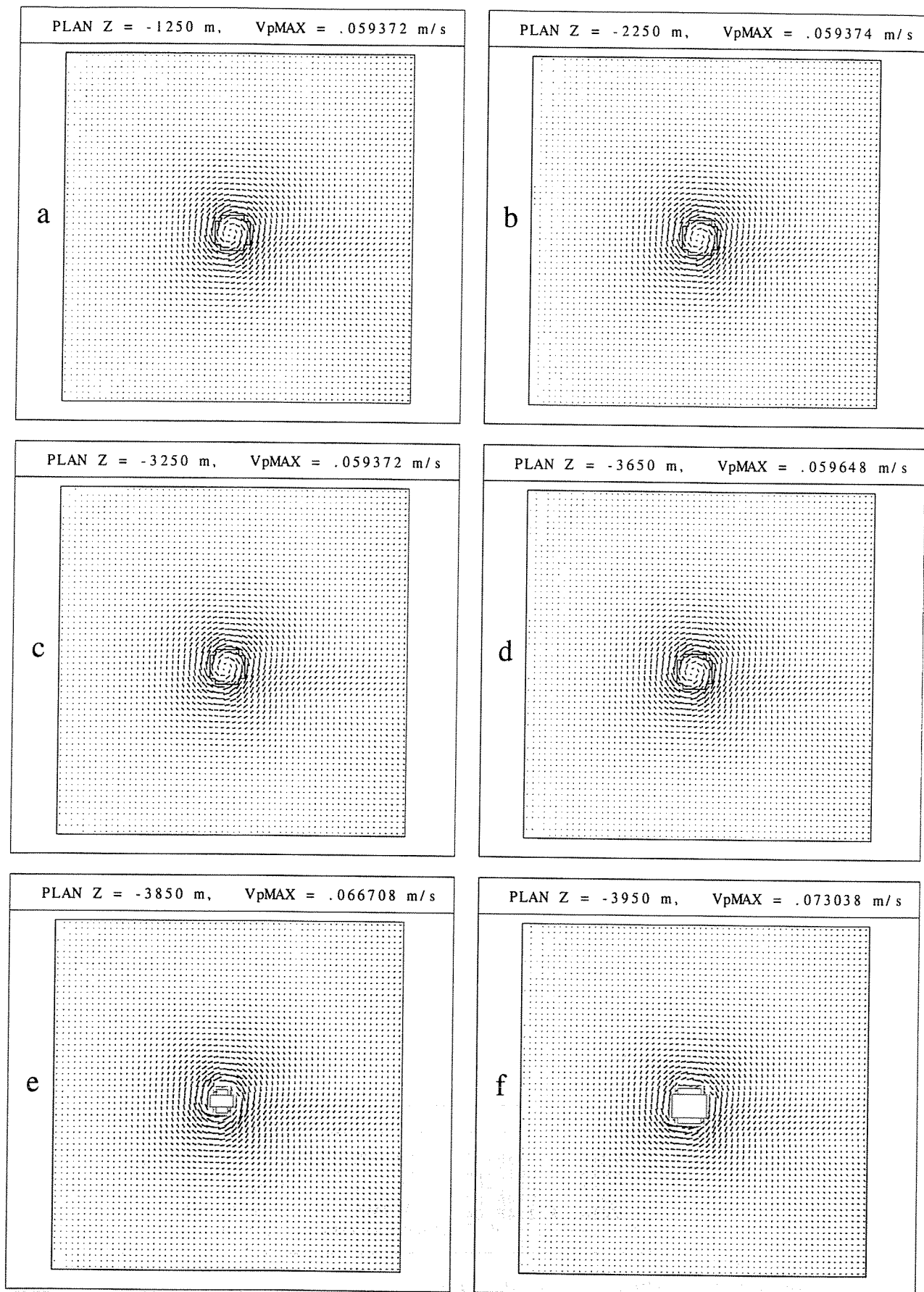


FIG. I.2.9 - Champ stationnaire de vitesse perturbée horizontale (param. idem fig. précédentes).

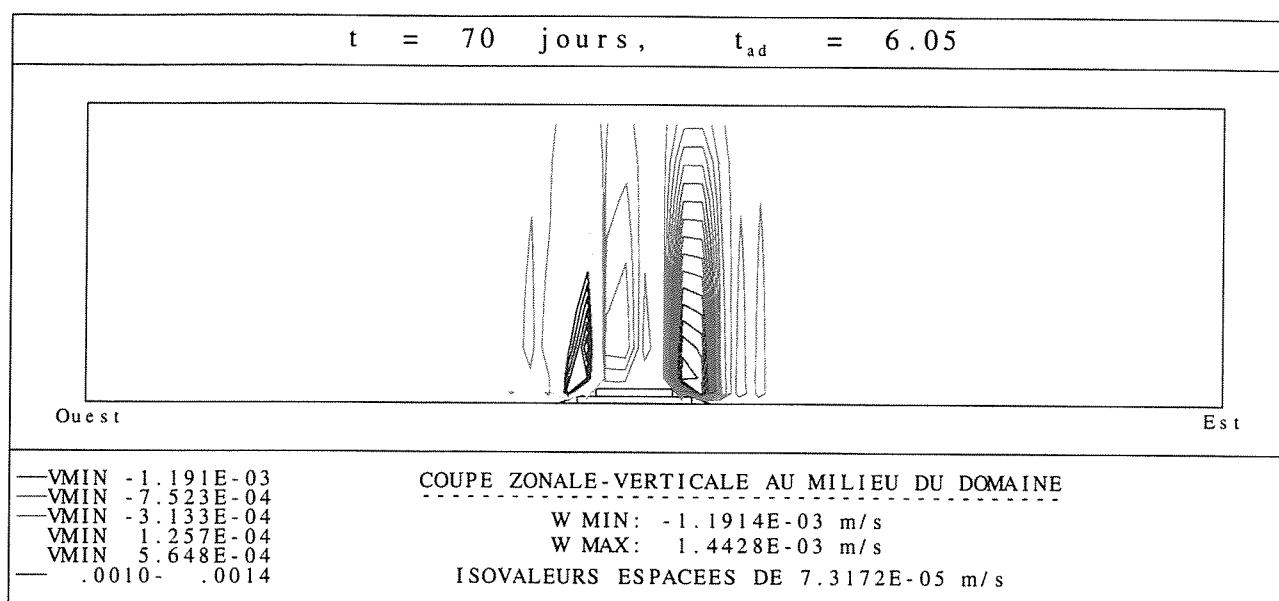


FIG. I.2.10 - Vitesses verticales stationnaires sur une coupe verticale (param. idem fig. précédentes).

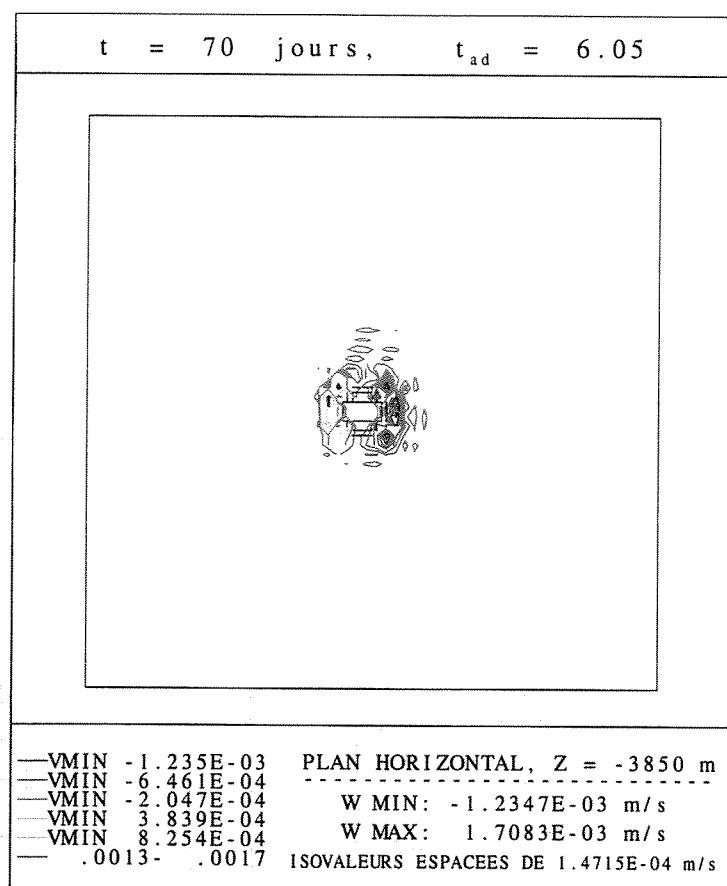


FIG. I.2.11 - Vitesses verticales stationnaires sur une coupe horizontale (param. idem fig. précédentes).

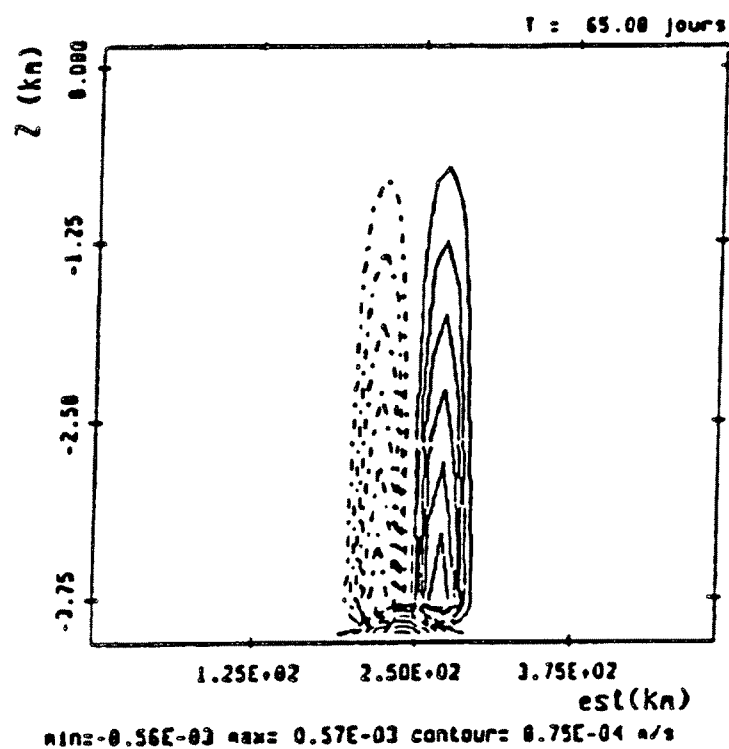


FIG. I.2.12 - Vitesses verticales stationnaires sur une coupe verticale au milieu du domaine, modèle SPEM (Nguyen [46]) (param. idem fig. précédentes).

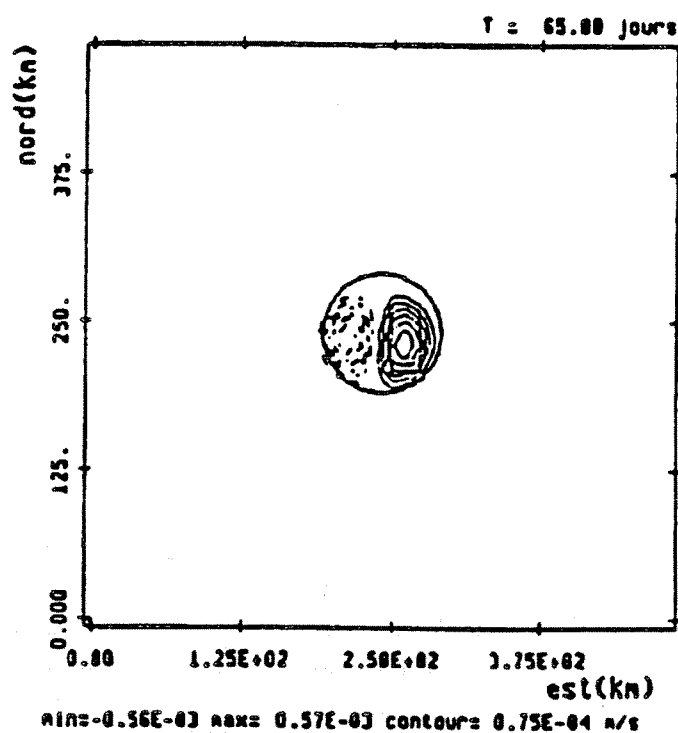


FIG. I.2.13 - Vitesses verticales stationnaires sur une coupe horizontale, $z = -3800$ m, modèle SPEM (Nguyen [46]) (param. idem fig. précédentes).

Ces écarts sont naturellement liés aux approches très différentes des deux modèles quant à la mise en œuvre discrète de la topographie. L'utilisation des coordonnées z implique, en effet, une prise en compte de pentes beaucoup plus fortes qu'avec la discrétisation verticale de type σ . D'ailleurs, les trois zones de maxima observables sur la coupe horizontale correspondent aux trois faces représentant la topographie; de plus, nous retrouvons ces zones sur quasiment toute la verticale.

2.2.3 $\mu=12.5$: effets d'inertie décroissants.

Nous présentons maintenant un régime d'écoulement où la topographie prise en compte est de 500 mètres. La valeur du nombre de Rossby ne change pas mais le paramètre μ atteint donc 12,5. De fait, les effets advectifs dus à l'inertie sont un peu moins importants que lors du cas précédent et l'influence de la rotation va, aux alentours de la topographie, davantage se faire sentir.

2.2.3.a Période d'initiation ($t_{ad} < 1$).

Nous illustrons la phase d'initiation de l'écoulement sur la figure I.2.14, représentant encore la vorticité verticale générée dans le domaine sur une coupe horizontale, sous la surface (toujours au centre de la première maille).

Pour cette valeur de μ , nous retrouvons à nouveau la formation des deux tourbillons (a) mais, par rapport au cas précédent, le tourbillon cyclonique interfère davantage avec le tourbillon anticyclonique en s'enroulant autour de la topographie (b). Le centre de ce vortex positif s'est déplacé vers le sud de la topographie. Un mouvement rotatif s'effectue donc pendant la phase d'initiation de l'écoulement. Ce phénomène est caractéristique de l'influence croissante des effets vorticitaires par rapport à ceux d s à l'advection. L'interaction vorticitaire entre les deux structures tourbillonnaires reste stable durant cette période d'initiation.

2.2.3.b Evolution et comparaisons.

L'évolution temporelle de l'écoulement après la phase d'initiation est représentée sur la séquence I.2.15. Comme lors du cas $\mu=5$, la vorticité positive est progressivement advectée par l'écoulement moyen jusqu'à sortir du domaine à travers la frontière ouverte. Nous avons reproduit, sur la figure I.2.16, les résultats du modèle PE, OPA, discrétisé verticalement, pour l'occasion, avec les coordonnées de type σ . Ces calculs ont été effectués par Lott et al. [40] en 1990 sur ce même type de régime d'écoulement. La discrétisation horizontale est similaire à celle de notre étude mais la direction zonale du domaine est supérieure (750 km). Nous retrouvons qualitativement le même genre de phénomène, néanmoins, un déphasage d'environ 5 jours est observable entre les deux calculs.

Par exemple, la figure I.2.16.a du calcul en coordonnées σ , réalisée à 15 jours physiques ( quivalent à $t_{ad} \approx 1,3$), fait davantage penser à la topologie de l'écoulement dans la phase d'initiation ($t_{ad} < 1$). En effet, l'interaction entre les deux tourbillons semble encore stable. De plus, les deux centres tourbillonnaires sont dans une position transverse, caractéristique de cette phase (Verron et Le Provost [56]). Notons cependant que notre calcul n'a pas fourni une position du centre des vortex aussi transverse. Mais la discrétisation grossière de la topographie peut expliquer que la rotation du tourbillon cyclonique

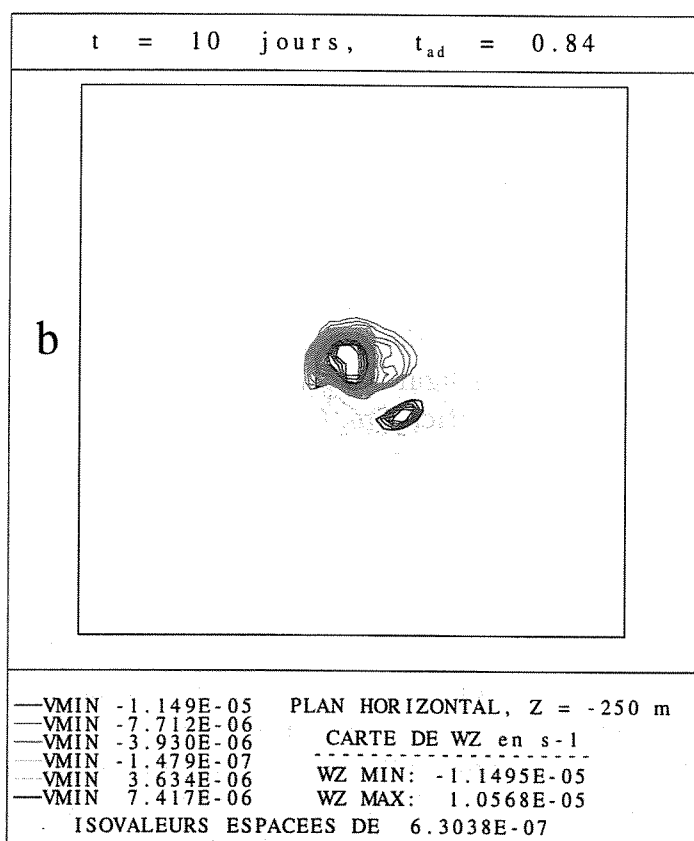
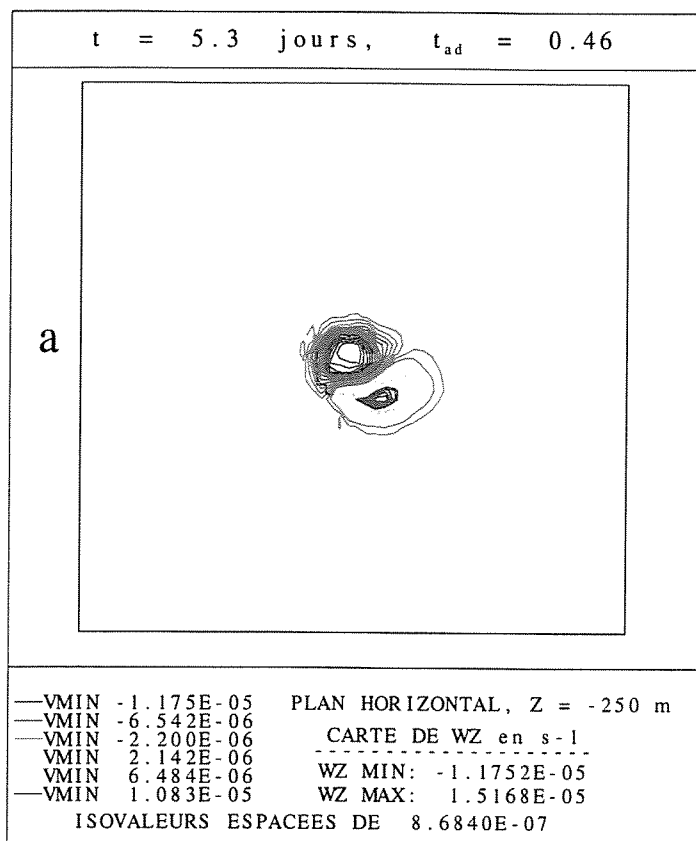


FIG. I.2.14 - Champs de vorticité verticale pendant la phase instationnaire d'initiation de l'écoulement. $\mu = 12.5$, $U_0 = 0.1 \text{ ms}^{-1}$, $h_b = 500 \text{ m}$, $\nu_h = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

décrite par notre modèle structuré soit moins importante qu'avec l'utilisation d'une discrétisation verticale de type σ .

Toutefois, l'avance temporelle observable sur nos résultats est visiblement constante. Ce déphasage s'expliquerait par l'utilisation, dans les calculs de Lott et al., d'une initialisation du calcul par une procédure de montée en régime de l'écoulement, sur une période d'environ 5 jours. De fait, l'évolution des phénomènes se retrouverait décalée. Ce point de détail n'étant pas précisé dans le papier de Lott et al., nous nous en tiendrons pour l'instant à cette hypothèse. Quoiqu'il en soit, les mêmes phénomènes sont clairement observables. Notons, de plus, la bonne correspondance qualitative entre les deux résultats quant à l'inclinaison du tourbillon cyclonique durant son advection. Enfin, par rapport au cas précédent $\mu=5$, nous constatons que le vortex cyclonique est advecté et sort du domaine sur une ligne plus sud-est qu'auparavant. Cette trajectoire semble également caractériser la moindre influence des effets advectifs dus à l'inertie.

2.2.3.c Stationnarité.

Ce cas où $\mu=12,5$ est un cas intermédiaire. En effet, Verron et Le Provost [56] ont pu définir, pour leurs expériences (modèle QG, topographie de type gaussienne), une valeur limite de ce paramètre pour laquelle ils observaient l'advection complète du tourbillon cyclonique et le piégeage de l'anticyclonique au dessus de la topographie. Cette valeur est d'environ 11. Pour des valeurs supérieures, ils décrivent également une période transitoire conforme à nos observations précédentes, puis l'advection du vortex cyclonique en dehors du domaine. Toutefois, ils ne donnent aucune précision quant à l'état stationnaire de l'écoulement pour ce type de régime.

Néanmoins, pour cette même valeur du paramètre μ , Lott et al. [40] classent cette expérience dans la catégorie des régimes d'écoulement où l'effet d'advection est encore fortement prédominant. Ainsi, ils ont comparé leur résultat à celui de la théorie de Huppert, laissant entendre de fait, l'existence d'un état quasi-stationnaire lors de leur simulation. N'ayant pas de précision temporelle sur cet état, nous avons poussé la simulation jusqu'à 140 jours ($t_{ad}=12,1$). L'analyse de la topologie de l'écoulement ainsi que celle de l'évolution des différentes variables nous a montré un état quasi-stationnaire à partir d'environ 60 jours ($t_{ad} > 5$). Toutefois, après l'évacuation du tourbillon cyclonique en dehors du domaine, nous observons, sur les figures I.2.17 a, b et c, un redressement puis un léger battement nord-sud de sillage vorticitaire. Cependant, à partir de 100 jours ($t_{ad} > 8,5$), le sillage s'est stabilisé. Remarquons que le foyer de vortacité cyclonique subsistant est encore localisé, par rapport à la topographie et au cas précédent, au même endroit.

Au niveau quantitatif, la vortacité minimale stationnaire théorique est, pour ce régime, de $-12,5 \cdot 10^{-6} s^{-1}$. A 140 jours, le modèle donne une valeur de $-11,9 \cdot 10^{-6} s^{-1}$, soit une différence d'environ 5%. Notons, de plus, que le pourcentage entre les valeurs absolues des maxima des vorticités cycloniques résiduelles et anticycloniques piégées est de 31%. Ce rapport est plus important que pour le cas $\mu=5$ précédent où la vortacité positive n'atteignait que 22% de la valeur négative (figure I.2.7.a).

Enfin, nous présentons, sur la figure I.2.17.d, la structure de l'écoulement vertical à 140 jours. Par rapport au cas $\mu=5$ précédemment traité,⁹ nous retrouvons qualitativement une topologie de l'écoulement similaire (figure I.2.10). De faibles oscillations sont toujours observables et demeurent également localisées à l'obstacle. Les valeurs maximales sont

9. même vitesse d'entrée mais hauteur de la topographie 2,5 fois plus faible.

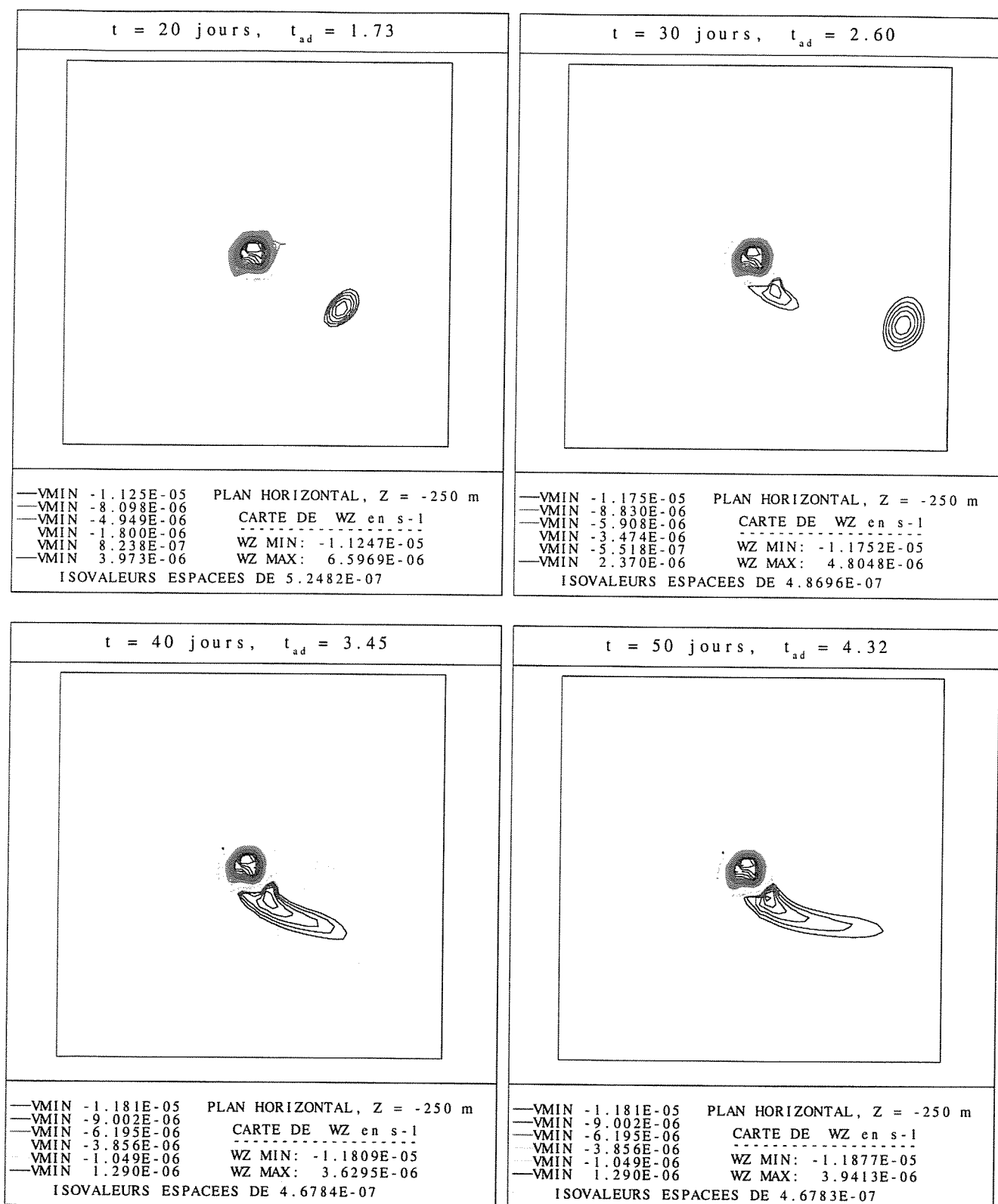


FIG. I.2.15 - Champs de vorticité verticale pendant la phase instationnaire (param. idem fig. précédente).

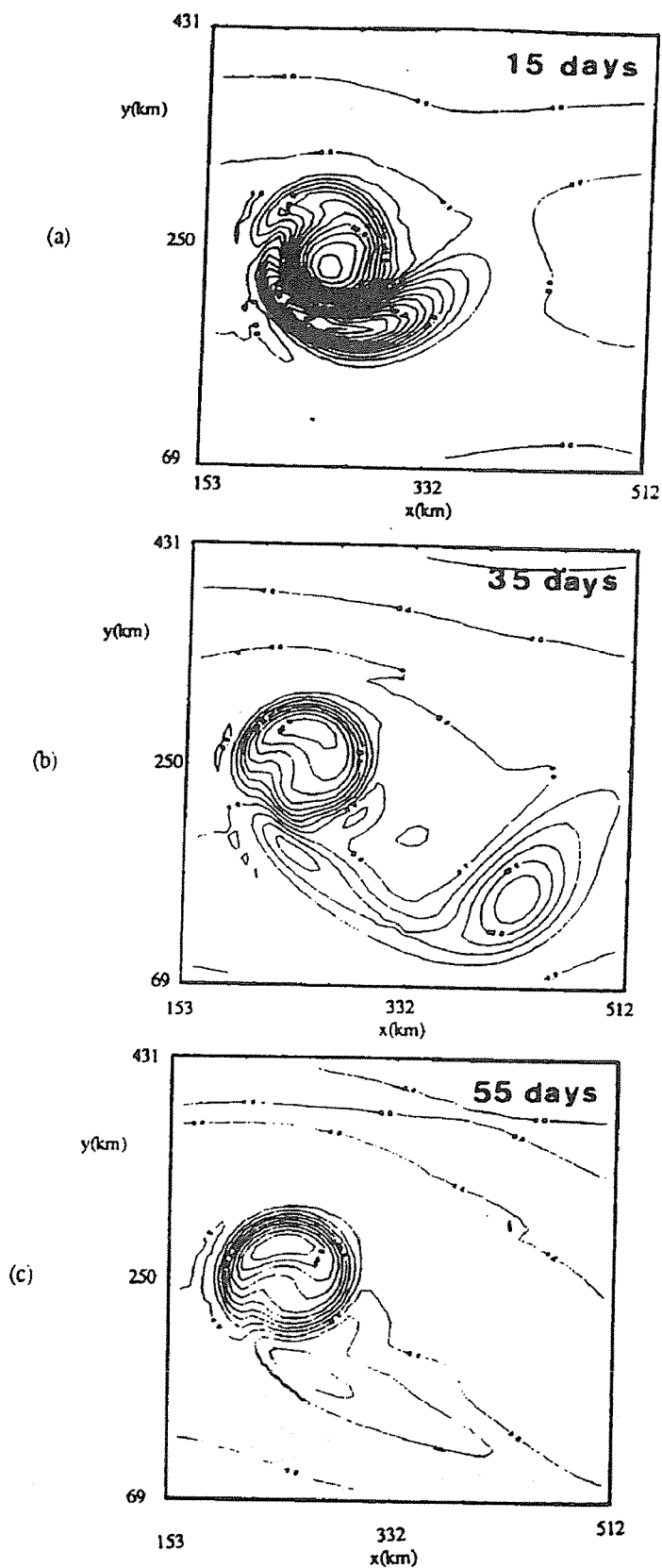


FIG. I.2.16 - Identique à la figure précédente mais modèle OPA avec coordonnées σ (Lott et al. [40]).

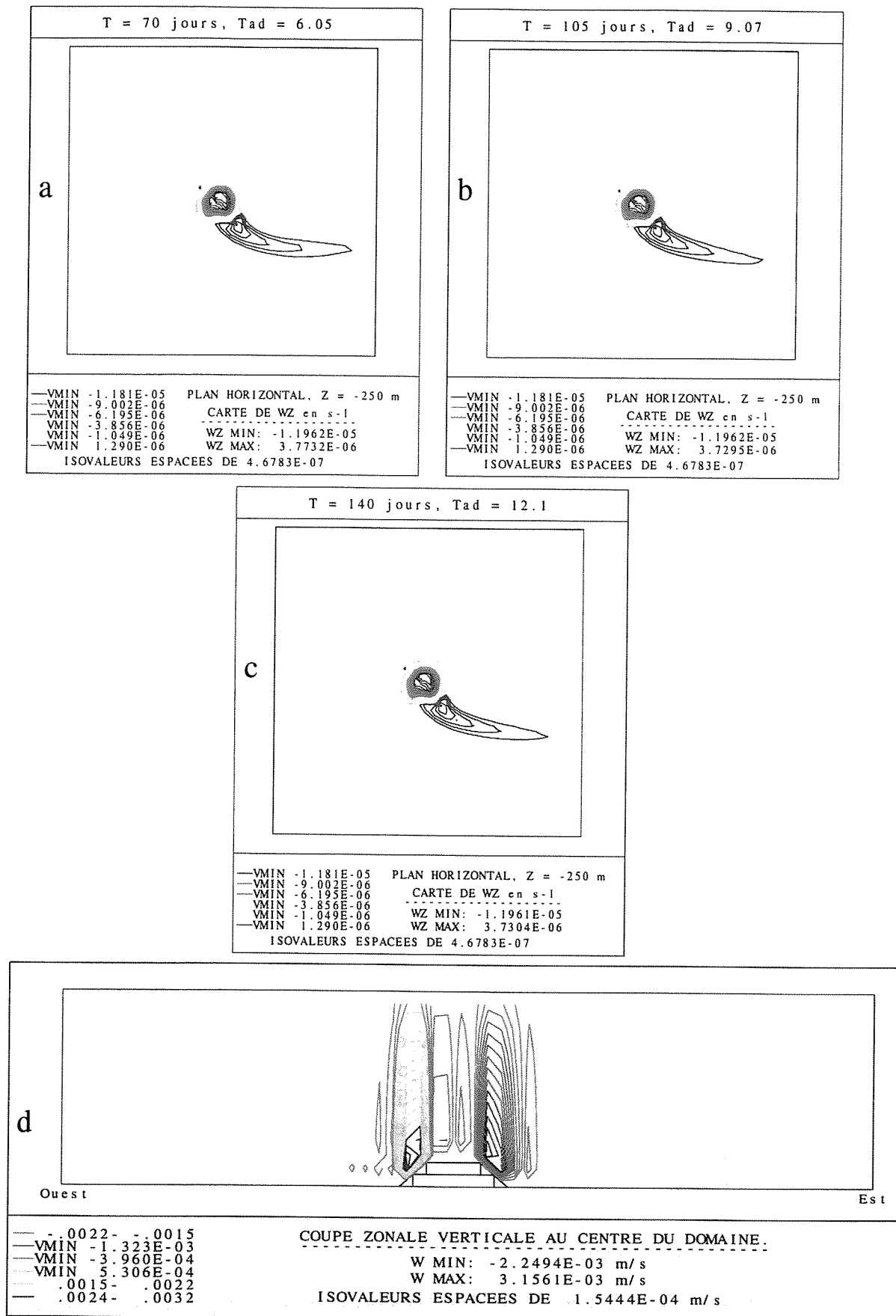


FIG. I.2.17 - Écoulement quasi-stationnaire: **a**, **b**, et **c**: champs de vorticité verticale, **d**: vitesse verticale à 140 jours (param. idem fig. précédentes).

ici plus importantes mais pas exactement proportionnelles à l'augmentation de la topographie (seulement 2,2 fois plus pour la vitesse verticale positive et 1,9 fois plus pour la négative).

2.2.4 $\mu=125$, régime d'ondes topographiques.

Nous allons maintenant illustrer un troisième type de régime d'écoulement. Ce cas test où $\mu=125$ implique des effets vorticitaires liés à la topographie prédominants vis à vis de ceux d'inertie. En effet, la vitesse d'entrée est fixée à 0.01ms^{-1} induisant un nombre de Rossby de 0.001. De fait, le phénomène d'advection observé précédemment n'a plus lieu. Les autres paramètres demeurent identiques au cas $\mu=12.5$.

Pour cette simulation, nous avons mis en œuvre une procédure de montée en régime de l'écoulement, linéaire sur 1,7 jour. Nous avons constaté que ce système permettait d'éliminer certaines perturbations dues à l'initialisation du calcul et localisées au niveau de la frontière ouverte.

2.2.4.a Phénomène et évolution.

Durant la phase transitoire, le phénomène opérant pour ce régime d'écoulement est bien connu (Rhines [50], Verron et Le Provost [56]). Les effets advectifs étant beaucoup moins prépondérants, le tourbillon cyclonique créé reste aux alentours de la topographie. Nous obtenons donc un piégeage des deux structures vorticitaires au dessus de l'obstacle. De plus, ce piégeage s'accompagne d'une importante interférence entre les deux tourbillons de signes opposés. En effet, la paire de vortex oscille périodiquement autour de la topographie. Ce processus définit la solution de ce régime d'écoulement pendant la phase transitoire.

La séquence de cartes de la vortacité verticale, proposée sur la figure I.2.18, illustre bien le phénomène mis en œuvre, sur une période de 30 jours. Nous partons d'une position caractéristique des deux tourbillons (vortex cyclonique à l'aval, anticyclonique à l'amont, figures a et d), pour effectivement observer, par la suite, le mouvement de rotation et l'interpénétration des deux structures (figures b et e). Enfin, la phase ultime de cette oscillation montre une diminution des intensités vorticitaires, liée à la grande interférence entre les vortex (figures c et f). Après cette étape transitoire de "mélange" des deux vorticités correspondant à la fin du cycle de rotation, les deux tourbillons initiaux se reforment pour osciller à nouveau. Remarquons, cependant, l'influence de la dissipation turbulente sur les structures vorticitaires entre les deux cycles représentés. En effet, nous avons poussé l'intégration jusqu'à 75 jours et nous constatons, qualitativement et quantitativement entre chaque cycle, une diminution des intensités vorticitaires au cours de l'intégration temporelle. Ce phénomène oscillatoire amorti peut également se visualiser sur l'évolution temporelle de l'énergie cinétique perturbée moyenne du domaine. Nous reviendrons sur ce point lors du paragraphe suivant.

2.2.4.b Comparaisons.

Ce calcul a également été réalisé par Lott et al. [40] avec le modèle OPA. Comme pour $\mu=12,5$, le maillage discret est similaire au nôtre mais la direction zonale du domaine est de 750 kilomètres. Toutefois, il semble que la discrétisation verticale de la topographie soit

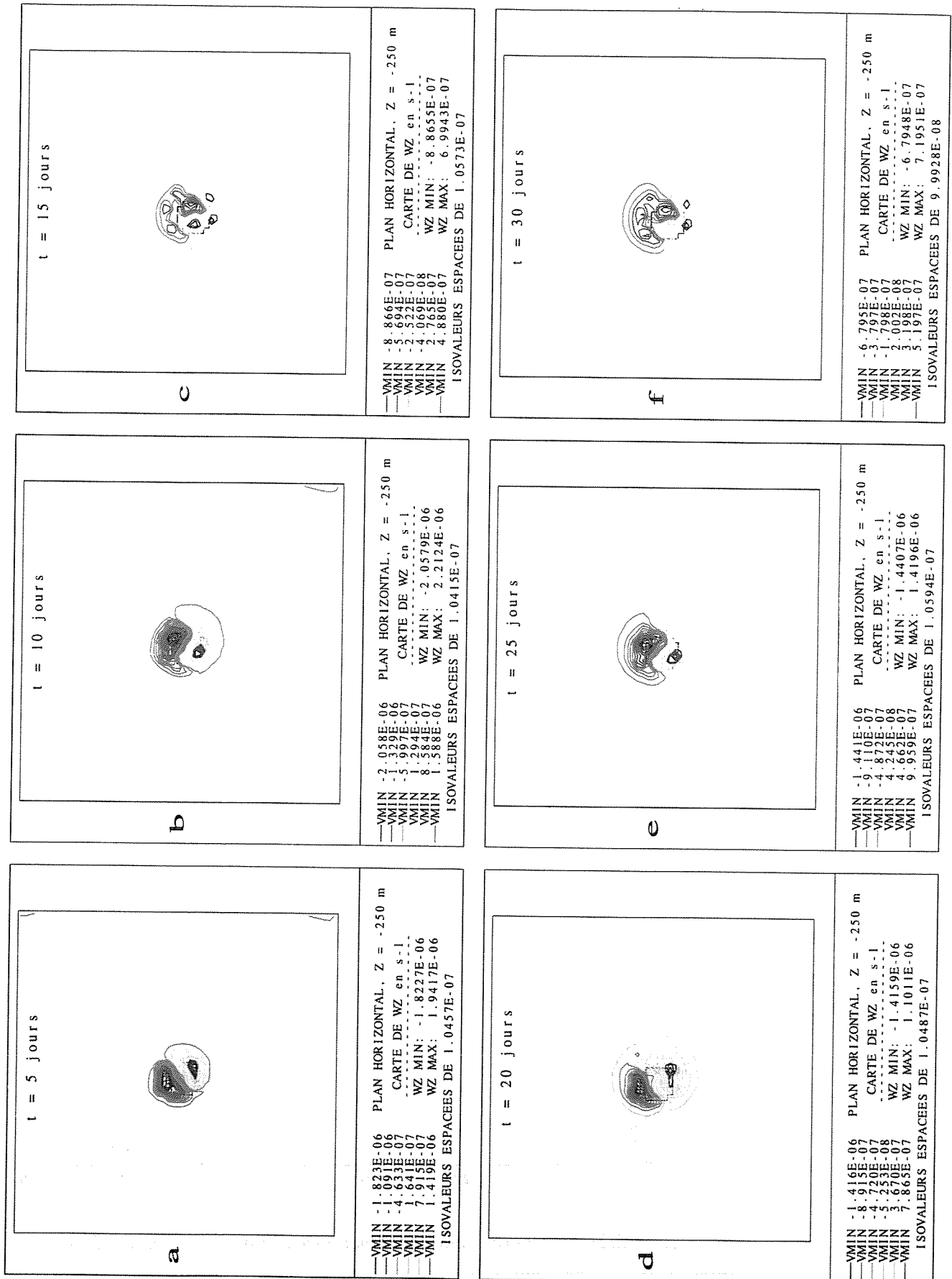


FIG. 1.2.18 - Champs de vorticité verticale, évolution pendant les deux premiers cycles oscillatoires. $\mu = 125$, $U_0 = 0.01 \text{ ms}^{-1}$, $h_b = 500 \text{ m}$, $\nu_h = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

un peu plus précise que la nôtre¹⁰. Ils décrivent le même phénomène mais, malheureusement, ils ne précisent et ne présentent que peu de choses quant aux résultats obtenus. Nous reproduisons néanmoins, sur les figures I.2.19 a et b, des cartes instantanées de la vorticité verticale concernant des simulations effectuées avec coordonnées σ et z . Le temps exact n'est pas mentionné, la légende situant uniquement ces cartes à la fin de la période d'initialisation. Cependant, qualitativement, la figure réalisée avec les coordonnées z ressemble fortement à notre description de la période finale du cycle oscillatoire (figures I.2.18 c et f). En effet, nous observons le même type d'interférences entre les deux structures tourbillonnaires mais, contrairement à la figure I.2.18.a, nous n'avons pas constaté dans le domaine de perturbations zonales aussi importantes, à ce niveau de coupe horizontale. Notons qu'avec les coordonnées σ , la représentation des vortex au même instant propose une bien meilleure définition.

De plus, Lott et al. ont remarqué la génération d'oscillations numériques dues à la représentation en coordonnées z , dans les basses couches et autour de la topographie. Ces perturbations peuvent altérer la solution en bruyant l'écoulement. Nous représentons, sur une coupe zonale verticale, les vitesses instantanées zonale u et méridienne v à 25 jours (figure I.2.20). Pour ce régime fortement instationnaire, nous observons également des oscillations localisées dans les basses couches, aux alentours de l'obstacle. L'absence de précision concernant les calculs de Lott et al. ne nous a pas permis de comparaisons quantitatives plus fines mais quoiqu'il en soit, ces perturbations semblent caractéristiques de la représentation verticale grossière de la topographie en coordonnées z . Nous pouvons tout de même mesurer une valeur caractéristique de ce régime d'écoulement. En effet, nous avons calculé, pour cette simulation, la valeur de la pulsation adimensionnalisée, associée à l'oscillation des tourbillons. Cette pulsation peut s'obtenir en regardant la période temporelle des ondes de l'énergie cinétique perturbée moyennée dans le domaine. La figure I.2.21 montre l'évolution de cette quantité sur une période d'environ 70 jours.

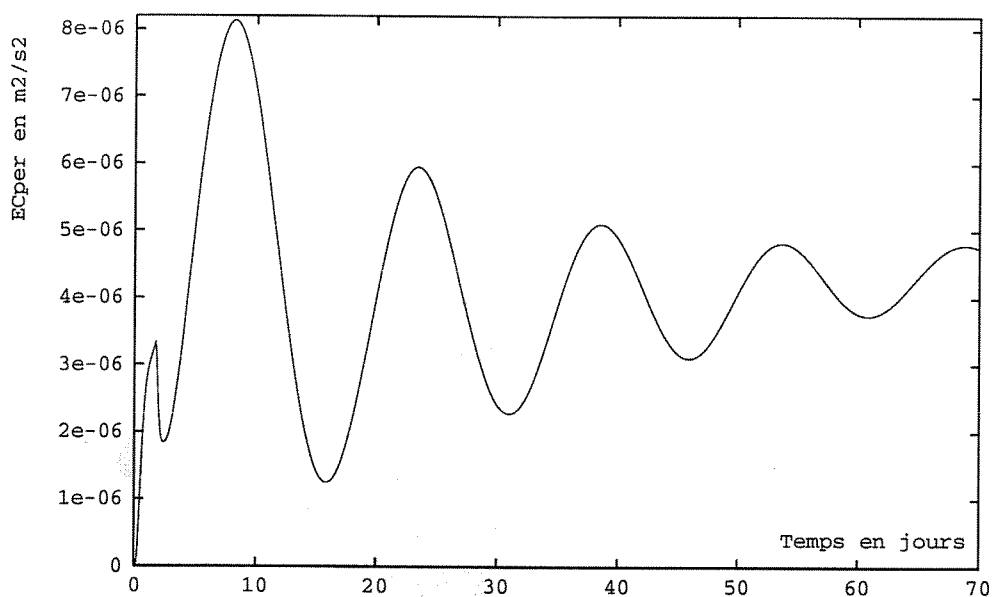


FIG. I.2.21 - *Energie cinétique perturbée moyenne, cas $\mu=125$.*

10. simulation OPA, 3 niveaux : 2 de 200 mètres et 1 de 100 mètres, pas d'information sur la discrétisation horizontale

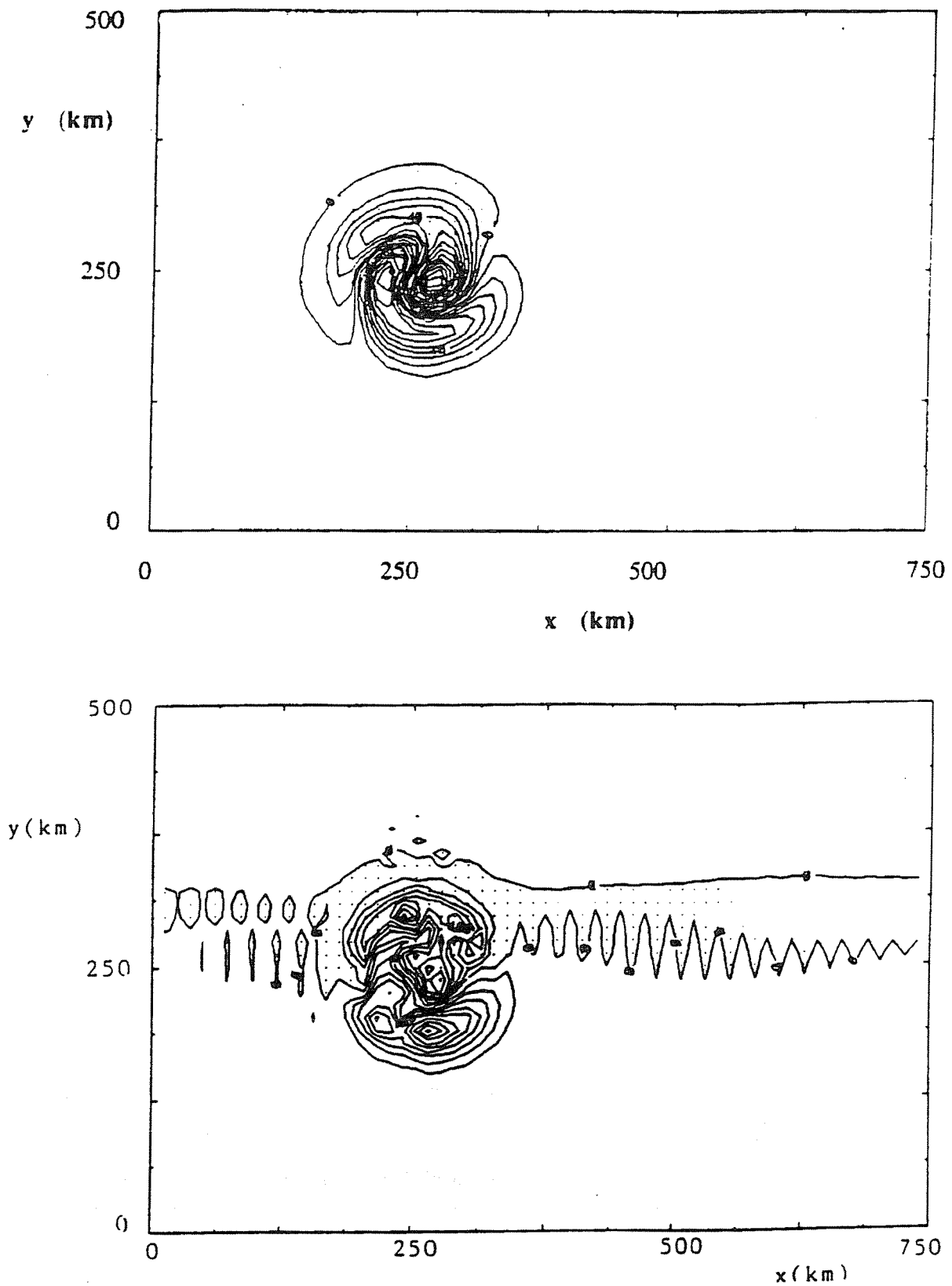


FIG. I.2.19 - Modèle OPA (Lott et al. [40]), vorticité verticale instantannée pour $\mu=125$ avec coordonnées σ (en haut) et z (en bas), (param. idem fig. précédentes, plan $z = -400$ m, contours = 10^{-7}s^{-1}).

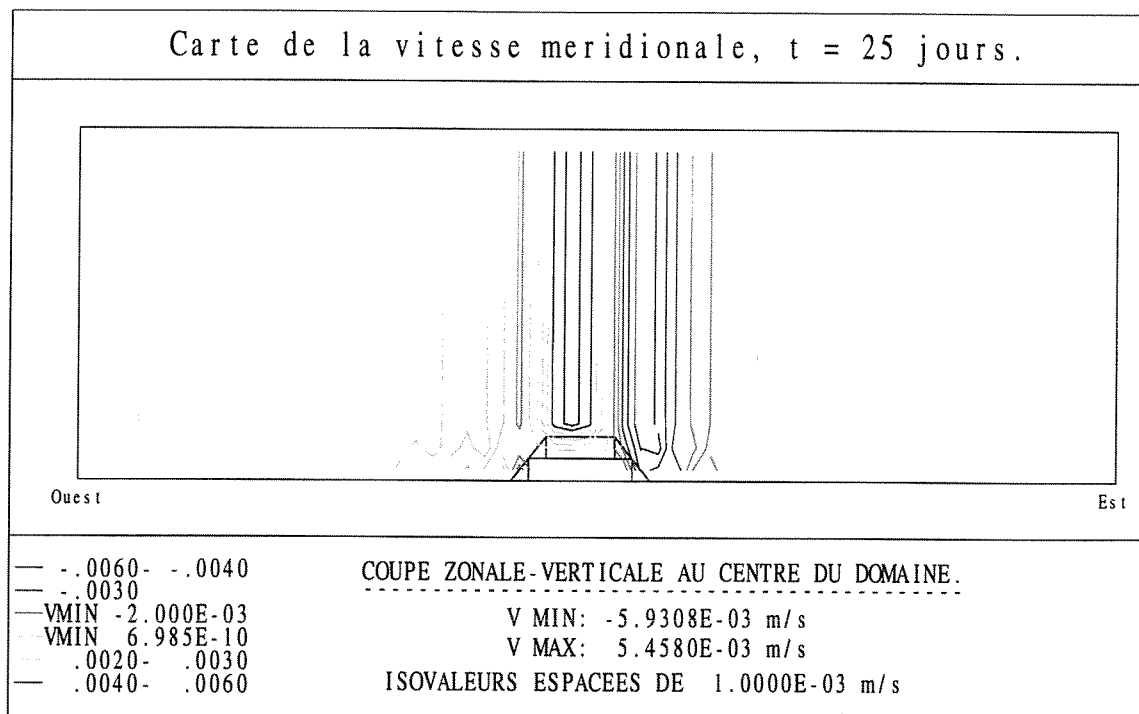
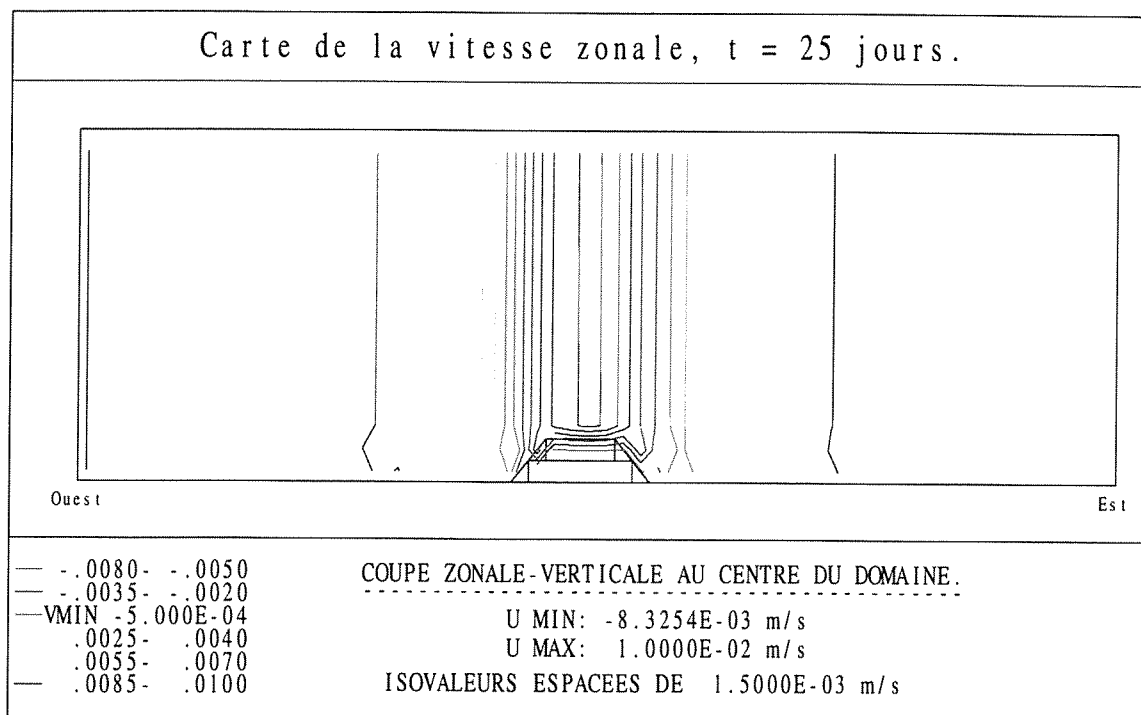


FIG. I.2.20 - Champs des vitesses horizontales instationnaires u et v suivant la verticale (param. idem fig. précédentes).

Tout d'abord, nous visualisons à nouveau le phénomène oscillatoire amorti décrit au paragraphe précédent. Signalons, d'autre part, que les maxima correspondent aux instants où les intensités vorticitaires sont optimums, c'est à dire lorsque les deux tourbillons sont dans une position transverse (cisaillement de vitesse maximum). Par contre, les minimas de l'énergie cinétique perturbée moyenne caractérisent la diminution des intensités vorticitaires correspondant à la phase extrême de "mélange" des deux tourbillons.

En ce qui concerne la pulsation ω , nous remarquons effectivement sur cette courbe, une période constante d'une valeur de 15.04 jours (également repérable sur la séquence de la figure I.2.18). Nous obtenons ainsi une valeur de la pulsation adimensionalisée ω_{ad} de 48.3 ($\omega_{ad} = \omega.L/U_0$). Pour la même discrétisation, OPA, avec les coordonnées z , trouve 49, contre 40,6 avec les coordonnées σ .

Nous concluons donc en remarquant, comme Lott et al., que la discrétisation verticale grossière de la topographie, alliée à la forte instationnarité de cet écoulement semble bruyier le phénomène oscillatoire. A ce propos, Lott et al. ont pu mesurer des pulsations de plus en plus proches de celles obtenues par les calculs en coordonnées σ en réduisant la résolution horizontale puis verticale, diminuant, de fait, l'amplitude des perturbations observées dans les basses couches autour de l'obstacle. ($\omega_{ad}=45,2$ avec une discrétisation de $180 \times 120 \times 24$).

Pour notre modèle, cette étude sur l'influence de la résolution horizontale et verticale reste à entreprendre. Toutefois, nos résultats actuels décrivent les mêmes phénomènes qualitatifs et la pulsation obtenue est très acceptable au regard de la discrétisation adoptée.

2.2.4.c Influence de la géométrie de la topographie.

Nous allons maintenant illustrer brièvement la sensibilité des résultats et, plus précisément, la réponse du code vis à vis de la discrétisation horizontale de la topographie. Nous nous sommes occupés uniquement de la représentation géométrique de l'obstacle, indépendamment de la sensibilité au maillage proprement dit. Ainsi, les discrétisations horizontales et verticales sont conservées ($\Delta x = \Delta y = 8,333$ kilomètres).

Notre préoccupation s'est donc portée sur l'influence de la forme géométrique horizontale de la topographie. En effet, au niveau théorique, les modélisations classiques concernant l'écoulement océanique au dessus d'une topographie isolée mettent en œuvre des obstacles de base horizontale circulaire. Au niveau discret et pour un même maillage horizontal structuré, les modèles QG et l'utilisation des coordonnées σ pour certains modèles PE, permettent une gestion horizontale de la hauteur de la topographie beaucoup plus précise qu'avec une discrétisation verticale en coordonnées z . Cette dernière représentation impose, pour la description discrète de l'obstacle, un compromis entre discrétisations verticales et horizontales. De fait, il peut être intéressant de connaître les différences qualitatives et quantitatives dues aux modifications de la forme de la topographie.

Pour cela, nous avons recalculé l'écoulement à $\mu=125$. La hauteur de la topographie reste à 500 mètres, la discrétisation verticale est conservée (2 couches de 250 mètres), mais horizontalement, nous avons pris en compte une topographie de forme carrée c'est à dire sans "décrochement" au niveau des coins de l'obstacle (cf. figure I.2.3). Signalons que les parois inclinées sont toujours présentes et orientées de façon identique. La figure I.2.22 propose une comparaison de l'évolution des courbes de l'énergie cinétique perturbée moyenne dans le domaine, pour les deux formes de topographie précitées.

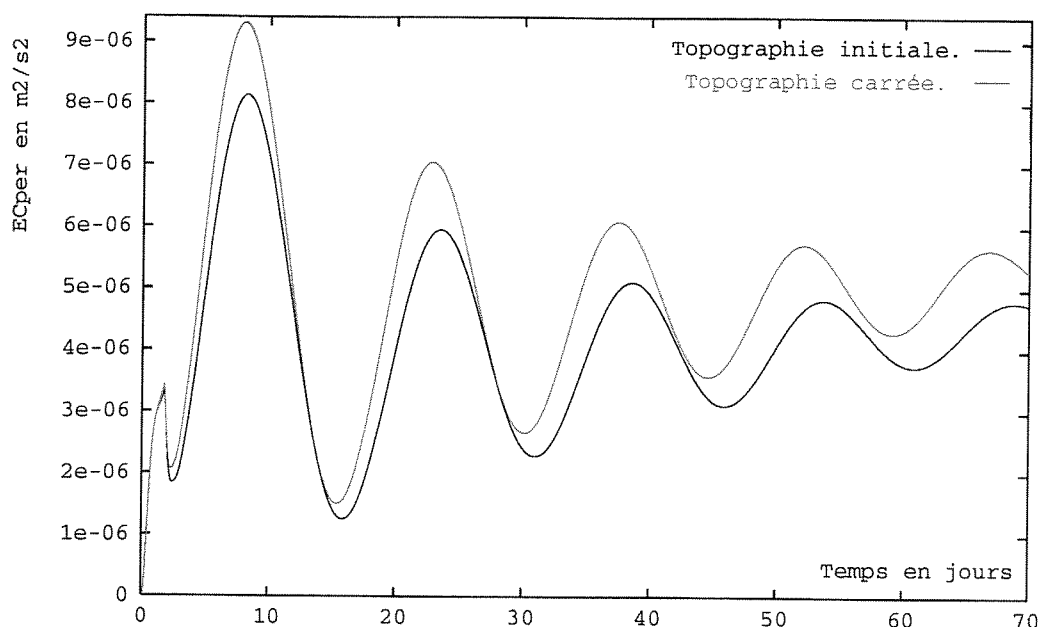


FIG. I.2.22 - Comparaison de l'énergie cinétique perturbée moyenne, cas $\mu=125$.

Nous constatons que la période d'oscillation mise en jeu, pour le calcul concernant la topographie horizontalement carrée, est légèrement plus courte que lors du calcul initial du paragraphe précédent. Numériquement, nous obtenons ainsi une pulsation adimensionnelle de 49.3 contre 48.3 pour le cas initial. Rappelons, à ce sujet, que pour le même type de calcul, le modèle OPA avec coordonnées z trouve une pulsation de 49, contre 40.6 avec la discrétisation σ . Ainsi, cette géométrie de l'obstacle ralentit de manière non négligeable la dynamique des deux vortex. Ce résultat illustre qu'à discrétisation fixée, la forme géométrique de la topographie, peut également influencer la valeur de la pulsation de l'onde circulaire.

De plus, nous constatons, entre les deux calculs représentés sur la figure I.2.22, une légère différence d'intensité d'énergie cinétique perturbée moyennée dans le domaine. Cette augmentation d'intensité est imputable à une contribution plus importante de la surface perturbée provoquée par la nouvelle géométrie de la topographie, ainsi qu'aux petites augmentations des maxima locaux.

Enfin, la figure I.2.23 présentent les interférences vorticitaires pendant le premier cycle d'oscillations. Comparativement à la figure I.2.18, nous trouvons qualitativement une certaine influence de la forme de la topographie sur les structures tourbillonnaires. En effet, les isovalues décrivent assez fidèlement le nouveau contour de la topographie. Signalons qu'un calcul similaire concernant le cas $\mu=5$, illustre le même comportement qualitatif du vortex anticyclonique piégé au dessus de la topographie (Clément [18]).

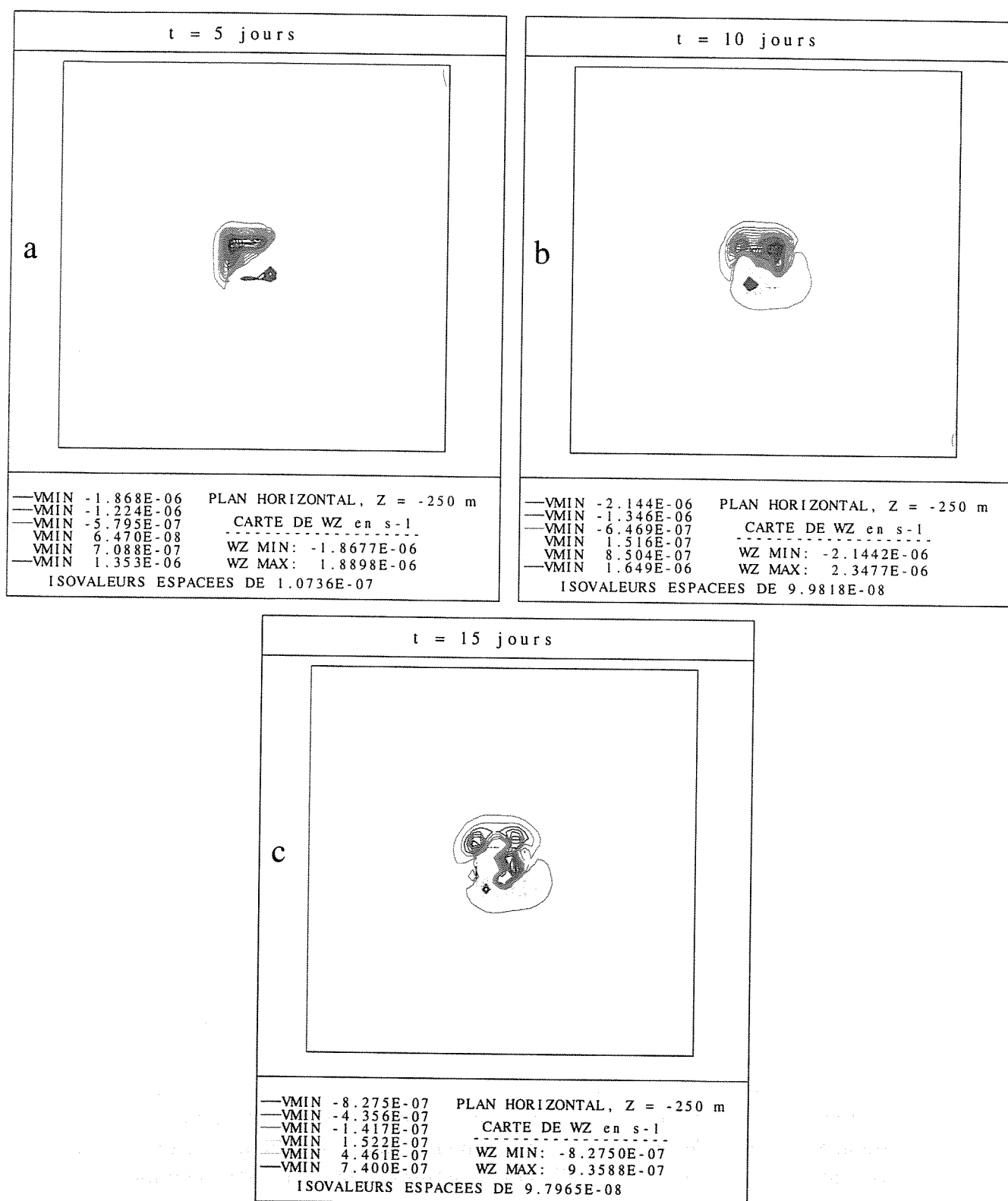


FIG. I.2.23 - Prise en compte d'une topographie carrée, évolution du champ de vorticité verticale pendant le premier cycle oscillatoire (param. idem fig. précédentes).

2.3 Prise en compte d'une stratification thermique.

En présence d'une stratification thermique stable, nous avons effectué le calcul concernant le cas $\mu = 5$. Le but est ici de pouvoir observer la réponse du code à ce type de prise en compte supplémentaire. Pour cela, et comme nous l'avons déjà indiqué dans la présentation de cette simulation, nous avons mis en œuvre deux intensités de stratification, dont les nombres de Burger caractéristiques sont fixés à 0,352 et 1,056 (cf. équa. I.2.3).

2.3.1 Conditions des calculs.

2.3.1.a Domaine et conditions limites hydrauliques.

Nous conservons les mêmes types de représentation discrète pour le domaine et la topographie que lors des calculs barotropes (cf. figure I.2.3).

Cependant, nous avons constaté que la mise en œuvre du toit rigide provoque un blocage convectif. En effet, dans la dernière couche proche de la surface, les montées d'eau plus froide induites par la présence de la topographie ont tendance à s'accumuler sous le toit rigide. Ainsi, pour que ce blocage ne perturbe pas le développement de la dynamique lié à la stratification dans les couches inférieures, nous avons rajouté une maille verticale de 100 mètres de manière à "confiner" ce phénomène marginal au niveau de la surface. Nous reviendrons plus précisément sur ce détail dans la suite de l'exposé.

Le domaine comporte donc 39600 mailles ($60 \times 60 \times 11$). On impose toujours une condition de vitesse entrante U_0 de 0.1 ms^{-1} sur la face *ouest* et la condition d'Orlanski sur la face *est*. Sur les autres faces limites et sur la topographie, on applique à nouveau une condition de glissement sans frottement.

2.3.1.b Paramètres et options.

Pour les calculs présentés, les coefficients de viscosité et de diffusion turbulentes anisotropes sont fixés à :

$$\nu_h = \alpha_h = 500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ suivant l'horizontale,}$$

$$\nu_v = \alpha_v = 1.10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ suivant la verticale.}$$

Remarques :

Lors du traitement de ce même cas d'étude par le modèle SPEM, Nguyen [46] a utilisé un opérateur bilaplacien pour la diffusion horizontale ($\nu_h = 5.10^{10} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$). La figure I.2.24, donnée par Verron et Le Provost [36], permet de relier la valeur des coefficients et l'échelle de temps de dissipation des tourbillons créés dans l'écoulement, en fonction de l'opérateur dissipatif choisi. Cette correspondance montre que le rendement entre le temps caractéristique de dissipation et la taille des structures à dissiper reste favorable au bilaplacien (dissipation rapide aux échelles de troncature et lente à grande échelle).

Afin de se rapprocher de l'effet de cette dissipation plus sélective avec l'opérateur laplacien, nous avons donc augmenté la valeur barotrope initiale de ν_h . A l'échelle de troncature, nous dissiperons cependant de manière moins efficace. Soulignons, d'autre part, que la stratification introduit, par rapport au cas barotrope, un renforcement du courant dans les basses couches. Cette augmentation doit donc également assurer la stabilité du modèle.

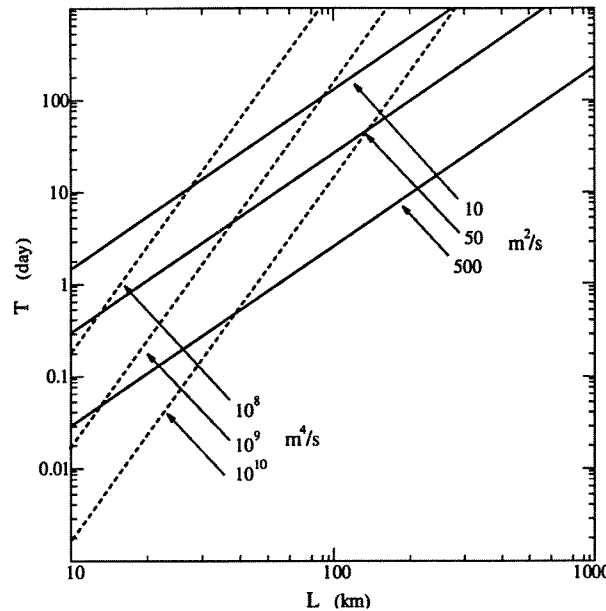


FIG. I.2.24 - Opérateurs dissipatifs laplacien et bilaplacien (Le Provost et Verron [36]).

Nous admettons, par ailleurs, que le nombre de Prandtl reste voisin de 1. Pour notre cas de simulation à méso-échelle, nous n'avons aucune raison à priori pour supposer que, suivant chaque direction, les coefficients de diffusion et de viscosité soient différents.

Concernant la direction verticale, Nguyen a conservé la modélisation par laplacien, mais avec un coefficient relativement important ($\nu_v = 0,1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Cette valeur peut se justifier en regardant l'ordre de grandeur des échelles mises en jeu. Dans ce bassin de méso-échelle, le rapport entre les échelles dissipatives peut s'évaluer par : $\nu_v/\nu_h \approx (D/L)^2 \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$. Pour notre part, nous avons utilisé des valeurs reconnues comme "plus réalistes", même si ces ordres de grandeur sont généralement mis en œuvre dans des simulations de phénomènes physiques différents¹¹. Toutefois, en utilisant une faible valeur pour le coefficient vertical de diffusion, nous favorisons la transmission de l'information par convection plutôt que par diffusion, évitant ainsi de mélanger trop rapidement et trop fortement la stratification.

Nous sommes conscients que le choix de ces coefficients demeure approximatif. Concernant ce type de simulation, nous n'avons pas trouvé d'autres informations, numériques ou expérimentales, permettant de paramétrer plus précisément.

Les options de calcul font toujours intervenir les modèles de transport non-linéaires du 2^e ordre (Quick-sharp pour l'hydraulique et Quick-fram pour la thermique). Le système linéaire en pression est encore inversé par résolution directe.

2.3.1.c Mise en œuvre des stratifications thermiques.

Comme nous l'avons vu, les effets dus à la stratification sont pris en compte, grâce à l'approximation de Boussinesq, sous la forme d'une force de volume :

$$\vec{F}_{vol} = \beta_t(T - T_0)\vec{g}$$

11. forçages hydrauliques et thermiques au niveau de la surface, plutôt pour des simulations de grande échelle avec dynamique liée au β -plan (voir Weaver et Sarachik [58] ou Pacanowski et Philander [48]).

En pratique, pour étudier l'effet de différentes intensités de stratification, il est possible de faire varier les écarts de température de chaque couche entre la surface et le fond, ou bien de fixer ces écarts et de faire varier le coefficient de dilatabilité thermique β_t .

En raison de la commodité d'utilisation et de programmation, cette dernière option a été choisie. La valeur absolue des températures n'a ainsi pas d'influence. Seul le gradient vertical, fixe la stratification. On impose donc à l'instant initial, au centre de chaque maille du domaine, une loi linéaire $T(z)$ de la forme :

$$T(z) = T_0 + \frac{\delta T}{D} \times z \quad (\text{I.2.9})$$

où z est la coordonnée verticale négative du centre de chaque maille sous la surface et δT la variation de température imposée entre la surface et le fond D .

Dans ces conditions, la fréquence de Brunt-Väisälä N étant connue et constante dans tout le domaine, on en déduit, à partir I.2.4, l'expression de la dilatabilité thermique correspondante, soit :

$$N^2 = g\beta_t \frac{\delta T}{D} \implies \beta_t = \frac{N^2 D}{g\delta T} \quad (\text{I.2.10})$$

Conditions limites :

Nous appliquons en entrée une condition thermique de Dirichlet. On impose donc sur la face *ouest* les mêmes valeurs que celles choisies pour initialiser la stratification dans le domaine. En sortie, la condition d'Orlanski, initialisée comme pour la face *ouest*, estimera à chaque pas de temps la valeur de la température à la face *est*. On suppose que toutes les autres faces limites restent adiabatiques (nord, sud, surface, fond et topographie).

Influence de la stratification sur le pas de temps :

La propagation de l'onde interne de gravité (haute-fréquence) peut être responsable d'une limitation du pas de temps. A cet égard, Nguyen [46] suggère, à partir de l'équation des ondes d'inertie-gravité en milieu non tournant, une expression du pas de temps de stabilité en fonction de la fréquence de Brunt-Väisälä N et de la profondeur D du domaine :

$$\Delta t_{\text{strat}} \leq \frac{\pi \Delta x}{ND} \quad (\text{I.2.11})$$

Pour son cas pratique d'écoulement au dessus d'une topographie isolée, il constate que cet indicateur de stabilité numérique semble même nécessiter un facteur limitatif (0,3). Notre champ d'application tendant notamment à retrouver certains résultats de Nguyen, il convient de garder à l'esprit ce type de stabilité. Elle devient, en effet, prépondérante lorsque l'intensité de la stratification est forte.

Quoiqu'il en soit, dans nos équations, l'éventuelle diminution du pas de temps qu'impliquerait la prise en compte de la stratification doit être intégrée dans le calcul de la condition de stabilité généralisée I.1.20. Il est néanmoins intéressant d'avoir une petite idée de l'ordre de grandeur de cette valeur avant toute application.

Ainsi, pour la forte stratification ($B = 1,056$), Nguyen préconise un pas de temps de l'ordre de 700 secondes. Nous avons utilisé un pas de temps fixé à 400 secondes. Ce facteur de sécurité est préférable (utilisation du schéma Quick) mais non optimisé (nous n'avons pas réalisé d'étude paramétrique à ce sujet).

2.3.1.d Initialisation des calculs.

Rappelons que le gradient de pression est le terme calculé qui équilibre les forces appliquées aux particules fluides. Nous illustrerons et vérifierons, dans le chapitre suivant, cette propriété du gradient de pression. Ainsi, comme nous l'avons déjà souligné, ces mécanismes sont susceptibles de créer dans les premiers pas de temps un choc en pression générateur de perturbations, localisées principalement au niveau de la sortie libre. Des problèmes de stabilité numérique nous ont donc amenés à introduire des conditions particulières d'initialisation des calculs. Ces précautions initiales ont pour but d'atténuer ce choc et d'éviter la propagation ou l'amplification dans l'écoulement d'éventuelles perturbations générées par celui-ci.

Montée en régime hydraulique :

Une procédure de "spin-up" sur les vitesses a été mise en place. La vitesse en entrée croît selon une loi hyperbolique :

$$U_{ouest}(t) = U_0 \times \tanh\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (\text{I.2.12})$$

Nguyen [46] utilise également cette méthode, la valeur de t_0 qu'il a choisie est fonction du temps caractéristique de l'écoulement : $L/U_0 \approx 11,6$ jours. Il a choisi une montée en régime dont le temps caractéristique est petit devant L/U_0 : $t_0 \approx 1,5$ jours. Cette valeur permet d'atteindre la vitesse $0,99 \times U_0$ en entrée en 4 jours.

Ce temps s'est avéré trop faible pour limiter de façon satisfaisante nos problèmes initiaux. Le temps t_0 choisi pour nos simulations nous conduit à atteindre la vitesse $0,99 \times U_0$ au bout de 6 jours ($t_0 = 2,4$ jours, avec $U_0 = 0.1 \text{ m/s}$).

Condition de sortie libre :

La formulation de la condition de sortie d'Orlanski nécessite la connaissance, au niveau de la face *est*, des deux derniers pas de temps. Au niveau hydraulique, les vitesses sont, comme pour les calculs barotropes, initialisées à 0. La montée hydraulique permet d'initialiser progressivement la pression de sortie.

En présence de stratification et dès le premier pas de temps, il y a nécessité de fournir à la pression extérieure la bonne condition limite conforme à l'équilibre barocline. En effet, une initialisation de la pression à 0 provoque une grosse erreur lors du recalcul de la vitesse zonale par le gradient de pression. Pour remédier à ce problème, la condition d'Orlanski est "écrasée" aux deux premiers pas de temps au profit d'une condition limite de type "périodique" : en sortie, le gradient zonal de pression est fixé à 0 et les vitesses sont imposées égales aux vitesses en entrée. Ces deux pas de temps nous permettent ainsi de connaître et d'initialiser correctement la pression de sortie.

2.3.2 Résultats et comparaisons.

2.3.2.a Vorticité verticale.

Dans le cas faiblement stratifié ($B = 0,352$), nous constatons à nouveau la formation des deux tourbillons topographiques. Pendant la phase instationnaire (fig. I.2.25.a et b), nous retrouvons un tourbillon anticyclonique, caractérisé par une vorticité verticale négative, localisé au dessus de la topographie et, en aval, un tourbillon cyclonique de vorticité

positive. L'effet de la stratification se fait cependant ressentir dans les basses couches. En y renforçant l'intensité de la déviation horizontale du fluide, la stratification déforme quelque peu les tubes cylindriques de vorticité verticale. Comme pour le cas barotrope (fig. I.2.26), le vortex cyclonique est advecté par l'écoulement moyen entre 30 et 40 jours. Le tube anticyclonique reste également piégé au dessus de l'obstacle. Il semble subsister toutefois une zone vorticité positive localisée au *sud-est* de la topographie.

A forte stratification ($B=1,056$), les figures I.2.25.c et d montrent la transformation des tubes quasi-bidimensionnels de vorticité verticale en cônes. Ces déformations tridimensionnelles caractérisent, par rapport aux cas barotrope et faiblement stratifié, le fait que dans les couches supérieures, le fluide est de moins en moins perturbé lorsque l'intensité de la stratification augmente. Une colonne de fluide arrivant sur la topographie va plutôt avoir tendance à contourner l'obstacle. De fait, le mécanisme de compression dont dépend la création de vorticité négative est fortement inhibé. Il en est de même pour la vorticité positive liée à la décompression de cette colonne à l'aval de la topographie. Une partie de ces structures est advectée par l'écoulement entre 30 et 40 jours. Toutefois, on conserve de chaque côté de la topographie, un sillage vorticité plus marqué que dans le cas faiblement stratifié.

Après 40 jours, l'écoulement se stabilise et atteint, à partir de 60 jours, une phase quasi-stationnaire. Nous présentons, sur la figure I.2.27, l'allure des isolignes des vorticitt s verticales stationnaires pour les deux cas de stratifications et sur deux coupes horizontales (-2750 et -3650 mètres).

Qualitativement, nous remarquons que pour chaque intensité, les centres des zones cycloniques et anticycloniques ne sont pas situés au même endroit. A cause de la rotation terrestre, l'écoulement devient dissymétrique par rapport à la direction privilégiée *est-ouest*. Cette caractéristique est renforcée par la stratification. Pour $B = 0,352$ (fig. I.2.27.a et b), nous retrouvons le même type de localisation que pour le cas barotrope (fig. I.2.7.a). Pour $B = 1,056$, les tourbillons se situent plutôt sur un axe *nord-sud* vis à vis de la topographie. Cette topologie évoque davantage les fortes valeurs du paramètre μ étudiées dans le cas barotrope. En effet, on observe, dans les basses couches, une tendance à l'appariement des deux tourbillons. Ceci traduit le confinement des effets vorticités et leur prépondérance vis à vis de l'effet d'advection. Tout se passe comme si, le choix de D comme échelle de longueur verticale pouvait être remplacé par une échelle locale, plus faible, caractérisant la hauteur de perturbation réelle de l'écoulement en présence de forte stratification.

Quantitativement, les valeurs obtenues illustrent le cisaillement vertical des vitesses horizontales. En effet, entre les deux couches, nous constatons une variation de la vorticité verticale minimale d'un facteur 2 pour la faible stratification et 7 pour $B = 1,056$. A ce sujet, la courbe I.2.28 représentant ces variations suivant la profondeur et au dessus de la topographie reste relativement conforme au profil donné par Nguyen [46] (fig. I.2.29), bien que quantitativement, il existe des différences liées notamment aux mécanismes et aux valeurs utilisées pour la mise en œuvre de la dissipation et de la diffusion¹². Nous vérifions bien que l'écoulement barotrope est indépendant de la verticale. Par ailleurs, nous retrouvons la tendance de l'écoulement stratifié à générer une vorticité verticale plus faible que le cas barotrope dans les couches supérieures et, à l'inverse, plus forte dans les basses couches plus perturbées.

12. voir section "paramètres et options".

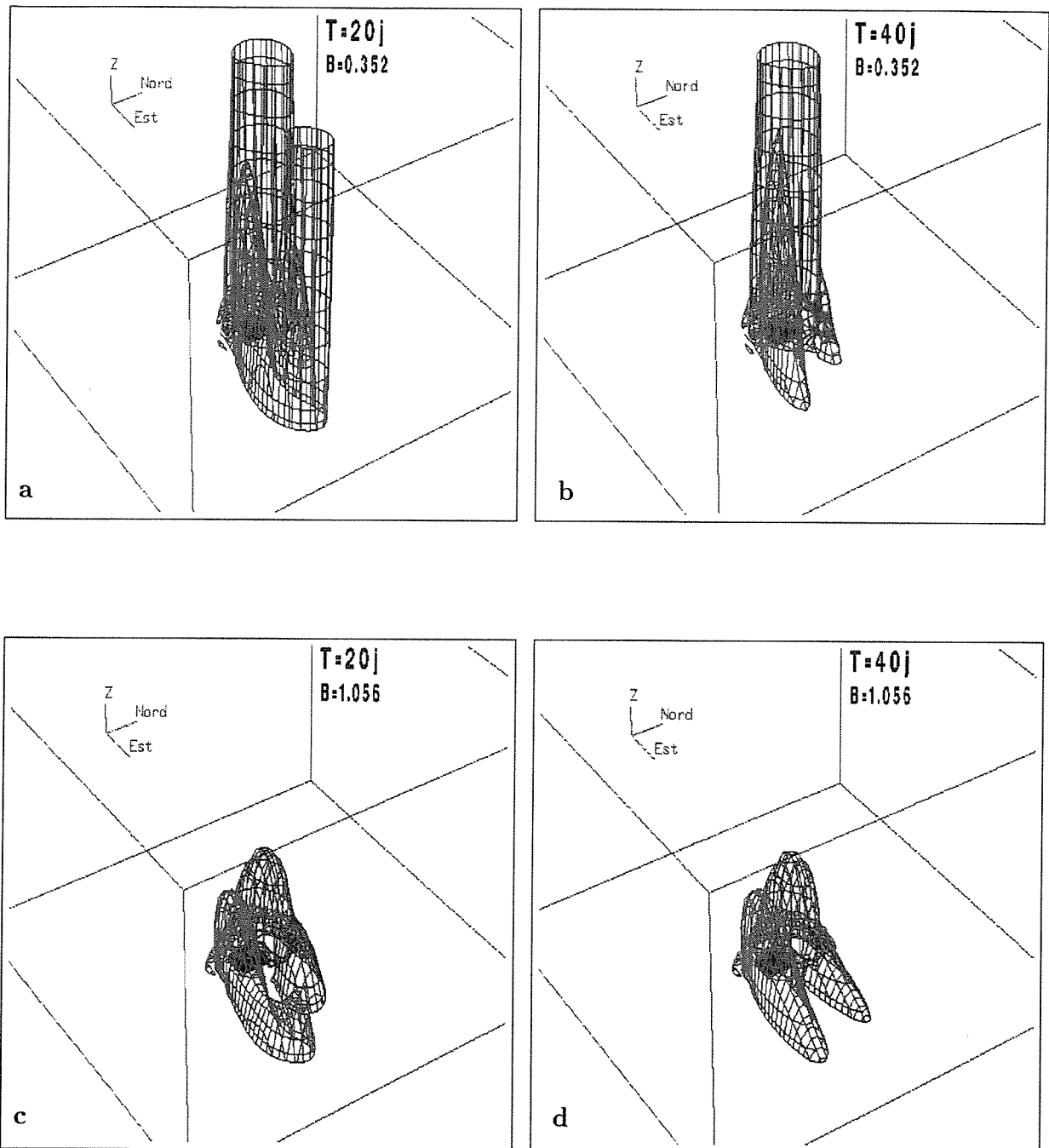


FIG. I.2.25 - Évolution instationnaire de deux isosurfaces de la vorticité verticale ω_z , calculs pour les deux intensités de stratification.

Iso. bleu : $\omega_z = -1.10^{-6} s^{-1}$ (arrière plan), iso. rouge : $\omega_z = 8.10^{-7} s^{-1}$ (premier plan).

Paramètres : $\mu = 5$, $U_0 = 0.1 m s^{-1}$, $h_b = 200 m$, $\nu_h = \alpha_h = 500 m^2 s^{-1}$, $\nu_v = \alpha_v = 10^{-4} m^2 s^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$.

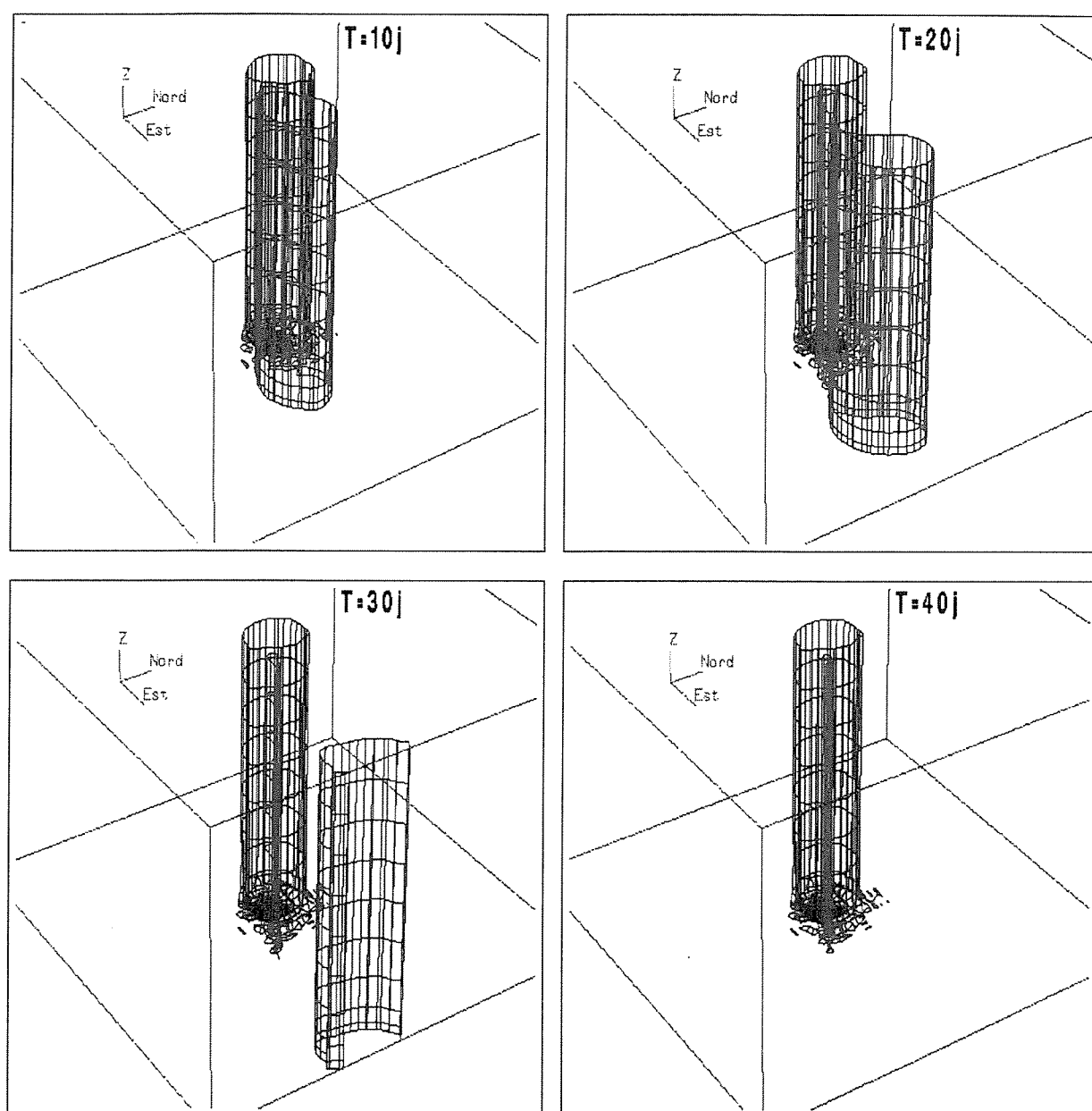


FIG. I.2.26 - Cas identique à la figure précédente mais pour le cas barotrope ($B=0$).
 Paramètres : $\mu = 5$, $U_0 = 0.1 \text{ m s}^{-1}$, $h_b = 200 \text{ m}$, $\nu_h = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

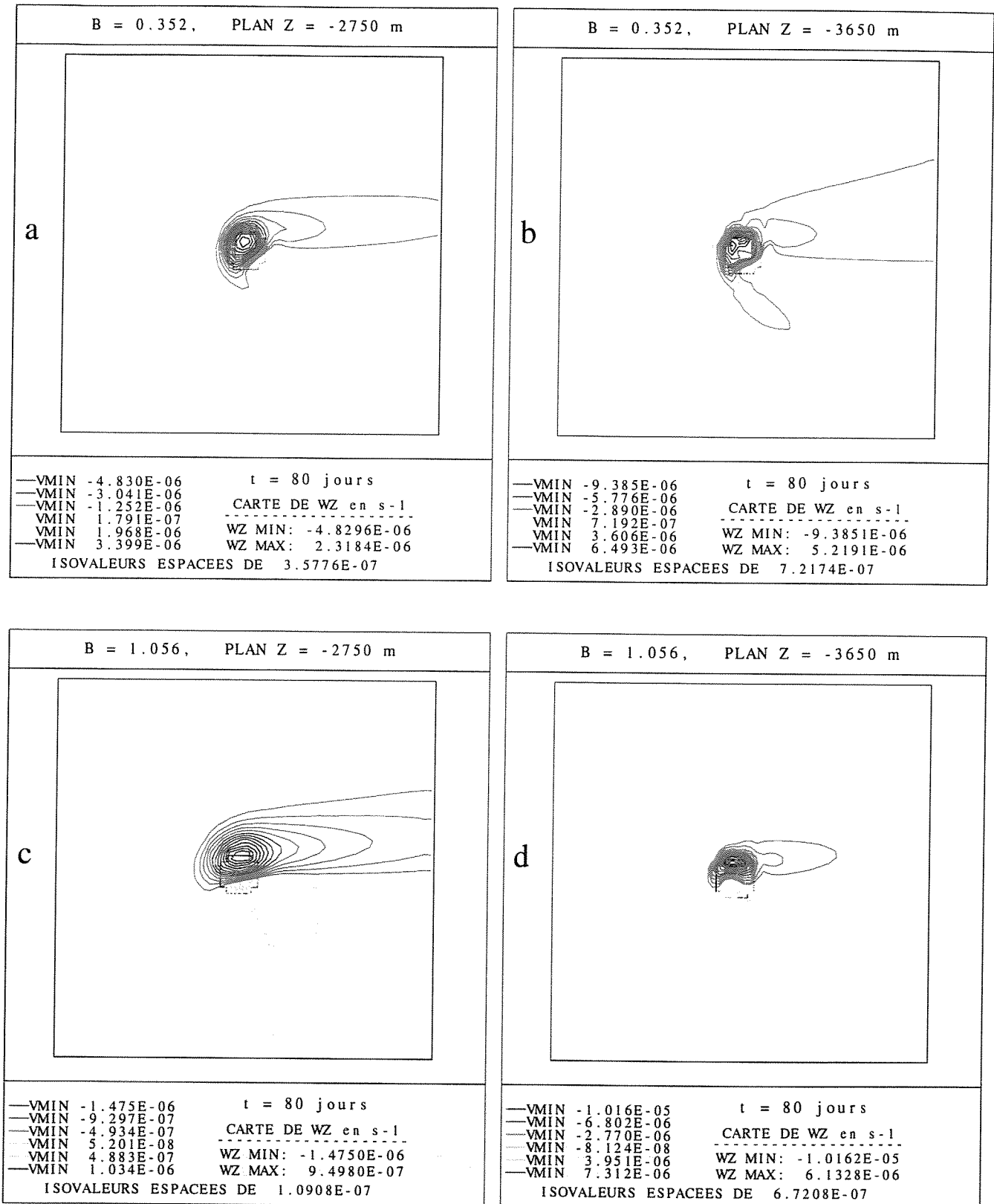


FIG. I.2.27 - Champs stationnaires de vorticité verticale pour les deux intensités de stratification, paramètres: $\mu = 5$, $U_0 = 0.1 \text{ m s}^{-1}$, $h_b = 200 \text{ m}$, $\nu_h = \alpha_h = 500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\nu_v = \alpha_v = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

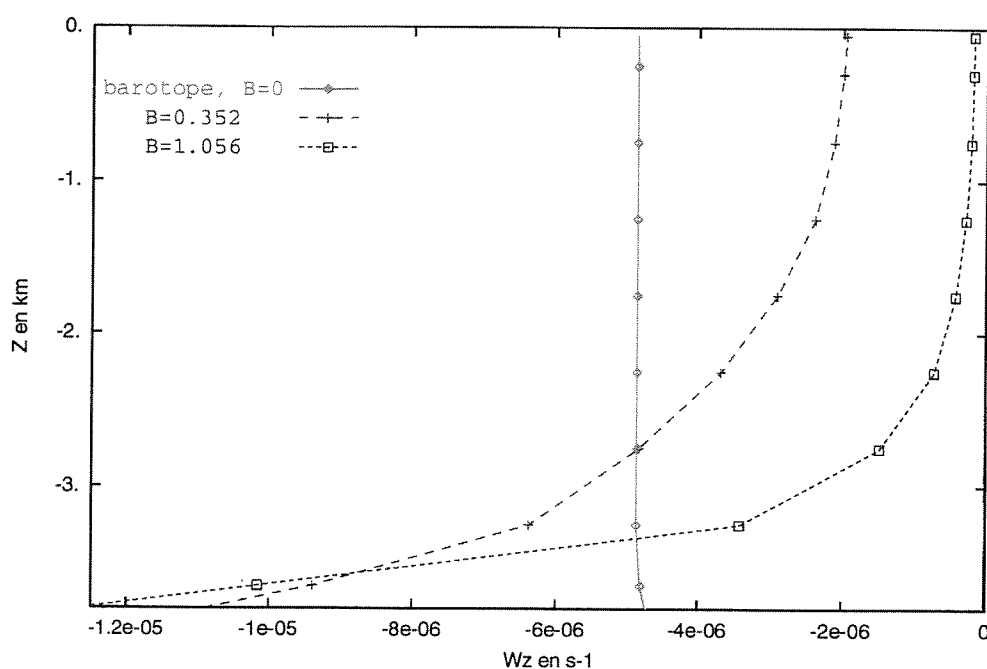


FIG. I.2.28 - Vorticité verticale minimale stationnaire suivant la profondeur (paramètres identiques à la figure précédente).

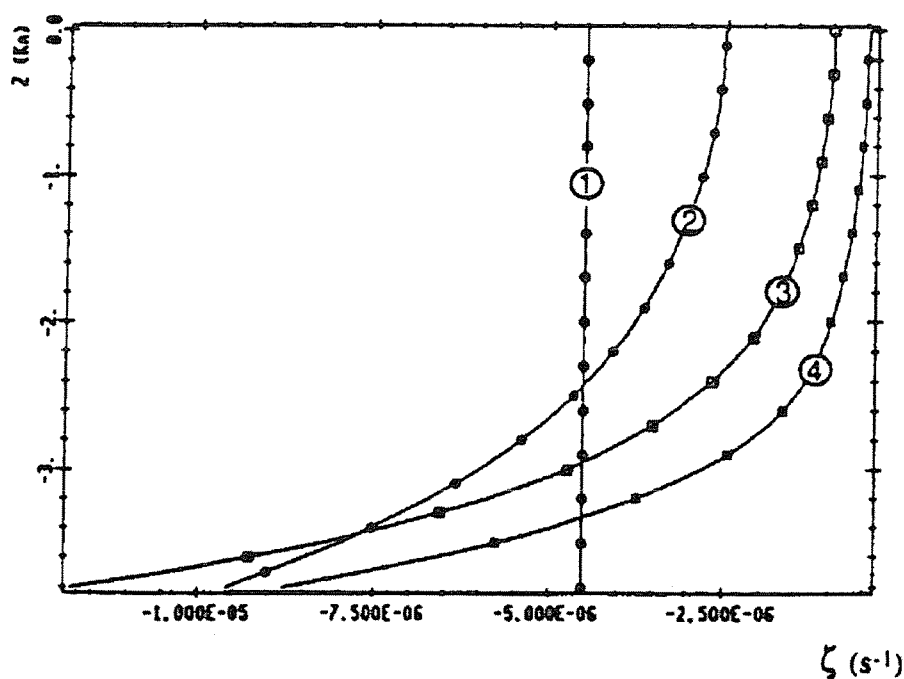


FIG. I.2.29 - Identique à la figure ci-dessus mais modèle SPEM et dissipation/diffusion différentes (Nguyen [46]), 1: $B = 0$, 2: $B = 0.352$, 3: $B = 0.704$, 4: $B = 1.056$.

2.3.2.b Vitesses horizontales perturbées.

Pour illustrer le cisaillement vertical des vitesses horizontales, nous présentons pour les deux intensités de stratification, le champ stationnaire (80 jours) des vitesses horizontales perturbées, à différentes profondeurs.

Dans le cas faiblement stratifié ($B = 0,352$), la figure I.2.30 nous montre que le tourbillon anticyclonique est encore présent sur toute la verticale et reste au dessus la topographie. Le tourbillon cyclonique a été advecté à l'extérieur du domaine. Nous observons effectivement le cisaillement vertical par l'augmentation de la vitesse perturbée avec la profondeur. De plus, nous remarquons un léger ralentissement de l'écoulement à l'aval de la topographie (vecteurs vitesses perturbées dirigés d'est en ouest). Ce phénomène s'accroît dans les basses couches. Le calcul effectué par Nguyen [46] (fig. I.2.32) présente topologiquement les mêmes caractéristiques. Toutefois, l'influence de notre discrétisation du relief mais également la prise en compte différente de la dissipation et de la diffusion (coefficients et opérateur) induisent quelques variations. La position du tourbillon anticyclonique est, dans notre cas, légèrement décentrée par rapport au centre de la topographie. De plus, la déviation observable juste au dessus de la topographie (-3650 mètres) semble un peu plus accentuée, comme d'ailleurs le ralentissement au sud-est de la topographie.

La figure I.2.31 représente ces mêmes vitesses perturbées pour le cas fortement stratifié. On remarque que la déviation du fluide ne concerne plus que les basses couches. Le tourbillon anticyclonique a quasiment disparu au niveau de la surface pour se concentrer dans les zones profondes où il reste piégé légèrement au nord de la topographie. A ces profondeurs, le ralentissement du fluide à l'arrière de la topographie est fortement intensifié. Ce sillage demeure aligné suivant la vitesse de base mais se décale, à cause de la force de Coriolis, un peu au sud du relief. On retrouve le même type de comportement que le calcul similaire de Nguyen avec le modèle SPEM (fig. I.2.33).

Qualitativement, et par rapport au cas barotrope (fig. I.2.7.b), la vitesse perturbée maximale à -300 mètres diminue de 38% pour $B = 0,352$ et de 85% pour $B = 1,056$ et, par contre, augmente de 71% pour $B = 0,352$ et de 65% pour $B = 1,056$ à -3650 mètres. Ainsi, nous constatons effectivement que, vis à vis de l'écoulement barotrope, la déviation horizontale de l'écoulement en présence de stratification est plus faible dans les couches supérieures et, à l'inverse, plus forte dans les basses couches.

2.3.2.c Vitesses verticales.

L'effet de la force de flottabilité tend à s'opposer aux mouvements verticaux. Cette propriété est effectivement vérifiée sur les coupes zonales verticales de la vitesse w stationnaire (fig. I.2.34.c et I.2.35.c). Par rapport au cas barotrope (fig. I.2.10), on observe toujours la création des deux zones, une ascendante à l'amont et une descendante à l'aval avec toutefois une nette diminution de la propagation de la vitesse verticale vers la surface. La distribution de ces vitesses n'est pas linéaire suivant la profondeur. Pour le cas fortement stratifié, ces vitesses sont très rapidement inhibées, traduisant à nouveau le contournement et le confinement de l'écoulement dans les basses couches.

Sur les coupes horizontales (fig. I.2.34.a et b, I.2.35.a et b), on peut tout d'abord mesurer ces diminutions suivant la profondeur. En effet, entre les profondeurs -3650 et -2750 mètres, on observe une chute des valeurs maximales d'un rapport d'environ 3 pour le cas $B = 0,352$, alors que la forte stratification impose un facteur voisin de 10. Par ailleurs, la localisation des deux zones suit correctement la déviation horizontale de l'écoulement engendré par la

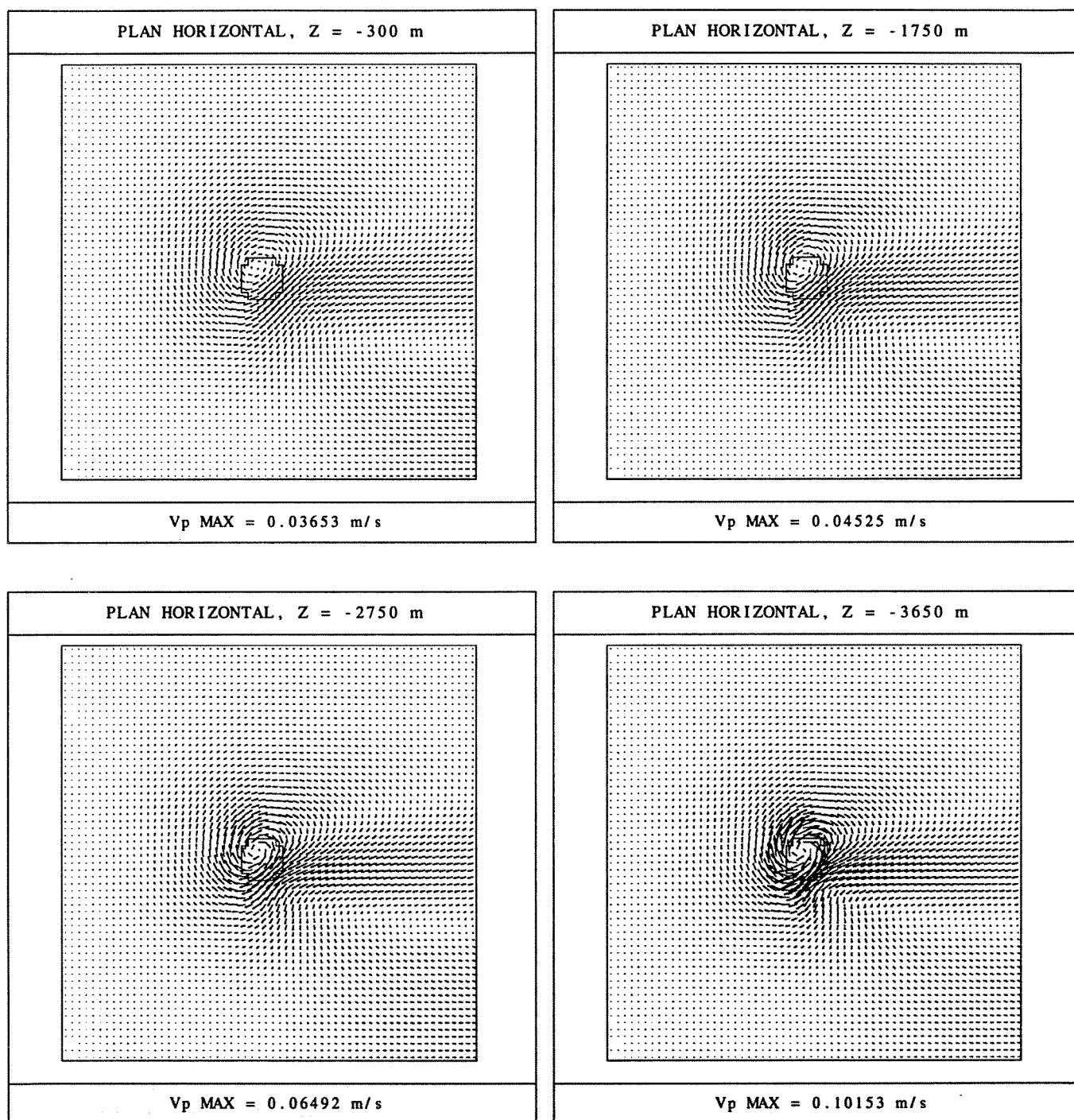


FIG. I.2.30 - Champs stationnaires des vitesses horizontales perturbées suivant la profondeur pour $B=0.352$, (param. idem fig. précédente).

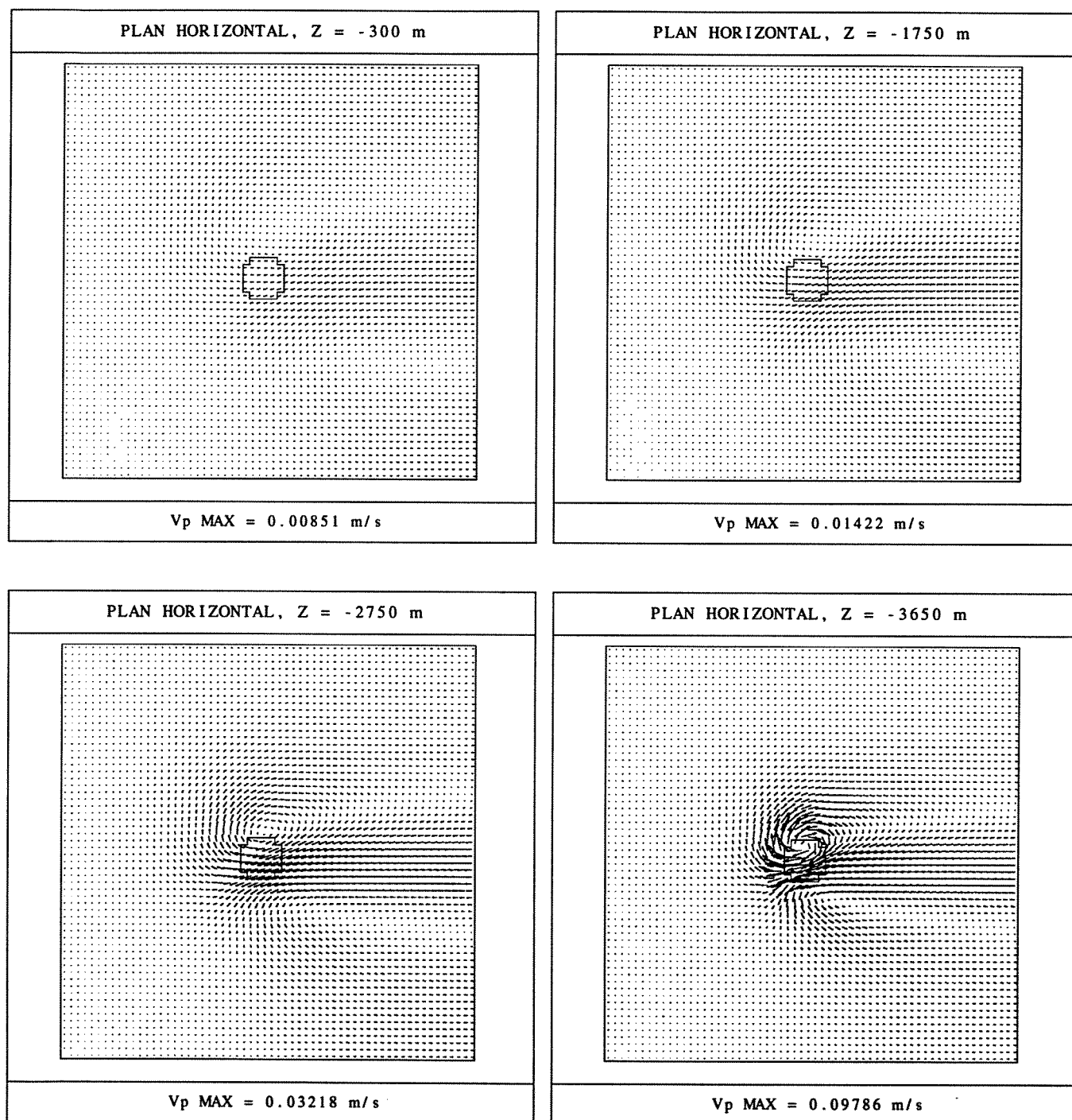
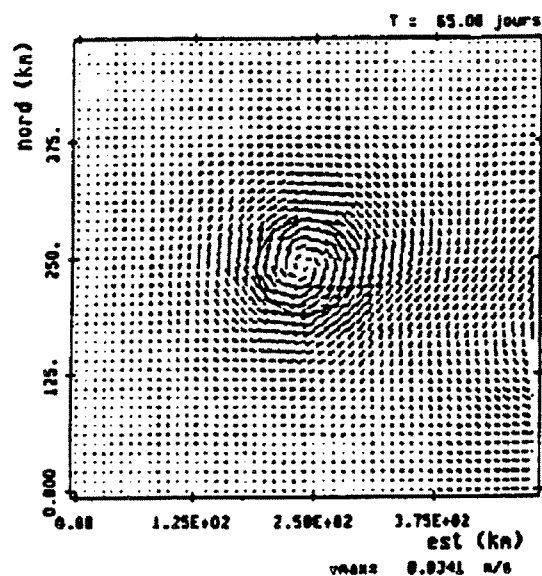
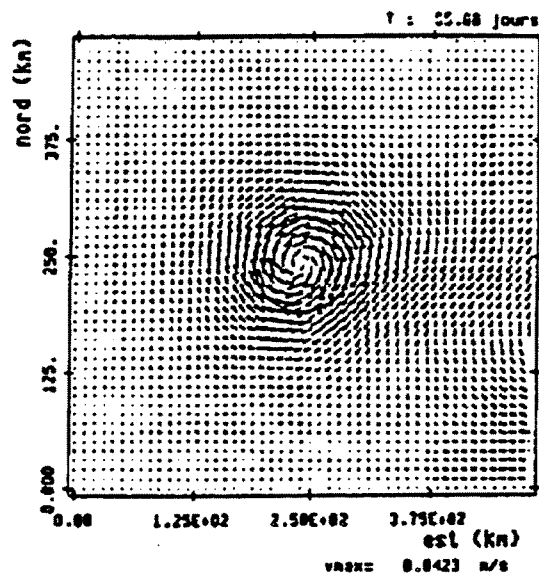


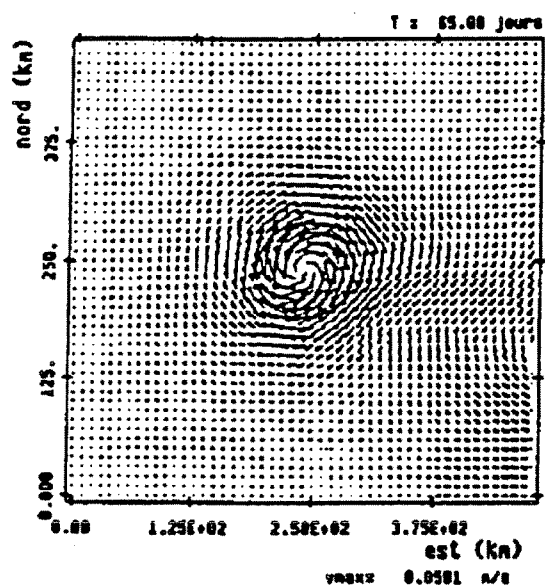
FIG. I.2.31 - Champs stationnaires des vitesses horizontales perturbées suivant la profondeur pour $B=1.056$, (param. idem fig. précédente).



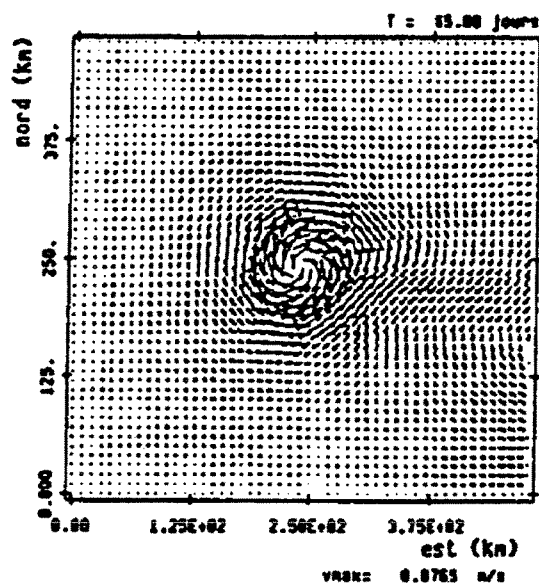
a



b

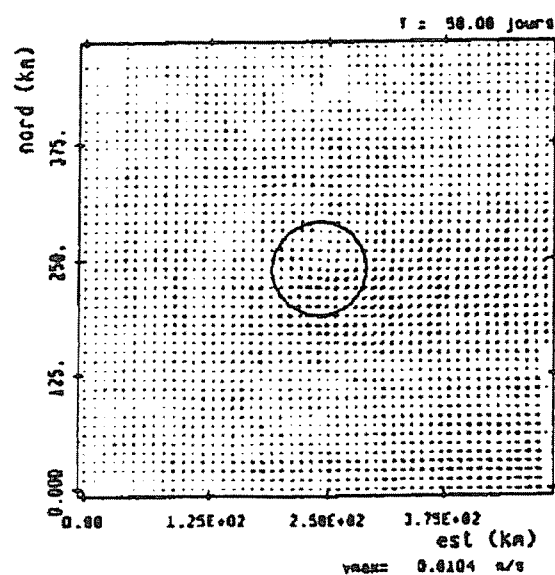


c

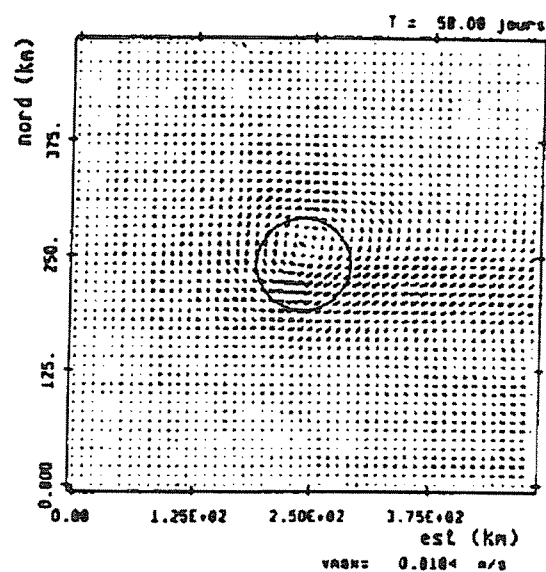


d

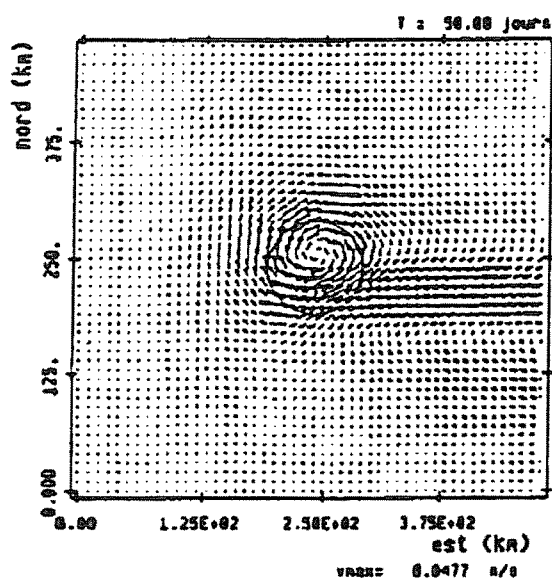
FIG. I.2.32 - $B=0.352$, identique aux figures précédentes, modèle SPEM [46], $t = 65$ jours, $a = -200$ m, $b = -2000$ m, $c = -3000$ m, $d = -3800$ m.



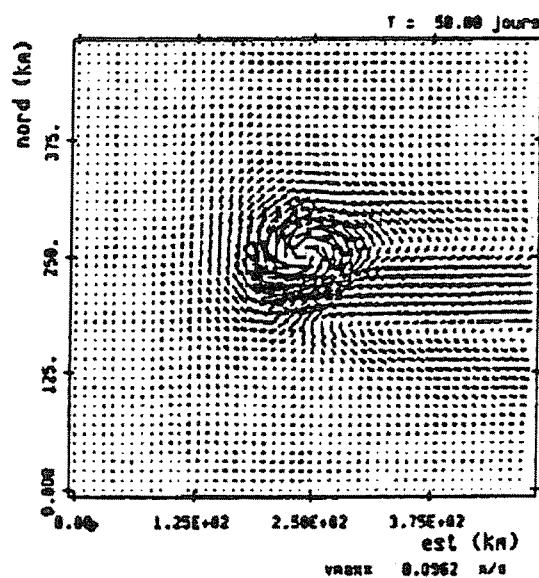
a



b



c



d

FIG. 1.2.33 - $B=1.056$, identique à la figure précédente, modèle SPEM [46], $t = 50$ jours, $a = -200$ m, $b = -2000$ m, $c = -3000$ m, $d = -3800$ m.

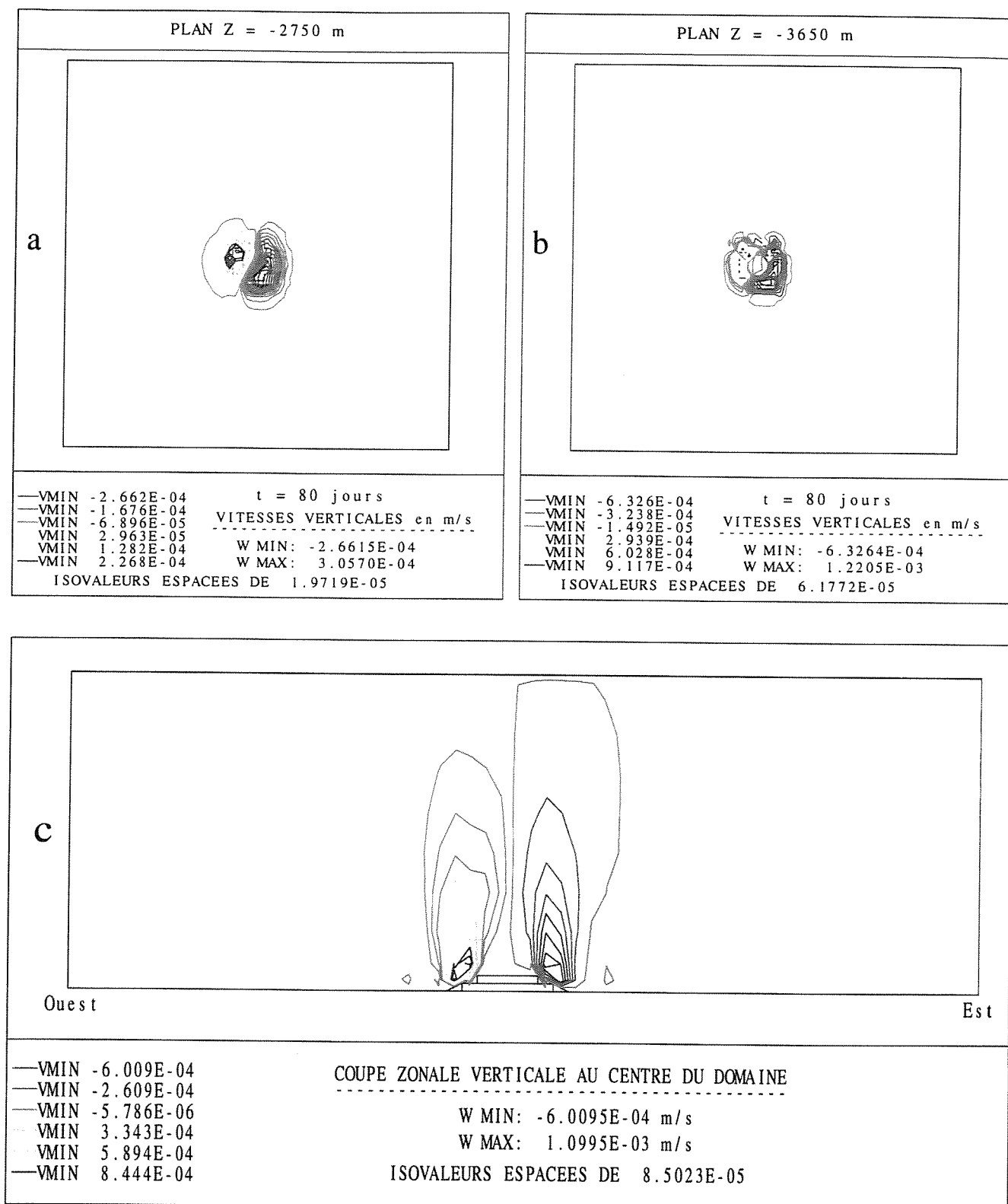


FIG. I.2.34 - Champs stationnaires de vitesse verticale pour $B=0.352$, paramètres: $\mu = 5$, $U_0 = 0.1\text{ms}^{-1}$, $h_b = 200\text{m}$, $\nu_h = \alpha_h = 500\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $\nu_v = \alpha_v = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4}\text{s}^{-1}$.

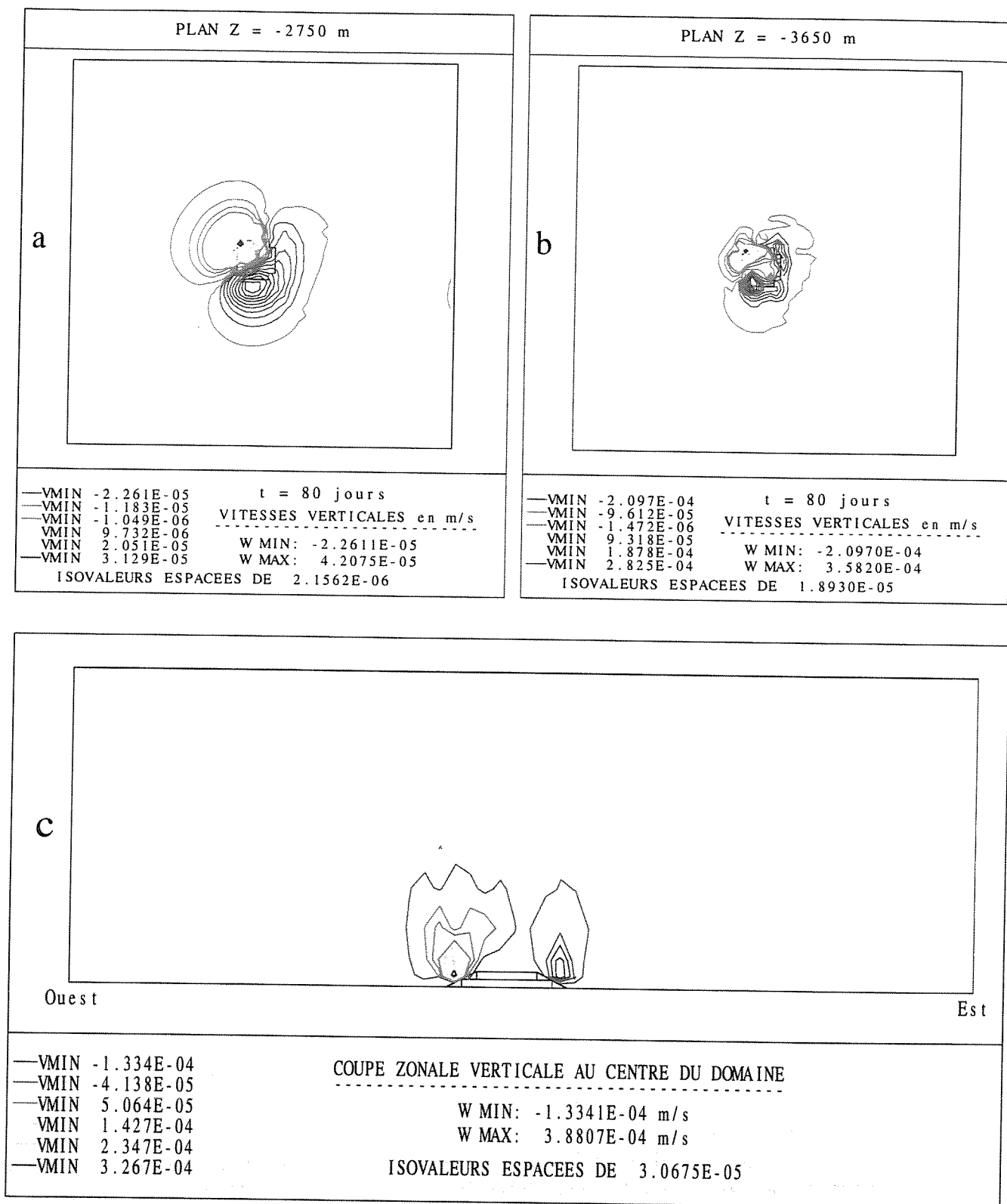


FIG. I.2.35 - Champs stationnaires de vitesse verticale pour $B=1.056$, (param. idem fig. précédente).

force de Coriolis. Ainsi, on observe la perte de la relative symétrie amont/aval des zones de vitesses verticales du cas barotrope, au profit d'une partition plus *nord-ouest/sud-est* pour le cas $B = 0,352$, et quasiment *nord/sud* pour le cas fortement stratifié.

2.3.2.d Températures perturbées.

Pour visualiser les perturbations du champ de température engendrées par la topographie, nous utilisons la variable T_p (température perturbée) définie par :

$$T_p(x, y, z) = T(x, y, z) - T_c(z) \quad (\text{I.2.13})$$

avec : $T(x, y, z)$ la température calculée, correspondant au nœud de coordonnées x, y, z et $T_c(z)$ la température initiale de la couche au niveau z .

Par la suite, le post-traitement s'effectue sur la variable $(T_p(x, y, z)/T_c(z)) \times 100$. Cette quantité donne une estimation du pourcentage de perturbation de chaque couche par rapport à sa valeur initiale. Elle permet donc de définir différentes zones perturbées.

On appellera les zones où la température perturbée est positive : "zone chaude". A contrario, les zones où la température perturbée est négative seront qualifiées de "zones froides". L'existence de ces zones est corrélée à la déviation verticale d'une partie de la circulation d'eau autour et à cause de la topographie. En effet, les particules ayant une vitesse verticale positive vont entraîner par convection des températures plus froides localisées initialement dans les basses couches. Ce phénomène est donc à l'origine des zones froides. Le mécanisme inverse est à l'origine de la formation des zones chaudes.

Les visualisations tridimensionnelles I.2.36 présentent la formation et l'évolution de ces zones froides et chaudes aux alentours de la topographie. Pour chacune des intensités de stratification, et à isosurface fixée, nous constatons effectivement que la formation et la localisation semblent conformes aux intensités des vitesses verticales (fig. I.2.36.a et c). Ainsi, pour la forte stratification, les perturbations n'affectent que les basses couches.

Par la suite, une partie de la zone chaude est convectée par l'écoulement moyen, de la même manière que le vortex cyclonique.

Pour $B = 0,352$, nous constatons, contrairement à Nguyen, qu'il subsiste une zone chaude piégée au *sud-est* de la topographie (fig. I.2.36.b). De plus, nous observons l'échappement d'une zone froide au *nord* de l'obstacle. Il semble donc que dans les basses couches, la dynamique de la déviation horizontale, intensifiée par la discrétisation structurée de la topographie, permet à la zone froide de regagner, par convection et diffusion, une zone où elle peut être transportée par l'écoulement moyen. Cette même dynamique autorise également le piégeage d'une zone chaude à l'aval de l'obstacle.

Par contre, nous retrouvons, comme Nguyen, ce mécanisme pour la forte stratification (fig. I.2.36.d) puisque le confinement de l'écoulement tend à diminuer la dynamique verticale liée à la topographie.

Nous constatons également l'effet d'accumulation par convection de la zone chaude au fond du domaine pour les deux intensités de stratification. Cette zone est majoritairement transportée par convection vers l'aval mais également étalée transversalement par diffusion horizontale.

La figure I.2.37 propose l'allure des zones froides et chaudes stationnaires pour les 2 cas de stratification et sur 2 coupes horizontales (-2750 et -3650 mètres). Nous retrouvons l'équivalence des positions des zones chaudes et froides avec celles des tourbillons cycloniques et anticycloniques (vitesses perturbées ou vorticité verticale).

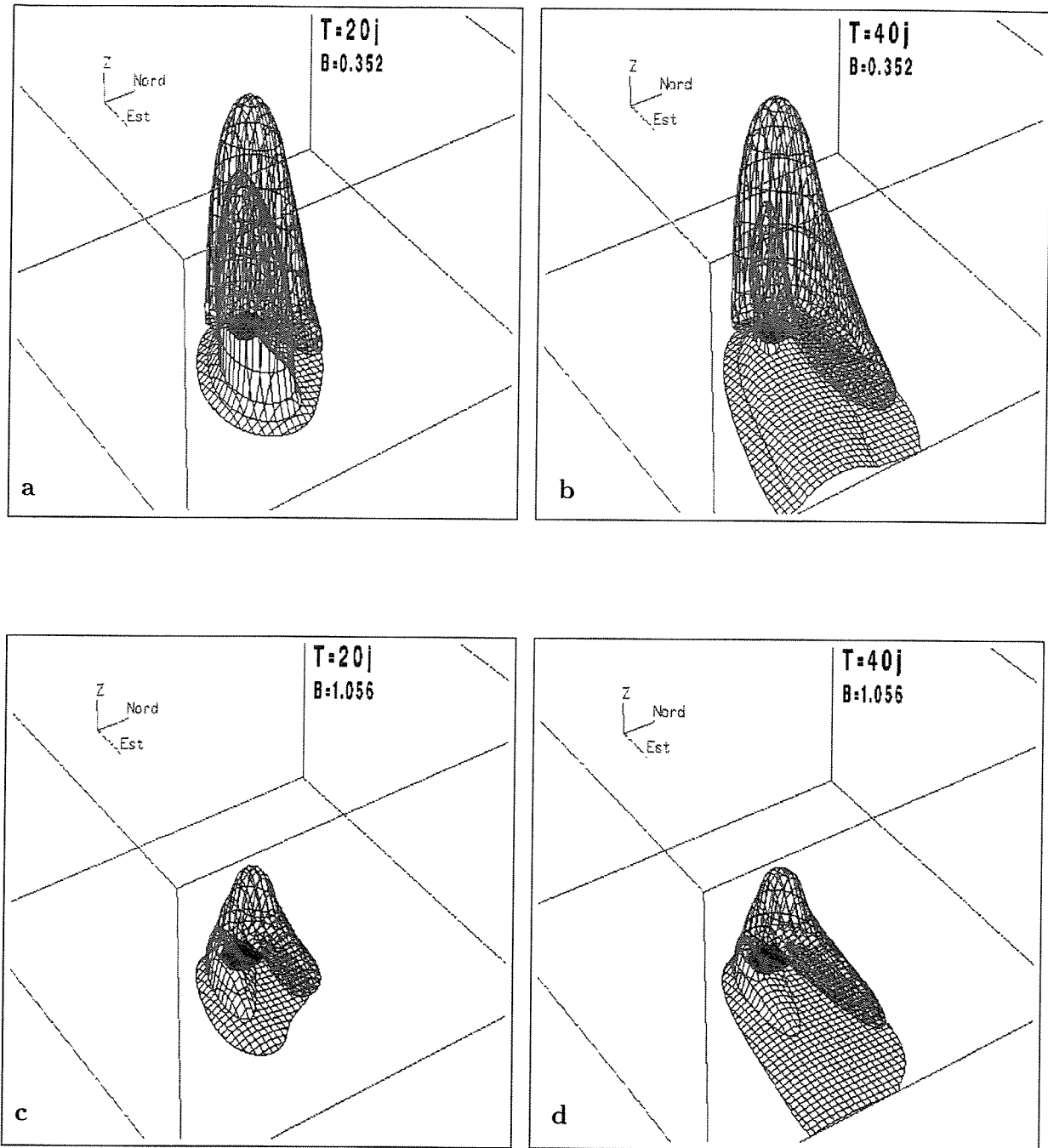


FIG. I.2.36 - Évolution instationnaire de deux isosurfaces du % de température perturbée, calculs pour les deux intensités de stratification.

Iso. bleu à $-1.10^{-2}\%$ (arrière plan), iso. rouge à $1.10^{-2}\%$ (premier plan).

Paramètres: $\mu = 5$, $U_0 = 0.1\text{ms}^{-1}$, $h_b = 200\text{m}$, $\nu_h = \alpha_h = 500\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $\nu_v = \alpha_v = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4}\text{s}^{-1}$.

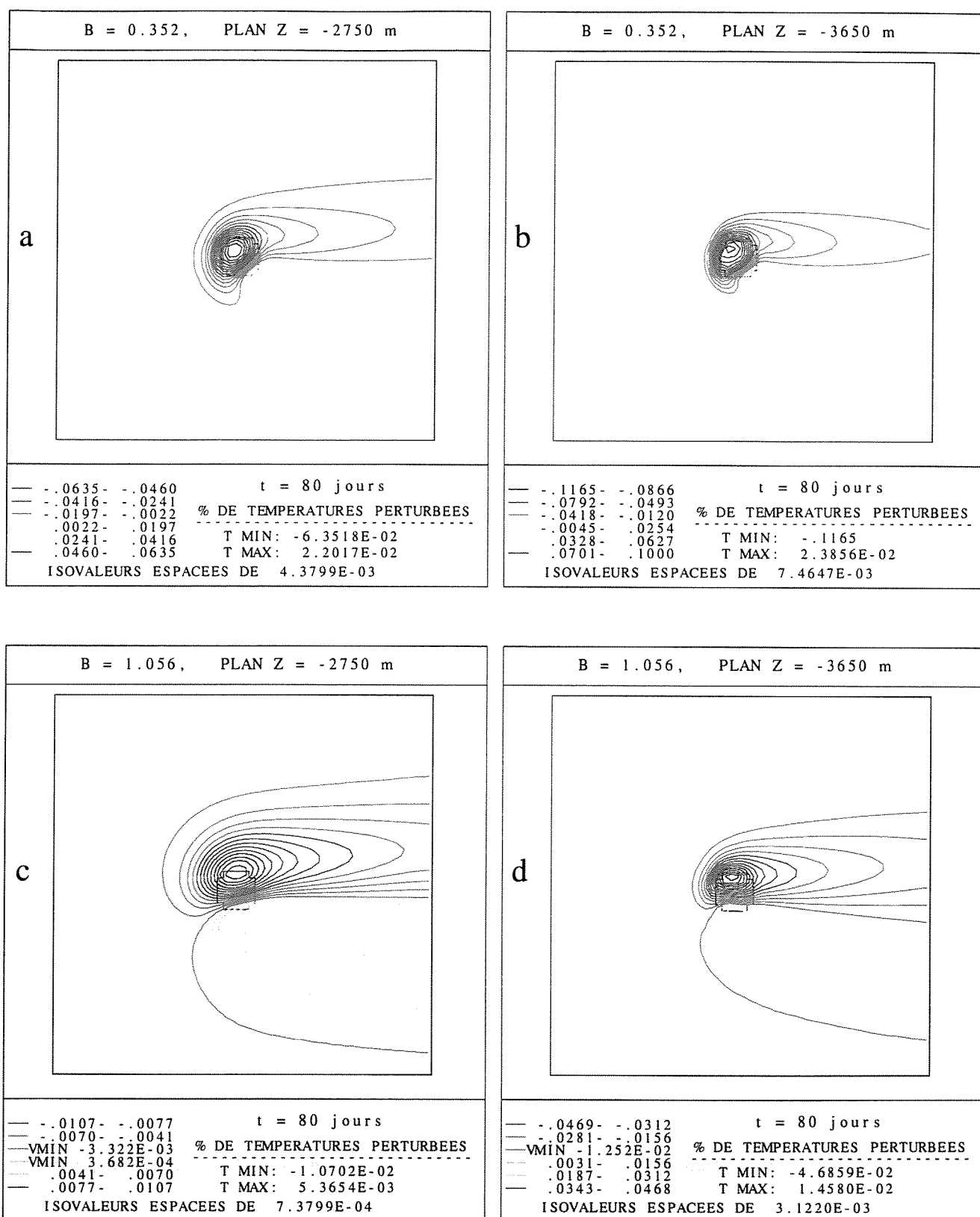


FIG. I.2.37 - Champs stationnaires du % des températures perturbées pour les deux intensités de stratification (param. idem fig. précédente).

Ce résultat illustre bien l'application de l'équation du vent thermique (cf. équa. I.2.7) affirmant qu'à un gradient horizontal de masse volumique (i.e. de température) correspond un gradient vertical de vitesse¹³. Nous visualisons également le développement des sillages jusqu'à la frontière *est* du domaine.

La courbe I.2.38 représente le pourcentage minimal de la température perturbée stationnaire suivant la profondeur dans la zone froide. Elle confirme, à l'image de la vitesse verticale, le cisaillement vertical non-linéaire de la perturbation de température. De plus, l'augmentation de l'intensité de la stratification tend effectivement à inhiber dans les couches supérieures les variations de température.

Remarquons, par ailleurs, l'influence du blocage convectif au niveau de la surface, lié à l'hypothèse du toit rigide. Compte tenu des conditions limites utilisées, ce comportement, également observé pour la zone chaude au fond du domaine, semble tout à fait logique¹⁴. En effet, par convection, nous allons refroidir la dernière couche et créer une accumulation de fluide plus froid. Ce mécanisme nous amène à nous interroger sur l'évolution de cette poche de température perturbée.

Pour le cas $B = 0,352$ à 80 jours de simulation, la figure I.2.39 nous montre que, dans la couche de confinement de surface, la poche plus froide est en grande partie convectée par l'écoulement moyen. Vers l'amont, nous constatons néanmoins la propagation par diffusion horizontale d'un léger front de température perturbée. Ce phénomène n'introduit aucune sensibilité particulière puisque son intensité reste relativement faible. Notre écoulement fortement advectif horizontalement et le faible niveau de perturbation engendrée par la topographie nous préservent d'hypothétiques perturbations.

Cependant, cette accumulation étant continue, en cas de convection verticalement plus intense et horizontalement plus faible, à cause d'une topographie plus élevée par exemple, une éventuelle déstabilisation de la couche pourrait apparaître. Dans ce cas, la condition adiabatique imposée au toit rigide ne conviendrait plus et il serait nécessaire de fournir à la couche supérieure un flux de chaleur en surface, agissant comme une force de rappel stabilisante et traduisant une condition plus réaliste d'échange avec l'atmosphère.

Quoiqu'il en soit, des études supplémentaires seraient encore nécessaires afin de traiter des cas de déstabilisation de cette couche supérieure.

13. le cisaillement vertical des vitesses perturbées présenté précédemment le confirme.

14. Nguyen [46] n'évoque cependant pas ce phénomène.

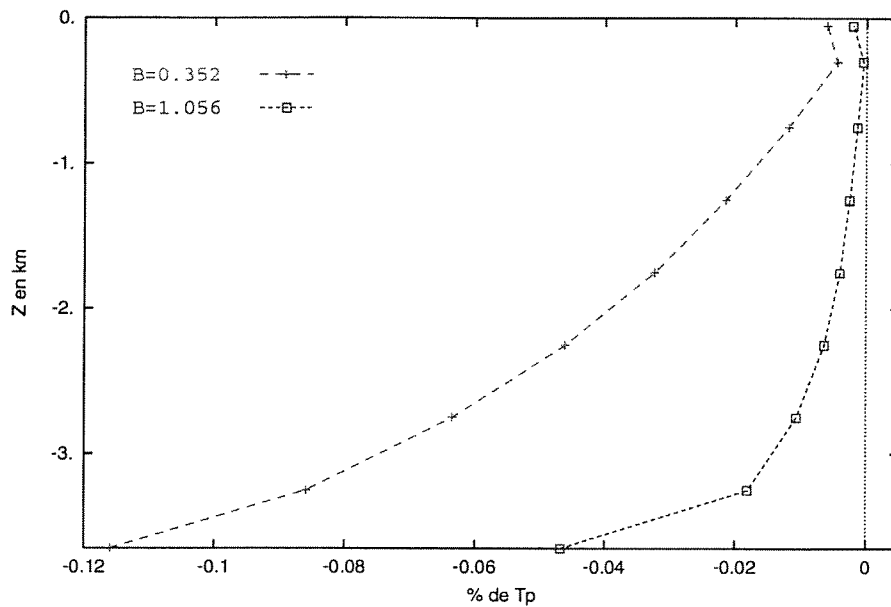


FIG. I.2.38 - Variation de la température perturbée minimale stationnaire dans la zone froide suivant la profondeur (param. idem fig. précédente).

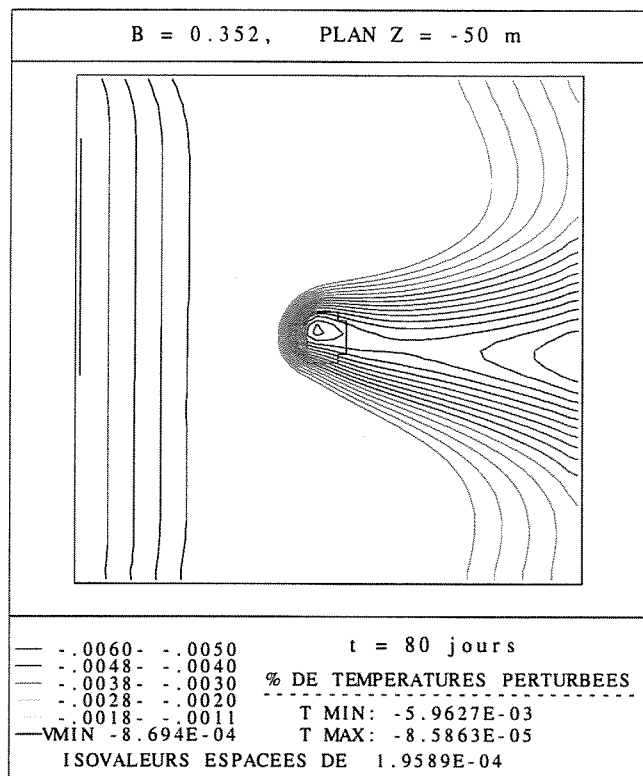


FIG. I.2.39 - Illustration du blocage convectif lié au toit rigide, % de température perturbée pour $B=0,352$ (param. idem fig. précédente).

2.4 Rôle du gradient de pression.

Nous allons maintenant illustrer, sur ce cas d'étude, le rôle important que peut jouer la pression, ou plus précisément le gradient de pression, quant à l'équilibre dynamique des différentes forces en présence.

Numériquement, nous souhaitons vérifier, dans notre cas particulier, la prise en compte de ces équilibres tout d'abord par rapport à la force de Coriolis, puis vis à vis de la stratification thermique stable. De plus, l'effet dynamique lié à la présence de la topographie isolée, avec ou sans stratification, sera réaffirmé à travers la déformation horizontale des lignes isobares.

2.4.1 Equilibre géostrophique.

2.4.1.a Formulation analytique.

Comme nous avons pu l'observer dans les sections précédentes, la force de Coriolis contribue activement à la dynamique horizontale de ces écoulements. Sa prise en compte anti-symétrique dans les équations de quantité de mouvement aurait plutôt tendance à déstabiliser la dynamique. Toutefois, les forces de pression vont se charger d'équilibrer, par les gradients horizontaux de pression, l'action motrice de la force de Coriolis. Nous allons rappeler ce phénomène essentiel, communément appelé "équilibre géostrophique". Sur le f -plan et dans le cas où l'écoulement barotrope est peu perturbé spatialement et temporellement, une analyse en ordre de grandeur nous permet de négliger les termes d'accélération inertielle, de convection et de diffusion dans l'équation de Navier Stokes. Nous traduisons cette approximation par :

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} = \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P \quad (\text{I.2.14})$$

Après projection sur les trois directions, l'équation I.2.14 s'exprime par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= f_0 \rho_0 V_0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -f_0 \rho_0 U_0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.2.15})$$

avec U_0 et V_0 les vitesses caractéristiques zonales et méridionales liées à cet écoulement en f -plan, stationnaire et non perturbé dynamiquement.

La troisième équation montre que, pour un fluide homogène, la pression est indépendante de la verticale. Signalons de plus que le mouvement horizontal de cette approximation est à divergence nulle. Cette propriété permet donc d'introduire une fonction de courant $\Psi(x, y)$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} U_0 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ V_0 &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Nous constatons donc que, pour ce type d'écoulement, les lignes d'isopression décrivent les lignes de courant fluide.

2.4.1.b Vérification numérique.

Pour illustrer et vérifier numériquement la validité de cet équilibre, nous avons effectué des tests sur le même type de configuration que lors des tests précédents mais sans aucune topographie. Dans ce canal océanique, il n'existe donc aucune perturbation dynamique ou spatiale susceptible de dévier l'écoulement entrant. De fait, la solution stationnaire de ce problème est triviale : c'est la vitesse entrante. Cependant, le modèle doit nous fournir un gradient de pression vérifiant l'équilibre géostrophique. Pour notre écoulement zonal entrant uniforme U_0 , le système I.2.15 se réduit à une solution analytique de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -f_0 \rho_0 U_0\end{aligned}\quad (\text{I.2.16})$$

Ceci nous indique que P ne dépend que de y et son gradient méridional s'exprime simplement en fonction de ρ_0 , f_0 et U_0 .

Nous avons donc effectué deux simulations avec deux valeurs différentes de la vitesse entrante (0,1 et 0,05 ms^{-1}), sur une période de 40 jours. Les figures I.2.40 présentent les solutions stationnaires de ces écoulements à 40 jours, d'une part sur une coupe horizontale, et d'autre part sur une coupe méridionale verticale au milieu du domaine.

Qualitativement, sur les plans horizontaux nous retrouvons bien l'équivalence entre les lignes d'isopression et les lignes de courant, et par là même, l'indépendance zonale. Sur les coupes verticales, nous vérifions bien que les lignes isobares ne sont pas fonction de la verticale.

En ce qui concerne les valeurs numériques et par rapport à la discrétisation adoptée ($\Delta y = 8,333$ km), nous retrouvons exactement la valeur analytique du gradient de pression méridional, ainsi que son orientation *nord-sud* (analytiquement, signe négatif). Enfin, soulignons l'adaptation correcte du gradient de pression au changement de valeur de la vitesse entrante : diviser la vitesse par deux revient également à diviser le gradient de pression par deux.

2.4.1.c Effet de la topographie en mode barotrope.

Dans ce dernier paragraphe, nous allons présenter, pour les cas traités dans les sections précédentes, l'aspect et l'évolution des lignes d'isopression issues du calcul. En effet, la présence de la topographie perturbe l'écoulement zonal entrant et induit, en fonction de la valeur caractéristique de μ , différents types de déformations de ces lignes.

Les figures I.2.41 proposent tout d'abord l'allure des isobares sur un plan horizontal, pour les deux cas $\mu=5$ et lorsque l'état stationnaire est atteint. Nous observons une déformation des lignes correspondant à la déviation méridionale de l'écoulement autour et au dessus de la topographie. La figure I.2.42 reproduit, pour le même calcul, les lignes de courant stationnaires obtenues par le modèle SPEM (Nguyen [46]). Nous constatons la bonne correspondance qualitative entre les résultats.

Signalons que l'étude théorique d'Huppert [30], concernant des topographies isolées cylindriques et axisymétriques, a déterminé, par intégration de la fonction de courant dans l'équation de conservation de la vorticité potentielle, une solution stationnaire similaire,

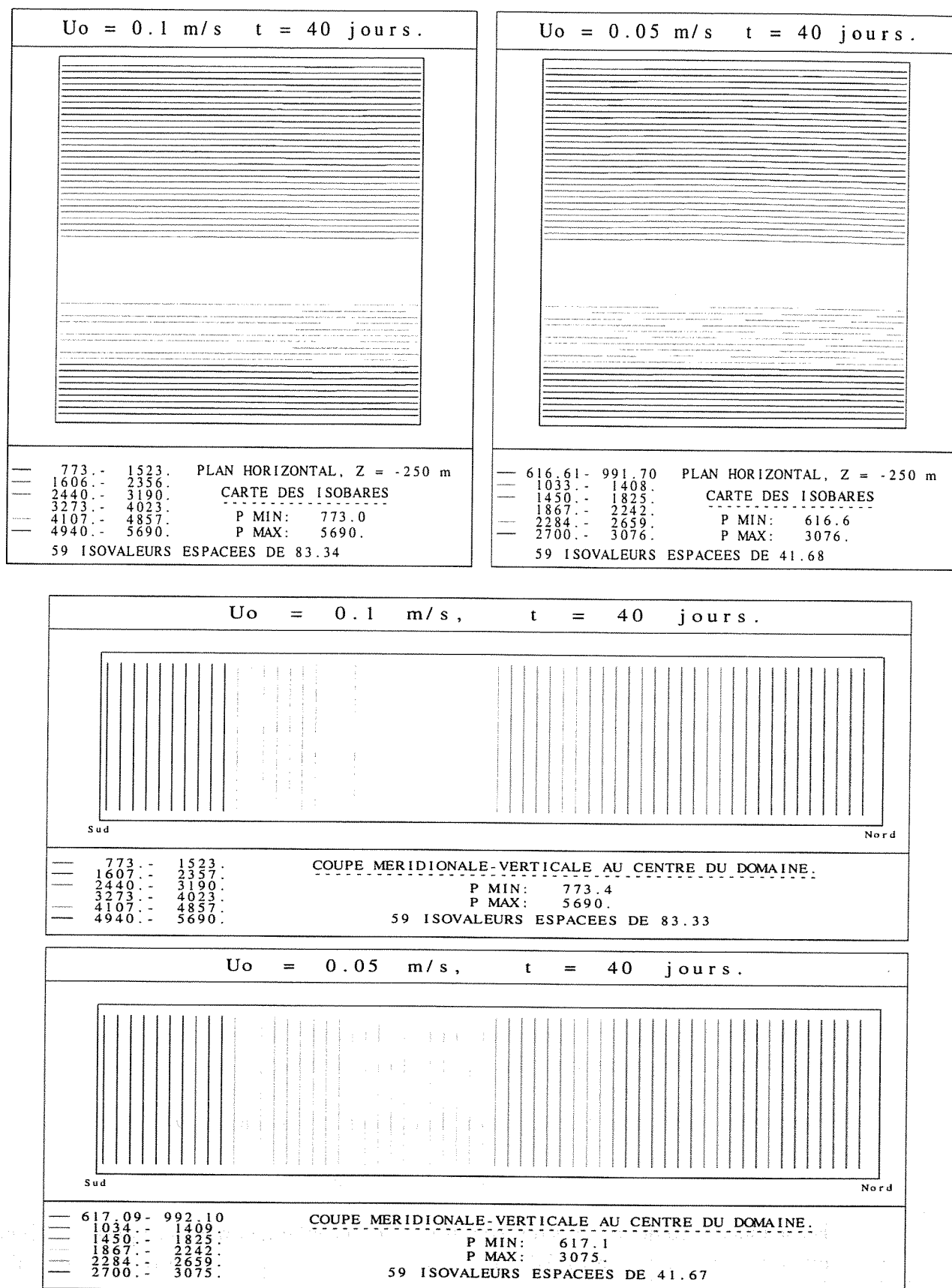


FIG. I.2.40 - Prise en compte de l'équilibre géostrophique : champ stationnaire de pression (domaine $500 \times 500 \times 4 \text{ km}$, sans topographie, discrétisation $60 \times 60 \times 11$ soit $\Delta y = 8.333 \text{ km}$, $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$).

pour des écoulements quasigéostrophiques, inviscides, et dans le cas où il n'existe pas de ligne de courant fermée (cas des μ faibles).

Lorsque μ augmente, nous observons une déformation plus importante des lignes d'isopression. La figure I.2.43.d illustre l'état quasi-stationnaire pour le cas $\mu=12,5$. Nous remarquons une déviation supérieure au cas précédent. De plus, entre l'amont et l'aval de la topographie, les lignes isobares ne semblent plus aussi symétriques. Enfin, il apparaît une ligne d'isopression fermée, piégée au dessus de l'obstacle, caractérisant la formation d'un tube de courant et, de fait, l'apparition d'une "colonne de Taylor".

En ce qui concerne la période instationnaire du cas $\mu=12,5$, les figures I.2.43.a, b et c montrent une séquence d'évolution des lignes d'isopression. Nous observons, à nouveau, la formation de zones à lignes de courant fermées. De plus, nous pouvons également suivre, grâce aux courbures de ces lignes, le début de l'advection de la structure cyclonique à l'aval de la topographie. A titre indicatif, nous présentons sur la figure I.2.44, le même type de séquence de lignes de courant provenant d'un calcul effectué par Verron et Le Provost [56] avec un modèle QG. Bien que la mise en œuvre des calculs soit assez différente (hypothèses, résolution et surtout prise en compte de la topographie), nous constatons qualitativement le même phénomène de formation de la colonne de Taylor.

Pour finir, la séquence I.2.45 illustre encore l'apparition des lignes de courants fermées, mais, cette fois-ci, à propos du cas $\mu=125$. Nous avons représenté les isopressions concernant le premier cycle d'oscillations des deux tourbillons cycloniques et anticycloniques autour de la topographie. L'évolution des lignes isobares accompagne remarquablement bien celle des deux structures vorticitaires. En effet, ces lignes suivent les différentes interférences s'effectuant au cours de la période de rotation. Ainsi, remarquons que durant la période où les deux tourbillons passent par une position transverse (figure I.2.45.b), nous avons formation de deux zones de lignes d'isopression fermées correspondant à l'apparition de deux colonnes de Taylor.

Ce phénomène a également été observé par Verron et Le Provost [56], pour des valeurs de μ plus faibles mais suffisamment élevées pour obtenir un système d'ondes topographiques.

2.4.2 Equilibre barocline.

2.4.2.a Formulation et vérification.

De la même manière, la prise en compte d'une stratification thermique stable induit un équilibre avec le gradient vertical de pression. Cette équilibre se superpose à celui induit par la force de Coriolis.

Rappelons tout d'abord l'expression de la force de flottabilité :

$$\vec{F} = \beta_t (T - T_0) \vec{g} \quad (\text{I.2.17})$$

En se plaçant toujours dans des conditions où l'écoulement n'est pas perturbé dynamiquement, l'équation de quantité de mouvement suivant la direction verticale traduit l'équilibre entre le gradient vertical de pression et cette force supplémentaire :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} = \beta_t g (T - T_0) \quad (\text{I.2.18})$$

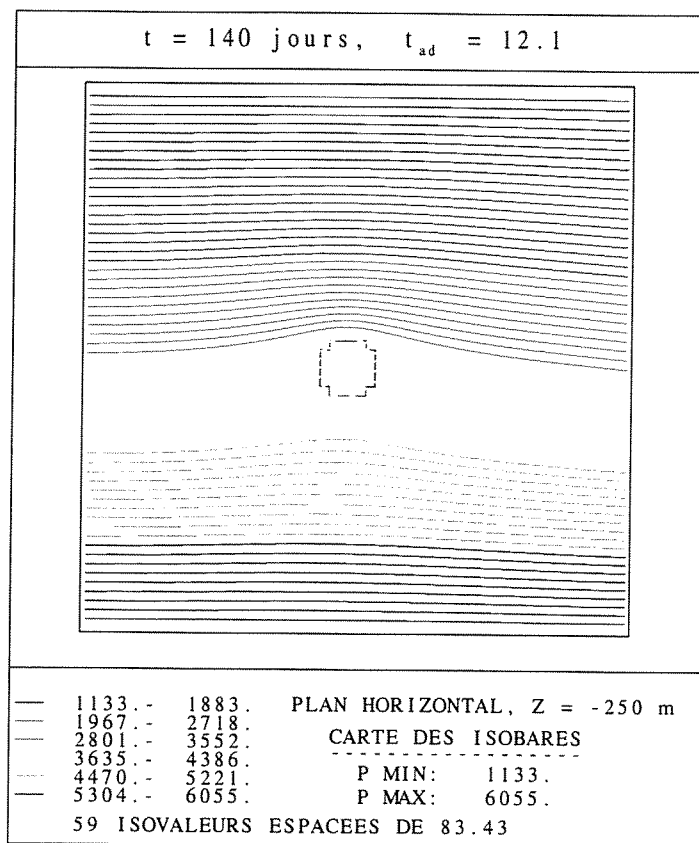


FIG. I.2.41 - *Champ stationnaire de pression, modèle VDF, calcul barotrope: $\mu = 5$, $U_0 = 0.1 \text{ ms}^{-1}$, $h_b = 200 \text{ m}$, $\nu_h = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.*

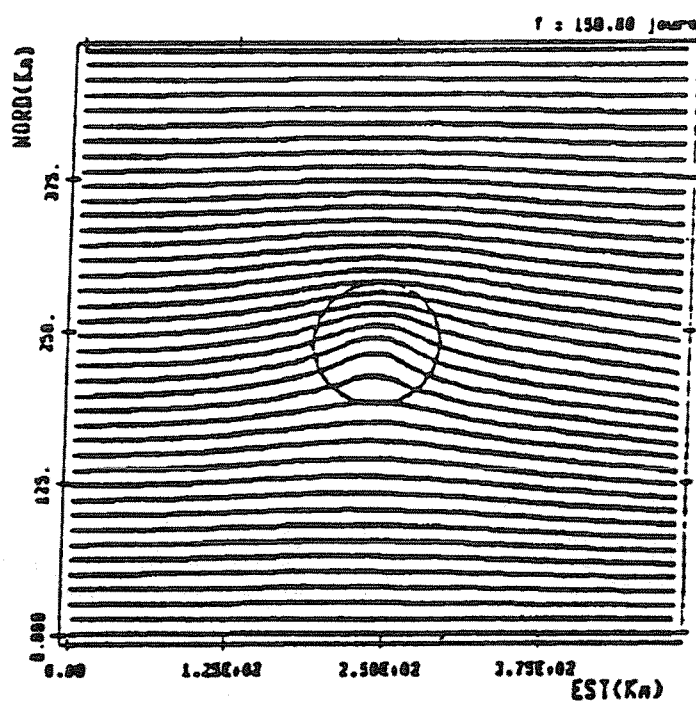


FIG. I.2.42 - *Champ stationnaire de fonction de courant, modèle SPEM (Nguyen [46]), (paramètres identiques à la figure précédente).*

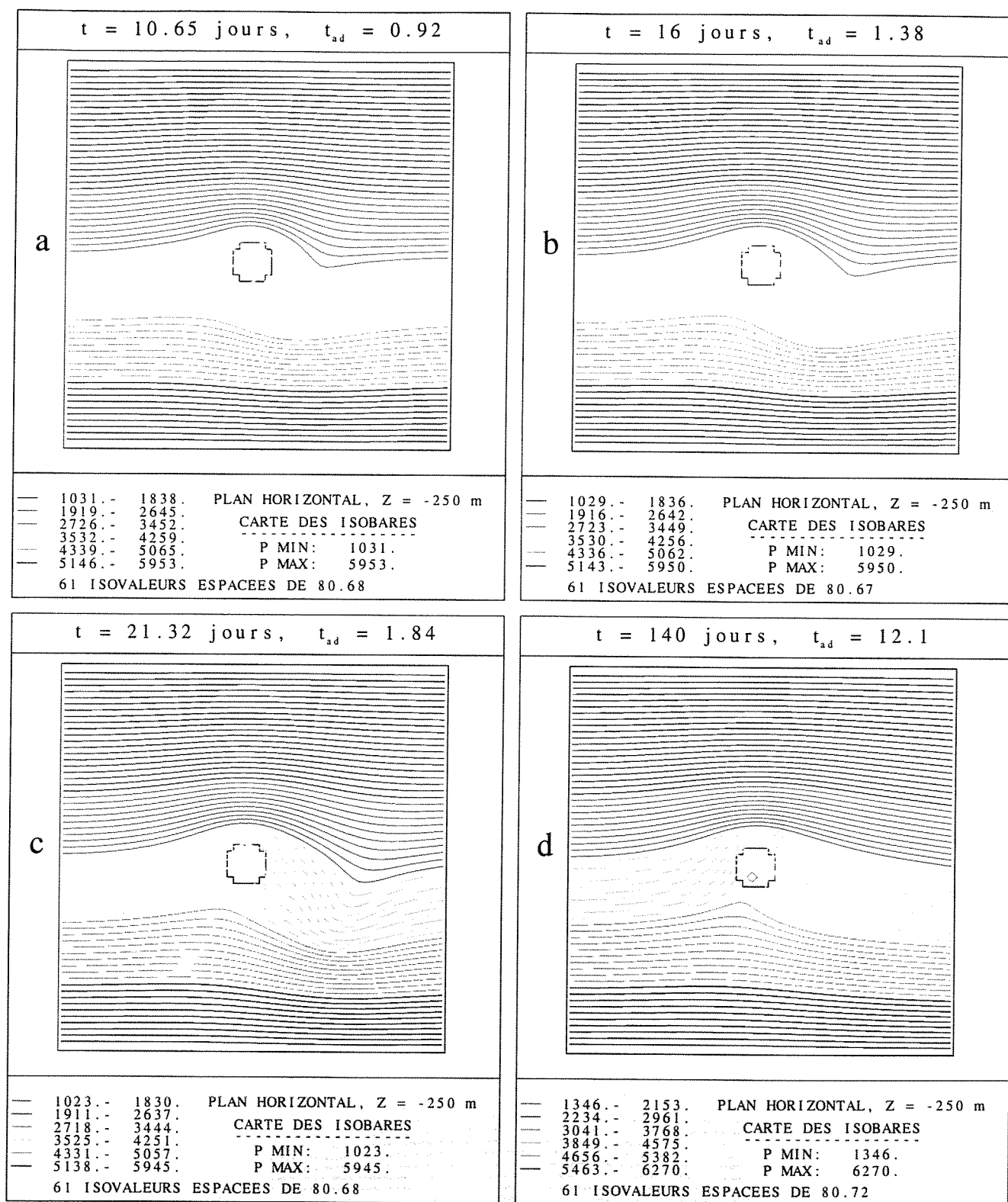


FIG. I.2.43 - Evolution du champ de pression, calcul barotrope. a, b, c: phase instationnaire, d: phase stationnaire. $\mu=12.5$, $U_0 = 0.1\text{ms}^{-1}$, $h_b = 500\text{m}$, $\nu_h = 100\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4}\text{s}^{-1}$.

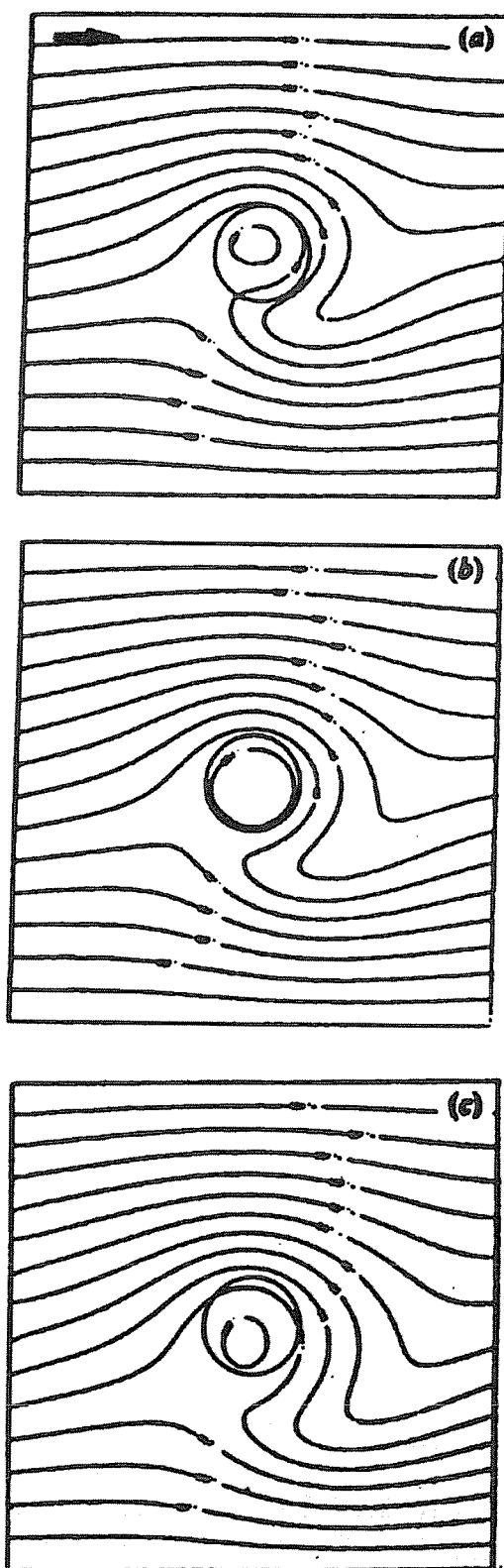


FIG. I.2.44 - Evolution du champ instationnaire de fonction de courant, modèle QG (Verron et Le Provost [56]), paramètres et temps a , b et c , identiques à la figure précédente.

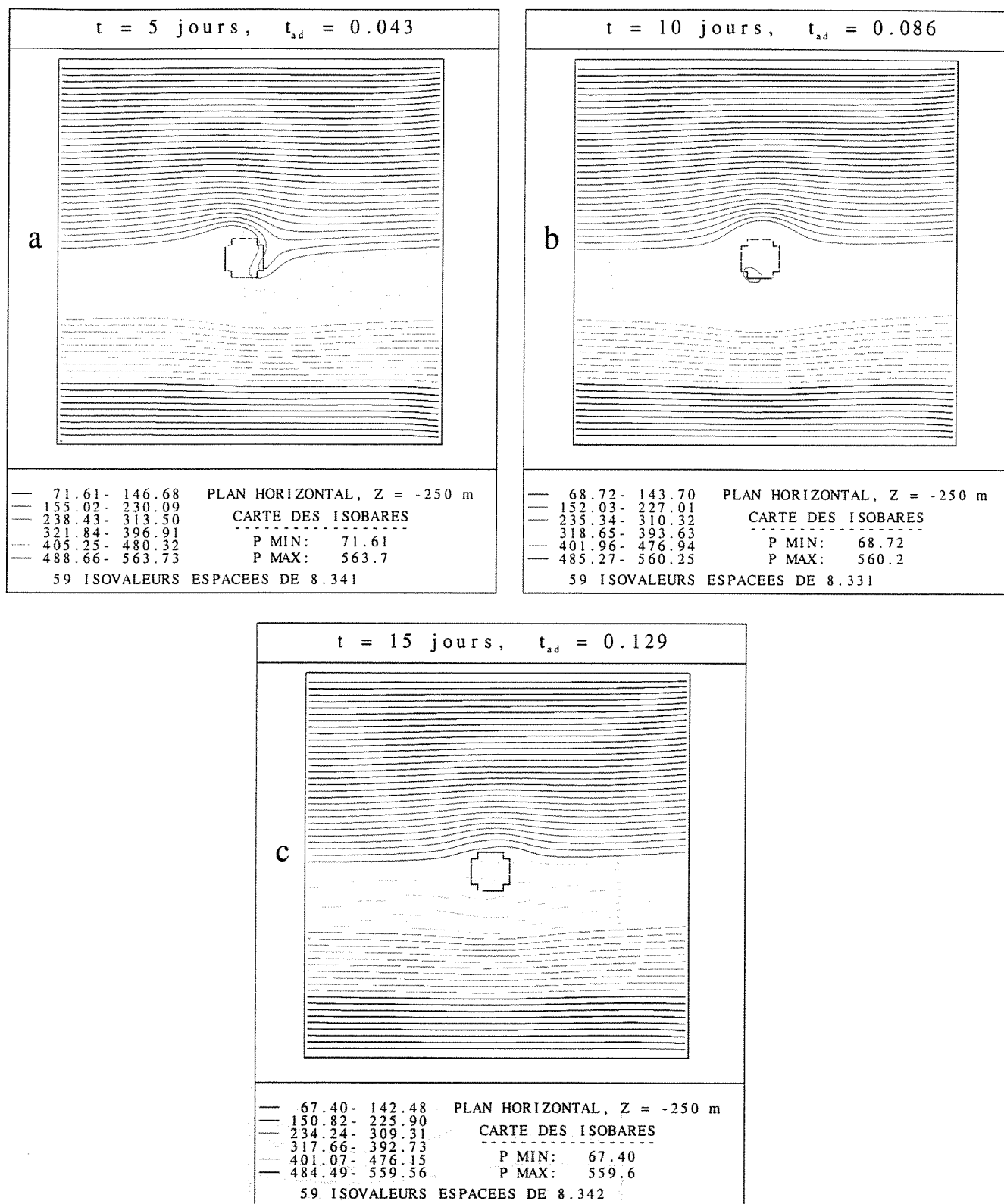


FIG. I.2.45 - Evolution du champ de pression pendant le premier cycle oscillatoire, calcul barotrope. $\mu=125$, $U_0 = 0.01 \text{ ms}^{-1}$, $h_b = 500 \text{ m}$, $\nu_h = 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Pour vérifier numériquement que l'introduction du calcul de l'équation de la chaleur ne génère pas d'erreur dans l'estimation du gradient de pression vertical, nous avons étudié la répartition de la pression sur une verticale, dans une zone non perturbée de l'écoulement (en amont de la topographie).

La température suivant une loi linéaire en fonction de la profondeur z , l'équation I.2.18 peut s'écrire :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} = \beta_t g \left(\frac{\delta T}{D} \right) z \quad (\text{I.2.19})$$

où δT est l'écart entre la température de surface et celle du fond, écart fixé, dans notre cas, à $0,6^\circ\text{C}$. L'intégration de l'équation I.2.19 entre une profondeur de référence z_0 et une profondeur z quelconque donne :

$$\frac{P(z) - P(z_0)}{\rho_0} = \beta_t g \frac{\delta T}{D} \frac{(z^2 - z_0^2)}{2} \quad (\text{I.2.20})$$

avec $P(z_0)$, la pression calculée à la profondeur de référence z_0 . En théorie, nous devons donc retrouver le fait que la pression varie paraboliquement avec la profondeur et dépend de l'intensité de la stratification.

A partir des résultats des calculs effectués lors des sections précédentes et en choisissant arbitrairement z_0 égal à la profondeur de la couche supérieure du domaine, nous avons calculé la fonction $f(z)$:

$$f(z) = \frac{P(z) - P(z_0)}{(z^2 - z_0^2)} \left(\frac{2D}{\rho_0} \right) \quad (\text{I.2.21})$$

La valeur de la fonction $f(z)$ doit s'exprimer par une valeur constante, caractérisant l'intensité de la force de flottabilité, soit :

$$f(z) = \beta_t g \delta T \quad (\text{I.2.22})$$

La figure I.2.46 illustre ce résultat et permet d'affirmer que le gradient vertical de pression calculé, en milieu tournant, par notre modèle équilibre correctement la stratification stable mise en œuvre. Précisons que nous avons obtenu les mêmes résultats pour des localisations horizontales différentes.

Ce dernier résultat implique qu'en écoulement non perturbé, le gradient horizontal de pression mis en jeu est globalement indépendant de l'intensité de la stratification. En effet, la prise en compte verticale de la stratification stable impose à la pression l'intégration d'une constante, différente sur chaque plan horizontal. Étant défini à une constante près, le gradient horizontal ne change pas.

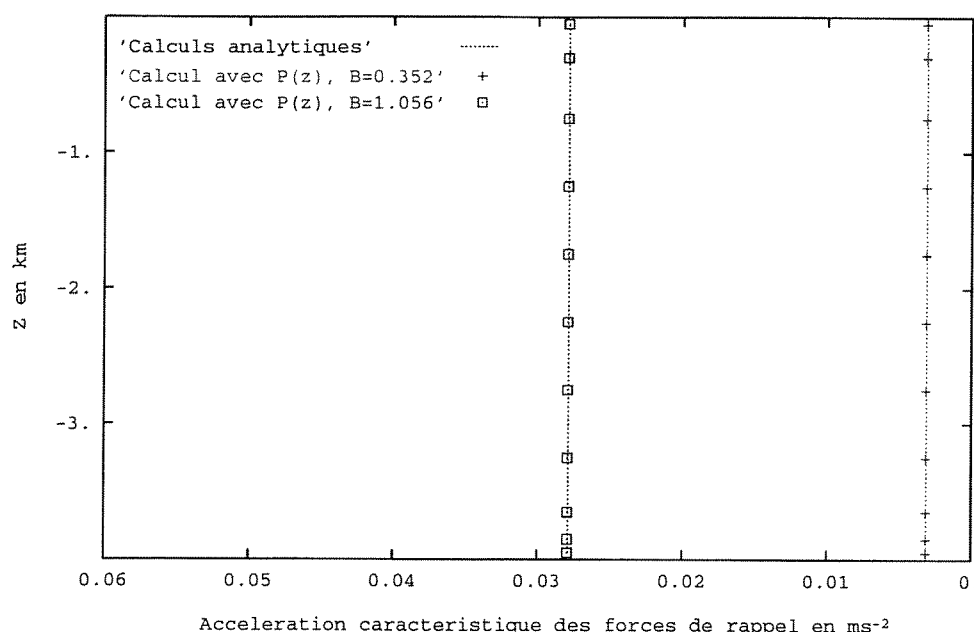


FIG. I.2.46 - *Equilibre gradient pression / force de flottabilité en $x=185\text{km}$, $y=250\text{km}$ (analytiquement : $f(z) = \beta_t \delta T g$).*

Cette propriété est confirmée par la figure I.2.47, indépendamment des déformations liées à la topographie et la stratification. En effet, à nombre d'isovaleurs fixé, nous retrouvons sur chaque plan horizontal les mêmes valeurs d'espacement des isobares, identiques d'ailleurs à celles obtenues lors du calcul barotrope (figure I.2.41) et bien que les extrêmes de pression soient différents.

2.4.2.b Effet de la topographie en mode barocline.

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, en présence de stratification, la pression équilibre à la fois la force de Coriolis, dont l'action motrice s'effectue horizontalement, et la force de flottabilité de direction verticale. Aussi, sur une coupe horizontale, nous retrouvons uniquement l'équilibre dû à la force de Coriolis et, de fait, l'équivalence entre lignes isobares et lignes de courant. Ceci nous permet de visualiser, comme pour le cas barotrope, l'influence de la stratification sur la déformation horizontale de l'écoulement au niveau de la topographie.

Pour le cas $\mu=5$, la figure I.2.47 présente les lignes isobares stationnaires selon deux plans horizontaux caractéristiques (-300 et -3650 mètres) et pour les deux intensités de stratification déjà étudiées ($B=0,352$ et $1,056$). La prise en compte d'une faible intensité de stratification se traduit effectivement par l'intensification de la déviation de l'écoulement dans les basses couches (b). Par contre, la déformation des isobares à proximité de la surface devient moins importante (a). L'effet lié à la forte stratification illustre à nouveau la bidimensionnalisation de l'écoulement. Le fluide a tendance à passer autour de la topographie plutôt qu'au dessus. Soumis à l'influence de la force de Coriolis, le contournement de la topographie se disymétrise et l'écoulement privilégie la direction *nord* (d). Au niveau des couches supérieures, les perturbations engendrées par la topographie ne se font plus sentir (c).

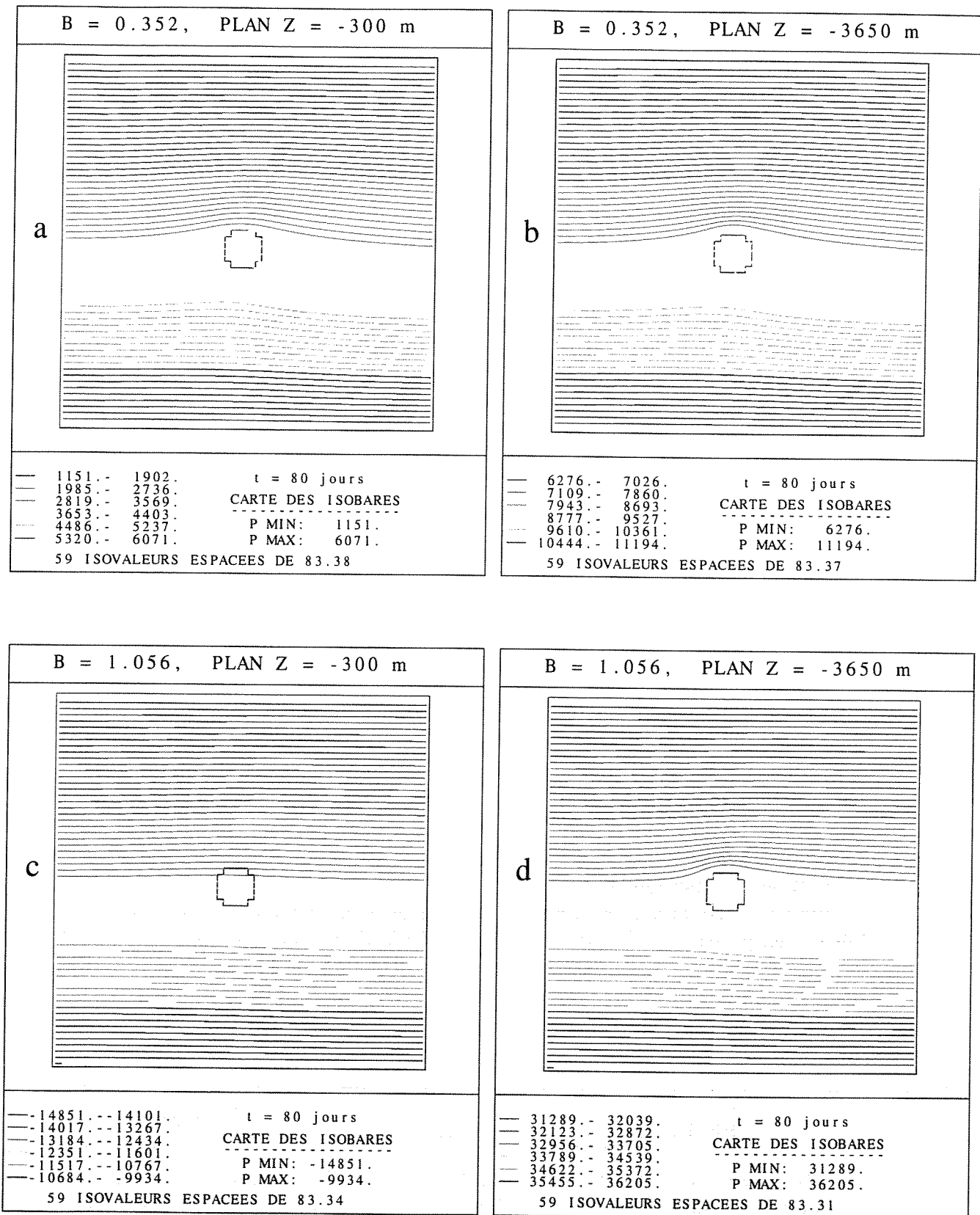


FIG. I.2.47 - Champs stationnaires de pression pour $\mu=5$, (2 intensités de stratification sur 2 plans horizontaux). $U_0 = 0.1 \text{ ms}^{-1}$, $h_b = 200 \text{ m}$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\nu_h = \alpha_h = 500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\nu_v = \alpha_v = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

2.5 Conclusion.

Avant de clore ce test d'application à la simulation d'un écoulement océanique au dessus d'une topographie isolée avec le modèle VDF, nous devons aborder l'aspect "performance" des calculs effectués. En effet, ce point demeure une préoccupation relativement importante en modélisation océanique, dans la mesure où la mise en œuvre de certains effets dynamiques peut demander des temps physiques de simulation considérables.

2.5.1 Résolution et performance.

Lorsqu'on s'intéresse au coût calcul d'un résultat numérique, le temps de calcul de la simulation proprement dit (temps "CPU") reste bien sûr l'indicateur le plus représentatif. Cependant, ce temps doit être pondéré par un certain nombre de critères entrant en ligne de compte. La rapidité d'un calcul ne peut être dissociée de paramètres comme le pas de temps, le nombre de degrés de liberté ou le type de schéma mis en œuvre lors du calcul¹⁵. Ainsi, comme Nguyen, nous rapportons le temps de calcul au nombre d'itérations effectué ainsi qu'au nombre d'inconnues du système en pression. A cet égard, notre technique de résolution des équations du mouvement (voir équ. I.1.26) nécessite 80% de ce temps CPU. L'inversion du système en pression influe de manière prépondérante sur le coût calcul. En la matière, le choix de la méthode de résolution est donc déterminant. Par ailleurs, la "précision" des résultats est également une notion importante, directement liée à la résolution du système et, de fait, à la performance du calcul. Enfin, il est intéressant de préciser l'encombrement mémoire que peut induire un calcul. Ce critère n'est pas directement lié à la rapidité d'une simulation mais il permet d'estimer la possibilité de raffiner un maillage (suivant les capacités de la machine).

Les calculs ont été exécutés sur un ordinateur Silicon Graphic "Power Challenge XL" dont la capacité en mémoire vive est de 768 Mo. Il est équipé de processeurs R8000 64 bits, à 75 Mhz. Les temps CPU que nous indiquons concernent des simulations réalisées avec les caractéristiques suivantes : domaine discret de $60 \times 60 \times 11$, soit 39600 degrés de liberté en pression (NDL), calcul jusqu'à 80 jours physiques, prise en compte de la stratification thermique, pas de temps fixé à 400 secondes et utilisation des schémas d'advection et de convection de types Quick.

Pour les tests présentés précédemment, nous avons signalé que l'inversion du système linéaire en pression s'effectuait par une méthode *directe de type Cholesky*. Le tableau ci-dessous présente les caractéristiques du coût calcul vis à vis de celui donné par Nguyen [46] pour le modèle SPEM avec discrétisation verticale de type σ (résolution la plus efficace sur ordinateur VFX/40 Alliant, processeurs ACE 64 bits, types 68020).

	NDL	CPU/1 itération (s)	CPU/1 itér./NDL (s)
VDF	$60 \times 60 \times 11$	8.52	$2.15 \cdot 10^{-4}$
SPEM	$81 \times 49 \times 6$	7.61	$3.2 \cdot 10^{-4}$

Ces comparaisons ne constituent pas un "benchmark"¹⁶. Ainsi, les mesures ne permettent pas d'affirmer que la résolution VDF est plus efficace. Elles donnent cependant une idée sur le temps CPU et montre qu'avec la résolution directe, le temps de calcul évolue dans une fourchette voisine.

15. un schéma de type Quick est par exemple entre 10 et 20% plus cher qu'un schéma Upwind.

16. la différence sur les performances des machines n'est notamment pas connue.

Si ce solveur semble relativement performant, la taille mémoire nécessaire à la simulation peut rapidement devenir prohibitive puisque la matrice du système est stockée en mémoire centrale. Ainsi, pour ce cas, il faut déjà compter environ 230 Mo.

Pour pallier ce problème, nous avons testé l'inversion du système par la méthode itérative du *gradient conjugué* avec préconditionnement SSOR. Ce solveur, beaucoup moins gourmand en taille mémoire, ne demande plus que 25,6 Mo. Cependant, nous constatons que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la méthode pénalise fortement les performances. A ce propos, rappelons que l'inversion du système en pression implique la conservation de la masse ($\nabla \cdot \vec{U} = 0$). Pour conserver des bilans de masses relativement faibles, il est donc indispensable de résoudre "suffisamment" le système en pression. Cette convergence de la méthode itérative dépend d'un paramètre¹⁷, qualifiant physiquement le maximum du bilan de masse autorisé sur une maille.

Nous avons effectué des tests comparatifs jusqu'à 10 jours physiques, toujours sur le même type de configuration numérique. Nous constatons qu'à partir d'une précision fixée à 0.01, les résultats correspondent qualitativement et quantitativement à ceux obtenus par la résolution directe. Les erreurs de bilan de masse, dont font parties les erreurs de troncature, sont alors suffisamment faibles pour ne pas dégrader la solution numérique. Par contre, le tableau ci-dessous montre que le temps CPU a été multiplié par plus de 4. Par la suite, toute tentative de diminution du coût calcul se fait au détriment de la précision des résultats. Ainsi, pour une précision de 0.1, nous retrouvons globalement la même topologie, mais des différences quantitatives de 10 à 20% sont observables, plus importantes suivant la verticale. Enfin, avec un critère d'arrêt numériquement encore plus élevé, nous perdons complètement la topologie verticale, l'écoulement horizontal est fortement bruité et les performances demeurent pourtant encore inférieures à la résolution directe.

Type de solveur	CPU/1 itér. (s)
DIRECTE	9
GCP, précision = 0.01	37.9
GCP, précision = 0.1	23.2
GCP, précision = 1	12.9

La figure I.2.48 illustre les difficultés du solveur itératif à converger et le nombre important d'itérations mis en jeu. On remarque l'influence de la montée en régime qui contraint le solveur à beaucoup plus d'efforts, l'équilibre géostrophique général changeant avec la vitesse à chaque pas de temps. Les figures I.2.49 suivantes montrent les bruits générés par le manque de résolution. Suivant la verticale, nous constatons que les déficits de bilan de masse perturbent la totalité de l'écoulement.

En définitive, ces sensibilités nous montrent l'influence d'une mauvaise résolution. Par ailleurs, les problèmes de convergence sont imputables au conditionnement de la matrice de pression E^0 . En effet, le rapport d'aspect important entre les directions horizontales et verticales (valeur typique de 80) donne lieu, dans notre matrice en pression, à de grandes variations entre les coefficients mis en jeu. Cet écrasement ne semble pas convenir à la résolution itérative qui montre beaucoup plus de difficultés à résoudre correctement le mouvement vertical.

17. critère d'arrêt de la solveur itératif : précision ou résidu autorisé lors de la convergence.

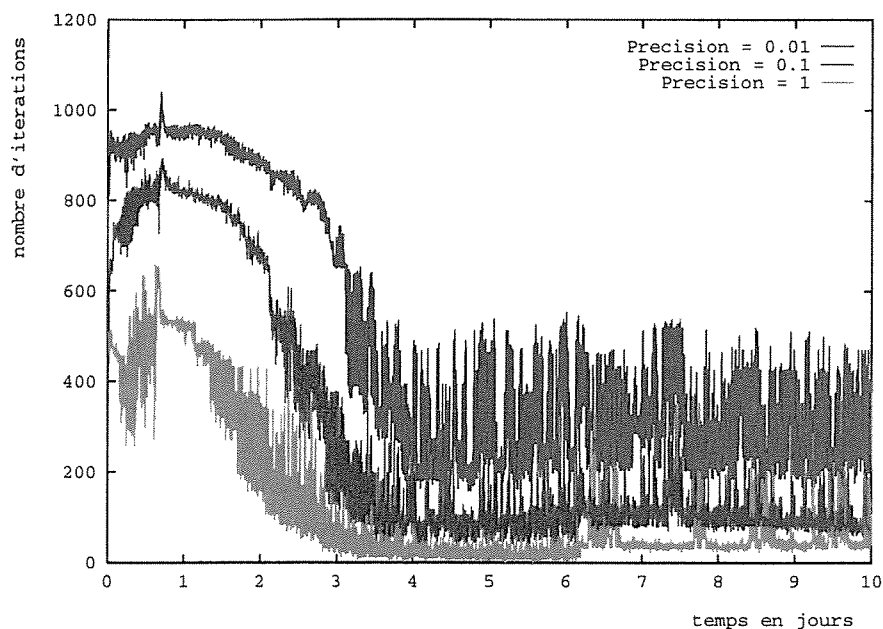


FIG. I.2.48 - Solveur itératif du type gradient conjugué, influence de la précision imposée sur le nombre d'itérations nécessaire à la convergence (cas $B=1.056$).

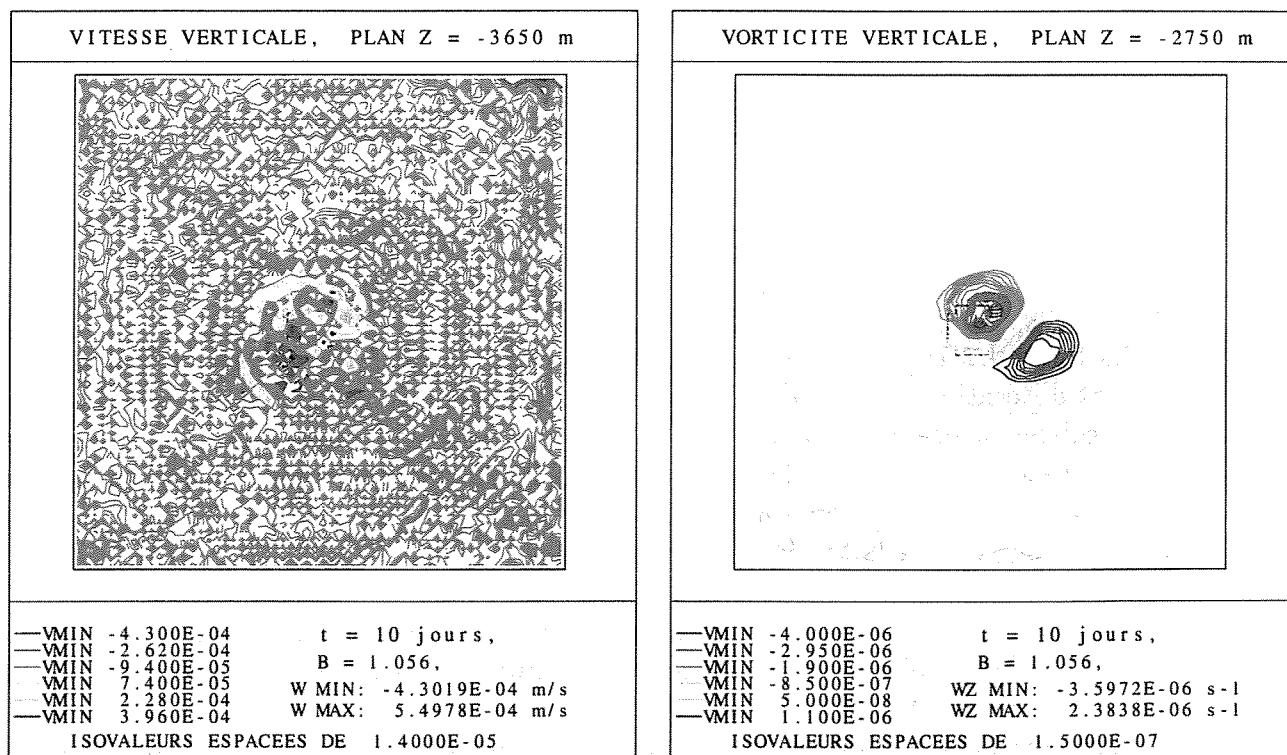


FIG. I.2.49 - Solveur itératif du type gradient conjugué, précision fixée à 1 (cas $B=1.056$).

2.5.2 Conclusion.

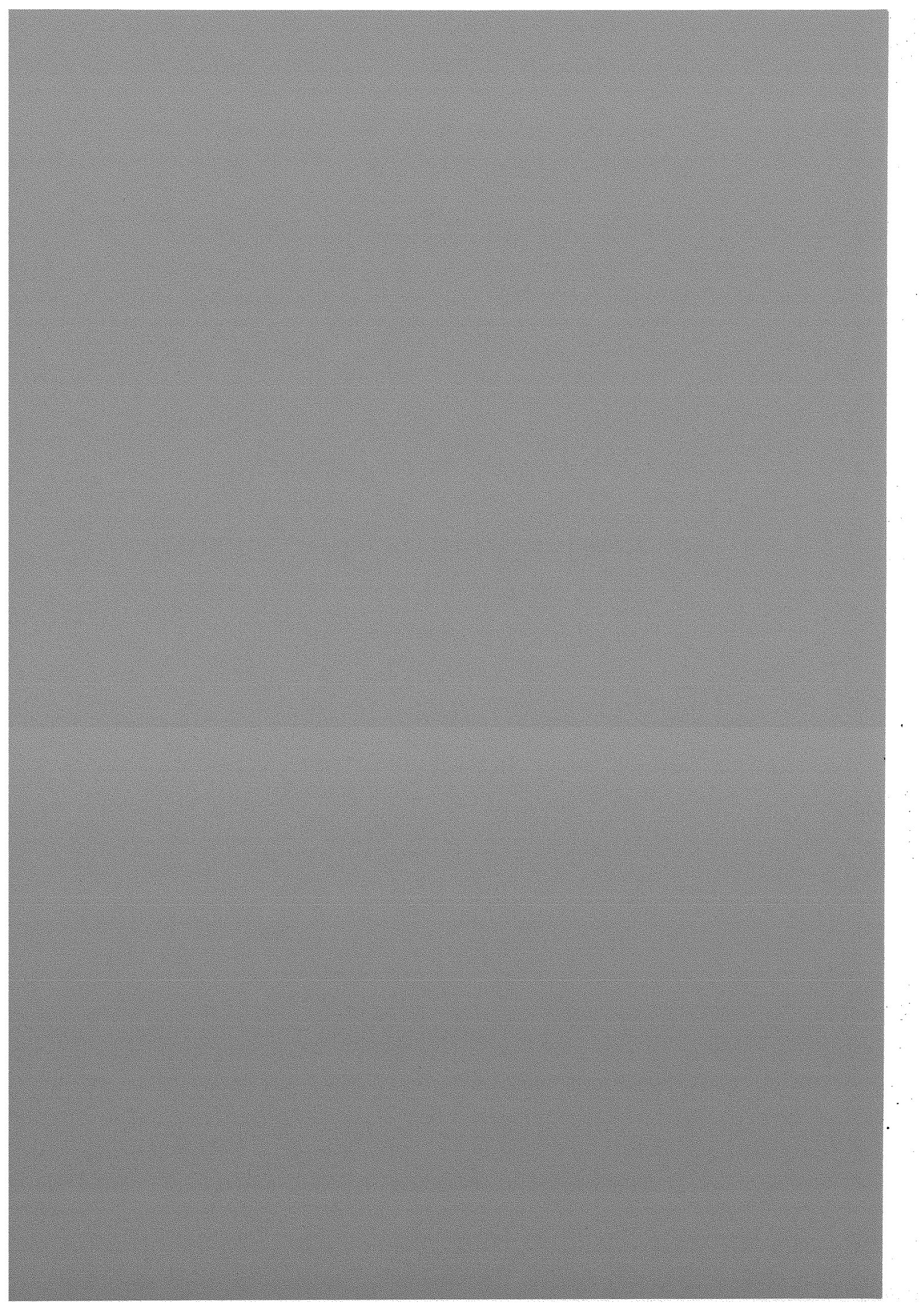
Ce cas test pourrait encore faire l'objet de nombreuses études paramétriques, visant à optimiser et compléter les résultats (prise en compte d'écoulements instationnaires en entrée, augmentation de la topographie, influence du raffinement du maillage, développement et application d'un opérateur de dissipation et de diffusion horizontales de type bilaplacien, etc...).

Cependant, vis à vis des résultats physiques, nous constatons que les modifications effectuées sur le logiciel TRIO-VF afin de pouvoir représenter des écoulements géophysiques se comportent correctement (prise en compte de la force de Coriolis, discrétisation temporelle de type leap-frog, turbulence anisotrope, condition de frontière ouverte). Malgré la discrétisation grossière de l'obstacle, nous retrouvons les principaux phénomènes physiques caractéristiques liés à ce type d'écoulement tridimensionnel de méso-échelle (création et évolution des tourbillons topographiques, obtention d'état stationnaire, régime d'ondes topographiques, influence d'une stratification thermique). A cet égard, les comparaisons réalisées avec certaines études théoriques, expérimentales et surtout vis à vis d'autres simulations numériques restent en bon accord. Par ailleurs, notre type de discrétisation et de résolution (volumes finis structurés et non-hydrostaticité) nous a permis de vérifier l'équilibre géostrophique et, malgré le facteur d'échelle important, la barotropie et l'équilibre barocline. Sur le plan physique, nos objectifs initiaux sont donc globalement atteints. Les principales sensibilités observées semblent inhérentes à la représentation de l'obstacle. Toutefois, nous avons évoqué précédemment les contraintes que nous impose le facteur d'échelle quant à la résolution du système. Ce point demeure donc un facteur limitatif important, notamment vis à vis de l'augmentation de la résolution du maillage.

Quoiqu'il en soit, ces premiers résultats sont encourageants et nous permettent de valider, pour cette configuration particulière, les possibilités du modèle VDF à représenter des processus dynamiques engendrés en océanographie.

Deuxième partie

Le modèle numérique Volumes
Éléments Finis, maillage
non-structuré.



chapitre II.1

Rappel du principe de discrétisation.

Introduction.

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles, la méthode des *volumes éléments finis* (VEF) consiste à rechercher une solution discrétisée dans les espaces éléments finis classiques, tout en gardant la notion de bilan propre aux volumes finis. Cette méthode alliant des éléments non-structurés à la formulation conservative a été mise en œuvre par Emonot [21] pour résoudre le système formé des équations de conservation 0.26, 0.27, 0.28. Pour l'élément de "Crouzeix Raviart", il a pu montrer la convergence de la méthode (conditions inf-sup) pour le problème du laplacien puis pour l'extension au problème de Stokes. Numériquement, la technique de discrétisation VEF appliquée à cet élément est donc à l'origine du code de calcul thermohydraulique sur lequel nos travaux se sont appuyés.

Ainsi, nous allons tout d'abord rappeler, sur cet élément de base, le principe numérique de la méthode VEF et les principaux résultats issus de la discrétisation des opérateurs mis en jeu. Pour simplifier les notations et le formalisme, nous nous intéresserons aux équations bidimensionnelles de la dynamique hydraulique.

1.1 Méthode VEF et élément de Crouzeix Raviart.

Comme pour le modèle VDF, on se donne une partition \mathcal{T}_h du domaine continu Ω_c , mais cette partition est maintenant constituée d'éléments triangulaires (resp. tétraédriques en trois dimensions). On associe, à cette triangulation, un recouvrement conforme du domaine par des volumes de contrôle. Ils sont choisis suivant la "nature" des espaces éléments finis des fonctions de base représentant l'approximation discrète des variables du problème.

On note $P0(K)$ l'espace des fonctions polynômes constantes sur un triangle K de \mathcal{T}_h et $P1(K)$ celui des fonctions affines (de la forme $ax+by+c$). Pour l'élément de Crouzeix Raviart, on associe à \mathcal{T}_h les espaces éléments finis \vec{V}_K et Q_K définis par :

$$\begin{aligned} V_K &= \{U \text{ continues aux } x_i : \forall K \in \mathcal{T}_h, U \in P1(K)\} \\ \vec{V}_K &= \{\vec{U} = (u, v) : u \in V_K, v \in V_K\} \\ Q_K &= \{P : \forall K \in \mathcal{T}_h, P \in P0(K)\} \end{aligned}$$

où les x_i sont les milieux des côtés des triangles K .

On note ensuite ϕ_i , la fonction de base¹ de V_K qui vérifie $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ et ψ_K , la fonction indicatrice du triangle K (i.e. ψ_K vaut 1 dans K et 0 ailleurs). Les ϕ_i constituent une base de V_K et les ψ_K une base de Q_K . Toute fonction de \vec{V}_K peut donc s'écrire :

$$\vec{U}(x) = \left(\sum_i u(x_i) \phi_i(x), \sum_i v(x_i) \phi_i(x) \right) = \sum_i \vec{U}(x_i) \phi_i(x) \quad (\text{II.1.1})$$

De même, pour toute fonction de Q_K :

$$P(x) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} P(C_K) \psi_K(x) \quad (\text{II.1.2})$$

où C_K représente le centre de gravité du triangle K .

Pour l'élément de Crouzeix Raviart, on utilise les deux décompositions précédentes pour représenter discrètement les vitesses et la pression. Ainsi, la pression discrète P est $P0(K)$ et la vitesse \vec{U} est $P1(K)$. Les degrés de liberté en pression sont donc localisés au centre de gravité des triangles K et les vitesses au milieu des cotés.

Remarque : les fonctions de forme ψ_K sont discontinues aux interfaces des K puisque P est $P0(K)$. De même, les ϕ_i sont discontinues sur les côtés des triangles K , l'élément de Crouzeix Raviart est donc non-conforme en vitesse. Cependant les ϕ_i restent continues aux nœuds x_i , de sorte que les flux de masse au travers des arêtes sont bien définis :

$$\int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} \vec{U}_{K_1} \cdot \vec{n}_{K_1} ds + \int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} \vec{U}_{K_2} \cdot \vec{n}_{K_2} ds = 0$$

où K_1 et K_2 sont deux triangles voisins, \vec{U}_{K_1} (resp. \vec{U}_{K_2}) est la restriction à K_1 (resp. K_2) de \vec{U} , \vec{n}_{K_1} (resp. \vec{n}_{K_2}) est la normale unitaire extérieure à K_1 (resp. K_2).

Volumes de contrôle : Comme pour le modèle VDF, on associe à chaque nœud x_i un volume de contrôle de quantité de mouvement ω_i obtenu en joignant les sommets de l'arête considérée aux centres de gravité des triangles adjacents ($C1$ et $C2$ sur la figure II.1.1). Dans l'élément de Crouzeix Raviart, les volumes de contrôle de masse, habituellement notés Π , sont les triangles K_n de \mathcal{T}_h .

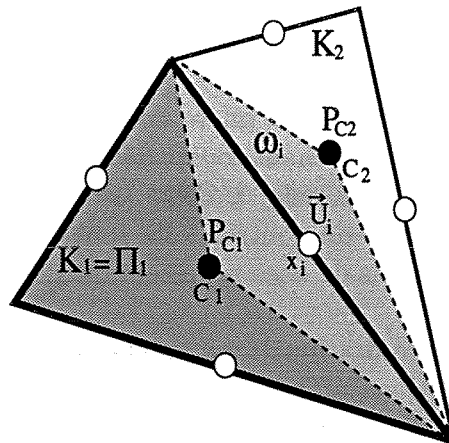


FIG. II.1.1 - Élément de Crouzeix Raviart, $P1$ -non conforme/ $P0$: localisation typique des variables discrètes et des volumes de contrôle sur un triangle K_1 .

1. Ces fonctions sont également appelées "fonctions de forme".

1.2 Discrétisation des bilans.

On cherche un champ de vitesse dont chaque composante est affine par élément, continue aux milieux des côtés et un champ de pression constant par élément vérifiant les équations de conservation de la masse (0.26) et de la quantité de mouvement (0.27) sur les volumes de contrôle adéquats.

On note désormais P_C (resp. \vec{U}) le vecteur représentant les composantes discrètes de la pression (resp. de la vitesse) dans leur espace d'approximation respectif. P_C est de taille NT (nombre d'éléments) et chaque composante u et v du vecteur \vec{U} est de taille NFA (nombre de faces ou d'arêtes). Pour le formalisme, on désignera par NFA la taille de \vec{U} . Les normales unitaires sont toujours extérieures au volume considéré. On conserve pour l'instant les composantes connues issues des conditions limites dans les vecteurs inconnus.

1.2.1 Conservation de la masse.

Le développement de cette équation suivant les fonctions de base permet d'écrire, pour chaque volume de masse K_n d'indice n variant de 1 à NT :

$$\sum_{i=1}^{NFA} \vec{U}_i \int_{\partial K_n} \phi_i \vec{n}_{\partial K_n} ds = 0 \iff B\vec{U} = 0 \text{ et } B_{ni} = \int_{\partial K_n} \phi_i \vec{n}_{\partial K_n} ds \quad (\text{II.1.3})$$

B est l'opérateur matriciel *divergence* de taille NT×NFA.

Compte tenu de la valeur des fonctions de forme sur ∂K_n , l'expression de B_{ni} peut se noter : $B_{ni} = \vec{S}_{K_n}^i$ avec $\vec{S}_{K_n}^i$ la surface normale de la face i , orientée vers l'extérieur de K_n et de mesure notée $mes(\vec{S}_{K_n}^i)$.

1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement.

On intègre cette équation vectorielle pour chaque volume de QDM ω_i attaché à la vitesse \vec{U}_i d'indice i variant de 1 à NFA. La figure II.1.2 illustre les discrétisations.

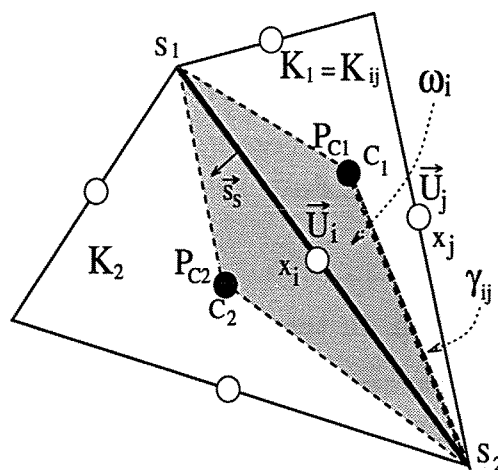


FIG. II.1.2 - Élément P1-non conforme/P0, évaluation des bilans de quantité de mouvement concernant la vitesse \vec{U}_i sur son volume ω_i .

1.2.2.a Discrétisation du gradient de pression.

La contribution, à l'équation de quantité de mouvement, du flux correspondant à ce terme donne :

$$\int_{\partial\omega_i} P_C \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = \sum_{n=1}^{NT} P_{Cn} \int_{\partial\omega_i} \psi_n \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = C P_C \quad \text{et} \quad C_{in} = \int_{\partial\omega_i} \psi_n \vec{n}_{\partial\omega_i} ds \quad (\text{II.1.4})$$

C est l'opérateur matriciel *gradient* de taille $NFA \times NT$.

A titre d'exemple, le gradient de pression concernant le volume ω_i de la figure II.1.2 se réduit à : $(C_{i1} + C_{i2})P_C = (P_{C1} - P_{C2})\vec{S}_{S_1 S_2}$, en prenant comme convention l'orientation de la normale de K_1 vers K_2 (i.e. celle de \vec{S}_S sur la figure).

1.2.2.b Discrétisation du terme de viscosité (laplacien).

En omettant les coefficients de viscosité, constants par éléments K , le flux de diffusion s'écrit :

$$\int_{\partial\omega_i} (\vec{\nabla} \vec{U}) \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = \sum_{j=1}^{NFA} \vec{U}_j \int_{\partial\omega_i} (\vec{\nabla} \phi_j) \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = A \vec{U} \quad \text{et} \quad A_{ij} = \int_{\partial\omega_i} (\vec{\nabla} \phi_j) \vec{n}_{\partial\omega_i} ds \quad (\text{II.1.5})$$

A est l'opérateur matriciel de taille $NFA \times NFA$, représentant les termes *visqueux*.

Détaillons l'expression du terme A_{ij} . Pour cela, on note K_{ij} l'élément qui possède les faces i et j en commun et $mes(K_{ij})$ sa mesure. Les fonctions de forme ϕ_i et ϕ_j étant linéaires, leur gradient est constant sur K_{ij} . A partir de cette considération, on utilise tout d'abord le résultat général, démontré par Emonot [21], exprimant, dans tout K_{ij} :

$$[\vec{\nabla} \phi_j]_{K_{ij}} = \frac{1}{mes(K_{ij})} \int_{\partial K_{ij}} \phi_j \vec{n}_{\partial K_{ij}} ds = \frac{1}{mes(K_{ij})} \vec{S}_{K_{ij}}^j$$

L'expression de A_{ij} devient donc :

$$A_{ij} = [\vec{\nabla} \phi_j]_{K_{ij}} \int_{(\partial\omega_i \cap K_{ij})} \vec{n}_{(\partial\omega_i \cap K_{ij})} ds = \frac{1}{mes(K_{ij})} \vec{S}_{K_{ij}}^j \int_{(\partial\omega_i \cap K_{ij})} \vec{n}_{(\partial\omega_i \cap K_{ij})} ds$$

par ailleurs,

$$\int_{(\partial\omega_i \cap K_{ij})} \vec{n}_{(\partial\omega_i \cap K_{ij})} ds = -\vec{S}_{K_{ij}}^i$$

Finalement, en rajoutant le coefficient de viscosité, A_{ij} se réduit à :

$$A_{ij} = -\nu_{K_{ij}} \times \frac{\vec{S}_{K_{ij}}^j \cdot \vec{S}_{K_{ij}}^i}{mes(K_{ij})} \quad (\text{II.1.6})$$

1.2.2.c Discrétisation du terme de transport non-linéaire.

On note plus précisément \vec{U}^{te} la vitesse transportée et \vec{U}^{ta} la vitesse transportante. Le terme d'advection (ou convection) non-linéaire écrit sous forme d'un flux se traduit de manière générale par :

$$\int_{\partial\omega_i} \vec{U}^{te} \times (\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\partial\omega_i}) ds = \sum_{j=1}^{NFA} \int_{\partial\omega_i} \sum_{k=1}^{NFA} (\phi_k \vec{U}_k^{te}) \times (\phi_j \vec{U}_j^{ta} \cdot \vec{n}_{\partial\omega_i}) ds = L(\vec{U})_{ij} \vec{U} \quad (\text{II.1.7})$$

L'opérateur matriciel $L(\vec{U})_{ij}$ correspondant à ce schéma centré s'exprime par :

$$L(\vec{U})_{ij} = \sum_{k=1}^{NFA} \left(\int_{\partial\omega_i} \phi_k \phi_j \vec{n}_{\partial\omega_i} ds \right) \cdot \vec{U}_k^{te}$$

Emonot [21] a montré que cette matrice n'est pas à diagonale dominante et conduit donc à des instabilités. Pour obtenir un schéma stable, l'intégration du flux est faite par l'intermédiaire d'un schéma décentré amont. La vitesse transportée \vec{U}^{te} n'est plus calculée par décomposition sur la base de \vec{V}_K mais elle est estimée de manière approchée suivant le signe de $\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\partial\omega_i}$. Cette valeur est choisie constante sur chaque facette de $\partial\omega_i$. Par contre, la vitesse \vec{U}^{ta} aux différentes facettes reste extrapolée grâce aux valeurs des fonctions de forme associées aux éléments K .

Ainsi, pour la facette γ_{ij} encadrée par les deux faces i et j (cf. fig. II.1.2), le flux correspondant à ce schéma se formalise par :

$$\int_{\gamma_{ij}} \vec{U}^{te} \times (\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}}) ds \approx \begin{cases} \vec{U}_i \int_{\gamma_{ij}} (\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}}) ds & \text{si } \vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}} > 0 \\ \vec{U}_j \int_{\gamma_{ij}} (\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}}) ds & \text{si } \vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}} < 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.8})$$

On note $L'(\vec{U})_{ij}$ l'opérateur matriciel de taille $NFA \times NFA$ correspondant à ce schéma. Nous reviendrons ultérieurement sur ce type de discrétisation (chap. II.3).

1.2.2.d Discrétisation du terme d'inertie temporelle.

L'intégration de la dérivée partielle temporelle de la vitesse conduit à :

$$\int_{\omega_i} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dV = \sum_{j=1}^{NFA} \frac{\partial \vec{U}_j}{\partial t} \int_{\omega_i} \phi_j dV = M \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \quad \text{et} \quad M_{ij} = \int_{\omega_i} \phi_j dV \quad (\text{II.1.9})$$

Nous reviendrons sur les propriétés et l'expression de cette matrice M , appelé "matrice de masse", lors de la mise en œuvre du système linéaire.

1.2.2.e Termes supplémentaires: force de Coriolis et frottement de fond.

Comme pour la discrétisation du terme d'inertie, l'intégration du terme supplémentaire correspondant à la force de Coriolis $F_{cor}(\vec{U})$ se ramène à :

$$\int_{\omega_i} F_{cor}(\vec{U}) ds = \begin{cases} \text{suivant } x : \sum_{j=1}^{NFA} f_j v_j \int_{\omega_i} \phi_j dV \\ \text{suivant } y : \sum_{j=1}^{NFA} -f_j u_j \int_{\omega_i} \phi_j dV \end{cases} = M F_{cor}(\vec{U}) \quad (\text{II.1.10})$$

où chaque f_j est constant sur ω_i et estimé au centre de la face autour de laquelle est construit le volume de QDM ω_i .

De même, le frottement de fond $\vec{F}_{frot}(\vec{U})$ se traduit :

$$\int_{\omega_i} F_{frot}(\vec{U}) dV = \sum_{j=1}^{NFA} -k_{fr} \vec{U}_j \int_{\omega_i} \phi_j dV = M F_{frot}(\vec{U}) \quad (\text{II.1.11})$$

où k_{fr} est le coefficient de frottement de fond, constant sur tout le domaine Ω_c .

1.3 Système linéaire, mise en œuvre et résolution.

1.3.1 Formulation matricielle et propriétés.

Compte tenu de l'expression des différents opérateurs, le problème se représente matriciellement par la formulation :

$$B\vec{U} = 0 \quad (\text{II.1.12})$$

$$M \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -L'(\vec{U})\vec{U} - CP_C + A\vec{U} + MF_{cor}(\vec{U}) + MF_{frot}(\vec{U}) \quad (\text{II.1.13})$$

Concernant ces opérateurs, l'élément de Crouzeix Raviart implique les propriétés suivantes :

- les opérateurs discrets *gradient* C et *divergence* B sont transposés (au signe près, lié à la convention d'orientation des faces normales).
- On adopte une forme approximative condensée pour M (lumped-masse) :

$$M_{ij} \approx mes(\omega_i) \delta_{ij}$$

Sous cette forme, M est diagonale et tous les termes sont strictement positifs donc M est facilement inversible.

1.3.2 Schéma temporel et stabilité

Nous avons implanté de la même manière que pour le modèle VDF, le schéma d'intégration temporel Leap-frog. Les problèmes de divergence par apparition d'un mode numérique sont également traités par l'utilisation du filtre temporel Robert-Asselin (Asselin [3]). Ainsi, l'équation II.1.13 s'écrit :

$$\frac{\vec{U}^{t+1} - \vec{U}_c^{t-1}}{2\Delta t} = M^{-1} [A\vec{U}^{t-1} - L'(\vec{U}^t)\vec{U}^t - CP_C^{t+1}] + F_{cor}(\vec{U}^t) + F_{frot}(\vec{U}^t) \quad (\text{II.1.14})$$

où \vec{U}_c est la vitesse calculée par le filtre Asselin.

La mise en œuvre explicite des schémas de convection et de diffusion implique le choix d'un pas de temps assurant la stabilité de la méthode numérique. Par analogie au modèle VDF, la stabilité conditionnelle s'exprime par deux principaux critères : un critère lié au schéma de transport, dont le principe est similaire au CFL, et l'autre lié à la prise en compte du terme diffusif.

Pour le transport, on doit vérifier :

$$\Delta t_{conv} \leq \min_{\omega} \left(\frac{mes(\omega_i)}{\sum_k mes(\gamma_{ik}) \vec{U}_{\gamma_{ik}}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ik}}} \right) \quad (\text{II.1.15})$$

l'indice k désignant la facette γ_{ik} de $\partial\omega_i$ où le flux $\vec{U}_{\gamma_{ik}}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ik}}$ est considéré comme entrant dans ω_i .

Par ailleurs, le calcul du critère lié au coefficient de diffusion s'effectue en définissant, dans le domaine, le pas minimum Δh du recouvrement spatial correspondant aux volumes de QDM.

$$\Delta h = \min_{|\omega} \left(\frac{\text{mes}(\omega_i)}{\text{mes}(\partial K_i)} \right)$$

Ainsi, on obtient:

$$\Delta t_{diff} \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta h^2}{\max(\nu_h)} \quad (\text{II.1.16})$$

Pour un pas de temps fixé, il est donc toujours possible d'estimer, comme pour le modèle structuré, une vitesse numérique de calcul ($\Delta h / \Delta t$). La plus rapide célérité d'un phénomène physique connu² à modéliser imposera une limitation en rapport avec cette vitesse numérique caractéristique.

1.3.3 Conditions limites.

En ce qui concerne les conditions limites, nous nous sommes restreints :

- aux conditions du type Dirichlet où la vitesse et donc le flux $\vec{U} \cdot \vec{n}$ sont désormais connus aux faces limites,
- aux conditions de glissement (\Leftrightarrow symétrie), imposant $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{\nabla} P_C \cdot \vec{n} = 0$ au bord.

Pour une face i portant une condition de type Dirichlet en vitesse, on n'écrit pas d'équation de conservation de QDM autour de ce noeud. Ce flux connu $\vec{U}_i^D \cdot \vec{n}_i$ est pris en compte au niveau de l'opérateur divergence B . Il intervient de manière explicite, au second membre de l'équation II.1.12, dans l'évaluation de l'incompressibilité concernant l'élément limite K_n . Dans ce cas, on peut encore écrire: $B_{ni} = \vec{S}_{K_n}^i$.

Sur le volume de QDM ω_i associé à la face limite de glissement et appartenant à l'élément K_n , le gradient normal de pression est imposé à 0. Pour l'élément de Crouzeix Raviart, cela se traduit uniquement par: $C_{in} = 0$. La nullité du flux normal de la vitesse à la face reste vérifiée, pour tous les opérateurs de QDM mis en jeu, par construction symétrique "virtuelle" de ω_i . Pour l'opérateur divergence, on procède comme pour une condition de Dirichlet, si bien que $B_{ni} = 0$.

1.3.4 Résolution.

Le système linéaire à résoudre s'obtient toujours par le même type de projection (voir annexe A). On applique l'opérateur divergence discret B à l'équation II.1.13 en posant tout d'abord:

$$S\vec{M} = \frac{\vec{U}_c^{t-1}}{2\Delta t} + M^{-1} [A\vec{U}^{t-1} - L'(\vec{U}^t)\vec{U}^t] + F_{cor}(\vec{U}^t) + F_{frot}(\vec{U}^t) \quad (\text{II.1.17})$$

2. comme par exemple, la propagation des ondes de Rossby (voir notamment Branger [12]).

En sortant P_C du second membre, on aboutit à un système linéaire, de type "équation de Poisson", concernant la pression :

$$(BM^{-1}C).P_C^{t+1} = B.S\vec{M}^{t,t-1} \quad (\text{II.1.18})$$

La matrice en pression est de taille NT×NT mais fortement creuse. En effet, cette matrice ne contient que 4 éléments non-nuls par lignes et par colonnes en dimension 2 (5 en dimension 3).

Par ailleurs, elle est symétrique³, définie positive⁴, donc inversible (Emonot [21]). Avec la forme condensée pour M, on peut montrer que :

$$E_{mn}^0 = (BM^{-1}C)_{mn} = \frac{(S^k)^2}{mes(\omega_k)}$$

où k représente la face commune aux éléments K_n et K_m , de mesure S^k et de volume de quantité de mouvement associé ω_k .

Cette matrice E^0 est assemblée une seule fois, en début de programme car elle ne dépend que des grandeurs géométriques.

Elle est inversée par une méthode itérative de type gradient conjugué avec préconditionnement SSOR, bien adaptée aux matrices creuses, symétriques et définies positives.

Une fois le système en pression résolu, le champ de vitesse est obtenu par :

$$\vec{U}^{t+1} = 2\Delta t \times (\vec{S}\vec{M} - M^{-1}CP_C^{t+1}) \quad (\text{II.1.19})$$

L'algorithme est itératif en temps.

3. car les matrices divergence et gradient sont transposées.

4. pour cela, on multiplie en fait le système par $-B$.

chapitre II.2

Modifications 2D de l'élément en pression.

2.1 Introduction.

2.1.1 Pourquoi une modification.

Pour illustrer de manière simple le problème lié à la discrétisation du gradient de pression du modèle initial, nous avons effectué, par référence au modèle VDF, un calcul hydraulique sur un domaine horizontal de 500×500 kilomètres, discrétisé avec un maillage triangulaire issu d'un maillage structuré de 28×28 éléments.

Sur ce domaine initialement au repos, nous imposons en entrée et en sortie une vitesse uniforme $U_0 = 0.1 m.s^{-1}$ d'axe ouest/est, les termes non-linéaires et diffusifs sont négligés. En présence de la force de Coriolis, le gradient de pression doit réaliser l'équilibre géostrophique. Ainsi, dans tout le domaine, la condition limite de vitesse uniforme constitue la solution évidente, immédiate et stationnaire de ce problème.

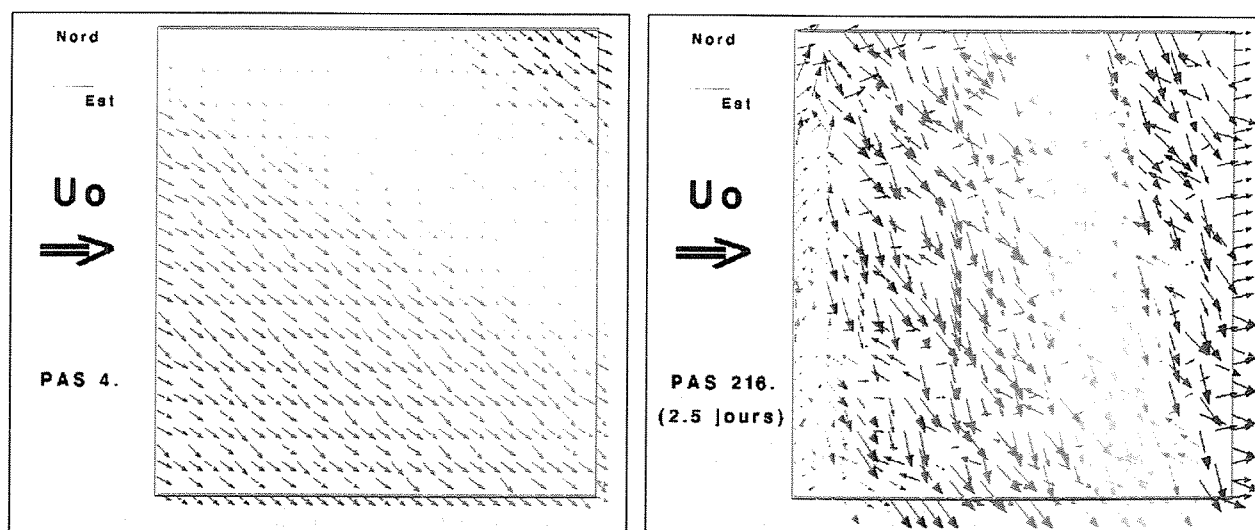


FIG. II.2.1 - Test de l'élément de Crouzeix Raviart ($P1$ -non conforme/ $P0$) en présence de la force de Coriolis (f -plan, $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$): vecteurs vitesses coloriés par la pression.

Les résultats précédents montrent très rapidement une perte de l'équilibre géostrophique

débouchant sur une divergence complète de la solution. Il est clair que le gradient de pression ne parvient pas à jouer correctement son rôle. En effet, sur ce cas particulier, l'équilibre de la force de Coriolis se traduit par :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho f_0 U_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

La pression ne dépend que de y . Avec la discrétisation P_0 , le gradient de pression s'exprime uniquement en fonction de la normale aux faces. De fait, cette unique contribution ne peut vérifier à la fois les deux égalités précédentes : pour chaque gradient discret, il existe, la plupart du temps, une contribution non nulle suivant x . L'approximation discrète choisie initialement pour représenter la pression est donc insuffisamment élevée pour intégrer correctement la force de Coriolis et vérifier l'équilibre géostrophique.

2.1.2 Démarche des développements.

Intuitivement, on sent la nécessité "d'ajouter" une contribution tangentielle au gradient de pression de l'approximation P_0 . Aussi, l'approximation discrète de la pression doit s'effectuer au moins dans l'espace des fonctions linéaires sur l'élément K .

Afin de minimiser l'ampleur et la difficulté des développements, nous avons choisi de prendre la pression dans l'espace $P_1(K)$. De ce fait, il n'est pas nécessaire d'augmenter l'ordre de l'espace discret des vitesses, le nombre de degrés de liberté en pression restant toujours inférieur à celui des vitesses. Les opérateurs discrets ne dépendant pas de la pression ou de son volume de contrôle demeurent inchangés (convection, diffusion, masse, forces de volume). Seules les matrices de divergence et de gradient sont à réestimer, ainsi que la matrice en pression.

D'autre part, les développements ont été effectués tout d'abord en dimension deux. La mise en œuvre discrète des différents opérateurs est ainsi facilitée, tout en permettant la vérification numérique des modèles dans le contexte océanographique qui nous intéresse plus particulièrement.

Deux types d'éléments ont été implémentés. Ils se différencient géométriquement par la localisation des inconnues de pression sur le triangle K . Ces choix initiaux reposent davantage sur l'intuition que sur une justification théorique (conditions inf-sup non démontrées) ou même bibliographique (pas de modèles équivalents). Cependant, les résultats positifs des différentes expérimentations numériques peuvent être considérés, à posteriori, comme des éléments de justification.

2.2 Le modèle P1-non conforme/P1-iso.

2.2.1 L'élément 2D.

Dans ce modèle, les inconnues discrètes en pression sont localisées aux sommets et on conserve une inconnue au centre de gravité de l'élément. La pression est choisie linéaire et continue sur chaque volume de quantité de mouvement (affine par morceau dans K). En conservant les notations du schéma P1-non conforme/ P_0 , la figure II.2.2 suivante présente cet élément avec la localisation des inconnues et de leurs volumes de contrôle respectifs dans un triangle caractéristique K .

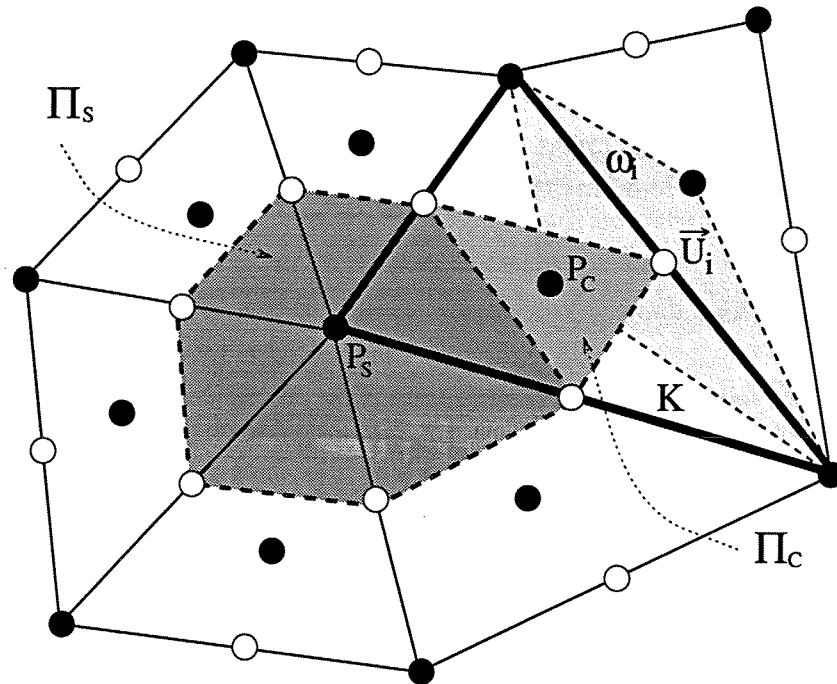


FIG. II.2.2 - Éléments P1-non conforme/P1-iso, localisation typique des variables discrètes et des volumes de contrôle correspondants, sur un triangle K .

On constate, sur ce triangle K , deux types de volumes de contrôle de masse :

- les volumes Π_S correspondant aux sommets des éléments K , construits en joignant sur chaque élément K , le centre des faces concernées par le sommet,
- les volumes Π_C correspondant aux centres de gravité, construits en joignant sur chaque élément K , le centre des faces du K considéré.

Le vecteur P représentant les inconnues de pression est ainsi de taille $NS+NT$ avec NS le nombre de sommets. On désignera par P_{Cn_c} les composantes P correspondant aux NT inconnues de pression centrées ($1 \leq n_c \leq NT$) et par P_{Sn_s} les NS inconnues localisées aux sommets des K ($NT \leq n_s \leq NS+NT$).

On note Q'_K l'espace élément fini engendrant P , continue sur tout K , et tel que :

$$Q'_K = \{P : \forall (\Pi_S \cap K) \text{ et } (\Pi_C \cap K) \in \mathcal{T}_h, P \in P1(K)\}$$

On représente par l'indice générique n , soit un des sommets, soit le centre de gravité de K_{n_c} ($1 \leq n \leq NS+NT$). ψ_{n_c} et ψ_{n_s} désignent les fonctions de forme qui vérifient maintenant pour tout x_n : $\psi_{n_c}(x_n) = \delta_{n_c n}$ et $\psi_{n_s}(x_n) = \delta_{n_s n}$. Les ψ_n constituent une base de Q'_K et on peut décomposer P sur cette base, d'où, pour ce schéma P1-iso en pression :

$$P(x) = \sum_{n_c} P_C(x_{n_c}) \psi_{n_c}(x) + \sum_{n_s} P_S(x_{n_s}) \psi_{n_s}(x) = \sum_n P(x_n) \psi_n(x) \quad (\text{II.2.1})$$

2.2.2 Discrétisation de l'opérateur *gradient*.

2.2.2.a Contribution sur un volume de QDM.

Pour un volume de QDM ω_i , la nouvelle discrétisation de l'opérateur gradient s'exprime formellement par le même type de représentation que pour le modèle P0(K). En effet, on écrit encore :

$$\int_{\partial\omega_i} P \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = \sum_{n=1}^{NT+NS} P_n \int_{\partial\omega_i} \psi_n \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = CP \quad \text{et} \quad C_{in} = \int_{\partial\omega_i} \psi_n \vec{n}_{\partial\omega_i} ds \quad (\text{II.2.2})$$

Cependant la matrice C_{in} est maintenant de taille $NFA \times (NT+NS)$ et la fonction de forme ψ_n est linéaire sur K . Examinons plus en détail la prise en compte discrète de ce gradient sur le volume de QDM ω_i correspondant à la figure II.2.3 suivante.

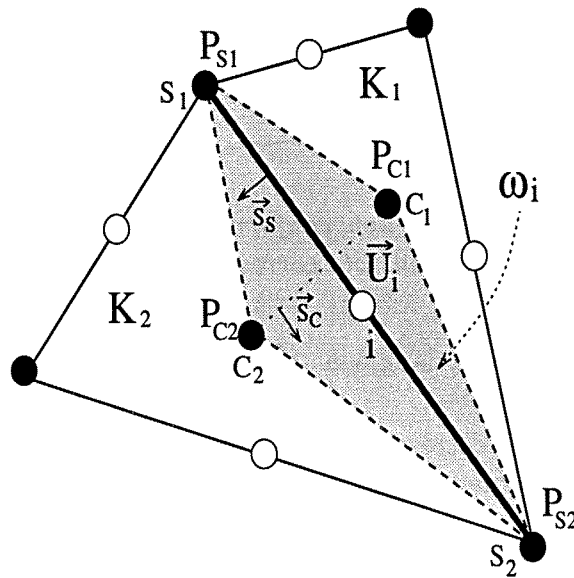


FIG. II.2.3 - Élément P1-non conforme/P1-iso, évaluation du gradient de pression concernant la vitesse U_i sur son volume ω_i .

Avec ces notations, le gradient de pression s'exprime par :

$$\int_{\partial\omega_i} P \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = P_{C1} \int_{\partial\omega_i} \psi_{C1} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds + P_{C2} \int_{\partial\omega_i} \psi_{C2} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds + P_{S1} \int_{\partial\omega_i} \psi_{S1} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds + P_{S2} \int_{\partial\omega_i} \psi_{S2} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds \quad (\text{II.2.3})$$

D'autre part, compte tenu de la valeur des fonction de forme sur les $\partial\omega_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_i} \psi_{C1} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds &= \frac{1}{2} [\text{mes}(C_1 S_1) \vec{n}_{C_1 S_1} + \text{mes}(C_1 S_2) \vec{n}_{C_1 S_2}] = \frac{1}{2} (\vec{S}_{C_1 S_1} + \vec{S}_{C_1 S_2}) \\ \int_{\partial\omega_i} \psi_{C2} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds &= \frac{1}{2} [\text{mes}(C_2 S_1) \vec{n}_{C_2 S_1} + \text{mes}(C_2 S_2) \vec{n}_{C_2 S_2}] = \frac{1}{2} (\vec{S}_{C_2 S_1} + \vec{S}_{C_2 S_2}) \\ \int_{\partial\omega_i} \psi_{S1} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds &= \frac{1}{2} [\text{mes}(C_1 S_1) \vec{n}_{C_1 S_1} + \text{mes}(C_2 S_1) \vec{n}_{C_2 S_1}] = \frac{1}{2} (\vec{S}_{C_1 S_1} + \vec{S}_{C_2 S_1}) \\ \int_{\partial\omega_i} \psi_{S2} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds &= \frac{1}{2} [\text{mes}(C_1 S_2) \vec{n}_{C_1 S_2} + \text{mes}(C_2 S_2) \vec{n}_{C_2 S_2}] = \frac{1}{2} (\vec{S}_{C_1 S_2} + \vec{S}_{C_2 S_2}) \end{aligned}$$

Par définition, les surfaces normales sont orientées extérieures à $\partial\omega_i$. En utilisant le fait que, sur un contour fermé, la somme des surfaces normales est nulle, on peut exprimer ces résultats en fonction des surfaces normales : $\vec{S}_{S_1S_2}$ et $\vec{S}_{C_1C_2}$. Par convention, on choisit d'orienter ces surfaces des indices 1 vers 2¹. On arrive finalement à l'expression du gradient de pression sur ω_i :

$$\int_{\partial\omega_i} P \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = \frac{1}{2} (P_{C2} - P_{C1}) \vec{S}_{S_1S_2} + \frac{1}{2} (P_{S2} - P_{S1}) \vec{S}_{C_1C_2} \quad (\text{II.2.4})$$

il apparaît ainsi une contribution de composante normale, similaire² au modèle P0, et une contribution supplémentaire de composante tangentielle à la face i considérée.

Signalons, par ailleurs, que chacune de ces contributions dépend soit des pressions centrées soit des pressions aux sommets. Il semble donc que ces deux champs de pression soient "décorréllés".

Matriciellement, les coefficients C_{inc} et C_{ins} correspondant aux contributions des fonctions de forme ψ_{nc} et ψ_{ns} sur $\partial\omega_i$ peuvent se formaliser génériquement par :

$$C_{inc} = \pm \frac{1}{2} \vec{S}_S^i \quad \text{et} \quad C_{ins} = \pm \frac{1}{2} \vec{S}_C^i \quad (\text{II.2.5})$$

Les \vec{S}_S^i sont construites à partir des sommets de la face i considérée, les \vec{S}_C^i par les centres de gravité des éléments de face i communes. Le signe dépend de l'orientation locale.

2.2.2.b Prise en compte des conditions limites.

Si la face i est de Dirichlet, on ne pratique pas d'intégration de l'équation de quantité de mouvement autour de cette face. Ainsi, les composantes du gradient sur cette face sont mises à 0 : $C_{in} = 0$.

Si la face est de symétrie, la composante normale du gradient est nulle. On ne conserve que la composante tangentielle. De plus, la surface normale est construite en calculant le projeté orthogonal du centre de gravité de l'élément interne limitrophe K_1 , sur la face i . Notons $\vec{S}_{C_1/i}$ cette surface normale. Par construction géométrique de l'élément virtuel symétrique K_2 , on obtient donc :

$$\int_{\partial\omega_i^{sym}} P \vec{n}_{\partial\omega_i^{sym}} ds = \frac{1}{2} (P_{S2} - P_{S1}) 2\vec{S}_{C_1/i} = (P_{S2} - P_{S1}) \vec{S}_{C_1/i} \quad (\text{II.2.6})$$

2.2.3 Discrétisation de l'opérateur *divergence*.

La matrice de divergence B_{ni} devient de taille (NT+NS)×NFA. Nous scindons le traitement en deux, suivant les différents volumes d'intégration mis en jeu. Les notations sont celles de la figure II.2.4 suivante.

1. cf. orientation des normales \vec{S}_S et \vec{S}_C sur la figure II.2.3, informatiquement, ces choix sont réalisés en orientant les normales du plus petit vers le plus grand numéro des sommets ou des éléments.

2. notons cependant le coefficient 1/2 issue de la fonction de forme P1(K).

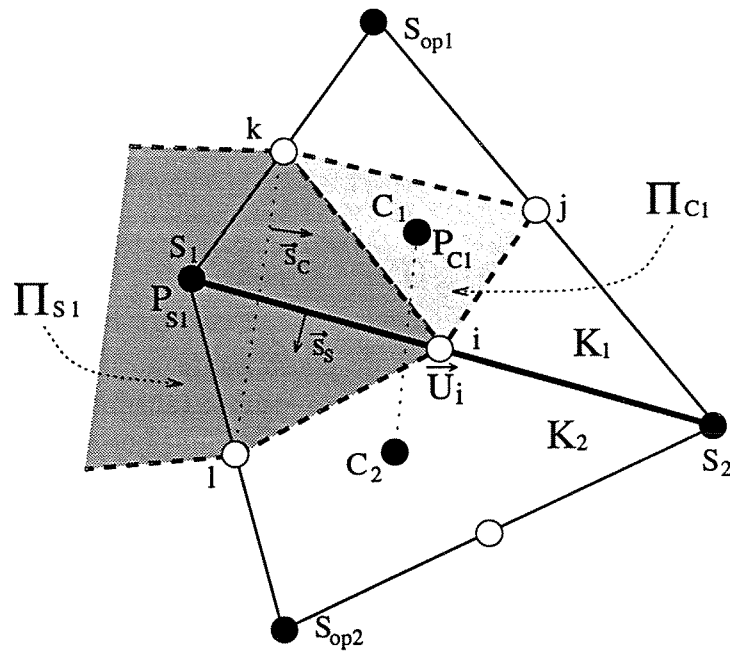


FIG. II.2.4 - Éléments P1-non conforme/P1-iso, localisation des volumes de masse pour l'évaluation de la divergence de la vitesse.

2.2.3.a Intégration sur les volumes de masse centrés.

Nous nous intéressons à l'intégration sur le volume Π_{C1} inclue dans l'élément K_1 . Nous utilisons, par ailleurs, les relations géométriques du type $mes(\vec{S}_{ik}) = 1/2 mes(\vec{S}_{S_{op1}S_2})$ et nous conservons l'orientation des normales extérieure à K_1 . En tenant compte de la valeur des fonctions de forme ϕ_{nc} sur $\partial\Pi_{C1}$, la discrétisation de la divergence donne :

$$\int_{\partial\Pi_{C1}} \vec{U} \vec{n}_{\partial\Pi_{C1}} ds = \frac{1}{4} (\vec{U}_i \vec{S}_{S_1S_2} + \vec{U}_j \vec{S}_{S_{op1}S_2} + \vec{U}_k \vec{S}_{S_{op1}S_1}) = \frac{1}{4} \int_{\partial K_1} \vec{U} \vec{n}_{\partial K_1} ds \quad (II.2.7)$$

Ainsi, en conservant la nullité de la divergence sur les volumes de masse centrés, ce modèle vérifie également cette propriété sur chaque élément K .

Matriciellement, le coefficient B_{nci} correspondant aux contributions de la fonction de formes ϕ_i sur $\partial\Pi_{Cnc}$ peut ainsi se formaliser par :

$$B_{nci} = \pm \frac{1}{4} \vec{S}_S^i \quad (II.2.8)$$

2.2.3.b Intégration sur les volumes de masse liés aux sommets.

Comme le présente la figure II.2.4, on s'intéresse uniquement à la contribution de la face i sur le volume de masse Π_{S1} . Pour chaque face, signalons que les fonctions de forme de la vitesse ne concernent que les volumes liés aux sommets de la face considérée. Il n'y a pas de contribution sur les volumes de masse liés au sommet opposé à la face.

La contribution de la fonction de forme ϕ_i sur Π_{S1} s'écrit :

$$\vec{U}_i \int_{\partial\Pi_{S1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S1}} ds = \vec{U}_i \left(\frac{1}{2} \vec{S}_{il} + \frac{1}{2} \vec{S}_{ik} \right) \quad (II.2.9)$$

Nous utilisons ensuite le résultat où, pour tous éléments voisins tels $K1$ et $K2$ (fig. II.2.4), $mes(\vec{S}_{ik}) = 3/2 mes(\vec{S}_{C_1C_2})$. Alors, la discrétisation II.2.9 se réduit à :

$$\vec{U}_i \int_{\partial\Pi_{S1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S1}} ds = \frac{3}{4} \vec{U}_i \vec{S}_{C_1C_2} \quad (\text{II.2.10})$$

Matriciellement, le coefficient $B_{n,i}$ correspondant aux contributions de la fonction de forme ϕ_i sur le contour $\partial\Pi_{S_n}$, se formalise également par :

$$B_{n,i} = \pm \frac{3}{4} \vec{S}_C^i \quad (\text{II.2.11})$$

2.2.3.c Conditions limites.

Pour le volume de masse centré Π_C , la condition limite de symétrie imposée à la face i enlève simplement, à la discrétisation II.2.7, la contribution de cette face, puisque $\vec{U} \cdot \vec{n}$ y est nul ($B_{n,i}=0$). Concernant le volume de masse Π_S , la contribution tangentielle II.2.10 du flux est similaire mais la surface normale est construite grâce à la projection orthogonale du centre de gravité sur la face.

Si une face i est de Dirichlet, la valeur de \vec{U}_i est connue. Pour le volume Π_C , on conserve encore le même type de description mais cette contribution explicite est implémentée au second membre de l'équation de conservation de la masse. Sur les volumes de types Π_S , la figure II.2.5, nous montre que, dans le cas où \vec{U}_i^D est donné, il est nécessaire de prendre en compte le flux connu à travers la surface S_{iS_1} de $\partial\Pi_{S1}$.

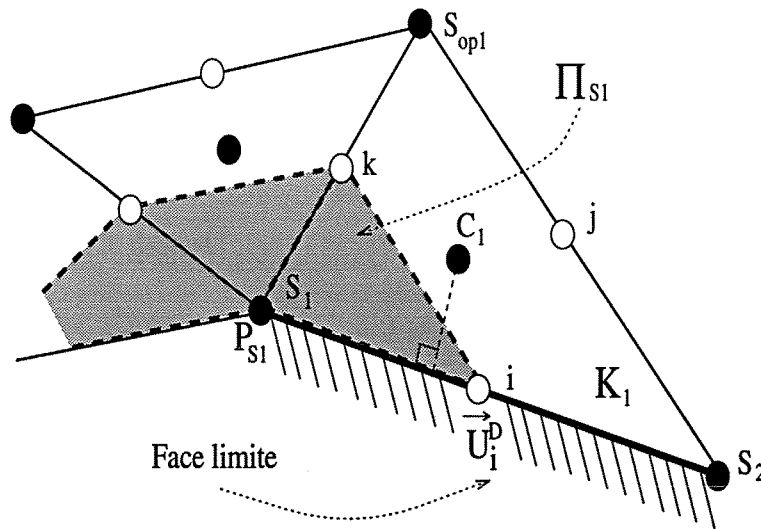


FIG. II.2.5 - Élément P1-non conforme/P1-iso, prise en compte d'une condition limite de type Dirichlet sur la face i .

Ainsi, la contribution explicite du flux due à \vec{U}_i^D sur le contour $\partial\Pi_{S1}$ s'exprime par :

$$\vec{U}_i^D \int_{\partial\Pi_{S1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S1}} ds = \vec{U}_i^D \left(\vec{S}_{iS_1} + \frac{1}{2} \vec{S}_{ik} \right) = \vec{U}_i^D \left(\frac{1}{2} S_1 \vec{S}_2 + \frac{1}{4} S_2 \vec{S}_{opl} \right) \quad (\text{II.2.12})$$

2.2.4 Matrice de pression, mise en œuvre et résolution.

La matrice en pression E^0 s'exprime toujours par le produit matriciel $BM^{-1}C$. Elle est encore creuse mais maintenant de taille $(NT+NS) \times (NT+NS)$.

L'assemblage de cette matrice s'effectue en calculant chacune des contributions diagonales et croisées caractéristiques correspondant aux nœuds de pression localisés typiquement au centre et au sommet d'un élément. La contribution de la matrice de masse condensée revient à diviser chaque coefficient par le volume de QDM mis en jeu. Dans ces conditions, les coefficients de la matrice E^0 s'expriment par la relation générique :

$$E_{nm}^0 = B_{ni}M_{ii}^{-1}C_{im} = mes(\omega_i)^{-1} \int_{\partial\Pi_n} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_n} ds \int_{\partial\omega_i} \psi_m \vec{n}_{\partial\omega_i} ds \quad (\text{II.2.13})$$

avec i le centre des faces concernant les volumes de quantité de mouvement ω_i .

En se référant aux contributions issues des calculs précédents des opérateurs *gradient* et *divergence*, cette relation II.2.13 permet donc de former, pour une face i , les coefficients non-nuls de E^0 . En précisant la convention $n = m = n_c + n_s$, cette matrice peut également se représenter :

$$E_{nm}^0 = \begin{bmatrix} B_{nci}M_{ii}^{-1}C_{inc} \\ B_{n_s i}M_{ii}^{-1}C_{inc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{nci}M_{ii}^{-1}C_{ins} \\ B_{n_s i}M_{ii}^{-1}C_{ins} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.14})$$

Le point important à vérifier concerne la structure de E_0 , et notamment son éventuelle symétrie. En effet, cette propriété conditionne non seulement le type de résolution, mais également la construction et le stockage informatique de la matrice.

Pour cela, reprenons les expressions des différents coefficients des matrices C (équa. II.2.5) et B (équa. II.2.8 et II.2.11) calculés précédemment :

$$\begin{aligned} C_{inc} &= \pm \frac{1}{2} \vec{S}_S^i & \text{et} & & C_{ins} &= \pm \frac{1}{2} \vec{S}_C^i \\ B_{nci} &= \pm \frac{1}{4} \vec{S}_S^i & \text{et} & & B_{n_s i} &= \pm \frac{3}{4} \vec{S}_C^i \end{aligned}$$

E_0 sera symétrique si B et C sont transposées. Cela se traduit par les conditions :

$$B_{nci} = C_{inc} \quad \text{et} \quad B_{n_s i} = C_{ins} \quad (\text{II.2.15})$$

Nous constatons, toujours au signe près, que la symétrie peut être envisagée en prenant :

$$\tilde{B}_{nci} = 2B_{nci} \quad \text{et} \quad \tilde{B}_{n_s i} = \frac{2}{3}B_{n_s i} \quad (\text{II.2.16})$$

Comme pour tout λ constant, $\lambda B \vec{U} = 0$, la multiplication des opérateurs B du système linéaire par des coefficients λ adéquats nous permet de considérer une matrice de pression symétrique. Ces manipulations se ramène donc au système matriciel :

$$\begin{bmatrix} B_{nci}M_{ii}^{-1}C_{inc} \\ \lambda B_{n_s i}M_{ii}^{-1}C_{inc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{nci}M_{ii}^{-1}C_{ins} \\ \lambda B_{n_s i}M_{ii}^{-1}C_{ins} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{Cn_c} \\ P_{Sn_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{nci}S\vec{M}_i \\ \lambda B_{n_s i}S\vec{M}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \quad (\text{II.2.17})$$

Dans ces conditions, la propriété de symétrie de E^0 est bien vérifiée. On peut donc se permettre de ne stocker que la partie supérieure de la matrice. Il est également possible,

comme pour le modèle initial, de l'inverser par une méthode itérative de gradient conjugué avec préconditionnement SSOR.

A la résolution, nous constatons effectivement que les champs de pression localisés au centre et au sommet sont "décorellés", introduisant ainsi un "cherckerboard mode". Cette superposition des deux champs de pression traduit le fait que pour ce schéma, chacun des champs est défini à une constante près. Cependant, le gradient de pression reste bien déterminé de manière unique. De plus, nous n'avons pas constaté de dérive lors de la résolution. La recorrélation de ces deux champs de pression peut s'effectuer lors du post-traitement en imposant, dans une maille, l'équivalence entre la pression centrée et la moyenne des pressions localisées aux sommets.

2.2.5 Validation initiale.

Avec ce nouvel élément, nous avons repris le test de l'écoulement uniforme U_0 en milieu tournant sur le domaine carré $L = 500$ km, effectué lors de l'introduction de ce chapitre avec l'élément initial P0 en pression.

La figure II.2.6 présente, à l'état stationnaire, la topologie de l'écoulement obtenue par le modèle P1-iso en pression. Ce résultat illustre le bon comportement de l'élément P1-non conforme/P1-iso vis à vis de l'équilibre de la force de Coriolis.

Soulignons que cet équilibre est analytiquement vérifié. En effet, on retrouve numériquement la nullité du gradient de pression suivant l'axe x, mais également la valeur globale et l'orientation du gradient suivant y, soit:

$$P_{min}(bleu) - P_{max}(rouge) = -5000 = -\rho_0 f_0 U_0 L \quad (II.2.18)$$

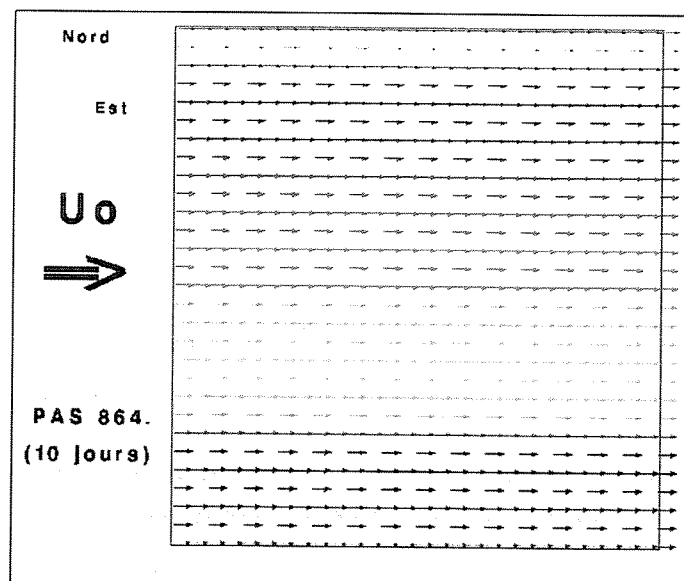


FIG. II.2.6 - Test de l'élément P1-non conforme/P1-iso en présence de la force de Coriolis (f -plan, $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$ et $U_0 = 0.1 m.s^{-1}$): vecteurs vitesses coloriés par la pression.

2.3 Le modèle P1-non conforme/P1.

A partir des résultats initiaux satisfaisants du modèle P1-iso, l'objectif du développement de ce deuxième schéma est d'offrir la possibilité de réduire le nombre des inconnues en pression. On espère ainsi diminuer le coût du traitement numérique tout en permettant encore au gradient de pression d'équilibrer correctement la force de Coriolis.

2.3.1 L'élément 2D.

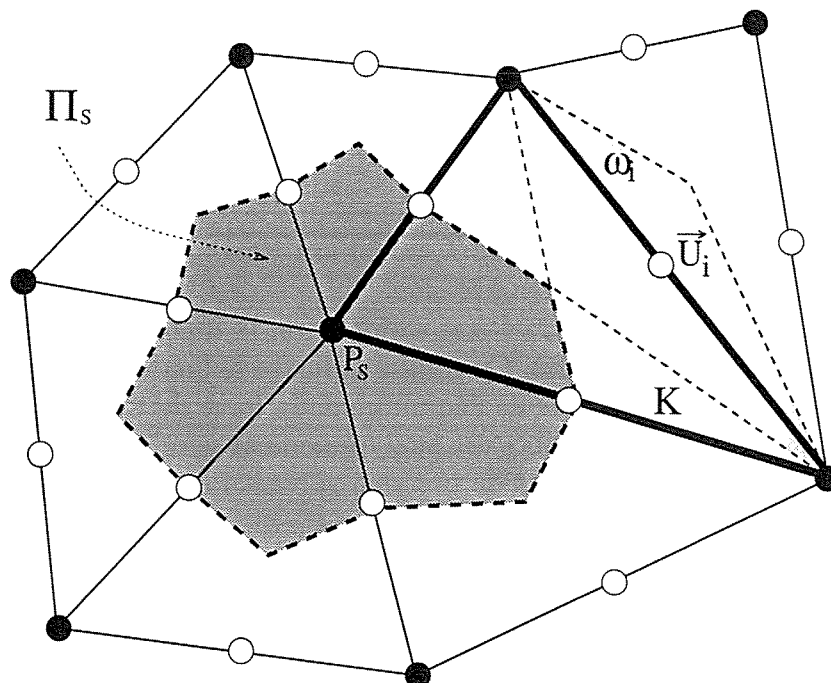


FIG. II.2.7 - Éléments P1-non conforme/P1, localisation typique des variables discrètes et des volumes de contrôle correspondants, sur un triangle K .

Comme le montre la figure II.2.7, on conserve les inconnues de pression localisées aux sommets mais la pression au centre de gravité est éliminée. Les volumes de contrôle de masse Π_s sont construits en joignant le centre des faces au centre de gravité. La pression est toujours affine et continue sur le triangle K considéré. Le vecteur P représentant les inconnues de pression est de taille NS . Les indices n et m décrivent maintenant le nombre de sommet.

L'espace élément fini Q'' engendrant P est donc tel que :

$$Q''_K = \{P : \forall K \in \mathcal{T}_h, P \in P1(K)\}$$

Les fonctions de forme ψ_n vérifient maintenant pour tout x_m : $\psi_n(x_m) = \delta_{nm}$. Les ψ_n constituent une base de Q''_K et on peut décomposer P sur cette base, d'où, pour ce schéma P1 en pression :

$$P(x) = \sum_n P(x_n) \psi_n(x) \quad (\text{II.2.19})$$

2.3.2 Discrétisation de l'opérateur *gradient*.

2.3.2.a Contribution sur un volume de QDM.

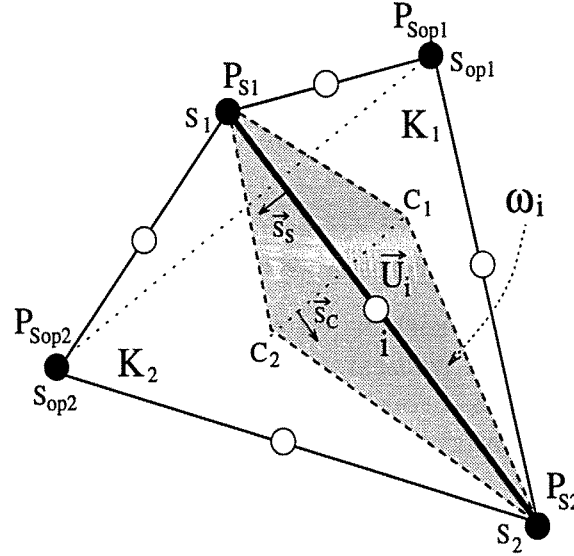


FIG. II.2.8 - Élément P1-non conforme/P1, évaluation du gradient de pression concernant la vitesse U_i sur son volume ω_i .

Avec les notations de la figure II.2.8, le gradient de pression s'exprime par :

$$\int_{\partial\omega_i} P \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = P_{S_{op1}} \int_{\partial\omega_i} \psi_{S_{op1}} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds + P_{S_{op2}} \int_{\partial\omega_i} \psi_{S_{op2}} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds + P_{S_1} \int_{\partial\omega_i} \psi_{S_1} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds + P_{S_2} \int_{\partial\omega_i} \psi_{S_2} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds \quad (\text{II.2.20})$$

Évaluons, en fonction des surfaces normales toujours orientées extérieures à $\partial\omega_i$, la contribution des fonctions de forme des deux sommets caractéristiques S_{op1} et S_1 sur $\partial\omega_i$. Rappelons, pour cela, que $\psi_{S_{op1}}(C1) = \psi_{S_1}(C1) = \psi_{S_1}(C2) = 1/3$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_i} \psi_{S_{op1}} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds &= \frac{1}{6} (\vec{S}_{C_1 S_1} + \vec{S}_{C_1 S_2}) \\ \int_{\partial\omega_i} \psi_{S_1} \vec{n}_{\partial\omega_i} ds &= \frac{2}{3} (\vec{S}_{C_2 S_1} + \vec{S}_{C_1 S_1}) + \frac{1}{6} (\vec{S}_{C_2 S_2} + \vec{S}_{C_1 S_2}) \end{aligned}$$

Nous utilisons à nouveau le fait que, sur un contour fermé, la somme des surfaces normales est nulle. De plus, nous conservons les mêmes conventions d'orientation que pour le schéma P1-iso. Nous pouvons alors exprimer les résultats précédents en fonction des surfaces normales $\vec{S}_{S_1 S_2}$ et $\vec{S}_{C_1 C_2}$. Dans ces conditions, le gradient de pression s'écrit :

$$\int_{\partial\omega_i} P \vec{n}_{\partial\omega_i} ds = \frac{1}{6} (P_{S_{op2}} - P_{S_{op1}}) \vec{S}_{S_1 S_2} + \frac{1}{2} (P_{S_2} - P_{S_1}) \vec{S}_{C_1 C_2} \quad (\text{II.2.21})$$

il apparaît à nouveau deux contributions de composante normale et tangentielle à la face i considérée.

Matriciellement, si les indices n_{sop} et n_s correspondent aux contributions respectives dues aux sommets opposés à la face i et aux sommets appartenant à cette face, les coefficients de l'opérateur C , de taille $NFA \times NS$, peuvent se formaliser génériquement par³ :

$$C_{in_s} = \pm \frac{1}{2} \vec{S}_C^i \quad (\text{II.2.22})$$

$$C_{in_{sop}} = \pm \frac{1}{6} \vec{S}_S^i \quad (\text{II.2.23})$$

2.3.2.b Prise en compte des conditions limites.

Si la face i est de Dirichlet, on a toujours : $C_{in} = 0$. Si la face est de symétrie, la composante normale du gradient est nulle. On ne conserve que la composante tangentielle. La surface normale est encore construite en calculant le projeté orthogonal du centre de gravité de l'élément interne sur la face i . Pour cette composante tangentielle, le coefficient issu de la fonction de forme étant équivalent au schéma P1-iso, la prise en compte de cette condition sur le gradient de pression est identique (cf. équa. II.2.6).

2.3.3 Discrétisation de l'opérateur *divergence*.

La matrice de divergence B_{ni} devient de taille $NS \times NFA$. En considérant l'influence de la vitesse \vec{U}_i de la face i , nous scindons le traitement en deux, suivant les différents volumes de masse mis en jeu. Les notations sont celles de la figure II.2.9 suivante.

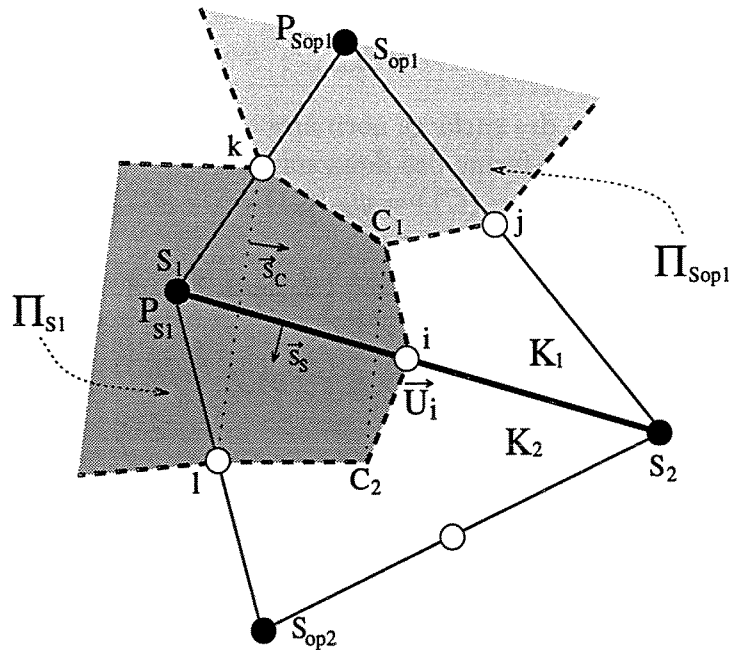


FIG. II.2.9 - Élément P1-non conforme/P1, localisation des volumes de masse pour l'évaluation de la divergence de la vitesse.

3. les définitions de \vec{S}_C^i et \vec{S}_S^i sont les mêmes que pour la description du schéma P1-iso.

2.3.3.a Intégration sur les volumes de masse liés aux sommets de la face.

Nous nous intéressons à la contribution de la fonction de forme ϕ_i de la face i sur le volume de masse Π_{S_1} . On obtient :

$$\int_{\partial\Pi_{S_1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S_1}} ds = \left[\frac{2}{3} (\vec{S}_{iC_1} + \vec{S}_{iC_2}) + \frac{1}{6} (\vec{S}_{kC_1} + \vec{S}_{lC_2}) \right]$$

Or, la figure II.2.9 nous montre que $\vec{S}_{kC_1} = 1/3 \vec{S}_{kS_2}$ et $\vec{S}_{lC_2} = 1/3 \vec{S}_{lS_2}$.

D'autre part, avec les orientations adéquates des surfaces normales, on a le résultat :

$$\vec{S}_{kS_2} + \vec{S}_{lS_2} = \vec{S}_{kl} = 3/2 \vec{S}_{C_1C_2}$$

Ainsi, la contribution de la divergence de la vitesse \vec{U}_i sur le volume de masse Π_{S_1} se discrétise par :

$$\begin{aligned} \vec{U}_i \int_{\partial\Pi_{S_1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S_1}} ds &= \vec{U}_i \left[\frac{2}{3} \vec{S}_{C_1C_2} + \frac{1}{18} \vec{S}_{kl} \right] = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \right] \vec{U}_i \vec{S}_{C_1C_2} \\ &= \frac{3}{4} \vec{U}_i \vec{S}_{C_1C_2} \end{aligned} \quad (\text{II.2.24})$$

Matriciellement, le coefficient $B_{n,i}$ correspondant aux contributions de la fonction de forme ϕ_i sur le contour $\partial\Pi_{S_n}$ se formalise donc par :

$$B_{n,i} = \pm \frac{3}{4} \vec{S}_C^i \quad (\text{II.2.25})$$

2.3.3.b Intégration sur les volumes de masse liés aux sommets opposés.

Concernant la contribution de la face i sur le volume masse opposé $\Pi_{S_{op1}}$, la figure II.2.9 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{U}_i \int_{\partial\Pi_{S_1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S_1}} ds &= \vec{U}_i \frac{1}{6} (\vec{S}_{jC_1} + \vec{S}_{C_1k}) = \frac{1}{6} \vec{U}_i \vec{S}_{jk} \\ &= \frac{1}{12} \vec{U}_i \vec{S}_{S_1S_2} \end{aligned} \quad (\text{II.2.26})$$

qui se formalise matriciellement par :

$$B_{n_{op}i} = \pm \frac{1}{12} \vec{S}_S^i \quad (\text{II.2.27})$$

2.3.3.c Conditions limites.

La symétrie impose le même type de contrainte que pour le modèle P1-iso⁴. Par rapport à la figure II.2.10, la contribution explicite du flux due à \vec{U}_i^D sur le contour $\partial\Pi_{S_{op1}}$ donne, par analogie au résultat II.2.26 :

$$\vec{U}_i^D \int_{\partial\Pi_{S_{op1}}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S_{op1}}} ds = \frac{1}{12} \vec{U}_i^D \vec{S}_{S_1S_2} \quad (\text{II.2.28})$$

4. nullité de la contribution normale \vec{S}_S à la face i et construction de la contribution tangentielle \vec{S}_C par projection orthogonale.

Par contre, le flux dû à la condition de Dirichlet sur la frontière $\partial\Pi_{S_1}$ implique une prise en compte différente, soit :

$$\vec{U}_i^D \int_{\partial\Pi_{S_1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S_1}} ds = \vec{U}_i^D \left[\frac{1}{2} \vec{S}_{S_1 S_2} + \frac{2}{3} \vec{S}_{i C_1} + \frac{1}{6} \vec{S}_{k C_1} \right] \quad (\text{II.2.29})$$

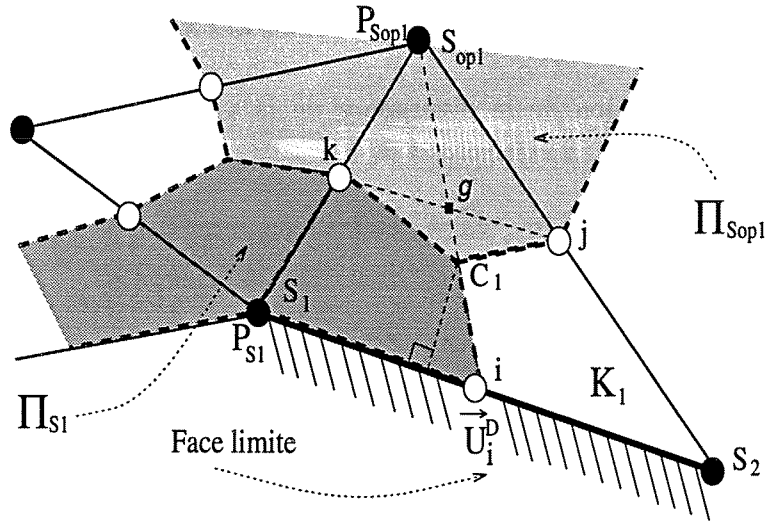


FIG. II.2.10 - Élément P1-non conforme/P1, prise en compte d'une condition limite de type Dirichlet sur la face i.

En transformant les surfaces normales suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{S}_{k C_1} &= -(\vec{S}_{kg} + \vec{S}_{g C_1}) \\ \vec{S}_{i S_{opl}} &= -(\vec{S}_{S_1 S_{opl}} + \vec{S}_{i S_1}) \end{aligned}$$

et en utilisant, avec les orientations correctes pour les normales aux faces, les quelques résultats géométriques suivant :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\vec{S}_{kg}) &= \frac{1}{4} \text{mes}(\vec{S}_{S_1 S_2}) \\ \text{mes}(\vec{S}_{g C_1}) &= \frac{1}{6} \text{mes}(\vec{S}_{i S_{opl}}) \\ \text{mes}(\vec{S}_{i C_1}) &= \frac{1}{3} \text{mes}(\vec{S}_{i S_{opl}}) \end{aligned}$$

on peut finalement exprimer II.2.29 en une expression où interviennent uniquement les surfaces normales $\vec{S}_{S_1 S_2}$ et $\vec{S}_{S_1 S_{opl}}$, orientées extérieures à l'élément K_1 :

$$\vec{U}_i^D \int_{\partial\Pi_{S_1}} \phi_i \vec{n}_{\partial\Pi_{S_1}} ds = \vec{U}_i^D \left[\frac{1}{3} \vec{S}_{S_1 S_2} - \frac{1}{4} \vec{S}_{S_1 S_{opl}} \right] \quad (\text{II.2.30})$$

2.3.4 Matrice de pression, mise en œuvre et résolution.

La matrice de pression E^0 s'exprime toujours par le même type de produit matriciel $BM^{-1}C$. Elle est maintenant de taille $NS \times NS$. L'assemblage s'effectue à nouveau grâce à la relation II.2.13 et en se référant aux contributions des opérateurs issues des calculs précédents.

La matrice ainsi formée se révèle ne pas être symétrique. Contrairement au modèle P1-iso, les matrices B et C ne peuvent être rendues transposables. En effet, il n'est pas possible de multiplier chacune des contributions II.2.25 et II.2.27 de la matrice B par une constante, car les indices n_s et n_{sop} décrivent le même vecteur P de taille NS . Les inconnues de pression sont toutes corrélées car elles deviennent à la fois, mais pour des faces différentes, des *sommets* et des *sommets opposés*. Signalons cependant que la matrice E^0 reste à diagonale dominante, elle est donc toujours inversible.

La perte de cette propriété nous impose de stocker tous les coefficients non-nuls de la matrice. De plus, l'algorithme de gradient conjugué n'est plus utilisable. Aussi, nous avons utilisé les bibliothèques SPARSKIT (Saad [51]) dans lesquelles est notamment disponible l'algorithme de résolution GMRES. Cette méthode, bien adaptée à l'inversion de systèmes linéaires creux et non-symétriques, est un double gradient conjugué dont le préconditionnement est de type LU.

2.3.5 Validation initiale.

A titre indicatif, signalons que le test initial, concernant l'écoulement uniforme U_0 en milieu tournant, nous a donné, pour ce deuxième modèle, les mêmes résultats satisfaisants que le schéma P1-iso en pression.

Ce modèle équilibre correctement la force de Coriolis de type f -plan et nous retrouvons également les valeurs analytiques et l'orientation du gradient de pression correspondant à l'équation II.2.18.

2.4 Application 2D : forçages de type “ vent de surface ”.

Afin de valider ces développements VEF bidimensionnels dans un contexte océanique, nous avons abandonné le cas test tridimensionnel concernant la topographie isolée, précédemment étudié avec le modèle VDF. En effet, la mise en œuvre géométrique de cette application est compromise puisqu'avec le modèle VEF bidimensionnel, il n'est notamment plus possible de prendre en compte le couplage entre les effets verticaux liés à la topographie et l'action horizontale de la force de Coriolis (compression verticale de la colonne fluide au niveau de l'obstacle générant les tourbillons topographiques horizontaux). Il semble donc plus judicieux d'expérimenter le comportement de ce modèle VEF dans une configuration plus adaptée pour laquelle l'effet dynamique de la force de Coriolis reste prépondérant.

2.4.1 Présentation des simulations.

2.4.1.a Contexte et phénomènes physiques.

Situons tout d'abord le contexte général de ces nouvelles applications. On considère un fluide barotrope, initialement au repos, dans un bassin océanique carré de côté $L = 2000$ kilomètres, supposé à fond plat. Ce bassin fermé est localisé à une latitude moyenne, et l'action de la force de Coriolis sur le fluide se modélise par l'approximation du β -plan ($f_0 = 9.3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ et $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-11} (m.s)^{-1}$). On soumet ensuite l'écoulement à un forçage permanent de type “vent de surface” caractérisant l'entraînement horizontal du fluide. On s'intéresse alors aux comportements dynamiques des circulations océaniques engendrées dans ce bassin. Aussi, pour ces premières applications, nous avons choisi de modéliser à l'échelle du bassin, la dynamique de la circulation d'une seule cellule anticyclonique induite par un forçage type. En nous inspirant de certains résultats numériques réalisés à partir de modèles QG (Dumas [20], Branger [12], Le Provost [35]), nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux problèmes classiques de type Stommel et Munk. Suivant les paramètres dynamiques mis en jeu, plusieurs types de solutions peuvent intervenir. Cependant, le mécanisme physique fondamental et bien connu intervenant lors de l'intégration temporelle demeure l'intensification du courant en bord *ouest* et la génération d'ondes planétaires basses fréquences (ondes de Rossby). Ces phénomènes caractérisent l'effet de la variation de la force de Coriolis et sa propriété de transporteur d'énergie.

2.4.1.b Intérêts et objectifs.

Les réponses d'un fluide soumis à un forçage de type “vent de surface” constituent une famille d'écoulements océaniques relativement bien adaptée à la configuration numérique de nos nouveaux modèles et à leur validation potentielle.

En effet, ces tests peuvent être assez facilement mis en œuvre dans le cadre d'écoulements bidimensionnels (fluide barotrope). D'autre part, ils permettent de décrire, notamment par la prise en compte de l'effet du β -plan, des phénomènes spécifiques bien connus dont la représentation horizontale barotrope demeure un mécanisme très important pour les simulations d'écoulements océaniques à grande échelle (intensification de courant et ondes de Rossby). Enfin, ces calculs offrent une large possibilité de tests comparatifs quant à

la mise en œuvre des conditions limites ou des effets non linéaires et dissipatifs, avec obtention de solutions stationnaires ou instationnaires.

Par rapport à ces modélisations, nos objectifs sont donc de deux natures. Nous voulons vérifier le bon comportement des développements VEF effectués vis à vis de la description des différents phénomènes physiques mis en jeu. Par ailleurs, ces résultats numériques vont nous permettre d'effectuer des comparaisons qualitatives et quantitatives, non seulement par rapport à d'autres résultats numériques ou analytiques mais surtout entre les deux schémas VEF développés. Ainsi, lors de ces études de faisabilité et de validation des modèles, nous avons davantage favorisé l'obtention des résultats numériques comparatifs plutôt que la recherche de performances (optimisation du pas de temps et du maillage ou de la résolution des systèmes linéaires itératifs).

2.4.1.c Forçage et équations 2D en variables u, v, P .

Dans un modèle tridimensionnel, la prise en compte explicite de la tension de surface due au forçage du vent s'effectue classiquement sous la forme d'un flux diffusif vertical des vitesses zonales et méridiennes à la surface. Ce flux de quantité de mouvement joue donc le rôle d'accélérateur du fluide, tangentielllement à la surface.

Pour un domaine bidimensionnel, le fluide est considéré comme indépendant de la verticale, on traite un écoulement barotrope. Numériquement, le forçage doit donc être directement assimilé, dans les équations du mouvement, à un terme source homogène à une accélération.

Le système bidimensionnel d'équations de Navier Stokes en milieu tournant, en présence de dissipation de type frottement de fond⁵ et de forçage, s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + (f_0 + \beta_0 y)v - k_{fr}u - \nu_h \Delta u + F_0.T_x(x, y) \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} - (f_0 + \beta_0 y)u - k_{fr}v - \nu_h \Delta v + F_0.T_y(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (II.2.31)$$

avec F_0 le module du forçage en $m.s^{-2}$ et $T_x(x, y), T_y(x, y)$ les fonctions directionnelles décrivant le type de forçage appliqué dans le domaine considéré. Précisons que la prise en compte discrète de ce nouveau terme source ne pose pas de problème particulier, que ce soit en VEF ou en VDF.

Il s'agit maintenant de définir, vis à vis des phénomènes à modéliser, la valeur des paramètres intervenant et les conditions limites à prendre en compte.

2.4.1.d Paramètres caractéristiques, analogie aux simulations QG.

Pour réaliser des simulations bidimensionnelles avec nos modèles de résolution des équations de Navier Stokes appliquées au système II.2.31, nous nous sommes inspirés des modélisations QG. Le parallèle entre la formulation QG et nos modèles n'est pas évident car nous ne traitons pas les mêmes variables. Cependant il est possible d'estimer nos paramètres dynamiques en adéquation avec ceux utilisés classiquement dans les études numériques d'écoulements QG. Ces choix caractériseront ainsi des phénomènes spécifiques

5. Dissipation de type $-k_{fr}\vec{U}$, avec k_{fr} le coefficient de frottement en s^{-1} .

de recirculations océaniques en relation avec les résultats des modèles QG, permettant de procéder à certaines comparaisons qualitatives ou même quantitatives dans certains cas de calculs stationnaires et linéaires.

Comme nous l'avons rappelé au début de ce mémoire, le modèle QG décrit la dynamique d'un écoulement quasi-géostrophique en utilisant un système adimensionnel d'équations bidimensionnelles écrit en fonction de la vorticité verticale ξ^* et de la fonction de courant Ψ^* . Ainsi, nous considérons également un bassin carré de dimension L à fond plat, fermé, et de profondeur classiquement fixée à $D = 5000$ mètres. Dans un tel domaine, un écoulement barotrope sur le β -plan, soumis à un forçage de vent de surface, peut être représenté par le système adimensionnel :

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + R_0 J(\Psi^*, \xi^*) + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = \vec{k} \cdot \text{rot}^* \vec{\tau}^* - r \xi^* + \frac{R_0}{R_e} \Delta^* \xi^* \quad \text{et} \quad \xi^* = \Delta^* \Psi^* \quad (\text{II.2.32})$$

Le terme $J(\Psi^*, \xi^*)$ caractérise le terme non-linéaire (jacobien). Posons U l'échelle de vitesse caractéristique de ce type d'écoulement. On peut alors introduire les différents paramètres adimensionnels intervenant dans l'équation II.2.32.

- $R_0 = \frac{U}{\beta_0 L^2}$ est le nombre de Rossby associé à la variation du paramètre de Coriolis.
- $R_e = \frac{UL}{\nu_h}$ est le nombre de Reynolds caractérisant la dissipation latérale (dissipation visqueuse sur opérateur laplacien).
- $r = \frac{k_{fr}}{\beta_0 L}$ correspond à une dissipation par frottement de fond (k_{fr} étant le coefficient de frottement de fond en s^{-1}).
- $\vec{\tau}^* = T_x(x^*, y^*)\vec{i} + T_y(x^*, y^*)\vec{j}$ est le forçage adimensionnel.

On associe également, à ces nombres typiques, une épaisseur de "couche limite"⁶ caractérisant les différents processus agissant sur la zone d'intensification du courant au bord *ouest* (importance relative entre l'advection et les dissipations). On introduit alors :

- $\gamma_a = 2 \left(\frac{Ro}{Re} \right)^{1/3}$, pour la couche limite visqueuse $\gamma_a L$.
- $\gamma_f = r$, pour la couche limite de frottement $\gamma_f L$.
- $\gamma_i = Ro^{1/2}$, pour la couche limite inertielle $\gamma_i L$.

Enfin, l'échelle de vitesse U est reliée aux différents paramètres à l'aide de l'équilibre de Sverdrup (1947). Cette relation implique que loin des frontières où se développent des couches limites et dans une zone sans topographie, il existe dans l'équation de vorticité II.2.32 un équilibre entre le terme de Coriolis et le terme d'induction de vorticité par le forçage dû au vent. On peut donc écrire :

$$U = \frac{C \pi \tau_0}{\rho_0 D \beta_0 L} \begin{cases} C = 1 & \text{si domaine à 1 cellule.} \\ C = 2 & \text{si domaine à 2 cellules.} \end{cases}$$

où τ_0 est le module de la tension du vent à la surface en dyn.cm^{-2} .

6. Le terme "couche limite" est à prendre ici au sens "intensification du courant".

2.4.1.e Prise en compte des paramètres pour modèle u, v, P .

Le rappel précédent a pour but d'estimer les paramètres ν_h , k_{fr} et surtout F_0 en fonction des données classiques utilisées par les modélisations QG et disponibles dans la littérature (Dumas [20], Branger [12], Le Provost [35]).

La valeur du forçage τ_0 peut s'exprimer, pour notre équation bidimensionnelle II.2.31, en terme d'accélération en estimant qu'en milieu barotrope, la tension de surface met en mouvement de manière homogène toute la couche fluide de profondeur D . De fait, on obtient :

$$F_0 = \frac{\tau_0}{\rho_0 D} \quad (\text{II.2.33})$$

La connaissance de R_0 (ou de la couche limite inertielle) permet ainsi d'estimer la valeur correspondante pour F_0 , soit, en utilisant la relation de Sverdrup pour une circulation à une cellule :

$$F_0 = \frac{R_0 L^3 \beta_0^2}{\pi} = \frac{(\gamma_i \beta_0)^2 L^3}{\pi} \quad (\text{II.2.34})$$

De même, les valeurs caractéristiques des coefficients de dissipation ν_h et k_{fr} peuvent être évaluées par les relations :

$$\nu_h = \frac{UL}{R_e} = \frac{R_0}{R_e} L^3 \beta_0 = 8(\gamma_a L)^3 \beta_0 \quad (\text{II.2.35})$$

$$k_{fr} = r \beta_0 L = \gamma_f \beta_0 L \quad (\text{II.2.36})$$

Enfin, pour déterminer une valeur limite du pas de temps de calcul, la connaissance de la propagation typique des ondes planétaires de Rossby engendrées par la variation du paramètre de Coriolis peut s'avérer un bon indicateur. Ces ondes sont caractérisées par des vitesses de propagation dépendantes des modes propres du bassin. Ainsi, Branger [12] donne, à partir de l'équation de vorticité barotrope, une estimation relativement restrictive du pas de temps. En appliquant le critère CFL à la vitesse de phase la plus rapide, il évalue à titre indicatif, pour un bassin de 2000×2000 kilomètres avec une maille de 20×20 kilomètres, un pas de temps limite de 2 heures.

2.4.1.f Post-traitements supplémentaires et maillages.

Notre modèle fournit classiquement les champs de vitesses et de pression. Par dérivation numérique, nous en déduisons le champ de la vorticité verticale. Précisons maintenant la mise en œuvre du calcul de différentes quantités caractéristiques.

Energie et enstrophie moyennes : Pour l'évolution de l'énergie cinétique⁷ moyenne sur le domaine Ω_c , nous évaluons numériquement à chaque pas de temps, et pour chaque volume de quantité de mouvement ω_i , le carré de la norme $L^2(\Omega_c)$ de la vitesse, soit :

$$Ec_{moy} = \frac{1}{mes(\Omega_c)} \int_{\Omega_c} U^2 d\Omega_c = \frac{1}{mes(\Omega_c)} \sum_{\omega_i} [(u_i^2 + v_i^2) mes(\omega_i)] \quad (\text{II.2.37})$$

7. Nous calculons l'énergie cinétique au coefficient $\frac{1}{2}\rho_0$ près.

La détermination de la norme $L^2(\Omega_c)$ de la vorticité verticale permet de calculer l'ensrophie moyenne sur le domaine. Pour cela, si K_i est un élément de Ω_c , on écrit :

$$\begin{aligned} (E_{smoy})^2 &= \frac{1}{mes(\Omega_c)} \int_{\Omega_c} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 d\Omega_c \\ &= \frac{1}{mes(\Omega_c)} \sum_{K_i} \left[\int_{K_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dK_i \right] \end{aligned} \quad (II.2.38)$$

Notre discrétisation étant P1, les gradients de vitesse sont constants sur les K_i . On peut donc transformer l'intégrale sur K_i du carré de la vorticité verticale ω_z par :

$$\int_{K_i} (\omega_z)^2 dK_i = mes(K_i) \omega_z^2 = \frac{1}{mes(K_i)} \left(\int_{K_i} \omega_z dK_i \right)^2 \quad (II.2.39)$$

Par ailleurs, sur chaque face j appartenant à K_i et de surface normale \vec{S}_{ij} extérieure à K_i , nous utilisons le résultat :

$$\int_{K_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dK_i = \sum_{j=1}^3 (v_j S_{ij}^x - u_j S_{ij}^y) \quad (II.2.40)$$

Ainsi, en combinant la transformation II.2.39 et l'intégration II.2.40 avec l'équation II.2.38, nous obtenons la représentation discrète du carré de l'ensrophie moyenne :

$$(E_{smoy})^2 = \frac{1}{mes(\Omega_c)} \sum_{K_i} \left[\frac{1}{mes(K_i)} \left(\sum_{j=1}^3 (v_j S_{ij}^x - u_j S_{ij}^y) \right)^2 \right] \quad (II.2.41)$$

Fonction de courant : Le champ de vitesse horizontale étant connu et à divergence nulle, nous considérons le vecteur $\tilde{U} = (v, -u)$. En reprenant les notations matricielles du chapitre précédent, le vecteur Ψ représentant les composantes discrètes de la fonction de courant vérifie donc :

$$C\Psi = M\tilde{U} \quad (II.2.42)$$

Ce système représente l'intégration de la définition de la fonction de courant sur les volumes de quantité de mouvement. En lui appliquant l'opérateur divergence discrète (matrice B), nous pouvons déterminer le vecteur Ψ . En effet, l'obtention du champ de la fonction de courant se résume à l'inversion de la même matrice que pour le système en pression avec, au second membre, la divergence de \tilde{U} .

$$BM^{-1}C\Psi = B\tilde{U} \quad (II.2.43)$$

Notons que les composantes de Ψ sont localisées comme les pressions. De fait, les conditions limites prises en compte dans la matrice seront effectives pour la fonction de courant. Cependant, nos types de conditions limites n'imposent, pour la pression, que des dérivées au bord. Ainsi, lors du post-traitement final, on fixe la constante de manière à vérifier, par référence au modèle QG, la nullité des Ψ au bord.

Maillages : Le maillage non-structuré est généré par un mailleur surfacique. Ce logiciel nous fournit des fichiers de localisation des nœuds des éléments (position des sommets) et les connectivités nécessaires au calcul (numéros des nœuds de chaque élément et détermination des faces limites).

Lors de ces calculs initiaux visant à tester les modèles VEF, nous avons utilisé un maillage de 2764 triangles. Pour certaines comparaisons, nous avons également mis en œuvre un maillage raffiné à 6721 éléments. Les figures suivantes présentent les caractéristiques de ces maillages élaborés pour l'application à la dynamique d'une circulation océanique à une cellule, dans un bassin carré de 2000 kilomètres.

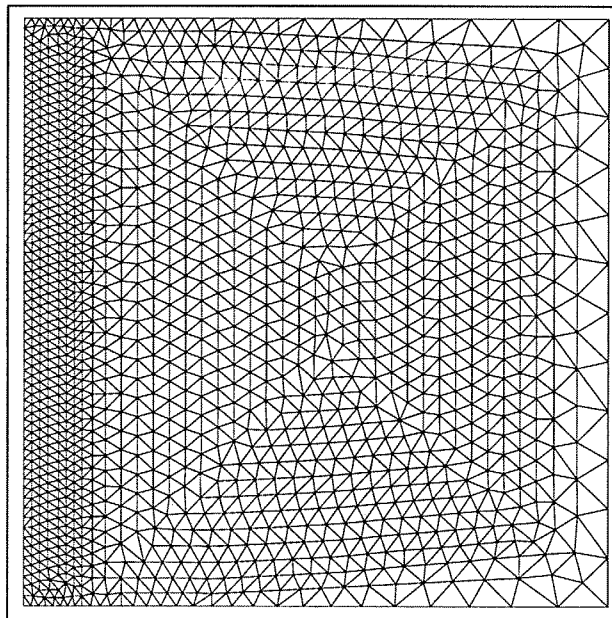


FIG. II.2.11 - Maillage à 2764 éléments, 1149 nœuds (ou sommets), 4212 faces dont 132 au bord, $\Delta_{bord}^{ouest} = 33 \text{ km}$, $\Delta_{bord}^{est} = 167 \text{ km}$.

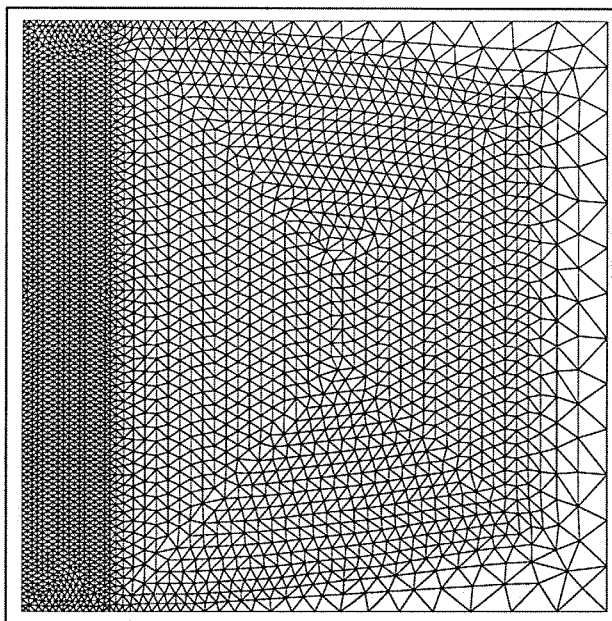
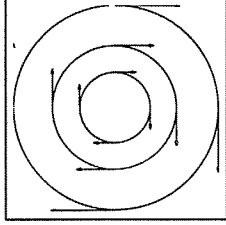


FIG. II.2.12 - Maillage à 6721 éléments, 3457 nœuds, 10177 faces dont 191 au bord, $\Delta_{bord}^{ouest} = 20 \text{ km}$, $\Delta_{bord}^{est} = 154 \text{ km}$.

2.4.2 Comparaison des modèles VEF, problème de type Stommel.

2.4.2.a Prise en compte numérique et solution analytique.

Pour le problème de Stommel, le forçage horizontal et permanent appliqué au domaine $[0,L] \times [0,L]$ se décrit, analytiquement ou schématiquement, par :

$$\begin{cases} T_x(x,y) = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \\ T_y(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \end{cases} \quad (II.2.44)$$


La dissipation est effectuée uniquement par frottement de fond ($\nu_h = 0$). On utilise des conditions limites de glissement sur toutes les frontières.

Pour ce type de problème non visqueux, on recherche une solution stationnaire. Par le modèle QG, cette solution est connue analytiquement dans le cas linéaire (Le Provost [35]). Avec un module du forçage fixé à $\tau_0/2$, l'équation de vorticité adimensionnelle II.2.32 relative à ce problème devient :

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} + r \Delta^* \Psi^* = -\sin(\pi x^*) \sin(\pi y^*) \quad \text{avec } \Psi^* = 0 \text{ au bord.} \quad (II.2.45)$$

Sur le domaine adimensionnel $[0,1] \times [0,1]$, la solution analytique, donnée initialement par Stommel(1948) et reprise par de nombreux auteurs, s'exprime classiquement par :

$$\begin{aligned} \Psi_S^*(x^*, y^*) &= \frac{\sin(\pi y^*)}{\pi(1 + 4\pi^2 r^2)} \times [2\pi r \sin(\pi x^*) + \cos(\pi x^*) + EXP^*] \\ \text{avec } EXP^* &= \frac{1}{e^{R_1} - e^{R_2}} \left[\left(1 + e^{R_2}\right) e^{R_1 x^*} - \left(1 + e^{R_1}\right) e^{R_2 x^*} \right] \\ \text{et } R_{1,2} &= \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi^2 r^2} \right) / (2r) \end{aligned} \quad (II.2.46)$$

Nous verrons par la suite comment, avec nos résultats, retrouver cette solution analytique adimensionnelle.

2.4.2.b Tests linéaires.

Description des résultats : Le cas linéaire revient, pour le modèle QG,   négliger le paramètre R_0 pour considérer un écoulement où le temps caractéristique $\beta_0 L$ lié au paramètre de Coriolis est très supérieur au temps de convection U/L . Dans notre cas, la valeur du module F_0 du forçage est choisie de manière à ce que la contribution des flux non-linéaires soit négligeable. Ainsi, on prend $F_0 = 1.10^{-8} m.s^{-2}$ et la couche limite de frottement $\gamma_f = r = 0,03$ soit $k_{fr} = 1,2 \cdot 10^{-6} s^{-1}$. Le temps caractéristique t_{fr} associé à la dissipation est donc de 9,6 jours. Le pas de temps est fixé à une heure.

Dans les conditions et sur les maillages pré-cités, nous avons effectué un calcul jusqu'à 100 jours physiques, pour chacun des deux modèles VEF développés.

Sur les figures II.2.13 et II.2.14 présentant l'évolution temporelle de l'énergie cinétique

et de l'enstrophie moyennées sur le domaine, nous illustrons la bonne équivalence de la solution donnée par les deux différents modèles.

Pendant la phase de mise en mouvement du fluide par le forçage, nous observons une augmentation de la vitesse, visible principalement sur la courbe d'énergie cinétique. Cette phase se caractérise également par la mise en place du renforcement du courant en bord *ouest*. Par la suite, cette zone d'intensification de l'écoulement est en place et le phénomène de pulsation des ondes longues barotropes de Rossby, générées à l'*est*, commence à alimenter périodiquement en énergie la circulation au bord *ouest* en y renforçant le courant. Ce mécanisme est illustré sur la courbe d'énergie cinétique mais n'est pas d'intensité suffisante pour perturber l'évolution de l'enstrophie moyenne.

Enfin, nous constatons que la propagation des ondes est rapidement amortie par la dissipation. L'effet du frottement de fond est, à cet égard, relativement important puisqu'il agit proportionnellement à la vitesse et partout dans le domaine. Ainsi, à partir de 50 jours, nous obtenons une solution stationnaire dans tout le domaine. Remarquons que les deux courbes illustrent non seulement la quasi-stationnarité mais également l'aspect conservatif des modèles linéaires concernant l'énergie cinétique et l'enstrophie moyennes sur le domaine.

Les images A, B, C et D de la figure II.2.15 décrivent la topologie de l'écoulement stationnaire obtenue sur le domaine par l'un des deux modèles VEF au bout de 100 jours (les valeurs quantitatives des deux types de modèles s'accordant à moins de 2%). L'image A présente les vecteurs vitesses uniformes coloriés par leur module. La solution est bien constituée d'une cellule anticyclonique symétrique dont le courant est intensifié au bord *ouest*. A cet égard, nous constatons que les maximums du module de la vitesse et de la vitesse méridienne v coïncident exactement en valeur et en position ($x = 0, y = L/2$).

De même, la vortacité verticale (image B) permet de visualiser l'intensité des gradients zonaux de la vitesse méridienne. La zone de forte vortacité négative caractérise la circulation anticyclonique et le renforcement du courant au bord *ouest*. Signalons la faible zone de vortacité positive à l'*est* du domaine. Elle illustre, même à l'état quasi-stationnaire, la création des ondes de Rossby dont le développement est trop rapidement dissipé pour contribuer encore, de manière significative, à la dynamique de l'écoulement.

Différence pression/fonction de courant : Les lignes d'iso-pressions (image C) illustrent également la dynamique de la cellule. En effet, le champ de vent étant à divergence nulle, le terme prédominant que doit équilibrer le gradient de pression reste la force de Coriolis. Cependant, il est bon de rappeler que la pression obtenue est composée de la contribution due à Coriolis et de la pression dynamique non-géophysique.

Lorsque les effets de convection, de diffusion et des termes sources sont négligeables ou à divergence nulle, la pression intègre essentiellement la force de Coriolis. Notre système à résoudre se résume alors à :

$$\Delta P = \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} \Psi) \quad \text{avec } f = f_0 + \beta_0 y$$

Dans ces conditions et en f -plan, la solution en P décrit bien la fonction de courant⁸. Par contre, en β -plan, il existe toujours une faible contribution, proportionnelle à β_0 et fonction du gradient méridien de Ψ , ayant tendance à disymétriser les iso-lignes de pression

8. Confère l'étude en f -plan sur la topographie isolée.

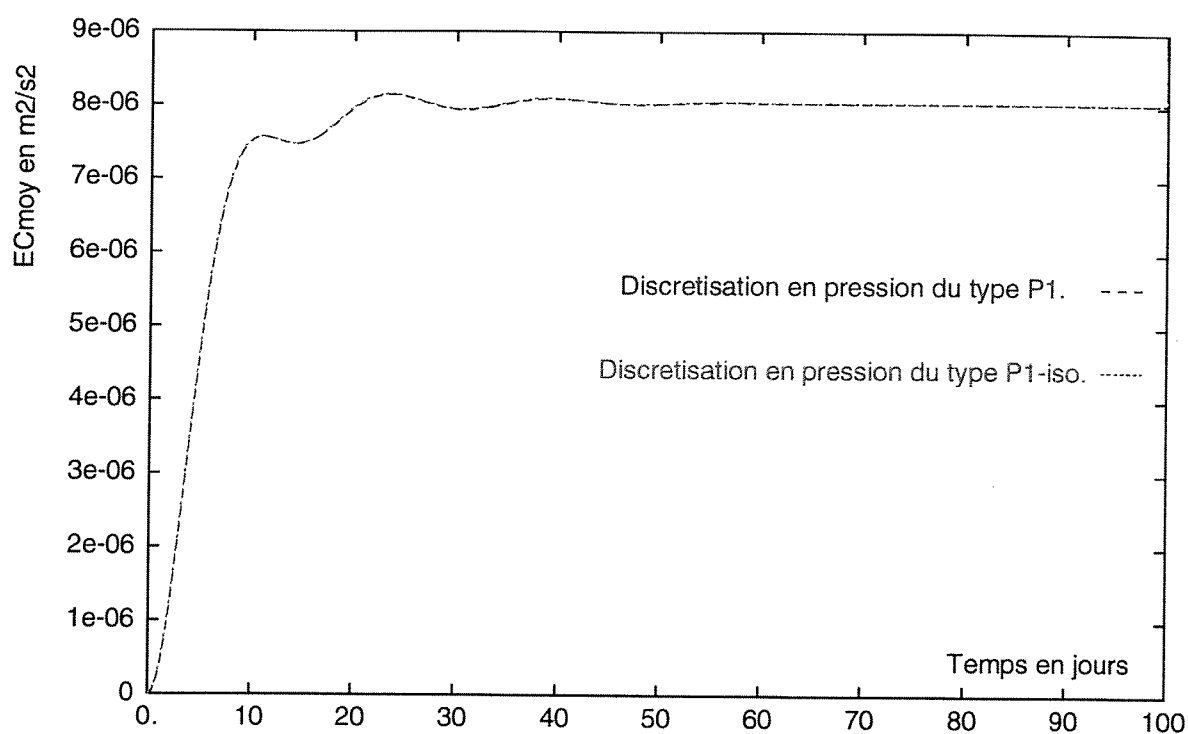


FIG. II.2.13 - Tests linéaires sur problème de Stommel, énergie cinétique moyenne : $F_0 = 1.10^{-8} m.s^{-2}$, $k_{fr} = 1.2 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ ($\gamma_f = 0.03$).

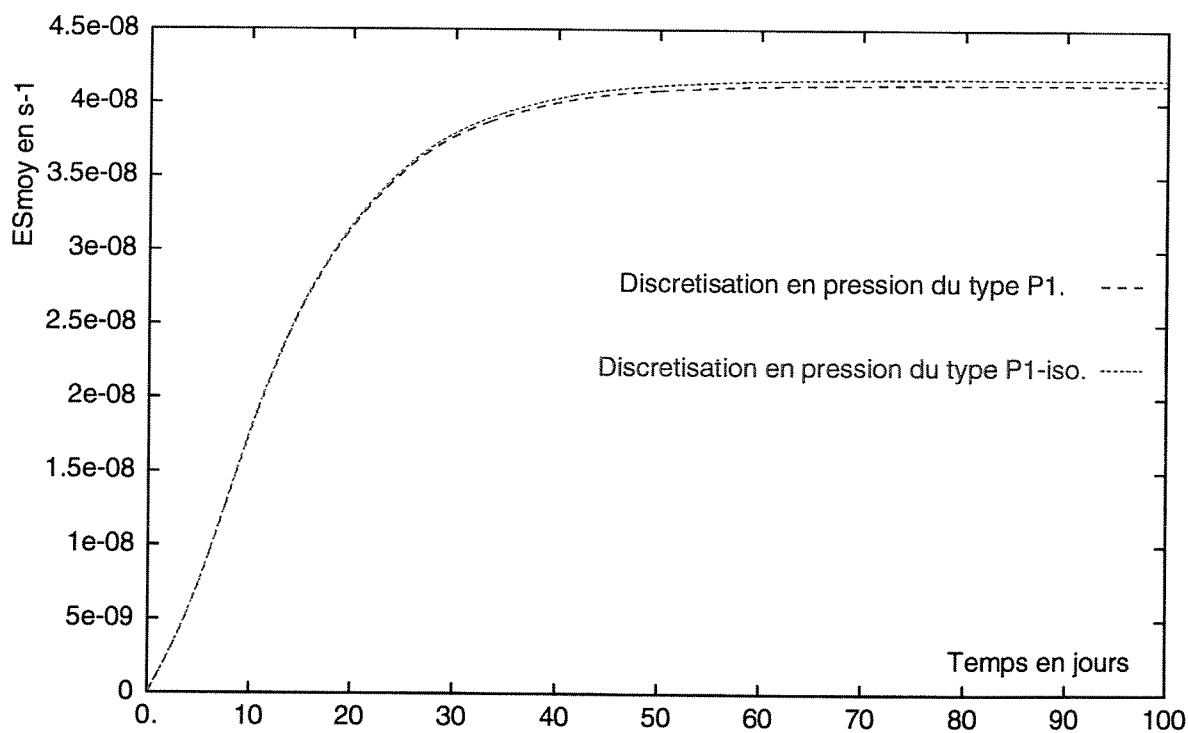
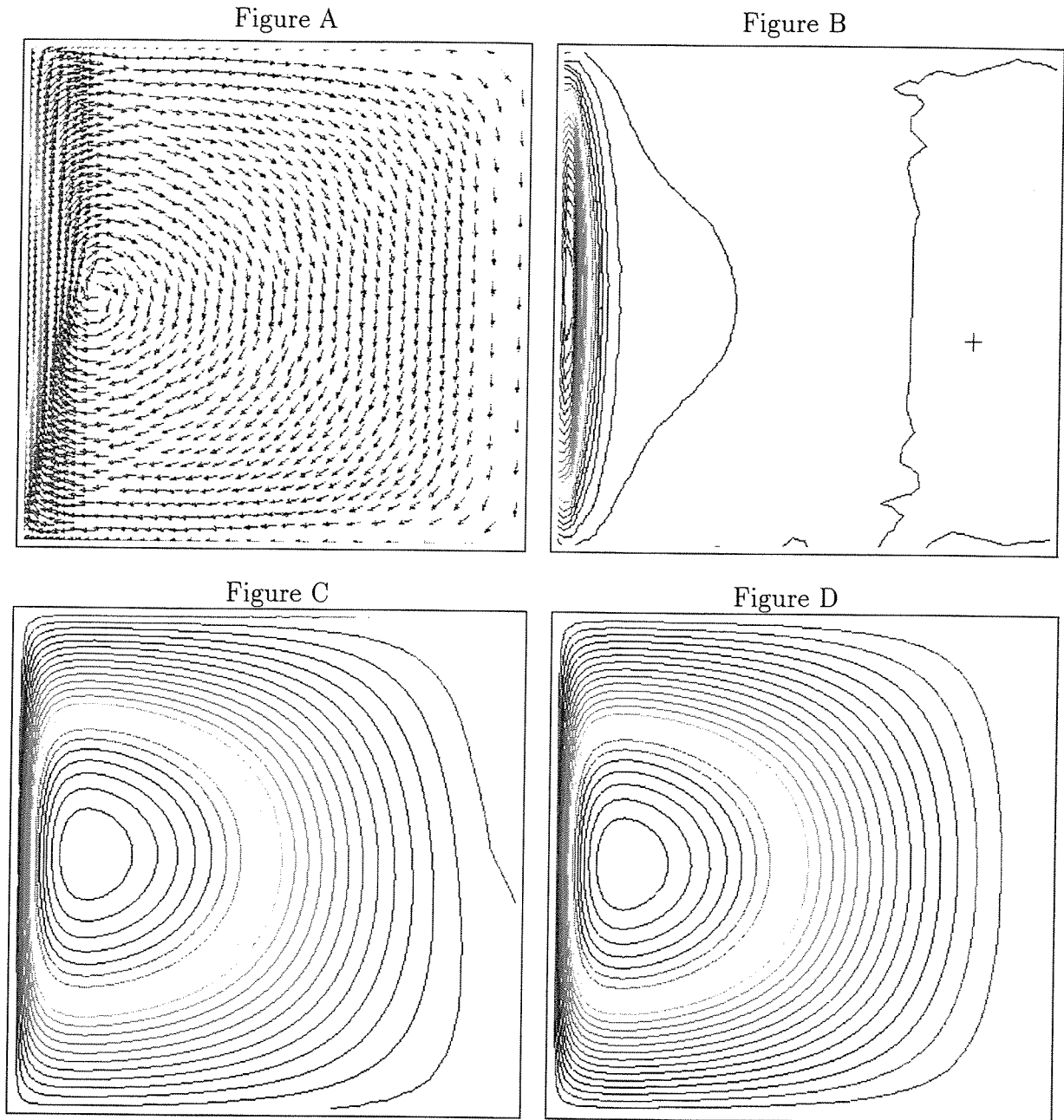


FIG. II.2.14 - Tests linéaires sur problème de Stommel, enstrophie moyenne : paramètres identiques à la figure précédente.



couleurs/valeurs	Min (bleu foncé)	Max (violet)
$\ \vec{U}\ $ (m.s^{-1} , fig. A)	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$2.42 \cdot 10^{-2}$
ω_z (s^{-1} , fig. B)	$-2.24 \cdot 10^{-7}$	$2.27 \cdot 10^{-9}$
V (m.s^{-1} , fig. C)	$-1.42 \cdot 10^{-3}$	$2.42 \cdot 10^{-2}$
U (m.s^{-1} , fig. D)	$-2.66 \cdot 10^{-3}$	$2.66 \cdot 10^{-3}$

FIG. II.2.15 - Tests linéaires sur problème de Stommel, calcul VEF stationnaire à $t = 100$ jours, maillage à 2764 éléments : $F_0 = 1.10^{-8} \text{m.s}^{-2}$, $k_{fr} = 1.2 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$ ($\gamma_f = 0.03$). A : vecteurs vitesses, uniformes, coloriés par le module de la vitesse, B : vorticité verticale ω_z , C : lignes d'iso-pression, D : lignes de courant.

par rapport aux lignes isocourants. Le système précédent peut en effet, s'écrire :

$$\Delta P = f \Delta \Psi + \beta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

On observe effectivement cette légère tendance sur l'image C par rapport à la représentation de la fonction de courant, calculée à partir du champ de vitesse (image D). Notons cependant que cette contribution supplémentaire demeure relativement faible, les iso-lignes étant calées de la même manière.

Différence avec la solution analytique : Pour retrouver la solution analytique II.2.46 liée au cas linéaire, nous adimensionnons la fonction de courant Ψ résultant du système II.2.43 et chaque composante de la vitesse, soit :

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{U L} \quad \text{et} \quad (u, v)^* = \frac{(u, v)}{U} \quad (\text{II.2.47})$$

Par rapport au module du forçage utilisé pour générer la solution analytique, notre forçage F_0 s'écrit :

$$F_0 = \frac{\tau_0}{2\rho_0 D} \implies U = \frac{2\pi F_0}{\beta_0 L} \quad (\text{II.2.48})$$

On obtient ainsi des relations d'adimensionnalisation fonctions des paramètres du calcul, permettant de recalculer notre solution quasi-stationnaire sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$.

Nous avons effectué une comparaison avec la solution analytique Ψ_S^* et ses dérivées en calculant, pour chaque point x^*, y^* du domaine, le champ des quantités :

$$Diff(\Psi) = \frac{|\Psi_S^* - \Psi^*|}{\max(|\Psi_S^*|)} \quad (\text{II.2.49})$$

$$Diff(\|\vec{U}\|) = \sqrt{\frac{(u_S^* - u^*)^2 + (v_S^* - v^*)^2}{\max(\|\vec{U}_S^*\|)}} \quad (\text{II.2.50})$$

La figure II.2.16 et le tableau correspondant illustrent, sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$, l'estimation de ces différences exprimées en pourcentages.

Sur la figure A concernant la fonction de courant, nous constatons que le comportement de notre solution est relativement bon puisqu'il n'apparaît qu'une erreur maximale de 0,67% localisée du côté *ouest*, au niveau du cœur du tourbillon. Dans la zone de renforcement du courant, on observe un déficit plus important pour la norme de la différence entre vitesses analytiques et numériques avec un maximum local à 11% (image B). Cet écart maximum est cependant localisé sur la frontière *ouest*. Précisons à ce sujet que, pour les besoins du logiciel graphique, les vitesses numériques sont ramenées, par moyennes pondérées, du centre des arêtes aux nœuds des éléments. Ainsi, l'écart avec la solution analytique concernant les vitesses, et visible principalement à la frontière, peut être imputable à cette moyenne numérique qui tend à homogénéiser les vitesses au bord.

Par ailleurs, les résultats concernant le maillage raffiné montrent la convergence correcte du calcul vers la solution analytique, pour la fonction de courant (image C) comme pour la norme de la différence entre les vitesses (image D).

Figure A

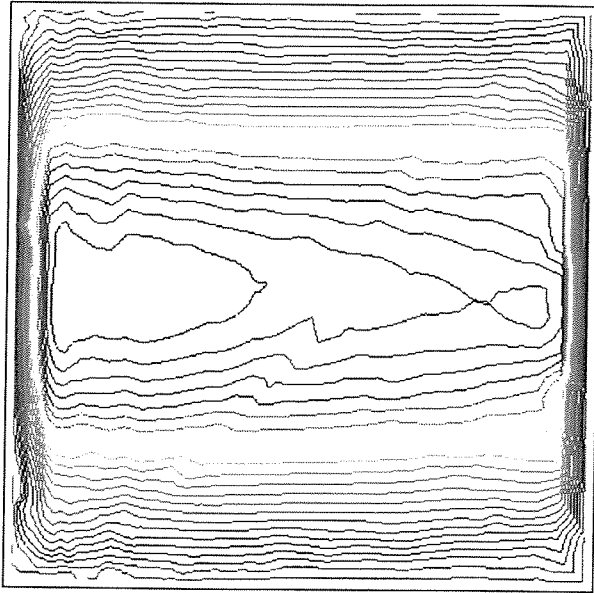


Figure B

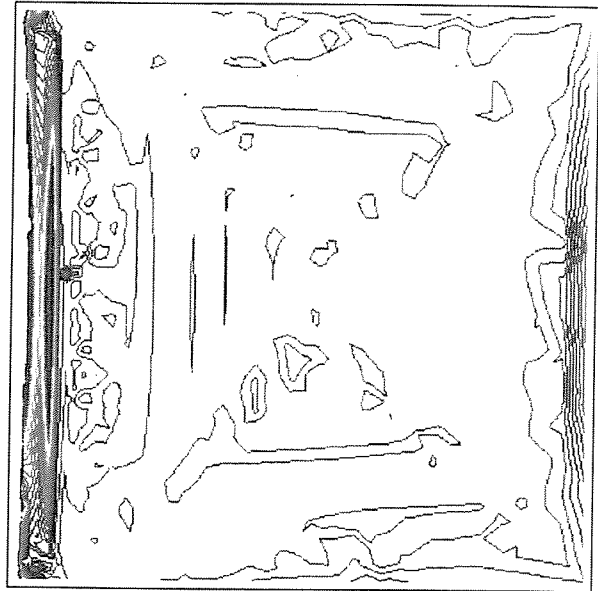


Figure C

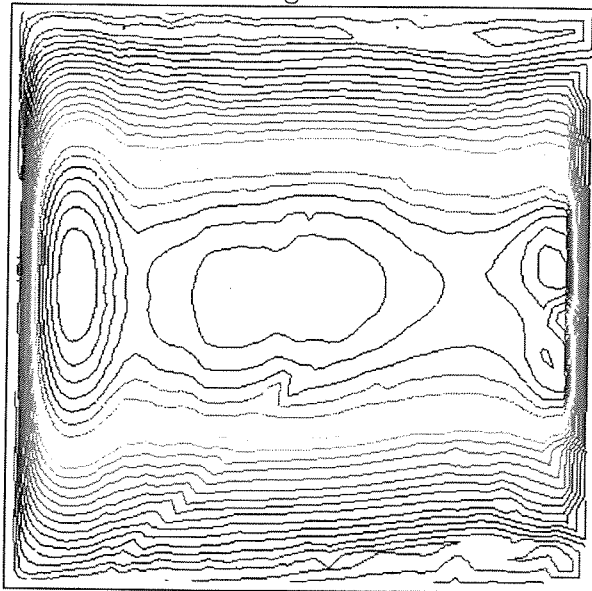
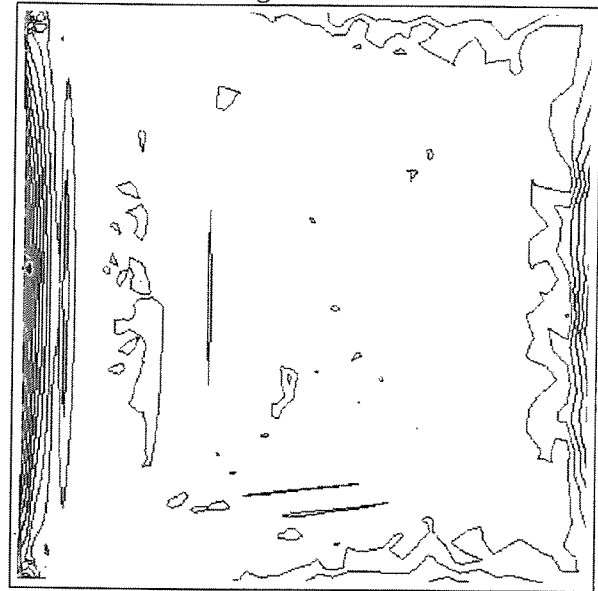


Figure D



couleurs Max (violet) / Diff en %	2764 triangles	6721 triangles
$Diff(\Psi)$ (fig. A et C)	0.67%	0.23%
$Diff(\ \vec{U}\)$ (fig. B et D)	borné à 1% (max=11.3%)	borné à 1% (max=6.8%)

FIG. II.2.16 - Tests linéaires sur problème de Stommel, comparaison entre la solution analytique et la solution quasi-stationnaire du modèle VEF, (param. idem. fig. précédente), écart sur la fonction de courant (A : 2764 triangles, C : 6721 triangles), écart sur la norme de la différence des vitesses (B : 2764 triangles, D : 6721 triangles).

En conclusion de ces premiers tests comparatifs, il semble, qu'au niveau non linéaire, le schéma P1 soit aussi précis que le P1-iso tout en impliquant un nombre de degré de liberté inférieur en pression.

Ce rapport précision/nombre de degrés de liberté est le seul que nous puissions réellement prendre en compte pour nos comparaisons. En effet, il nous est assez difficile, en l'état actuel des développements, de comparer nos deux modèles en terme de rapidité. Les solveurs itératifs initiaux que nous avons utilisés sont très différents et les comparaisons potentielles requièrent la prise en compte de nouveaux critères (choix du préconditionnement, critère d'arrêt vis à vis du calcul, étude du rapport performance/encombrement mémoire...).

Soulignons, cependant, que la recherche d'optimisation des calculs en terme de rapport précision/performance est un critère très important mais nous nous intéressons davantage, pour l'instant, à la validation des schémas numériques développés.

2.4.2.c Tests non-linéaires.

La prise en compte des effets non-linéaires s'effectue en accroissant l'intensité du forçage par rapport à la dissipation (augmentation du rapport γ_i/γ_f). Nous nous plaçons dans le cas non-linéaire où $\gamma_i = \gamma_f$ et $\gamma_f = 0,02$. Les paramètres sont donc fixés à : $F_0 = 4,07 \cdot 10^{-7} m.s^{-2}$ et $k_{fr} = 0,8 \cdot 10^{-6} s^{-1}$, le pas de temps reste fixé à 1 heure. Rappelons que nous utilisons le schéma de convection amont d'ordre 1.

En visualisant, indépendamment l'une de l'autre, les solutions stationnaires obtenues (figure II.2.17) par les deux modèles VEF, nous retrouvons qualitativement le phénomène caractéristique lié aux effets non-linéaires (Le Provost [35]). Contrairement au cas linéaire, l'écoulement n'est plus symétrique par rapport à la droite $y = L/2$. Dans la zone d'intensification du courant, le minimum de vorticité négative, associé au maximum de la vitesse méridienne, se déplace vers le nord. Par ailleurs, on note, dans le coin *nord-ouest* du domaine, une intensification du courant sur la frontière *nord* puis une légère zone de circulation vers le *sud*, créant localement une cellule de vorticité positive. Par la suite, la trajectoire de l'écoulement s'infléchit à nouveau pour retrouver, vers l'intérieur du bassin, le même type de circulation que lors du cas linéaire.

Les iso-lignes de la fonction de courant et de vorticité étant équivalentes, nous constatons néanmoins que la réponse du modèle P1 semble moins intense que celle du modèle P1-iso. Les valeurs quantitatives révèlent, en effet, des différences notables, défavorables au schéma de discrétisation P1 en pression. Dans la zone de recirculation due à la non-linéarité, nous observons des écarts sur les valeurs maximales locales allant de 20 à 40% (voir tableau fig. II.2.17). De même, l'évolution de l'énergie cinétique moyenne dans le domaine (figure II.2.18) illustre clairement le déficit énergétique obtenu par le schéma P1 par rapport au schéma P1-iso pour ce même maillage.

Nous allons apporter par la suite des précisions concernant cette différence significative.

2.4.2.d Problème lié au schéma P1, choix d'un modèle.

Ainsi, nous avons constaté le bon comportement des deux modèles quant à la description, en écoulement linéaire, du mécanisme d'intensification du courant en bord *ouest*. Par contre, la prise en compte du schéma de transport non-linéaire semble affecter le schéma P1 par rapport au schéma P1-iso.   schéma d'advection équivalent, seule la discrétisation

Figure A (P1-nconf./P1)

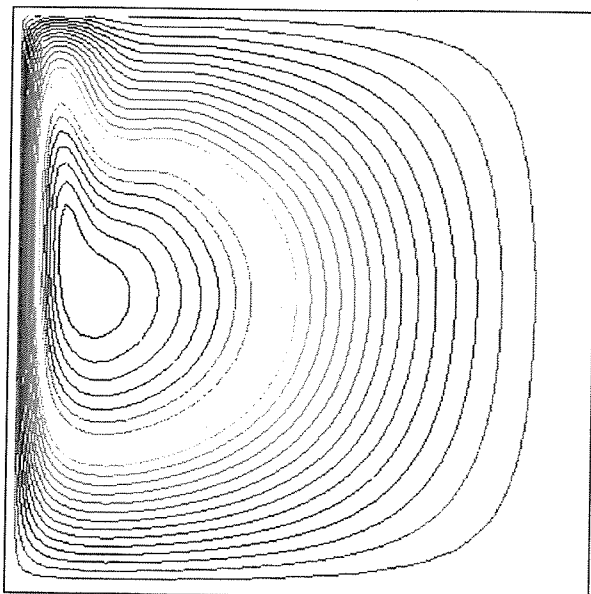


Figure B (P1-nconf./P1-iso)

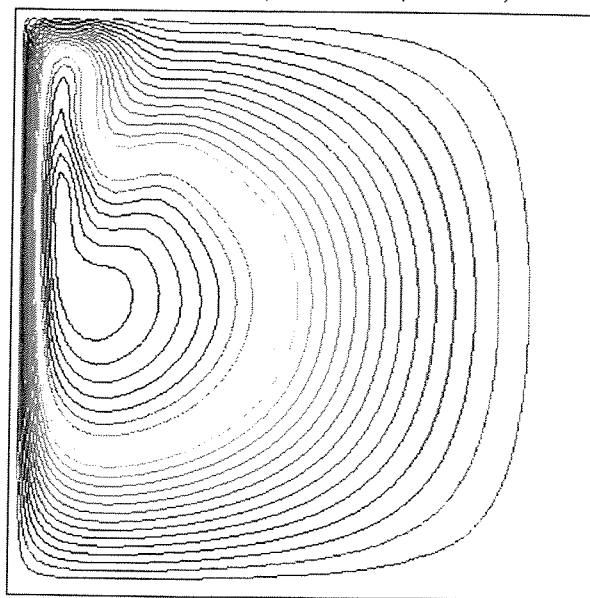


Figure C (P1-nconf./P1)

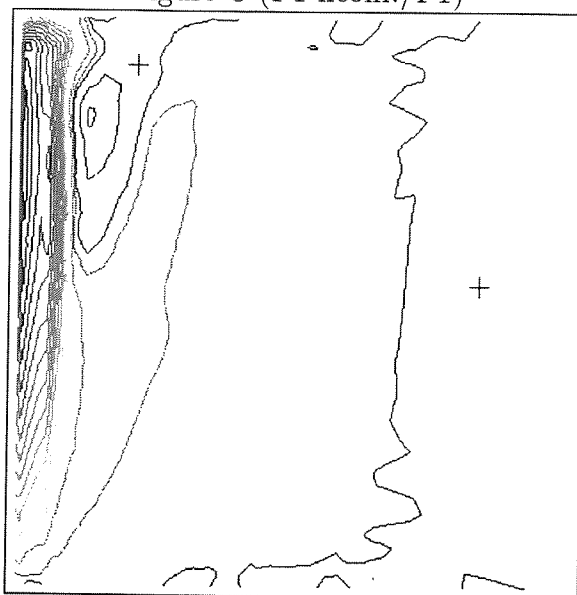
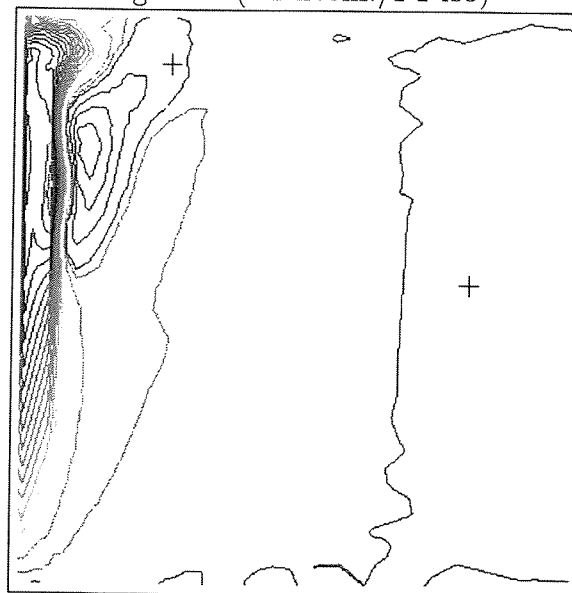


Figure D (P1-nconf./P1-iso)



min(bleu foncé), max(violet)	P1-nconf./P1 (min/max)	P1-nconf./P1-iso (min/max)
ω_z (s^{-1} , fig. B,D)	$-5.7 \cdot 10^{-6} / 9.10^{-7}$	$-6.9 \cdot 10^{-6} / 1.5 \cdot 10^{-6}$
V ($m.s^{-1}$)	$-0.131 / 0.759$	$-0.183 / 0.816$
U ($m.s^{-1}$)	$-0.109 / 0.333$	$-0.110 / 0.475$

FIG. II.2.17 - Tests non-linéaires sur problème de Stommel, calcul VEF stationnaire à $t = 100$ jours, maillage à 2764 éléments, schéma d'advection amont d'ordre 1: $F_0 = 4.07 \cdot 10^{-7} m.s^{-2}$, $k_{fr} = 0.8 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ ($\gamma_f = 0.02 = \gamma_i$). A et C: iso-lignes de la fonction de courant, B et D: vorticité verticale ω_z .

différente liée au schéma de pression peut être mise en cause.

Souvenons nous, tout d'abord, que la formulation sous forme conservative du terme non linéaire, issue de la représentation eulérienne de l'accélération, fait l'hypothèse d'un champ de vitesse à divergence nulle. En effet, nous écrivons :

$$\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = \nabla \cdot (\vec{U} \otimes \vec{U}) - \vec{U} \nabla \cdot \vec{U}$$

Si $\nabla \cdot \vec{U} = 0$, on obtient bien l'expression intégrable par le théorème de Gauss que nous utilisons dans la formulation "volumes finis".

Ainsi, nous expliquons cet aspect diffusif du schéma P1 par le fait que la mise en œuvre de la divergence sur les volumes de masse ne permet pas de garantir une divergence nulle de l'écoulement dans tout l'élément et plus particulièrement sur les volumes de quantité de mouvement. Pour le schéma P1, le choix des volumes de contrôle de masse, associé à la localisation des inconnues de pression sur les sommets, n'assure pas cette propriété justifiant la formulation conservative. Le schéma d'advection devient par conséquent non-conservatif puisque l'opérateur $\nabla \cdot (\vec{U} \otimes \vec{U})$ discrétisé sur les volumes de quantité de mouvement ne représente plus le terme $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U}$ initial.

Dans notre cas particulier, ce problème se traduit, spécifiquement dans les zones soumises aux non-linéarités, par l'apparition d'une diminution du flux d'advection.

De son côté, le schéma P1-iso, par la présence du volume de masse central, assure un bilan de masse nul sur tout l'élément et, par voie de conséquence, sur chaque volume de quantité de mouvement (le schéma P0 conserve également cette propriété).

Ce comportement du schéma P1 pouvait certes être prévisible, mais son influence et ses conséquences quantitatives ont été sous estimées.

Nous avons ainsi effectué ce même calcul avec le modèle P1 sur le maillage fortement raffiné en bord *ouest*. Le nombre de degrés de liberté en pression avoisine celui utilisé pour le P1-iso (3457 contre 3913) mais le nombre de faces traité passe de 4212 à 10177 (cf. fig. II.2.11 et II.2.12).

La bonne nouvelle concerne la convergence du schéma P1 vers la solution donnée par le P1-iso. Par contre, les valeurs maximales sont encore entre 10 à 20% inférieures à celles obtenues par le schéma P1-iso. Le rapport précision/nombre de degrés de liberté devenant défavorable au schéma P1, nous avons choisi de conserver, pour la suite des tests, le schéma P1-iso⁹.

L'évolution de l'énergie cinétique et de l'ensrophie moyenne de ces derniers calculs montre également, sur les figures II.2.18 et II.2.19, la convergence insuffisante du schéma P1 en présence de non-linéarités par rapport à la discrétisation P1-iso.

Remarquons néanmoins que les oscillations dues aux ondes de Rossby ne sont pas affectées par ce problème de diffusion de l'information durant son transport propre au schéma de discrétisation P1. Nous n'observons aucun déphasage entre les différentes courbes de l'énergie cinétique moyenne. Ce résultat est resté valable dans tous les cas tests comparatifs que nous avons pu effectuer, et notamment dans l'essai suivant.

9. Par la suite, le terme VEF fera référence au modèle P1 non-conforme/P1-iso.

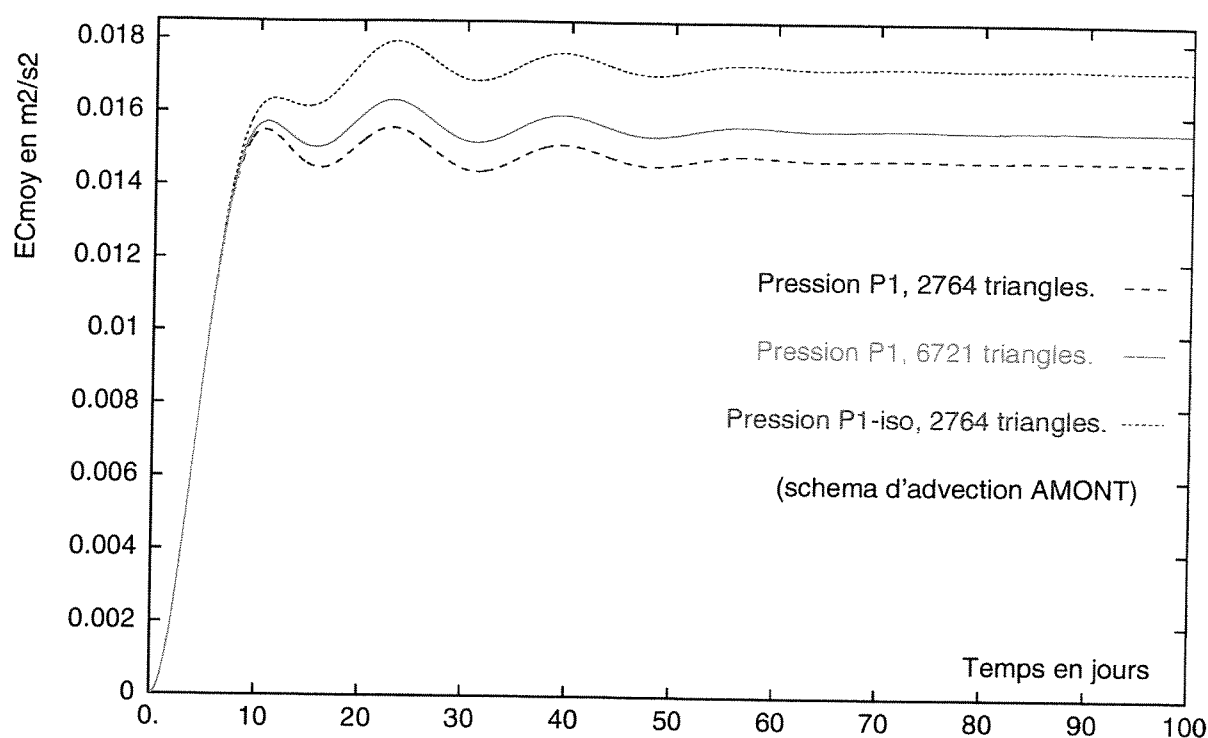


FIG. II.2.18 - Tests non-linéaires sur problème de Stommel, énergie cinétique moyenne : $F_0 = 4.07 \cdot 10^{-7} m.s^{-2}$, $k_{fr} = 0.8 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ ($\gamma_f = 0.02 = \gamma_i$).

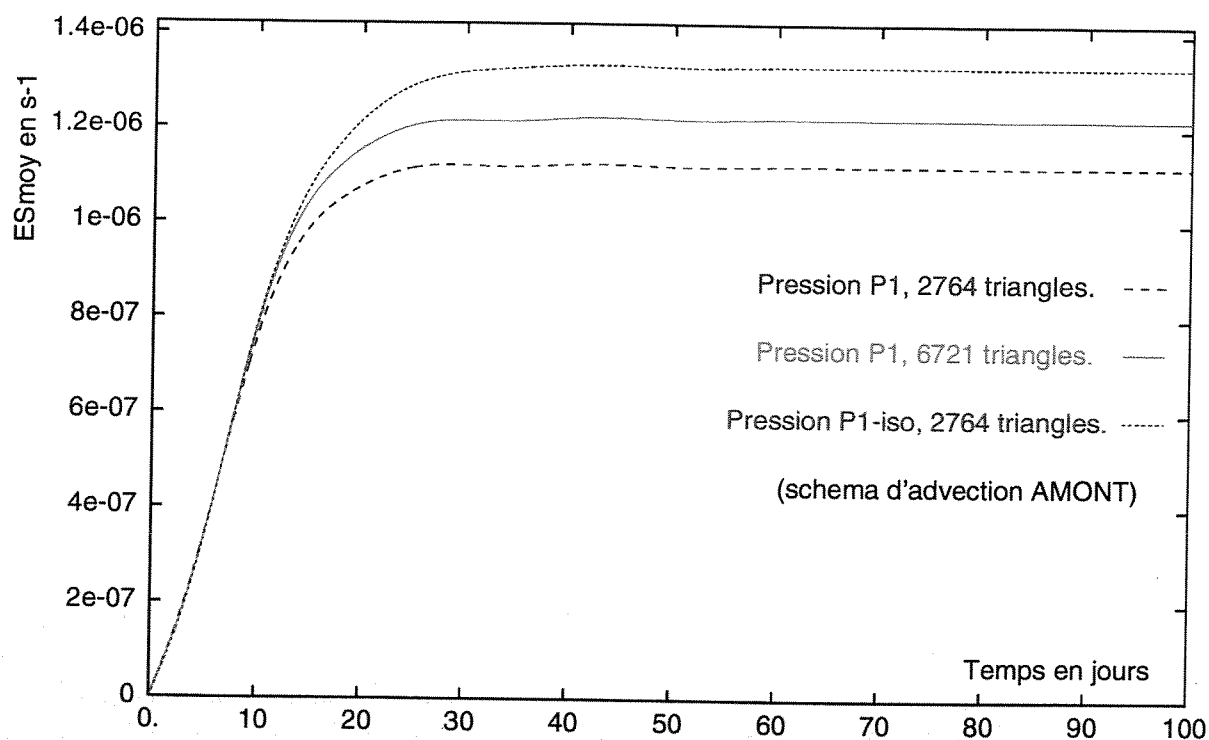


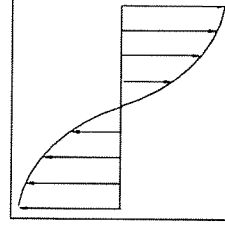
FIG. II.2.19 - Tests non-linéaires sur problème de Stommel, enstrophie moyenne : paramètres identiques à la figure précédente.

2.4.3 Ondes de Rossby, problème de type Munk en non-linéaire.

2.4.3.a Prise en compte numérique.

Pour le problème de Munk, le forçage horizontal et permanent appliqué au domaine $[0, L] \times [L/2, -L/2]$ se décrit, analytiquement ou schématiquement, par :

$$\begin{cases} T_x(x, y) = \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \\ T_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad (II.2.51)$$



La dissipation interne est effectuée uniquement par viscosité latérale ($k_{fr} = 0$).

On utilise généralement des conditions limites d'adhérence à l'est et à l'ouest. Elles vont permettre une dissipation locale supplémentaire à la frontière. Au nord et au sud les conditions de glissement sont conservées.

2.4.3.b Phénomène physique.

Comme pour le forçage du problème de Stommel, une cellule anticyclonique se forme et le phénomène de renforcement de la circulation est observé. Par contre, l'intégration temporelle de ce type de problème ne permet pas de trouver une solution stationnaire.

En effet, la diffusion par viscosité devient active principalement le long de la couche limite en bord ouest à cause des forts gradients de vitesse engendrés dans la couche limite. Ainsi, les ondes planétaires de Rossby, générées à l'est, sont lentement dissipées par viscosité au cours de leur déplacement vers l'ouest à l'intérieur du domaine.

Leur propagation caractéristique à travers le bassin devient donc clairement identifiable. A cet égard, l'analyse de la propagation des ondes de Rossby en terme de modes propres du bassin, préconise, dans le cas d'un domaine carré de 2000 kilomètres à une cellule de circulation, une période théorique de 16,14 jours (Branger [12]).

Pour des cas non-linéaires, on doit retrouver, comme pour le cas Stommel, le déplacement vers le nord du tourbillon anticyclonique créé par l'intensification de la couche limite ouest. Par la suite, le déplacement des ondes se superpose à la circulation générale et vient alimenter périodiquement la couche limite puis la recirculation non-linéaire au coin nord-ouest du domaine.

2.4.3.c Mise en œuvre, résultat et comparaison.

Nous avons effectué un calcul non-linéaire avec le modèle VEF (P1-iso) pour visualiser et quantifier ces propagations. De plus, nous souhaitons confronter le comportement topologique de l'écoulement vis à vis des solutions classiques obtenues par les modèles QG (Le Provost [35]). Nous nous plaçons dans le cas faiblement non-linéaire où $\gamma_a = 0,06$ et $\gamma_i = 0,03$. Nos paramètres sont donc tels que $\nu_h = 4320 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $F_0 = 9,167 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La figure II.2.20 présente l'évolution de l'énergie cinétique et de l'enstrophie moyennes sur une période de 60 jours. La figure II.2.21 suivante illustre, par les iso-lignes de courant, le comportement instantané de l'écoulement pour les différents temps indiqués sur II.2.20.

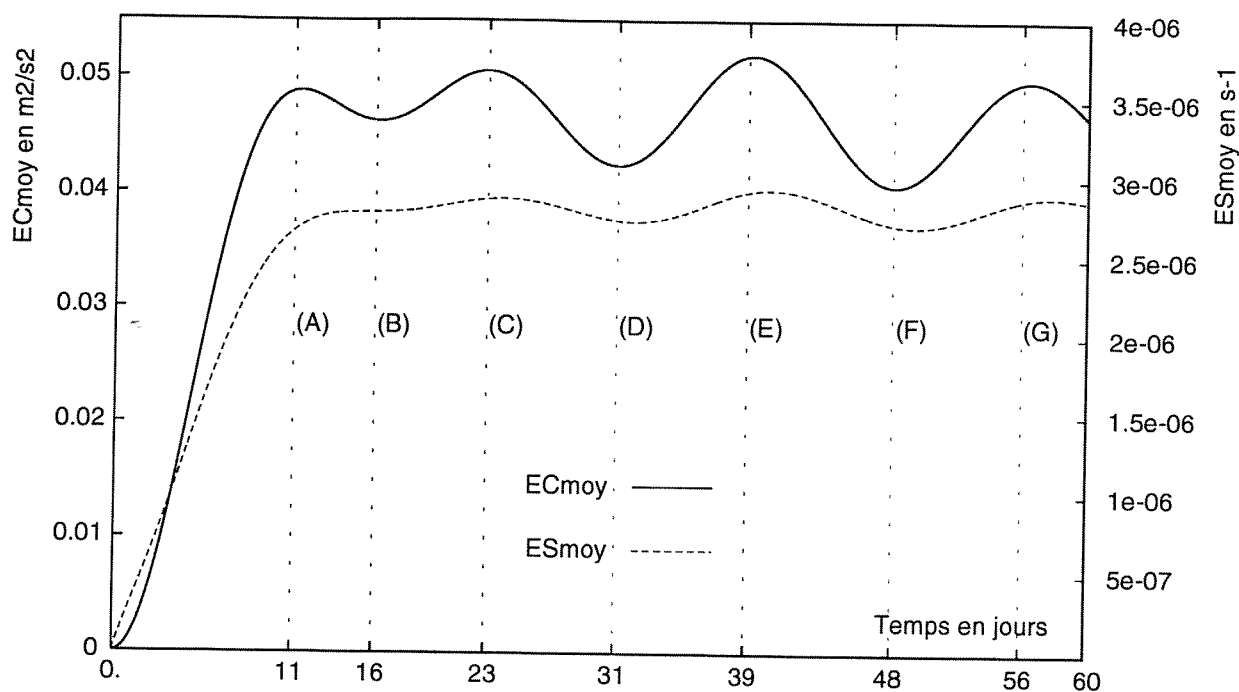


FIG. II.2.20 - Test non-linéaire sur problème de Munk, énergie cinétique et enstrophie moyennes : calcul VEF sur maillage à 2764 éléments, schéma d'advection amont.

Nous observons tout d'abord une période transitoire d'environ 15 jours liée notamment à la montée en régime de l'écoulement due au forçage, à la mise en place du renforcement du courant à l'ouest et à la prise en compte de l'effet non-linéaire au nord-ouest du domaine. Par la suite, la figure II.2.20 illustre effectivement le développement des ondes de Rossby qui, par leur déplacement, transportent de l'énergie vers l'ouest et renforcent l'intensité des gradients de vitesse dans la couche limite.

La période des ondes est correctement reproduite par le modèle VEF (16,37 jours entre les maximums localisés aux alentours des temps C et E). Différents essais nous ont montré que cette période, lorsqu'elle est visible, est uniquement dépendante du gradient de la force de Coriolis et des dimensions du domaine. L'évolution de l'enstrophie moyenne montre le même type de comportement oscillatoire. Notons cependant que le léger retard de phase visible sur l'évolution de l'enstrophie par rapport à l'énergie cinétique est également décrit, sur ce type de calcul, par les modèles QG (Dumas [20]).

Sur la figure II.2.21, les instants approximativement associés au minimum de l'énergie cinétique moyenne (images B, D, F) correspondent à la création, à l'est, d'une nouvelle cellule anticyclonique caractérisant l'onde de Rossby. Son déplacement vient renforcer la couche limite, augmentant ainsi l'énergie cinétique moyenne (images C, E, G) et activant dans cette zone la dissipation par viscosité latérale. Cette cellule est ensuite transportée par non-linéarité et s'apparie avec la recirculation initiale au nord-ouest (image F).

Nous donnons par ailleurs, sur la figure II.2.22, le résultat du même calcul effectué par Le Provost [35], avec le modèle aux éléments finis de Dumas [20], à partir de la formulation QG. On constate que le comportement de l'écoulement est qualitativement similaire. La courbe de l'énergie cinétique décrit également le même type d'évolution temporelle. Outre la période des ondes de Rossby, notons l'équivalence quant à la description de l'étape liée au transitoire (période d'environ 12 jours entre A et C).

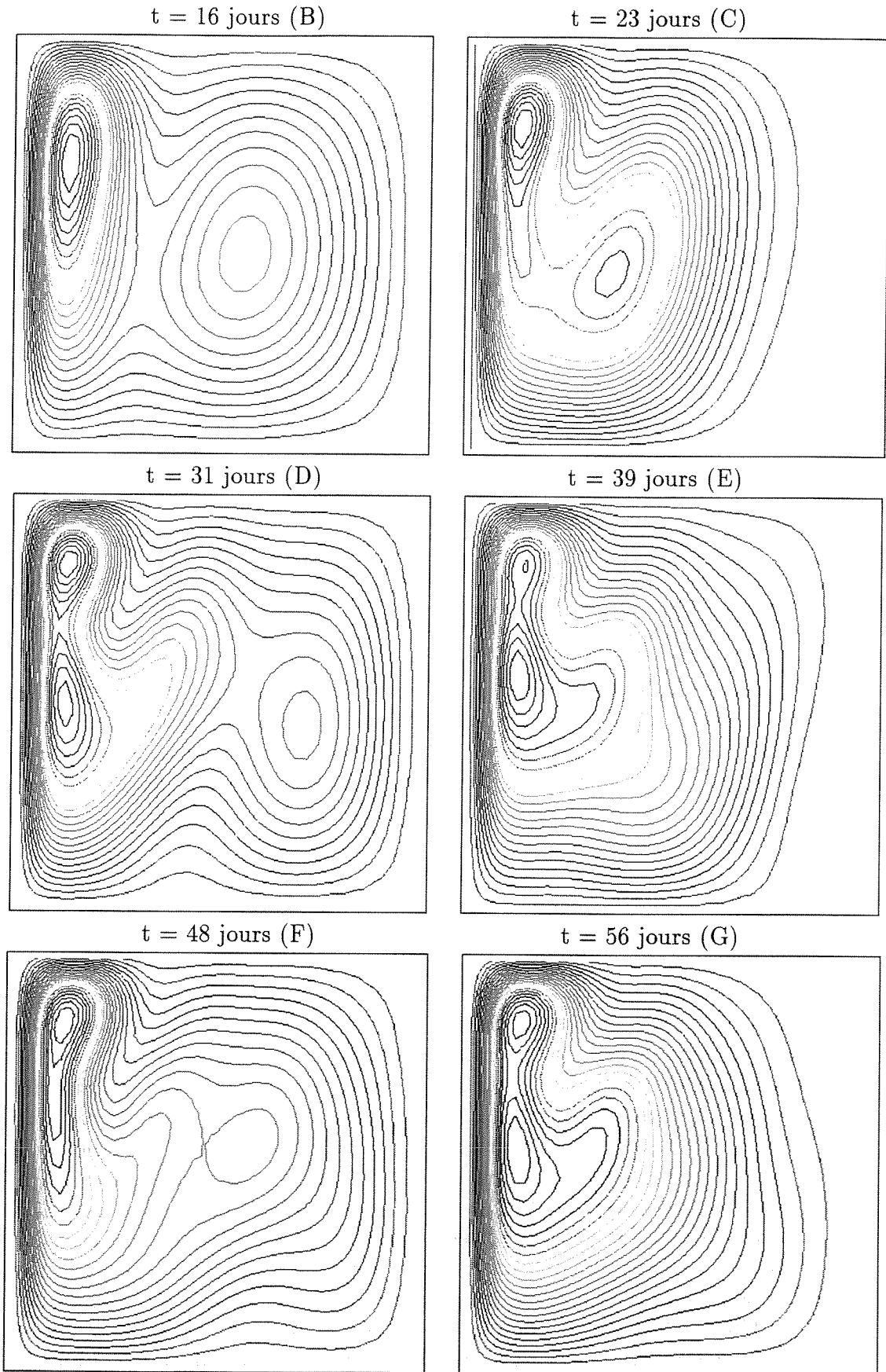


FIG. II.2.21 - Test non-linéaire sur problème de Munk, lignes stationnaires de la fonction de courant : calcul VEF sur maillage à 2764 éléments, schéma d'advection amont, $F_0 = 9.167 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$, $\nu_h = 4320 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ($\gamma_i = 0.03, \gamma_a = 0.06$)

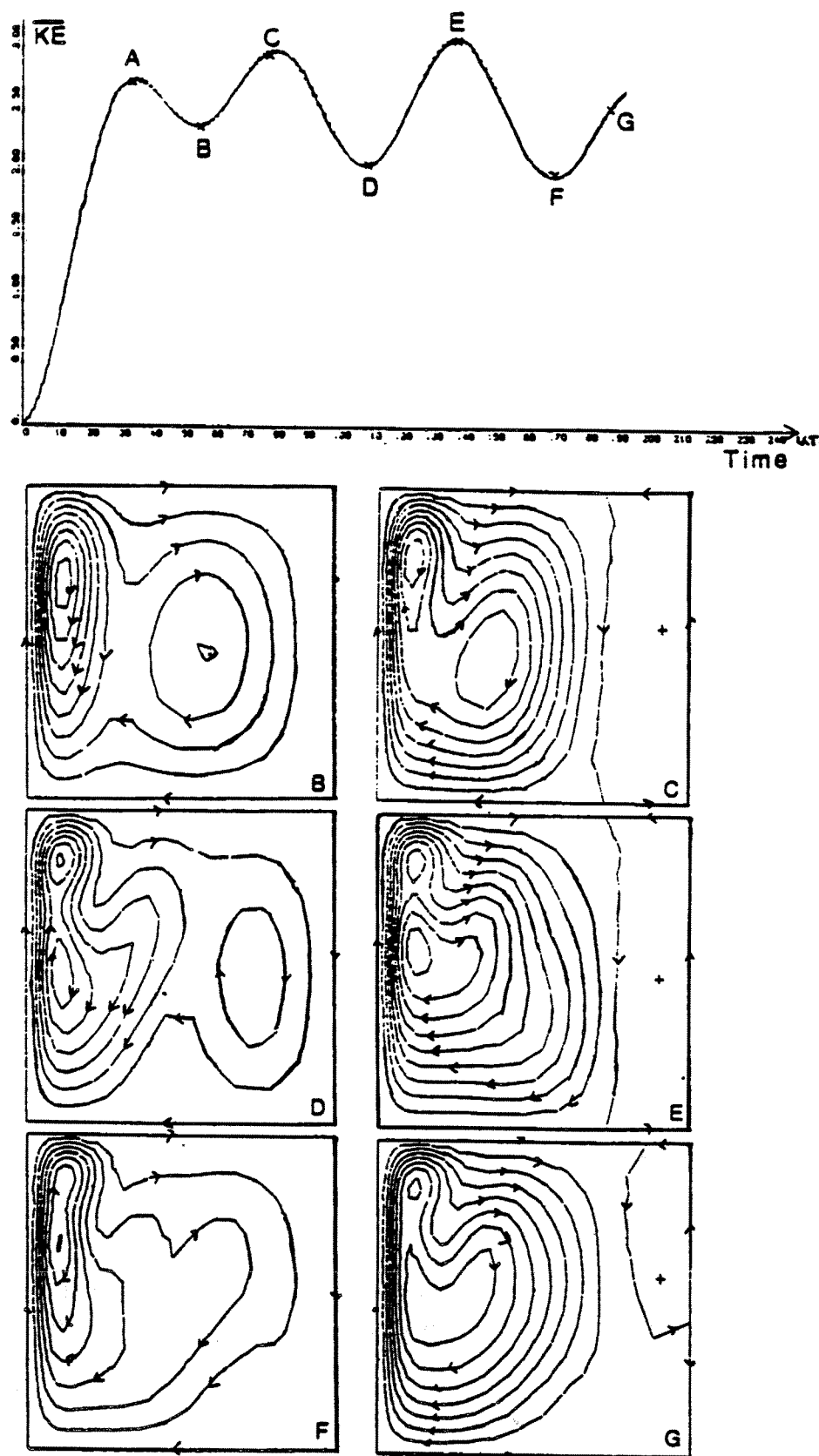


FIG. II.2.22 - Problème de Munk non-linéaire, fonction de courant instationnaire obtenue par un modèle aux éléments finis à partir de la formulation QG (Le Provost [35]), param. idem. fig. précédente, KE : énergie cinétique adimensionnelle, $Time = t \times \beta_0 L \Rightarrow A \approx 11j$, $B \approx 16j$, $C \approx 23j$, $D \approx 32j$, $E \approx 40.5j$, $F \approx 49j$, $G \approx 54j$.

2.4.4 Conclusion.

Nous avons donc testé, au cours de cette section, les développements bidimensionnels effectués sur la technique "volume éléments finis" pour décrire des écoulements océanographiques.

Récapitulons, de manière globale, les différents résultats observés, dont :

- le comportement satisfaisant de la période transitoire (mise en mouvement du fluide par le forçage de surface),
- le renforcement du courant en bord *ouest*,
- la génération, la propagation et la dissipation correctes des ondes barotropes de Rossby,
- l'effet important de la dissipation par frottement de fond avec l'obtention d'un état quasi-stationnaire,
- dans ce cas quasi-stationnaire, la conservation de l'énergie cinétique moyenne et de l'entrophie moyenne sur le domaine,
- la bonne prise en compte des conditions limites (adhérence ou glissement),
- la convergence des schémas face au raffinement du maillage,
- l'existence et la validité de la fonction de courant obtenue à l'aide de la matrice en pression.

Concernant la description d'écoulements linéaires, nous obtenons, pour un même maillage, une équivalence des solutions données par les différentes discrétisations P1 et P1-iso. Par ailleurs, la comparaison à la solution analytique de Stommel nous permet de valider de manière quantitative les développements entrepris. Le modèle VEF bidimensionnel représente correctement les phénomènes physiques liés à la variation de la force de Coriolis avec la latitude (la pression intègre bien l'effet du β -plan).

La prise en compte des termes non-linéaires a mis à jour le problème lié à la discrétisation du schéma P1 en pression. Sa convergence et son faible coût potentiel¹⁰ devraient néanmoins permettre son utilisation à la description de dynamiques faiblement non-linéaires. Mais, ceci n'est pas le cas de la plupart des mouvements fluides en océanographie.

A cet égard, les écoulements non-linéaires traités précédemment avec le schéma P1-iso semblent qualitativement satisfaisants (problème de Munk). Cependant, l'opérateur discret de convection non-linéaire disponible est réputé pour être diffusif. Il apparaît nécessaire d'affiner cette étude bidimensionnelle sur le modèle VEF en regardant, de manière plus quantitative, la réponse du schéma amont du premier ordre.

10. Les rapports précision/coût cpu et précision/ coût mémoire reste à étudier et passe par l'optimisation des solveurs.

chapitre II.3

Modifications non-linéaires complémentaires.

3.1 Introduction: quelques comparaisons VEF / VDF.

Dans le cadre des tests bidimensionnels présentés précédemment, nous avons également effectué un certain nombre de calculs avec le modèle VDF (code TRIO-VF). Globalement, les calculs linéaires fournissent des résultats qualitatifs et quantitatifs tout à fait comparables au modèle VEF, notamment en ce qui concerne les pressions. Les quelques différences observables sur les intensités maximales des vitesses sont négligeables (1 à 2%), compte tenu des différentes interpolations effectuées au niveau du post-traitement (cf. comparaison du modèle VEF avec la solution analytique de Stommel).

A titre d'illustration, nous présentons, sur la figure II.3.1 ci-dessous, l'évolution de l'énergie cinétique moyenne intégrée sur le domaine concernant le cas Stommel linéaire initialement traité. Avec une discrétisation horizontale structurée de 100×100 ($\Delta x = \Delta y = 20$ kilomètres), on constate le bon accord entre les calculs VEF et VDF.

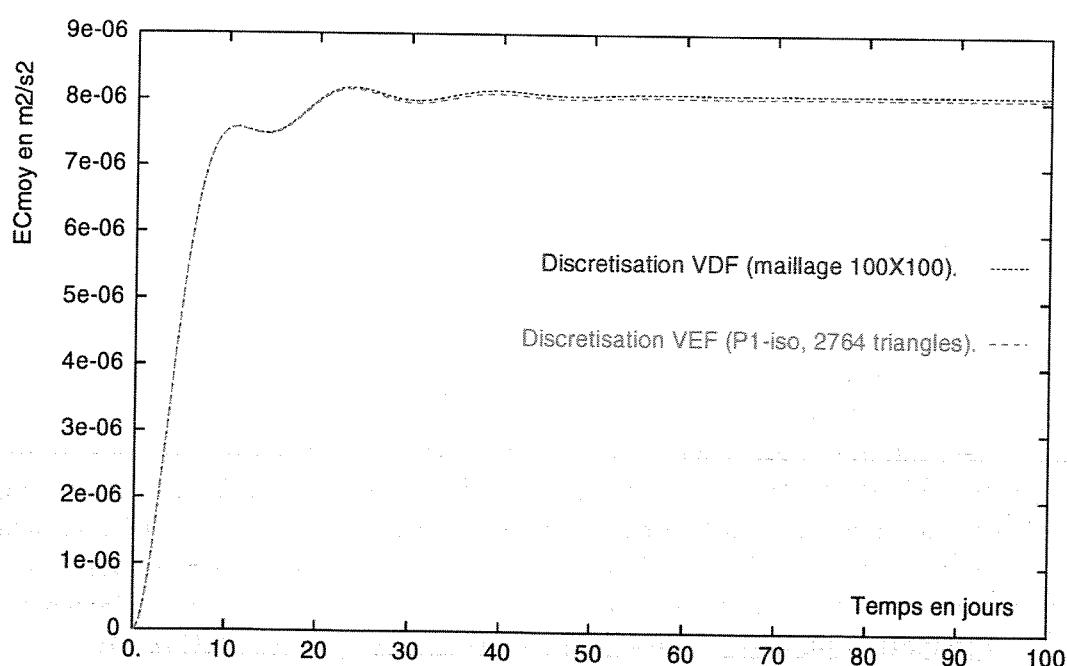


FIG. II.3.1 - Evolution de l'énergie cinétique moyenne, calculs linéaires sur problème de Stommel, $F_0 = 1.10^{-8} m.s^{-2}$, $k_{fr} = 1.2 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ ($\gamma_f = 0.03$).

Cependant, pour se convaincre de la nécessité d'utiliser un schéma de transport d'ordre élevé, nous présentons, sur la figure II.3.2, la comparaison de l'évolution de l'énergie cinétique moyenne sur le cas non-linéaire du problème de Munk traité au chapitre précédent.

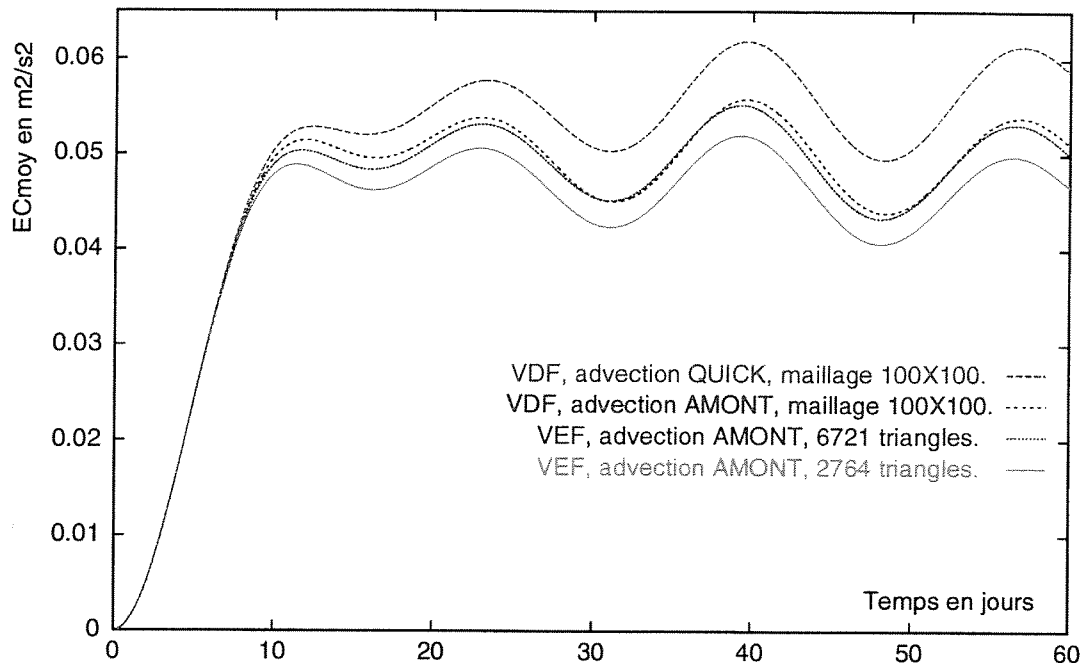


FIG. II.3.2 - Evolution de l'énergie cinétique moyenne, calculs non-linéaires sur problème de Munk, $F_0 = 9.167 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$, $\nu_h = 4320 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ($\gamma_i = 0.03, \gamma_a = 0.06$).

En ce qui concerne le modèle VDF, on constate effectivement une grosse différence énergétique entre le schéma d'advection *décentré amont* (upwind) et le schéma du type *quick-sharp*¹ d'ordre plus élevé. Dans les deux cas, nous retrouvons toutefois le même type d'oscillations traduisant la propagation des ondes de Rossby. Les figures II.3.3.A et B illustrent, par ailleurs, la topologie de l'écoulement à 56 jours de simulation. Le module de la vitesse montre l'effet de la diffusion numérique du schéma amont par rapport au quick. Même si le déficit concernant l'intensité maximale au niveau du bord *ouest* n'atteint que 10%, la cellule de recirculation formée au *nord-ouest* du domaine par les effets non-linéaires d'advection est visiblement moins intense.

Avec le modèle VEF, les résultats du même calcul sont présentés pour les deux types de maillages non-structurés (cf. fig. II.2.11 et II.2.12). La réponse des modèles vis à vis de la propagation des ondes de Rossby est globalement similaire (léger déphasage). Cependant, par rapport au calcul du modèle VDF avec schéma quick, l'aspect diffusif du modèle VEF est clairement identifiable. Le raffinement du maillage permet cependant une diminution notable de la dissipation numérique. Pour le maillage à 6721 éléments, on retrouve un niveau d'énergie cinétique moyenne comparable au modèle VDF avec schéma amont, bien que les maxima locaux de vitesse restent légèrement inférieurs au niveau du bord *ouest*. Le comportement topologique de la norme de la vitesse illustre également ce problème de dissipation numérique du schéma de transport (fig. II.3.3.C et D).

Concernant ce type de cas test, signalons que d'autres phénomènes numériques peuvent influencer le comportement non-linéaire des modèles et pourraient faire l'objet de tests

1. Noté de manière générique quick (cf. annexe) et amont pour le schéma décentré amont d'ordre 1.

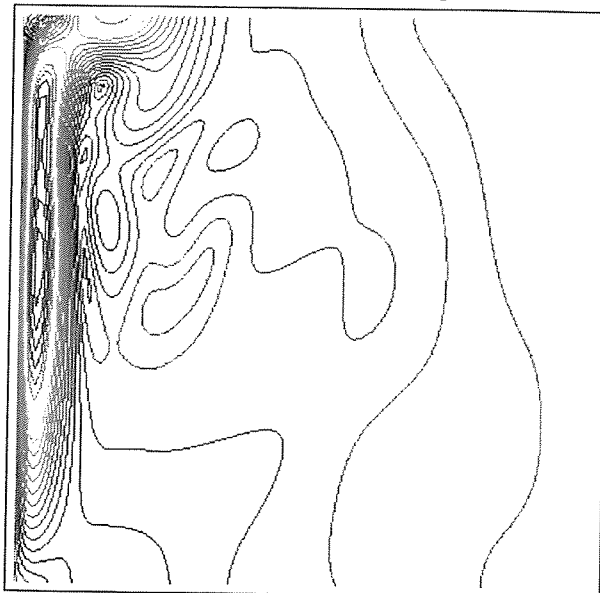
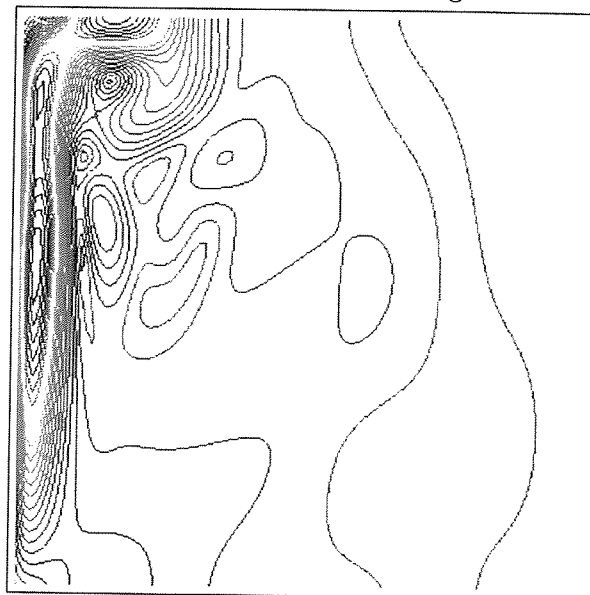
Fig. A : VDF, AMONT, maillage 100×100 .Fig. B : VDF, QUICK, maillage 100×100 .

Fig. C : VEF, AMONT, 2764 triangles.

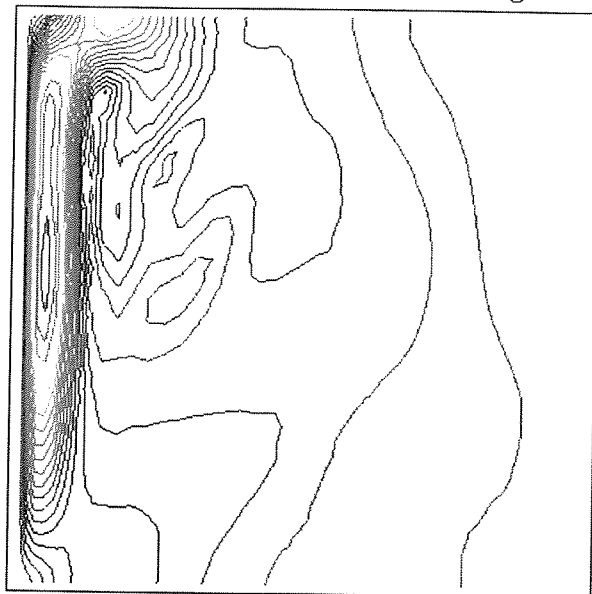
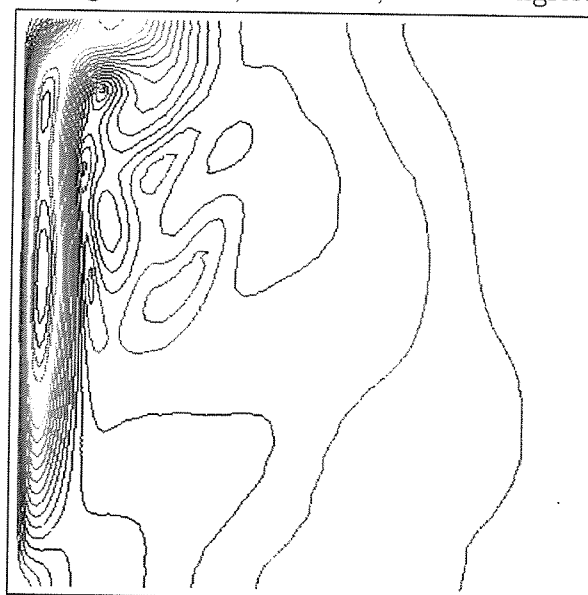


Fig. D : VEF, AMONT, 6721 triangles.



	$\max(\ \vec{U}\)$ (violet)
VDF QUICK	1.128 ms^{-1}
VDF AMONT	1.01 ms^{-1}
VEF AMONT (2764 tri.)	0.915 ms^{-1}
VEF AMONT (6721 tri.)	0.985 ms^{-1}

FIG. II.3.3 - Module instantané de la vitesse horizontale à 56 jours, calculs non-linéaires sur problème de Munk, param. idem fig. précédente, $\Delta_{\text{isovaleurs}} = 0.047 \text{ ms}^{-1}$.

paramétriques supplémentaires². A cet égard, il est bon d'évoquer les différences dans le traitement des conditions limites d'adhérence³, l'influence des raffinements locaux, ou encore l'interpolation liée au post-traitement.

Quoiqu'il en soit, toutes les comparaisons que nous avons pu entreprendre, concernant les problèmes non-linéaires de Stommel ou Munk, nous ont montré, par référence au modèle VDF, la trop grande diffusivité du schéma amont. Il a donc paru utile d'implémenter, dans ce modèle VEF, un schéma de transport d'ordre plus élevé afin de diminuer ce problème, tout en conservant une relative stabilité numérique.

3.2 Extension du schéma de transport.

On se propose ici de décrire la mise en œuvre d'un schéma de transport non-linéaire d'ordre 2, applicable à notre type de discrétisation VEF. Pour cela, nous avons adapté un schéma de type MUSCL (*Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws*), introduit par Van Leer [55], et classiquement utilisé dans les systèmes hyperboliques pour la résolution des équations d'Euler (Buffard [15]). Précisons que ce schéma ne concerne que l'intégration du flux non-linéaire sur les volumes de contrôle de quantité de mouvement. Ainsi, il est indépendant des modifications concernant la discrétisation en pression et, par conséquent, applicable à tous les différents modèles présentés précédemment, qu'ils soient d'ailleurs 2D (éléments triangulaires) ou 3D (éléments tétraédriques).

3.2.1 Schéma MUSCL d'ordre 2, principe.

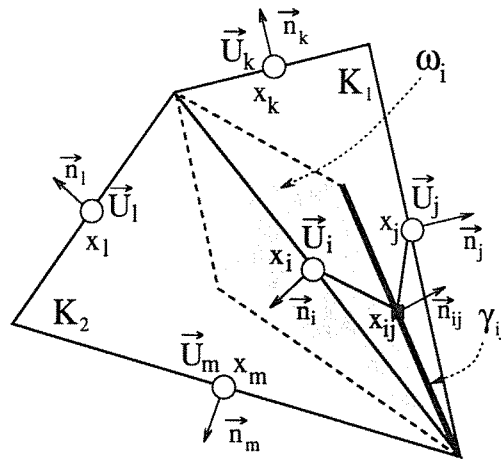


FIG. II.3.4 - *Evaluation du flux d'advection concernant la facette γ_{ij} .*

Rappelons, tout d'abord, l'expression II.1.8 du flux d'advection évalué par le schéma décentré amont d'ordre 1, concernant une facette γ_{ij} du volume de contrôle ω_j située entre les faces i et j (cf. figure II.3.4) :

$$\int_{\gamma_{ij}} \vec{U}^{te} \times (\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}}) ds \approx \begin{cases} \vec{U}_i \int_{\gamma_{ij}} (\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}}) ds & \text{si } \vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}} > 0 \\ \vec{U}_j \int_{\gamma_{ij}} (\vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}}) ds & \text{si } \vec{U}^{ta} \cdot \vec{n}_{\gamma_{ij}} < 0 \end{cases}$$

2. La comparaison précise des modèles VDF et VEF n'est pas l'objet principal de ce rapport.

3. VDF : modélisation d'un frottement tangentiel à la paroi à cause du maillage entrelacé, VEF : vraie condition limite d'adhérence à la paroi.

La valeur de la vitesse transportée \vec{U}^{te} dépend donc du signe du produit scalaire entre la vitesse transportante \vec{U}^{ta} et la normale à la facette $\vec{n}_{\gamma_{ij}}$. Sur cette facette, la vitesse \vec{U}^{ta} reste extrapolée grâce aux valeurs des fonctions de forme P1 non-conforme associées à l'élément K correspondant. Pour le schéma décentré amont, la vitesse \vec{U}^{te} est donc choisie sur la face amont vis à vis du signe du flux transportant calculé à la facette γ_{ij} .

On note, de manière générique, la vitesse transportée ainsi extrapolée par \vec{U}_{amont} . Le schéma MUSCL consiste à reconstruire la valeur transportée \vec{U}^{te} par l'intermédiaire d'un développement limité d'ordre 2 de la variable, de type :

$$\vec{U}^{te} = \vec{U}_{amont} + \vec{\nabla} \vec{U}_{amont} (\vec{X}_{ij} - \vec{X}_{amont}) \quad (\text{II.3.1})$$

où \vec{X}_{ij} et \vec{X}_{amont} représentent respectivement les vecteurs coordonnées des nœuds x_{ij} et x_{amont} ($x_{amont} = x_i$ ou x_j , cf. figure II.3.4).

A chaque itération temporelle, l'extrapolation de cette variable \vec{U}^{te} passe donc par le calcul d'un gradient à évaluer sur chaque volume de contrôle de quantité de mouvement ω concerné par la vitesse définie *amont*.

3.2.2 Evaluation du gradient, limiteur minmod.

L'estimation des pentes constitue une part déterminante du calcul du schéma.

Dans un premier temps, il est possible d'évaluer ce gradient à l'ordre 2 par une discrétisation centrée sur les éléments K . Par exemple, en supposant que \vec{U}_i est la vitesse définie amont, on calculera le gradient par intégration sur l'élément $K_1 \cup K_2$ (cf. fig. II.3.4). Cependant, en présence de discontinuités dans la solution ou de forts gradients, cette approche est réputée pour être relativement instable et susceptible de générer des oscillations numériques par création d'extremums locaux.

Ainsi, on associe au calcul de ces gradients la notion de *limiteurs de pentes*, leur application ayant pour objectif de reconstruire des valeurs non-surestimées. Nous présentons les critères fondamentaux garantissant la stabilité du schéma.

Pour une meilleure illustration, nous nous plaçons dans le cas unidimensionnel. Notons toujours K l'élément, ω le volume de contrôle et u la valeur de la vitesse localisée en x au centre d'un ω . L'estimation d'une vitesse sur les interfaces de ω nécessite donc le calcul d'un gradient concernant la vitesse amont (par exemple u_i sur les figures II.3.5 et II.3.6).

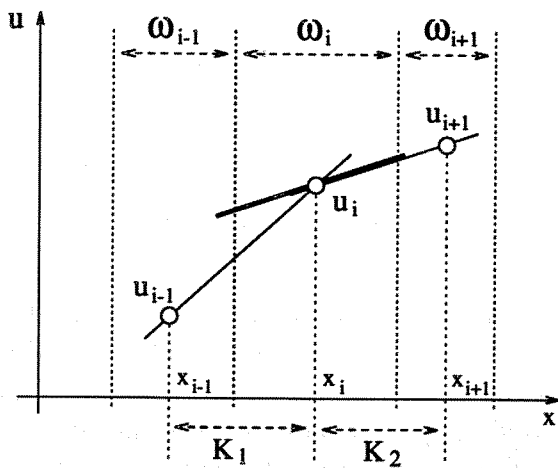


FIG. II.3.5 - Cas monotone.

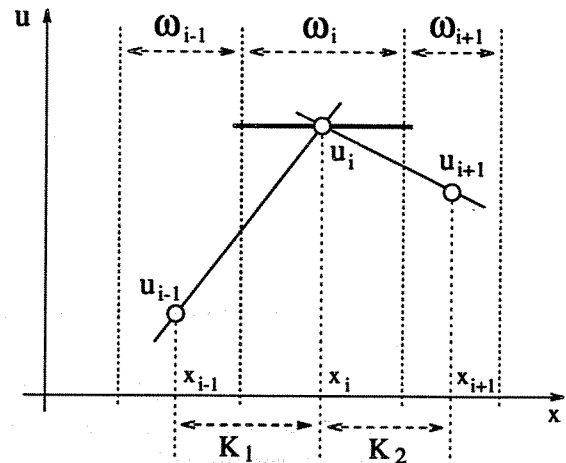


FIG. II.3.6 - Cas d'un extremum local.

Le principe général que nous avons adopté pour l'évaluation d'un gradient "limité" est d'imposer à la reconstruction de u des critères de monotonie. Le respect de cette notion de monotonie permet d'assurer que la valeur reconstruite reste bornée par les valeurs d'extrapolation.

Vis à vis des gradients estimés sur chaque élément K_1 et K_2 concerné par la vitesse amont u_i , le gradient sur ω_i est choisi en privilégiant toujours la pente décentrée minimum (pour la figure II.3.5, pente calculée sur K_2). De plus, en présence d'inversion des gradients estimés, on impose une reconstruction nulle de la pente (cf. figure II.3.6). Dans ce cas de forte discontinuité des gradients aux éléments, on retrouve le schéma décentré amont d'ordre 1.

Le limiteur de flux issu de l'application de ces critères de stabilité est couramment appelé *limiteur minmod*.

Remarque : avec cette limitation minmod, l'ordre d'approximation le plus élevé, correspondant à la pente centrée, ne peut pas être obtenu, sauf si la solution est linéaire. Cependant, les pentes décentrées sont des approximations d'ordre 1 des dérivées, ainsi la variable transportée reste calculée à l'ordre 2.

3.2.3 Mise en œuvre pour le modèle VEF.

Considérons le calcul du gradient sur le volume de contrôle ω_i concernant la figure II.3.4. Le principe du limiteur minmod, défini précédemment suivant des critères de monotonie, peut se formuler par :

$$\vec{\nabla} \vec{U}_i = \begin{cases} \min \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_1}, [\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_2} \right) & \text{si } \text{sgn} \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_1} \right) = \text{sgn} \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_2} \right) > 0 \\ \max \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_1}, [\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_2} \right) & \text{si } \text{sgn} \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_1} \right) = \text{sgn} \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_2} \right) < 0 \\ 0 & \text{si } \text{sgn} \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_1} \right) \neq \text{sgn} \left([\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_2} \right) \end{cases} \quad (\text{II.3.2})$$

avec sgn la fonction retournant le signe de l'expression considérée.

En utilisant à nouveau la formule de Green et le fait que les fonctions de forme en vitesse sont linéaires (leur gradient est donc constant), l'intégration du gradient de la vitesse sur chaque élément K du domaine s'exprime par :

$$[\vec{\nabla} \vec{U}]_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_{\partial K} \vec{U} \cdot \vec{n}_{\partial K} ds \quad (\text{II.3.3})$$

A titre d'exemple caractéristique, la contribution discrète des vitesses au calcul du gradient sur l'élément K_1 de la figure II.3.4 donne :

$$[\vec{\nabla} \vec{U}]_{K_1} = \frac{1}{\text{mes}(K_1)} \left(\vec{U}_i \vec{S}_{K_1}^i + \vec{U}_j \vec{S}_{K_1}^j + \vec{U}_k \vec{S}_{K_1}^k \right) \quad (\text{II.3.4})$$

Ce calcul explicite des gradients sur chaque élément K du domaine s'effectue ainsi à chaque itération temporelle. Après l'application du limiteur II.3.2, le gradient décentré s'appliquant à chaque volume de contrôle en vitesse est connu. Comme pour le schéma décentré amont, il ne reste plus qu'à définir, pour chaque facette, la vitesse transportée amont et reconstruire cette vitesse par l'intermédiaire de l'expression II.3.1. Le flux non-linéaire se déduit enfin par multiplication de cette vitesse amont par le produit scalaire

de la vitesse transportante évalué sur chaque facette.

Signalons l'existence, dans la littérature, de nombreuses alternatives au calcul du limiteur. L'augmentation de l'ordre de la reconstruction semble possible en pondérant la limitation minmod présentée ci-dessus et en la combinant avec le gradient centré. Par ailleurs, il est également envisageable d'introduire une limitation du gradient centré par un coefficient multiplicatif dans $[0,1]$. Ce coefficient peut être déterminé, en fonction des critères de limitation souhaités, par plusieurs étapes de reconstruction permettant, à priori d'optimiser la correction des pentes (Buffard [15]). Cependant, ces évaluations restent potentiellement sensibles à la création d'extremums locaux et relativement coûteuses en calcul.

Pour nos applications VEF incompressibles, la limitation minmod classique a montré, pour l'instant, un comportement tout à fait satisfaisant. Précisons enfin que notre localisation des inconnues en vitesse optimise d'elle même le choix possible de la pente décentrée par le principe minmod. En effet, en discrétisation non-structurée, l'application la plus générale de ce type de schéma de transport s'effectue sur des variables $P1$ localisées aux sommets des éléments. Ainsi, la pente minimale se calcule sur un nombre d'éléments beaucoup plus important, pouvant provoquer une certaine diffusion de l'information. Dans notre cas, ce nombre reste fortement minimisé puisque les inconnues en vitesse sont uniquement communes à deux éléments.

3.2.4 Retour au problème bidimensionnel de Munk.

Pour vérifier le comportement de ce schéma MUSCL, nous l'avons tout d'abord appliqué à la modélisation du problème de Munk non-linéaire présentée en début de chapitre. Cette simulation a été effectuée sur le maillage non-structuré le moins raffiné (2764 triangles, cf. fig. II.2.11).

Vis à vis du schéma décentré amont d'ordre 1, les résultats montrent des améliorations importantes. En effet, sur la figure II.3.7, nous avons rajouté à la figure II.3.2, la contribution de ce calcul à l'évolution de l'énergie cinétique moyenne dans le domaine. Sur ce type d'écoulement, le schéma MUSCL semble diminuer considérablement la diffusion numérique engendrée par le schéma amont initial, tout en conservant la même bonne période oscillatoire caractérisant la propagation des ondes de Rossby barotropes. Par ailleurs, il permet également de retrouver un niveau énergétique moyen très comparable, et même supérieur, aux résultats donnés par le modèle VDF avec schéma de transport de type QUICK.

La figure II.3.8 illustre également l'amélioration de la représentation topologique instantanée de l'écoulement à 56 jours de simulation. Par rapport aux résultats présentés sur la figure II.3.3, nous observons que le module de la vitesse horizontale atteint toujours son maximum (1.11 ms^{-1}) dans la zone centrale du renforcement de l'écoulement en bord *ouest*. Cependant, vis à vis du même calcul effectué avec le schéma décentré amont (cf. fig. II.3.3.C), nous constatons quantitativement une augmentation de cette intensité de plus de 17%. De plus, nous retrouvons qualitativement le même type de recirculation non-linéaire au *nord-ouest* du bassin que dans le calcul VDF avec schéma de transport QUICK (cf. fig. II.3.3.B). Entre ces deux simulations, les isolignes du module de la vitesse horizontale concordent également dans tout le domaine.

Ces premiers résultats sont donc tout à fait encourageants. Toutefois, comme nous l'avons déjà souligné, ces simulations restent sensibles, bien sûr à la qualité des maillages, mais également aux conditions limites. Ainsi, l'absence de solution non-linéaire quantitative

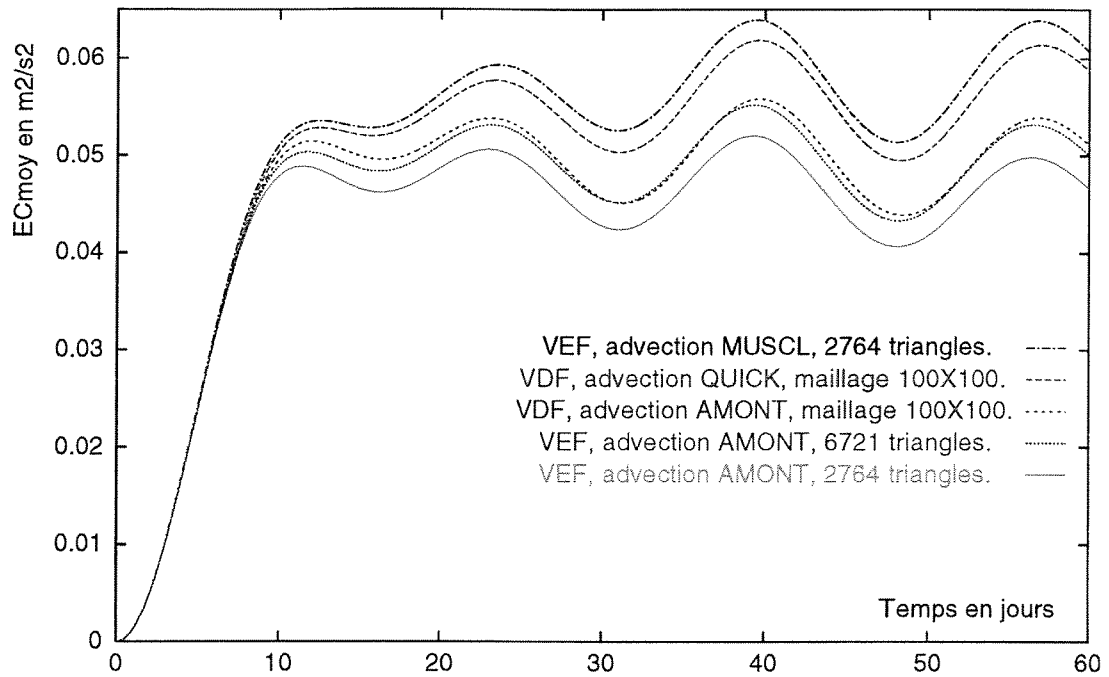


FIG. II.3.7 - Evolution de l'énergie cinétique moyenne, calculs non-linéaires sur problème de Munk, $F_0 = 9.167 \cdot 10^{-7} m \cdot s^{-2}$, $\nu_h = 4320 m^2 \cdot s^{-1}$ ($\gamma_i = 0.03, \gamma_a = 0.06$), (les légendes correspondent aux courbes de bas en haut).

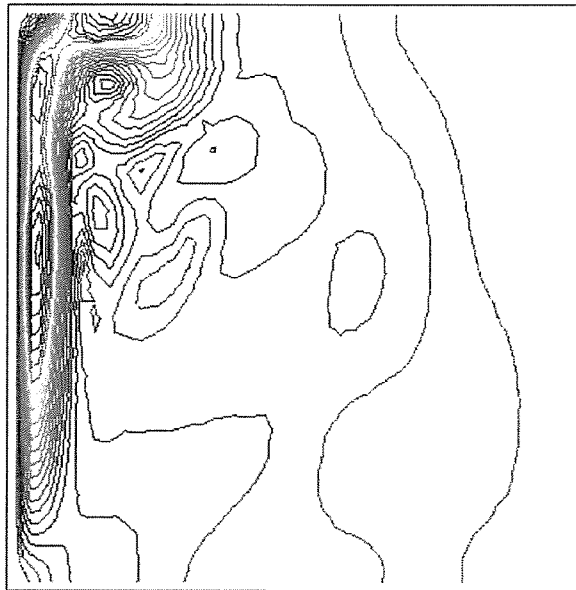


FIG. II.3.8 - Module instantané de la vitesse horizontale à 56 jours, problème de Munk non-linéaire, modèle VEF, schéma d'advection MUSCL, maillage à 2764 triangles, param. idem fig. précédente, $\|\vec{U}\|_{max} = 1.11 ms^{-1}$ (violet en bord ouest), $\Delta_{iso} = 0.047 ms^{-1}$.

bien définie ne nous permet pas d'obtenir des points de comparaison plus précis. Ces considérations nous ont amenés à chercher une solution analytique bidimensionnelle adaptée à notre type de résolution, et conservant cependant le contexte de la simulation océanique (équilibre géostrophique).

3.3 Application sur une solution analytique 2D.

3.3.1 Présentation et mise en œuvre.

On se place dans un domaine borné Ω_{ana} défini sur $[0,1] \times [0,1]$. Nous nous intéressons à la fonction de courant analytique suivante :

$$\Psi_{ana}(x, y) = \frac{1}{2\pi} (1 - \cos 2\pi x) (1 - \cos 2\pi y) \quad (\text{II.3.5})$$

Sur le bord de ce domaine bidimensionnel, cette fonction garantit des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$\Psi_{ana}(0, y) = \Psi_{ana}(1, y) = \Psi_{ana}(x, 0) = \Psi_{ana}(x, 1) = 0 \quad (\text{II.3.6})$$

Par définition de la fonction de courant, on peut en déduire l'écoulement analytique suivant :

$$u_{ana}(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\sin 2\pi y (1 - \cos 2\pi x) \quad (\text{II.3.7})$$

$$v_{ana}(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \sin 2\pi x (1 - \cos 2\pi y) \quad (\text{II.3.8})$$

Dérivant d'une fonction de courant, cette solution analytique bidimensionnelle vérifie logiquement la propriété de divergence nulle. On remarque également, comme pour la fonction de courant, le même genre de conditions limites sur les variables u_{ana} et v_{ana} :

$$u_{ana}(x, 0) = u_{ana}(x, 1) = u_{ana}(0, y) = u_{ana}(1, y) = 0 \quad (\text{II.3.9})$$

$$v_{ana}(x, 0) = v_{ana}(x, 1) = v_{ana}(0, y) = v_{ana}(1, y) = 0 \quad (\text{II.3.10})$$

Nous sommes ainsi en présence d'un écoulement analytique incompressible prenant en compte, sur le domaine $\Omega_{ana} = [0,1] \times [0,1]$, des conditions aux limites de type Dirichlet en vitesse.

Nous reprenons l'expression du système bidimensionnel d'équations de Navier Stokes (cf équa. II.2.31). De ce système, nous considérons maintenant les équations de conservation de la quantité de mouvement en milieu tournant et en présence uniquement de dissipation par frottement de fond. De plus, l'écoulement est à nouveau soumis à un entrainement horizontal constant de type "forçage en surface".

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = -k_{fr} u + (f_0 + \beta_0 y) v + F_0 T_x(x, y) \quad (\text{II.3.11})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = -k_{fr} v - (f_0 + \beta_0 y) u + F_0 T_y(x, y) \quad (\text{II.3.12})$$

En supposant l'écoulement stationnaire, il est possible de déterminer une expression pour le forçage en surface :

$$F_0.T_x(x, y) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + k_{fr}u - (f_0 + \beta_0 y)v + \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{II.3.13})$$

$$F_0.T_y(x, y) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + k_{fr}v + (f_0 + \beta_0 y)u + \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{II.3.14})$$

Pour mettre en œuvre un forçage particulier, il est toutefois nécessaire de choisir une expression pour la pression $P(x, y)$. Par la suite, en fixant les coefficients k_{fr} , F_0 , f_0 et β_0 , nous obtenons une expression analytique pour le forçage de surface.

Dans ces conditions et sur ce domaine $\Omega_{ana} = [0,1] \times [0,1]$, le principe du test consiste à forcer un écoulement initialement au repos de manière permanente par les valeurs analytiques spécifiques de T_x et T_y définissant l'entraînement du fluide. Par ailleurs, les conditions aux limites imposent l'adhérence de la vitesse sur les bords. Au régime stationnaire, la résolution numérique doit donc retrouver partout dans le domaine les solutions analytiques initiales concernant les variables P , u et v .

La convergence de l'écoulement vers cette solution stationnaire nous permet notamment de tester la réponse des modèles vis à vis de la prise en compte des termes de transport non-linéaire. Nous pouvons ainsi quantifier en particulier les capacités du schéma d'advection MUSCL à retrouver cet écoulement analytique.

3.3.2 Choix du forçage.

On constate que les possibilités d'obtention d'un forçage sont multiples. Les choix concernant les coefficients k_{fr} , F_0 , f_0 et β_0 et l'expression de la pression sont relativement arbitraires. Il n'existe à priori aucun critère imposant des valeurs particulières à ces paramètres⁴. Les modifications n'interviennent que dans la prise en compte du forçage permanent. Bien entendu, ces choix peuvent plus ou moins conditionner la valeur du pas de temps et le temps de convergence. Quoiqu'il en soit, le problème reste bien posé et la solution numérique doit converger vers la solution analytique.

Nous avons ainsi choisi de prendre : $k_{fr} = 1 \text{ s}^{-1}$, $F_0 = 1 \text{ m.s}^{-2}$, $f_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ et $\beta_0 = 0$. L'intensité maximale du forçage permanent reste donc définie par rapport aux valeurs maximales des composantes directionnelles T_x et T_y . Pour la pression stationnaire, nous voulons retrouver, par analogie aux écoulements océanographiques, l'expression :

$$P(x, y) = f_0 \cdot \Psi_{ana}(x, y) \quad (\text{II.3.15})$$

Lors de ces simulations, nous imposons ainsi au gradient de pression d'équilibrer à nouveau la force de Coriolis. Pour retrouver la solution analytique initiale, les termes non-linéaires et le frottement de fond devront, pour leur part, équilibrer le forçage permanent.

L'expression II.3.15 de $P(x, y)$ nous permet de simplifier les formulations II.3.13 et II.3.14 du forçage. En effet, en vérifiant l'équilibre géostrophique, la contribution de gradient de pression s'annule avec celle de la force de Coriolis. En tenant compte du choix des coefficients, on obtient :

4. Signalons cependant la nécessité de prendre en compte une dissipation non-nulle, sinon notre système parabolique devient hyperbolique (équations d'Euler) et la solution est dégénérée (plus d'unicité de la solution).

$$T_x(x, y) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \quad (\text{II.3.16})$$

$$T_y(x, y) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + v \quad (\text{II.3.17})$$

Nous remplaçons ensuite les variables u et v par les expressions analytiques II.3.7 et II.3.8 ainsi que celles de leurs dérivées respectives. Les composantes II.3.16 et II.3.17 du vecteur représentant le forçage sur le domaine $\Omega_{ana} = [0,1] \times [0,1]$ s'expriment finalement par :

$$T_x(x, y) = (1 - \cos 2\pi x) [2\pi \sin 2\pi x (1 - \cos 2\pi y) - \sin 2\pi y] \quad (\text{II.3.18})$$

$$T_y(x, y) = (1 - \cos 2\pi y) [2\pi \sin 2\pi y (1 - \cos 2\pi x) + \sin 2\pi x] \quad (\text{II.3.19})$$

La figure II.3.9 représente le champ d'accélération correspondant au forçage analytique permanent défini ci-dessus. Ces vecteurs de composantes T_x et T_y sont interpolés sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$ (grille 30×30), coloriés et proportionnels à la valeur du module.

Par ailleurs, nous présentons sur la figure II.3.10, les caractéristiques de la solution à retrouver. Le champ des vitesses analytiques décrit un tourbillon anticyclonique centré au milieu du domaine et invariant par rotation de $\pi/2$. Les extrémums locaux du module de la vitesse sont atteints aux coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. La fonction de courant, tangente à ces vecteurs, définit le même type de structure. Son maximum est atteint au centre du domaine.

Le tableau ci-dessous résume les valeurs principales caractérisant la solution analytique et le forçage.

	u_{ana} (v_{ana}) en ms^{-1}	Ψ_{ana} ($\Leftrightarrow P$)	T_x (T_y) en ms^{-2}
max.(violet)/min.(bleu)	± 2	$2/\pi, 0$	$(\approx) \pm 16.5$
module max.	2		$(\approx) 18.5$

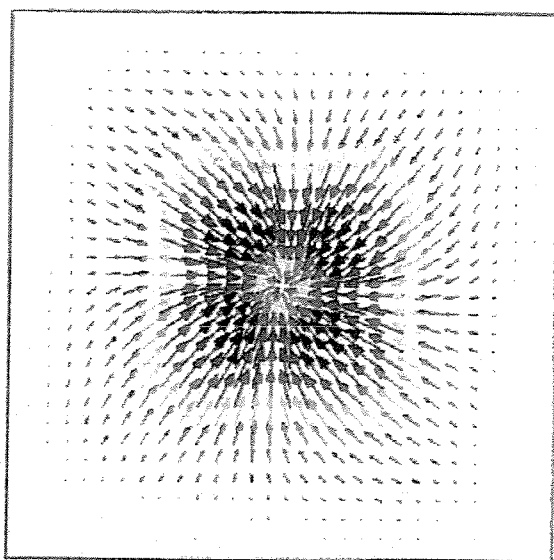


FIG. II.3.9 - Forçage permanent, champ d'accélération analytique.

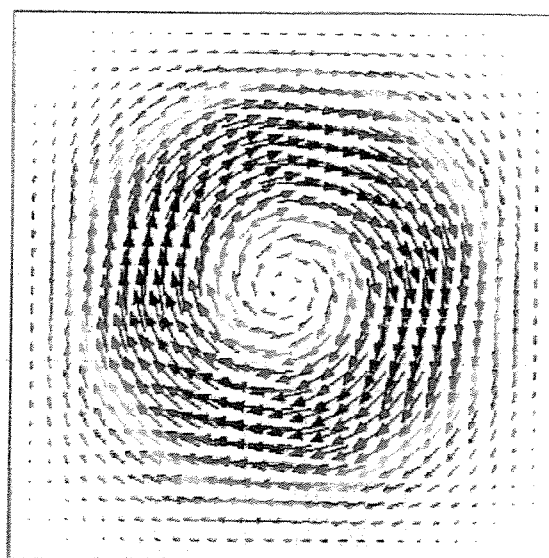


FIG. II.3.10 - Solution analytique, champ des vitesses stationnaires.

3.3.3 Tests numériques et comparaisons.

3.3.3.a Caractérisation des tests.

Pour comparer énergétiquement le calcul et suivre la convergence de la simulation vers la solution analytique, nous avons exprimé la valeur analytique de l'intégrale de l'énergie cinétique moyenne stationnaire Ec_{moy}^{ana} sur le domaine $\Omega_{ana} = [0,1] \times [0,1]$. Pour correspondre à l'évaluation numérique réalisée à chaque itération temporelle dans nos modèles (cf. équ. II.2.37), nous calculons :

$$\begin{aligned} Ec_{moy}^{ana} &= \frac{1}{mes(\Omega_{ana})} \int_{\Omega_{ana}} (u_{ana}^2 + v_{ana}^2) d\Omega_{ana} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u_{ana}^2 dx dy + \int_0^1 \int_0^1 v_{ana}^2 dx dy \end{aligned} \quad (II.3.20)$$

En remplaçant dans II.3.20 les vitesses u_{ana} et v_{ana} par leur expressions analytiques II.3.7 et II.3.8 puis en effectuant l'intégration analytique classique des différentes quantités, on obtient finalement la valeur de l'intégrale de l'énergie cinétique moyenne stationnaire dans le domaine Ω_{ana} :

$$\begin{aligned} Ec_{moy}^{ana} &= \int_0^1 [\sin(2\pi y)]^2 dy \int_0^1 [\cos(2\pi x) - 1]^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 [\sin(2\pi x)]^2 dx \int_0^1 [1 - \cos(2\pi y)]^2 dy \\ &= 1,5 \end{aligned} \quad (II.3.21)$$

Les domaines discrets bidimensionnels sont des partitions régulières de Ω_{ana} .

Le maillage non-structuré est réalisé à partir du découpage non-polarisé d'un maillage structuré carré. En ce qui concerne le modèle VEF, nous avons principalement utilisé un maillage triangulaire de $25 \times 25 \times 2$ éléments. Des tests comparatifs ont également été effectués, avec le modèle VDF, sur deux types de maillage carré (32×32 et 56×56 éléments). Les nombres de degrés de liberté en pression et vitesse⁵ correspondants, ainsi que les caractéristiques surfaciques de ces maillages sur le domaine $\Omega_{ana} = [0,1] \times [0,1]$, sont résumés dans le tableau ci-dessous. Précisons enfin que pour chaque simulation, le pas de temps est fixé à 1.10^{-3} secondes.

maillage 2D	Nb. élém.	Nb. degrés lib. en vitesse	Nb. degrés lib. en pression	Surf. d'un élém.	Surf. d'un vol. de QDM.
VEF $25 \times 25 \times 2$	1250	1825×2	1926	8.10^{-4}	$5,33 \cdot 10^{-4}$
VDF 32×32	1024	992×2	1024	$9,76 \cdot 10^{-4}$	$9,76 \cdot 10^{-4}$
VDF 56×56	3136	3080×2	3136	$3,19 \cdot 10^{-4}$	$3,19 \cdot 10^{-4}$

5. Pour le nombre de degrés de liberté en vitesse, on ne décompte pas les faces de bord puisque la vitesse est imposée par les conditions de Dirichlet.

3.3.3.b Résultats.

La figure II.3.11 présente l'évolution de l'énergie cinétique moyenne dans le domaine. Nous constatons tout d'abord, comme pour le problème de Munk, la diffusion importante introduite par les schémas décentrés amont, aussi bien en structuré qu'en non-structuré. En effet, pour le modèle VEF, le déficit énergétique observable au régime stationnaire par rapport à la valeur analytique s'élève à plus de 40%. On obtient le même type de résultat avec le modèle VDF.

L'utilisation des schémas d'advection d'ordre plus élevé corrige ce phénomène de manière remarquable. Ainsi, le schéma MUSCL développé retrouve un niveau très voisin de celui de la solution puisque, pour le même maillage, la différence est ramenée à 0.66%. Pour les deux maillages structurés, le schéma QUICK du modèle VDF confirme également ses qualités (1.3% pour le maillage 32×32 et 0.3% pour 56×56).

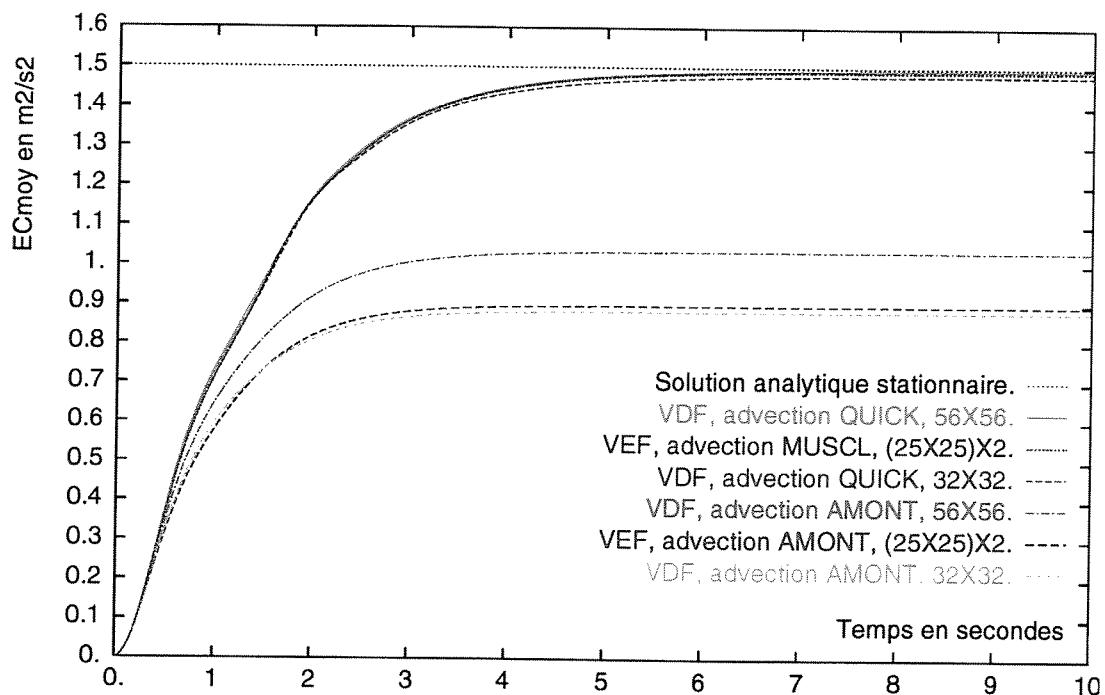


FIG. II.3.11 - Evolution de l'énergie cinétique moyenne, calculs non-linéaires concernant la solution analytique, (les légendes correspondent aux courbes de bas en haut).

Pour décrire un pourcentage d'erreur entre la solution analytique et les résultats des calculs, nous avons évalué, à l'état stationnaire et en chaque point du domaine, les quantités :

$$\frac{|u_{ana}(x, y) - u(x, y)|}{\max(u_{ana}(x, y))} \times 100$$

et

$$\frac{|\Psi_{ana}(x, y) - P(x, y)|}{\max(\Psi_{ana}(x, y))} \times 100$$

Dans chacun des cas, nous retrouvons qualitativement la topologie de la solution analytique, aussi bien pour la pression que pour les vitesses. Cependant, les figures II.3.12.A et B confirment l'effet de diffusion numérique lié au schéma décentré amont et constaté précédemment sur l'évolution de l'énergie cinétique moyenne. Ainsi, pour la vitesse zonale u (fig. II.3.12.A), la sous-estimation des intensités par rapport à la solution analytique atteint 28,5%. Elle se localise au niveau des maxima et correspond à une vitesse de 1,43 au lieu de 2 ms^{-1} . Pour la pression (II.3.12.B), la différence se traduit par un écart important, également concentré au maximum de la solution (centre du domaine). Pour expliquer cette concentration, précisons que la référence en pression est fixée, par analogie à la variation de Ψ_{ana} , de manière à conserver une variation de P entre 0, au bord, et la valeur P_{max} . Ainsi, l'erreur maximale est plutôt mise en évidence au milieu du domaine. Quoiqu'il en soit, la figure II.3.12.B illustre également la difficulté que le code éprouve à retrouver, avec le schéma amont, la pression analytique choisie.

Les figures II.3.12.C et D montrent l'amélioration considérable qu'apporte le schéma MUSCL. En effet, pour le même maillage, les plus importantes différences observables localement sur la vitesse zonale au niveau des maxima sont quasiment réduites d'un facteur 18. Même pour la pression, la solution analytique est maintenant fidèlement reproduite. On constate, par ailleurs, que ces écarts caractérisent beaucoup mieux l'erreur de la solution discrète à l'échelle de la maille.

Signalons que pour la vitesse méridienne, les mêmes types de phénomènes sont observables (rotation de $\pi/2$ des images II.3.12.A ou C).

Figure A.

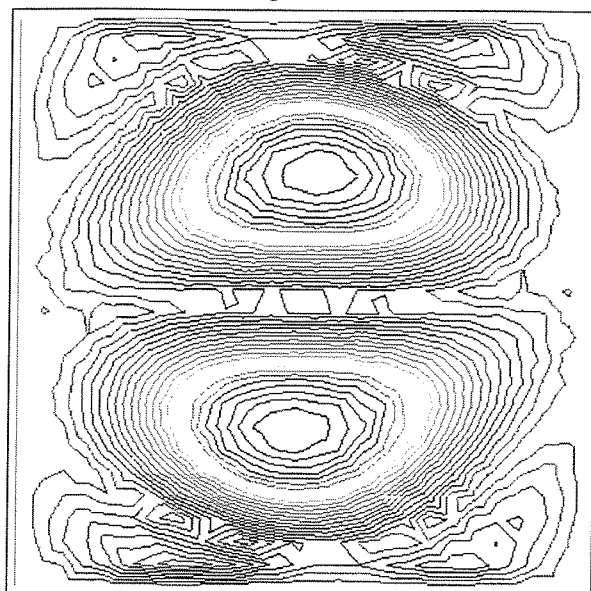


Figure B.

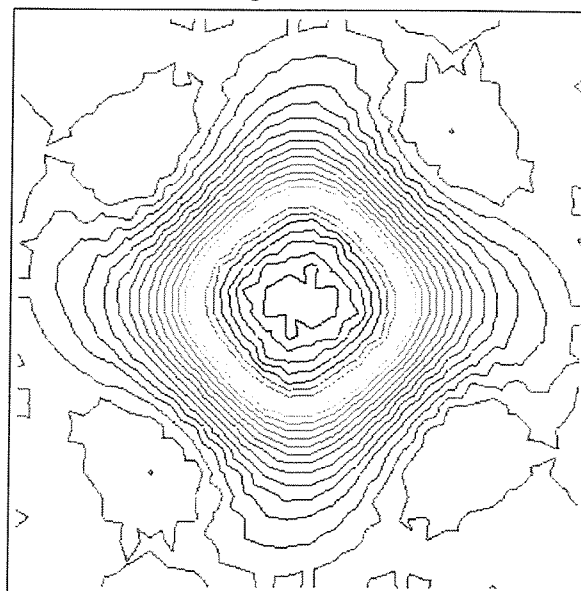


Figure C.

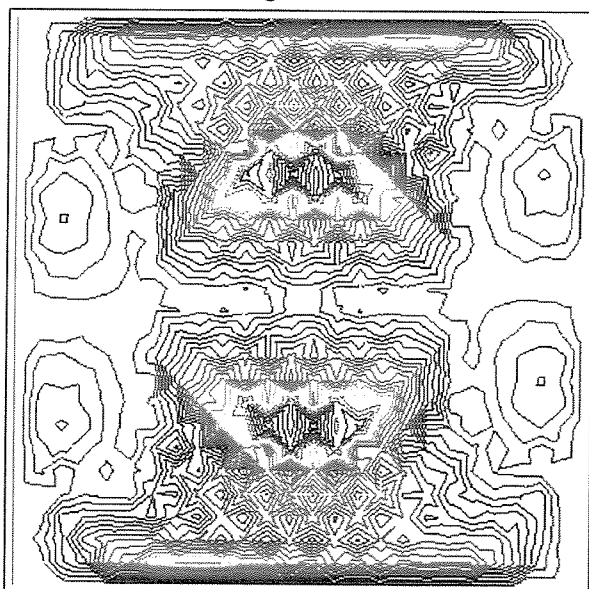
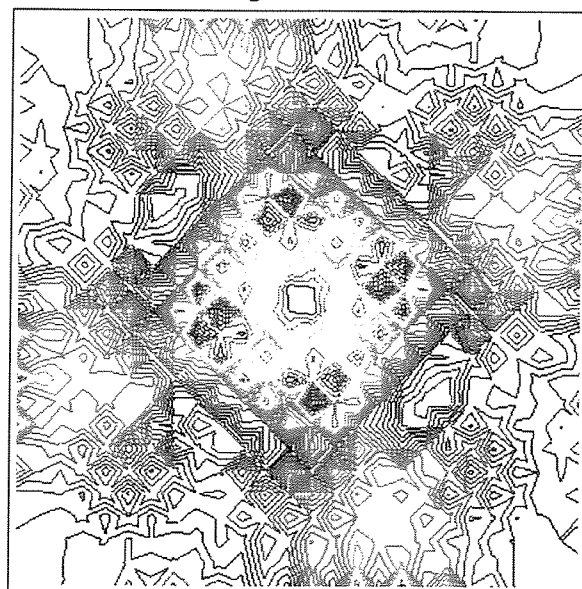


Figure D.



Maillage $25 \times 25 \times 2$ (max. en violet)	$\frac{ (u_{ana} - u) \times 100}{\max(u_{ana})}$	$\frac{ (\Psi_{ana} - P) \times 100}{\max(\Psi_{ana})}$
Schéma AMONT	max. à 28.5 % (fig. A)	max. à 71.1 % (fig. B)
Schéma MUSCL	max. à 1.6 % (fig. C)	max. à 4.2 % (fig. D)

FIG. II.3.12 - Différences entre la solution analytique et la simulation pour les variables $u(x, y)$ (fig. A et C) et $P(x, y)$ (fig. B et D), état stationnaire ($t = 10$ secondes), domaine $\Omega_{ana} = [0, 1] \times [0, 1]$, modèle VEF, maillage 2D à $25 \times 25 \times 2$ triangles.

3.4 Conclusion.

Nous avons donc introduit et testé, dans la formulation VEF résolvant les équations de Navier Stokes, un schéma de transport non-linéaire d'ordre 2.

Cette extension constituait une étape relativement importante. En effet, la simulation de phénomènes turbulents impose une modélisation correcte de ce schéma d'advection, aussi bien pour les milieux géophysiques que pour les fluides industriels.

Vis à vis des quelques écoulements océaniques bidimensionnels classiques que nous avons testés, il semble que ce schéma MUSCL assure une faible diffusion numérique et permette le développement correct des structures non-linéaires. Les résultats du test analytique développé renforcent ce sentiment en permettant notamment de quantifier les améliorations du schéma MUSCL par rapport au schéma décentré amont initial.

Il nous a cependant manqué un peu de temps pour confirmer les potentialités du schéma sur des cas d'écoulements océaniques où les mécanismes de non-linéarité sont prépondérants⁶.

Quoiqu'il en soit, ces premiers tests de validation bidimensionnelle des développements effectués restent très satisfaisants et laissent la porte ouverte à beaucoup d'autres types de modélisations.

6. cas de la double cellule antisymétrique développant un jet libre pénétrant dans le bassin (Le Provost et Verron [36]).

chapitre II.4

Problématique de l'extension 3D.

4.1 Introduction.

Nous avons également abordé l'aspect tridimensionnel. Pour cela, nous avons étendu la prise en compte de la discrétisation linéaire en pression à des éléments de type tétraédrique. Rappelons que c'est cette géométrie discrète tridimensionnelle qui est implémentée dans le code initial¹.

L'objectif est de tester la réponse de ce type d'élément aux contraintes liées à la description d'écoulements océanographiques. Aussi, pour cette étude de faisabilité, le développement s'est orienté vers une représentation discrète P1 en pression dans chaque élément K , plutôt que P1-iso. En effet, l'évaluation de cette extension discrète de type P1(K) et sa mise en œuvre informatique nous ont semblé plus rapides et, dans un premier temps, suffisantes pour observer la réponse linéaire du modèle 3D à la description d'écoulements océaniques.

4.2 Mise en œuvre de l'extension, principes.

On considère un élément tétraédrique K . Les figures II.4.1 et II.4.2 présentent la localisation des variables ainsi que l'aspect tridimensionnel des volumes de contrôle mis en jeu.

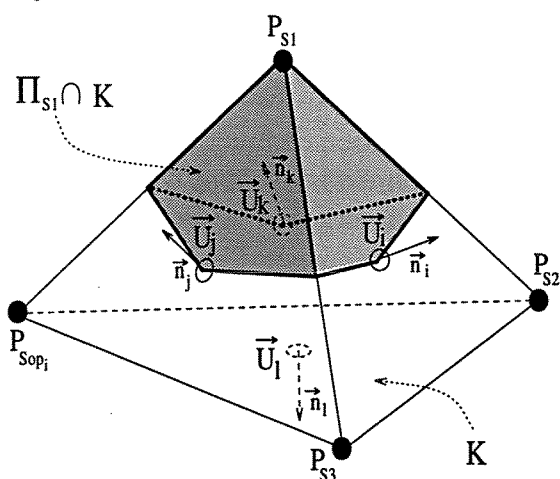


FIG. II.4.1 - Volume de contrôle $\Pi_{S1} \cap K$ concernant la pression discrète P_{S1} .

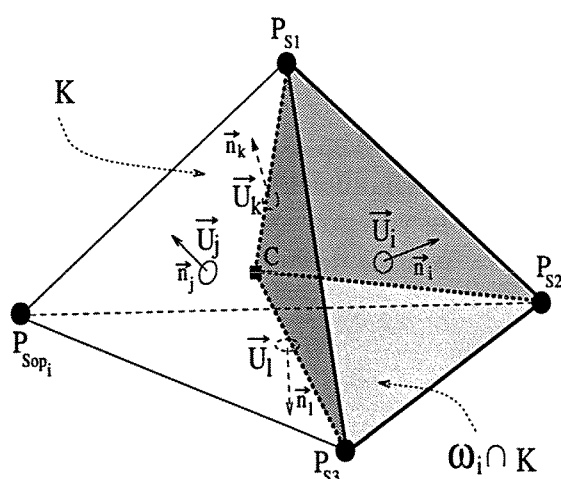


FIG. II.4.2 - Volume de contrôle $\omega_i \cap K$ concernant la vitesse discrète \vec{U}_i .

1. On dispose ainsi de toutes les connectivités et structures de données existantes

Les trois composantes de la vitesse sont localisées sur chaque face de l'élément K et les inconnues en pression demeurent aux sommets. La représentation discrète tridimensionnelle des variables s'effectue toujours dans les espaces éléments finis V_K et Q_K'' définis² aux chapitres II.1 et II.2. La prise en compte d'une pression de type $P1(K)$ nécessite uniquement, comme en dimension deux, la modification des opérateurs *gradient* et *divergence* ainsi que la matrice en pression.

Cependant, la complexité géométrique supérieure mise en jeu nous amène à construire ces opérateurs d'une manière un peu différente. En effet, il devient relativement délicat de calculer explicitement, sur chaque volume de contrôle, les différentes contributions des variables discrètes aux opérateurs concernés.

Aussi, pour chaque élément K , l'évaluation du gradient de pression sur un volume de contrôle de quantité de mouvement ω peut s'exprimer de manière générique par :

$$\int_{\omega} \vec{\nabla} P dV = \int_{\partial\omega} P \cdot \vec{n}_{\partial\omega} ds = \sum_K \left[\int_{\partial\omega \cap K} P \cdot \vec{n}_{\partial\omega \cap K} ds \right] \quad (\text{II.4.1})$$

En utilisant la formule de Green, l'intégrale du gradient de pression dans $\omega \cap K$ permet de transformer l'expression II.4.1 en :

$$\sum_K \int_{\partial\omega \cap K} P \cdot \vec{n}_{\partial\omega \cap K} ds = \sum_K \left[\int_{\omega \cap K} \vec{\nabla} P dV - \int_{\partial K \cap \omega} P \cdot \vec{n}_{\partial K \cap \omega} ds \right] \quad (\text{II.4.2})$$

La pression est $P1(K)$ d'où :

$$\int_{\omega \cap K} \vec{\nabla} P dV = \text{mes}(\omega \cap K) \cdot [\vec{\nabla} P]_K$$

Par ailleurs, pour tout élément K :

$$[\vec{\nabla} P]_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_{\partial K} P \cdot \vec{n}_{\partial K} ds \quad \text{et} \quad \text{mes}(\omega \cap K) = \frac{1}{4} \text{mes}(K)$$

on obtient finalement :

$$\int_{\omega} \vec{\nabla} P dV = \sum_K \left[\frac{1}{4} \int_{\partial K} P \cdot \vec{n}_{\partial K} ds - \int_{\partial K \cap \omega} P \cdot \vec{n}_{\partial K \cap \omega} ds \right] \quad (\text{II.4.3})$$

Cette démarche générale permet de ramener l'évaluation de flux uniquement sur le contour de chaque élément K du domaine où toutes les connectivités sont connues. Le même type de raisonnement est utilisé pour le calcul de la divergence de la vitesse concernant un volume de masse Π quelconque.

$$\int_{\Pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} dV = \sum_K \left[\frac{1}{4} \int_{\partial K} \vec{U} \cdot \vec{n}_{\partial K} ds - \int_{\partial K \cap \Pi} \vec{U} \cdot \vec{n}_{\partial K \cap \Pi} ds \right] \quad (\text{II.4.4})$$

On pose à nouveau n_s , l'indice représentant les inconnues en pression aux sommets des éléments ($1 \leq n_s \leq NS$) et i celui concernant les inconnues en vitesse au centre de chaque face ($1 \leq i \leq 3 \times NFA$). L'indice n_t décrit les éléments ($1 \leq n_t \leq NT$).

2. l'espace \vec{V}_K devient toutefois $\vec{V}_K = \{ \vec{U} = (u, v, w) : u \in V_K, v \in V_K, w \in V_K \}$.

Le calcul explicite des différents coefficients est présenté en annexe C. Cependant, à partir de l'équation II.4.3, le formalisme discret permettant d'évaluer les coefficients de matrice C_{in_s} du gradient de pression s'exprime par :

$$\int_{\omega_i} \vec{\nabla} P dV = \sum_{n_t=1}^{NT} \left[\frac{P_{n_s}}{4} \int_{\partial K_{n_t}} \psi_{n_s} \vec{n}_{\partial K_{n_t}} ds - P_{n_s} \int_{\partial K_{n_t} \cap \omega_i} \psi_{n_s} \vec{n}_{\partial K_{n_t} \cap \omega_i} ds \right] \quad (\text{II.4.5})$$

Ainsi, on en déduit les coefficients C_{in_s} pour chaque face i de chaque élément K_{n_t} suivant la valeur des fonctions de formes linéaires ψ_{n_s} de la pression sur ∂K_{n_t} et $\partial K_{n_t} \cap \omega_i$ et les différentes surfaces normales de K_{n_t} mises en jeu. Les conditions limites aux faces introduisent, comme en 2D, des contributions spécifiques.

De même, pour la matrice $B_{n_s,i}$ représentant la divergence de la vitesse sur les volumes Π_{n_s} , la décomposition discrète de \vec{U} suivant ses fonctions de formes linéaires dans chaque élément K permet également d'écrire :

$$\int_{\Pi_{n_s}} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} dV = \sum_{n_t=1}^{NT} \left[\frac{\vec{U}_i}{4} \int_{\partial K_{n_t}} \phi_i \vec{n}_{\partial K_{n_t}} ds - \vec{U}_i \int_{\partial K_{n_t} \cap \Pi_{n_s}} \phi_i \vec{n}_{\partial K_{n_t} \cap \Pi_{n_s}} ds \right] \quad (\text{II.4.6})$$

L'assemblage de la matrice en pression E^0 est réalisé en début de programme par le produit matriciel $BM^{-1}C$. Cette matrice reste, comme en 2D, creuse et non symétrique. Elle est également inversée par l'algorithme itératif GMRES avec préconditionnement LU.

4.3 Tests de validation, problèmes rencontrés.

Comme pour le modèle 2D, nous avons validé initialement ces développements sur un certain nombre de cas tests relativement simples. A cet égard, l'essai concernant l'écoulement uniforme d'axe *est-ouest* dans le domaine en f -plan et sans topographie s'est avéré concluant. La discrétisation $P1(K)$ de la pression permet, dans ce cas spécifique, une prise en compte analytique et quasi-immédiate de l'équilibre géostrophique. Le gradient horizontal de pression équilibre exactement l'action de la force de Coriolis sur l'écoulement uniforme. Aussi, comme pour les tests bidimensionnels (cf. fig. II.2.6), la pression décrit bien les lignes de courant. Par ailleurs, on retrouve correctement la barotropie de l'écoulement et les vitesses verticales restent quasi-nulles.

Cependant, dans la plupart des simulations océaniques moins triviales, la discrétisation $P1(K)$ ne permet pas au gradient horizontal de pression d'équilibrer analytiquement les perturbations dynamiques à divergence non-nulle engendrées par la force de Coriolis (prise en compte de l'effet β -plan) ou par un quelconque obstacle (influence d'une topographie en f -plan). Dans ces conditions, le gradient horizontal de pression introduit ainsi une erreur discrète suivant l'horizontal.

Ce phénomène reste inhérent à tout type de représentation discrète, structurée ou non-structurée et doit normalement diminuer avec le raffinement du maillage. Toutefois, avec notre élément tétraédrique, l'absence de direction privilégiée impose un couplage directionnel des erreurs numériques, propageant, par le gradient de pression, une petite perturbation horizontale suivant la verticale. Dans le cadre d'une modélisation isotrope, ce processus n'est pas forcément très perturbant. Par contre, les contraintes géométriques mises en œuvre dans les simulations océaniques (liées au facteur d'échelle important entre

les directions verticales et horizontales) amplifient considérablement cette erreur discrète.

Sur tous les cas tests que nous avons pu entreprendre, les conséquences de cette sensibilité verticale à l'erreur discrète horizontale restent très pénalisantes. A titre d'exemple caractéristique, évoquons le cas du problème de Stommel linéaire. Afin de retrouver, comme en 2D, l'effet du renforcement du courant et la création barotrope de la cellule anticyclonique, nous avons appliqué les termes sources liés au forçage horizontal et à la dissipation par perte de charge, à tout un domaine rectangulaire tridimensionnel de $2000 \times 2000 \times 5$ km, discrétisé par 16000 tétraèdres (issu d'un découpage structuré régulier de $40 \times 40 \times 2$ éléments). On observe, dès les premiers pas de temps, la création de vitesses verticales générées par le gradient vertical de pression, traduisant effectivement la propagation de l'erreur discrète horizontale. Comme il n'existe aucune contrainte suivant la direction verticale³, cette erreur s'accumule temporellement et finit rapidement par perturber complètement la dynamique horizontale. En effet, les vitesses verticales ainsi créées deviennent aussi fortes que les vitesses horizontales. Le fait de rajouter une dissipation importante suivant la direction verticale permet de limiter l'accumulation temporelle de l'erreur, mais la dynamique horizontale reste perturbée. De plus, en contraignant la vitesse verticale à rester nulle à chaque pas de temps, c'est à dire en forçant artificiellement le découplage directionnel, on retrouve un écoulement horizontal conforme à la solution de ce problème, sans perte de la propriété de barotropie.

Par ailleurs, comme pour le modèle VDF, l'écrasement des échelles provoque une grande disparité dans les coefficients de la matrice de pression. Ainsi, une convergence insuffisante peut également favoriser l'introduction d'erreurs discrètes. Pour limiter ce problème, il est nécessaire d'utiliser une matrice de préconditionnement LU relativement pleine⁴, garantissant une résolution itérative correcte. Ceci s'effectue cependant au détriment de la place mémoire.

4.4 Conclusion, alternative au tétraèdre.

Nous avons donc constaté les grandes difficultés qu'éprouve l'élément tétraédrique à représenter des écoulements océaniques tridimensionnels en géométrie écrasée (dans la limite du faible nombre d'éléments utilisés).

Sur le même type de test tridimensionnel évoqué précédemment, le modèle VDF conserve une description barotrope de l'écoulement conforme à la solution. Pour la modélisation d'écoulements océaniques d'échelles fortement anisotropes, il semble donc que la discrétisation structurée, par le découplage directionnel qu'elle introduit, ne propage pas les erreurs discrètes du gradient de pression.

Ainsi, la mise en œuvre d'un élément tridimensionnel mixte de type *prismatique* devrait éviter ces problèmes de propagation des erreurs discrètes suivant la verticale par couplage directionnel, tout en conservant l'intérêt du maillage non-structuré suivant l'horizontale. La méthode VEF, pourrait s'appliquer suivant le plan horizontal, de la même manière qu'en dimension deux. On rajoute uniquement une épaisseur verticale aux différents volumes de contrôle, les fonctions de forme représentant les inconnues discrètes restant

3. Suivant la verticale, l'équation considérée est uniquement $\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}$.

4. On se rapproche ainsi d'une résolution directe.

linéaires dans l'élément. Quant à l'estimation des gradients verticaux, elle s'effectuerait, comme pour le modèle VDF, par application d'un schéma classique de type différence finie.

Pour ce type d'élément mixte, la réévaluation des différents opérateurs et l'influence des diverses conditions aux limites restent encore à formaliser plus précisément. A ce sujet, les contributions de chaque modèle (VDF et VEF) sont, en grande partie, déjà connues. Cependant, au niveau de la mise en œuvre numérique, et vis à vis des codes que nous avons utilisés, la partie la plus importante du développement semble, à priori, constituée par la prise en compte des connectivités issues de ce nouveau type de découpage discret du domaine.

En annexe D, nous présentons un type d'élément prismatique envisageable sur lequel de futures investigations pourraient être entreprises.

Conclusion générale.

Cette étude constitue une première étape d'investigation relative à la simulation numérique de la dynamique de l'océan sans hypothèse limitative sur les échelles spatiales de la modélisation. A cet effet, nous avons développé et expérimenté, dans ce contexte très spécifique, des techniques numériques de type volumes finis classiquement utilisées en milieu non-tournant et permettant la résolution des équations de Navier Stokes incompressibles, éventuellement inhomogènes.

Outre la particularité affichée par le solveur¹, nous avons appliqué ces techniques d'intégration sur deux méthodes de représentation discrète des variables, associées à des maillages structurés (VDF) ou non-structurés (VEF).

Concernant le modèle VDF, les adaptations effectuées sur le logiciel de calcul thermo-hydraulique tridimensionnel TRIO-VF ont permis de retrouver les principaux phénomènes physiques liés à l'écoulement uniforme passant au dessus d'une topographie sous-marine isolée à moyenne-échelle (création et évolution instationnaire des tourbillons topographiques, obtention d'états stationnaires, régime d'ondes topographiques, influence d'une stratification thermique). Les comparaisons réalisées notamment avec d'autres techniques de simulation numérique restent en bon accord. Les principales sensibilités observées semblent représentatives de la discrétisation grossière de la topographie.

Pour le modèle VEF, la prise en compte des spécificités de la dynamique océanique a nécessité des développements de base beaucoup plus conséquents.

En dimension deux, les nouveaux éléments implémentés ont démontré leur capacité à décrire correctement certains mécanismes fondamentaux intervenant dans la dynamique horizontale de l'océan à grande échelle (renforcement du courant en bord *ouest*, propagation et dissipation des ondes barotropes de Rossby) et induits par des forçages caractéristiques de type "vent de surface" (problème de Stommel ou de Munk). Par ailleurs, l'influence des effets non-linéaires a permis de montrer la supériorité de la représentation discrète P1-iso de la pression par rapport au schéma P1². Enfin, le développement d'un schéma de type MUSCL, visant à augmenter l'ordre du schéma d'advection initial, a apporté des améliorations quantitatives très appréciables et indispensables à la modélisation d'écoulements océaniques. La validation bidimensionnelle concernant une solution analytique originale illustre notamment ce comportement.

1. Rappelons que ce solveur accomplit la résolution simultanée des mouvements fluides par l'intermédiaire d'un système linéaire concernant la pression et garantissant l'incompressibilité de l'écoulement.

2. Pour le schéma P1, la vérification de l'incompressibilité de l'écoulement sur les volumes de masse concernant la pression n'est pas effective sur les volumes de contrôle de QDM. Ainsi, l'écriture sous forme de bilan des termes non-linéaires n'est plus correcte.

Toutefois, si la convergence numérique de ces nouveaux éléments non-structurés semble expérimentalement effective, une analyse plus théorique reste à entreprendre pour confirmer cette tendance.

Les limitations actuelles restent liées en grande partie aux contraintes géométriques tridimensionnelles impliquées dans les différents cas tests abordés. Avec un facteur d'échelle important, le mauvais conditionnement de la matrice du système linéaire favorise davantage l'utilisation d'une méthode d'inversion "directe", beaucoup plus rapide qu'une méthode itérative standard, mais coûteuse en occupation mémoire et, de fait, pénalisante pour le raffinement éventuel. Par ailleurs, au niveau de la mise en œuvre tridimensionnelle du modèle VEF sur des éléments tétraédriques, les effets cumulés de l'équilibrage horizontal de la force de Coriolis, du couplage directionnel des erreurs discrètes et de la géométrie fortement écrasée introduisent une trop grande sensibilité du gradient vertical de pression et provoquent notamment une perte de la barotropie de l'écoulement.

Ces considérations conduisent à déterminer les améliorations envisageables.

En ce qui concerne le modèle VEF, le développement d'un élément tétraédrique avec représentation discrète d'ordre plus élevé (fonctions de forme paraboliques) doit permettre théoriquement, à maillage équivalent, une diminution de l'erreur discrète horizontale. Cependant, la sensibilité au couplage directionnel existera toujours et l'implémentation informatique d'un tel élément demande un travail important (modification de tous les opérateurs). Aussi, l'évocation du développement d'un élément mixte de type prismatique semble constituer une alternative intéressante à l'utilisation des potentialités du modèle VEF en matière de description fine des contours géométriques et de possibilité de raffinages locaux. Ces intérêts se retrouvent néanmoins réduits aux mouvements horizontaux mais le couplage directionnel perturbant est ainsi éliminé.

Pour la résolution matricielle des systèmes tridimensionnels où les coefficients restent très hétérogènes, la description plus fine de phénomènes de grande ou moyenne-échelle doit passer par la recherche de procédures efficaces d'inversion³. A cet égard, associées à la parallélisation par décomposition de domaine des codes VEF et VDF, des études comparatives sont actuellement en cours au sein du laboratoire pour tester les performances des principaux solveurs de systèmes linéaires existants et leur efficacité dans un environnement de calcul parallèle. Ainsi, pour un certain temps de simulation résultant d'un calcul séquentiel sur un cas test donné, des maillages beaucoup plus fins pourront être pris en compte afin d'obtenir une description plus précise du phénomène physique considéré. De plus, les perspectives de raffinement des discrétisations offertes par les futurs calculs massivement parallèles permettront également une diminution potentielle du facteur d'échelle et, par voie de conséquence, un meilleur conditionnement de la matrice.

Enfin, soulignons que les tests réalisés ont essentiellement concerné des domaines de grande ou moyenne échelle pour lesquels l'approximation hydrostatique reste encore va-

3. Le choix d'une technique d'inversion itérative avec préconditionnement ou directe doit être évalué pour chaque cas. En effet, si les méthodes itératives limitent l'encombrement mémoire, encore faut-il qu'elles convergent avec un temps de calcul acceptable. De même, les méthodes directes permettent en général d'obtenir plus facilement des résultats mais elles restent chères en mémoire et parfois sensibles aux erreurs de troncatures. Quoiqu'il en soit, c'est toujours la qualité de la solution physique qui doit motiver le compromis entre le temps de calcul de la simulation et l'occupation mémoire mise en jeu.

lable. Nous avons d'ailleurs pu vérifier que l'aspect non-hydrostatique de notre résolution n'apporte pas, avec la discrétisation mise en œuvre, de contributions significatives vis à vis des codes classiques hydrostatiques (cas de la topographie isolée). De plus, compte tenu des limitations actuelles évoquées, notre technique est probablement, pour l'instant, mieux adaptée à des configurations géométriques plus isotropes caractérisant des écoulements océaniques de petites échelles. Dans ces conditions, les phénomènes hydrostatiques peuvent devenir non négligeables, le conditionnement de la matrice du système linéaire pose, à priori, beaucoup moins de problème et la possibilité d'utiliser des techniques de modélisation fine de la turbulence paraît même envisageable. (techniques de SGE [22] ou $k-\epsilon$ [26]).

Concernant ce type de représentation, on peut citer les travaux réalisés par Akitomo, Imasato et Awaji [1] qui, sur un bassin bidimensionnel vertical de 20 kilomètres de long et 50 mètres de profondeur discrétisé avec un facteur d'échelle proche de l'unité (30 et 10 mètres), ont simulé la propagation d'un front de traceur en présence d'une condition de refroidissement à la surface, sur une période de 90 jours. Ils montrent que la prise en compte des effets d'accélération et de convection verticale permettent d'obtenir un front beaucoup plus raide qu'avec un modèle hydrostatique utilisant uniquement une technique d'ajustement convectif. Par ailleurs, leurs résultats s'accordent correctement avec les observations faites dans le chenal de Kii (Japon). De même, les études effectuées par Jones et Marshall [32], avec un modèle non-hydrostatique en milieu tournant et stratifié, ont contribué à la compréhension des mécanismes tridimensionnels intervenant dans la convection verticale profonde. Ces calculs ont été entrepris dans un bassin de $32 \times 32 \times 2$ kilomètres, avec une grille structurée régulière de $132 \times 132 \times 19$, la convection étant aussi induite par un refroidissement de surface.

Aussi, dans le même ordre d'idée, la modélisation de phénomènes spécifiques de petites échelles peut également reposer sur les modèles volumes finis (VDF ou VEF-prismatique) et apporter une contribution complémentaire à l'étude de la dynamique de l'océan et de ses mécanismes. La future mise en œuvre du calcul parallèle et de ses potentialités autorisera l'extension de ces simulations fines à des domaines de plus en plus importants.

Annexe A

Méthodologies générales.

1.1 Principe “volume fini” : formule de Green.

La base de la formulation d'intégration par la méthode des volumes finis repose sur la formulation sous forme “conservative” d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles. Dans le cas qui nous intéresse, ce système est formé de l'équation de conservation de la masse, de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de conservation de l'énergie. Cependant, l'écriture du système conservatif 0.26, 0.27, 0.28 se base sur la mise en œuvre d'une formule générale dite “**formule de Green**” regroupant plusieurs applications possibles.

Nous désirons ici rappeler l'origine de ces différentes applications dont les dénominations multiples font bien souvent référence à l'utilisation de cette unique formule de Green.

Soit Ω_c un domaine borné, on suppose les fonctions f et v suffisamment régulières (f et v appartiennent à $H_1(\Omega_c) \Leftrightarrow$ les dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues).

La formule de Green repose sur une intégration par partie et s'énonce, $\forall f$ et v :

$$\int_{\Omega_c} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} v \right) dV = \int_{\Omega_c} \left(-\frac{\partial v}{\partial x_i} f \right) dV + \int_{\partial\Omega_c} f v n_i ds \quad (\text{A.1})$$

avec x_i la i^{e} coordonnée et n_i la composante i de la normale unitaire orientée extérieure à $\partial\Omega_c$

Application :

- Si $v = 1$ et f est vectorielle, on obtient le théorème de la divergence, appelé également théorème de Gauss :

$$\int_{\Omega_c} \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dV = \int_{\partial\Omega_c} \sum_i (f_i n_i) ds \quad (\text{A.2})$$

- Si $v = 1$ et f est scalaire, on obtient l'intégration utilisée, par exemple, pour le gradient de pression :

$$\int_{\Omega_c} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dV = \int_{\partial\Omega_c} f n_i ds \quad (\text{A.3})$$

1.2 Solveur Navier Stokes : schéma de projection matricielle.

On se donne :

- U : le vecteur des composantes discrètes de la vitesse (2 ou 3 dimensions) avec la condition initiale $U(t = 0) = U_0$ telle que le champ U_0 soit à divergence nulle.
- P : le vecteur du champ discret des inconnues de pression.
- A : la matrice de diffusion.
- $L'(U)$: la matrice d'advection.
- C : la matrice du gradient.
- B : la matrice de divergence.
- M : la matrice de masse diagonale (approchée en non-structuré, $M_{ij} \approx \text{mes}(\omega_i)\delta_{ij} \Leftrightarrow$ "matrice lumped" et ω_i est le volume de QDM affecté à la face i).
- SM : le vecteur représentant le second membre de l'équation de QDM (intégration des forces de volumes).

L'équation de Navier Stokes s'écrit sous la forme du système algébro-différentiel :

$$M \frac{\partial U}{\partial t} + AU + L(U)U + CP = SM \quad (\text{A.4})$$

$$BU = 0 \quad (\text{A.5})$$

En multipliant l'équation (A.4) à gauche par BM^{-1} et en remarquant que $B \frac{\partial U}{\partial t} = 0$, on obtient :

$$BM^{-1}(AU + L(U)U + CP) = BM^{-1}SM$$

Ainsi, en notant :

$$\begin{aligned} E^0 &= BM^{-1}C \\ N(U) &= M^{-1}(SM - AU - L(U)U) \quad \text{et} \\ \mathcal{P} &= I - M^{-1}CE^{0-1}B \end{aligned}$$

on obtient, si E^0 est inversible, une équation différentielle ordinaire sur U et une équation algébrique reliant P à U :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{P}N(U) \quad (\text{A.6})$$

$$P = E^{0-1}BN(U) \quad (\text{A.7})$$

\mathcal{P} est l'opérateur de projection sur le noyau de (B) parallèlement à l'image de $(M^{-1}C)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \circ \mathcal{P} &= I_d - 2M^{-1}CE^{0-1}B + M^{-1}CE^{0-1}BM^{-1}CE^{0-1}B \\ &= I_d - 2M^{-1}CE^{0-1}B + M^{-1}CE^{0-1}B = \mathcal{P} \\ \text{et } \mathcal{P}(M^{-1}CP) &= M^{-1}CP - M^{-1}CE^{0-1}BM^{-1}CP \\ &= M^{-1}CP - M^{-1}CE^{0-1}E^0P = 0 \end{aligned}$$

En multipliant (A.6) à gauche par M et en utilisant (A.7), on obtient bien (A.4). D'autre part, d'après les propriétés de \mathcal{P} et la condition $BU_0 = 0$, (A.6) implique (A.5).

Il reste donc à choisir un schéma en temps stable et consistant. Le schéma de projection reste indépendant du choix du schéma d'avance temporelle.

Annexe B

Schémas de transport Quick, maillage structuré.

L'évaluation du flux convectif par le schéma Quick s'effectue à partir du principe suivant : pour le calcul du flux $u_e \varphi_e$ à estimer sur la face *est* du volume de contrôle A_0 ci-dessous, on utilise pour φ_e une interpolation quadratique sur 3 points (2 en amont et 1 à l'aval).

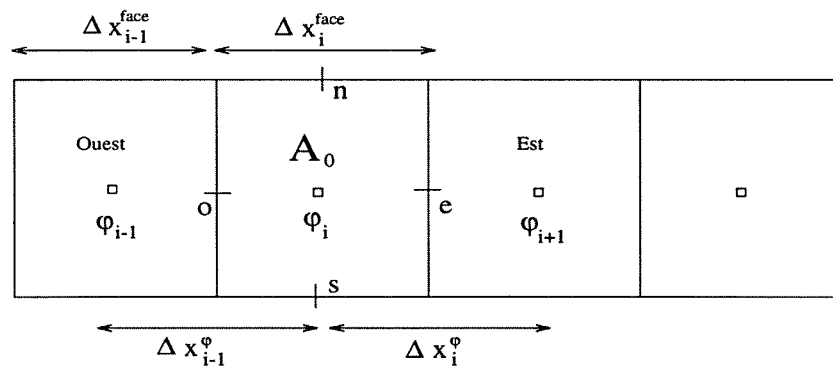


FIG. B.1 - Position des variables pour interpolation de φ_e à la face *est*.

En supposant la vitesse transportante u_e connue, l'interpolation de la propriété transportée φ_e combine une interpolation linéaire centrée des points voisins de la face et un terme de courbure défini sur les voisins amont et aval.

$$\begin{aligned} \varphi_e &= \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} + \varphi_i) - \frac{1}{8} \Delta x_i^2 CURV \\ \text{avec } CURV &= \frac{1}{\Delta x_{ip-1}^{face}} \left(\frac{(\varphi_{ip} - \varphi_{ip-1})}{\Delta x_{ip}^{\varphi}} - \frac{(\varphi_{ip-1} - \varphi_{ip-2})}{\Delta x_{ip-1}^{\varphi}} \right) \\ \text{et } ip &= \begin{cases} i+1, & \text{si } u_e \geq 0; \\ i+2, & \text{si } u_e < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (B.1)$$

On remarque que cette évaluation équivaut à l'utilisation du schéma centré, instable, corrigé par un terme jouant un rôle diffusif, donc stabilisant.

Cet algorithme à la base du schéma Quick peut faire apparaître des oscillations numériques (Leonard [34]). Ces problèmes d'undershoots et d'overshoots se caractérisant par la création de maximums ou de minimums locaux non physiques, sont traités en utilisant

des schémas différents en fonction d'une variable normalisée $\tilde{\varphi}_e$. En supposant $u_e \geq 0$, $\tilde{\varphi}_e$ s'écrit :

$$\tilde{\varphi}_e = \frac{\varphi_e - \varphi_{i-1}}{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}} \quad (\text{B.2})$$

Pour débarasser l'interpolation de ces instabilités numériques, la caractéristique du schéma numérique convectif ne doit pas sortir d'une certaine zone d'admissibilité. Ainsi, pour l'hydraulique, le schéma Quick Sharp met en œuvre soit le schéma Quick, soit l'interpolation exponentielle EU, ces deux caractéristiques étant raccordées par des segments de droite. La figure suivante propose le type de schéma utilisé suivant le domaine de calcul dans le plan $(\tilde{\varphi}_e, \tilde{\varphi}_i)$, puisque $\tilde{\varphi}_e$ peut s'exprimer uniquement en fonction de $\tilde{\varphi}_i$.

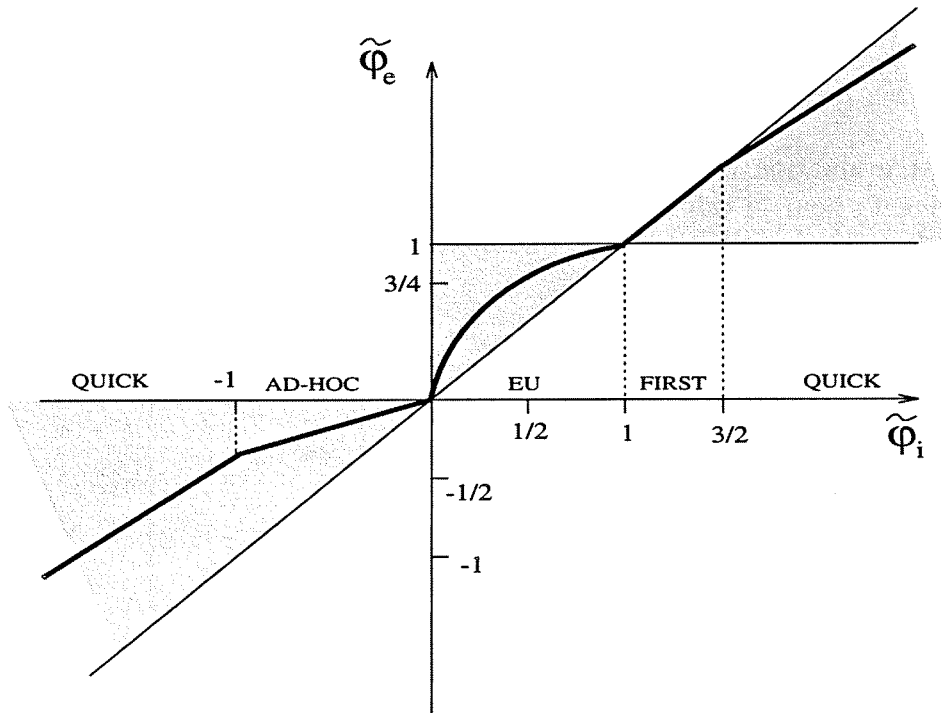


FIG. B.2 - Caractéristiques du schéma Quick Sharp et domaine d'admissibilité .

Léonard ([34]) montre que ce choix tend à maintenir la consistance et la stabilité du schéma dans la majeure partie des cas. En définitive, le filtre Sharp permet d'interpoler la valeur φ_e en utilisant d'un facteur correctif CF :

$$\varphi_e = \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} + \varphi_i) - CF \Delta x_i^2 CURV$$

où CF est fonction de $\tilde{\varphi}_e$ et des différents schémas mis en œuvre (voir [34]).

Le transport des variables scalaires, est assuré par un schéma Quick Fram. Le filtre Fram permet, en pratique, l'utilisation du schéma Upwind plutôt que celle du Quick, en cas de détection d'extrêmes locaux (pondération entre les valeurs interpolées par les deux schémas suivant la valeur du filtre caractérisant les variations locales extrêmes de la variable). Ceci revient à introduire une dissipation locale non linéaire dans les régions où de forts gradients peuvent produire des oscillations non physiques. La précision du schéma Quick est conservée dans les zones d'écoulements "lisses".

Annexe C

Extension 3D VEF sur éléments tétraédriques.

On considère le modèle de discrétisation $P1(K)$ non-conforme en vitesse et $P1(K)$ en pression. Par convention, toutes les surfaces normales mises en jeu sont orientées extérieures à l'élément K considéré. Les notations restent celles définies lors du chapitre II.4 (n_s décrit les pressions aux sommets, i les vitesses aux faces).

3.1 Opérateur *gradient*.

On repart de la formulation discrète II.4.5 définie au chapitre II.4 et permettant de calculer les coefficients de la matrice C_{in_s} :

$$\int_{\omega_i} \vec{\nabla} P dV = \sum_{n_t=1}^{NT} \left[\frac{P_{n_s}}{4} \int_{\partial K_{n_t}} \psi_{n_s} \vec{n}_{\partial K_{n_t}} ds - P_{n_s} \int_{\partial K_{n_t} \cap \omega_i} \psi_{n_s} \vec{n}_{(\partial K_{n_t} \cap \omega_i)} ds \right]$$

(expression 1) (expression 2)

Pour une face i sans condition limite, appartenant à l'élément K (cf. fig. C.1) :

Expression 1 : contribution de la pression en S_1 sur i , dans un élément K ,

$$\int_{\partial K} \psi_{S_1} \vec{n}_{\partial K} ds = -\frac{1}{3} \vec{S}_{op1}$$

Expression 2 : la contribution s'annule lors du traitement de l'élément voisin de K de face i commune (même valeur ψ en i mais \vec{S} en i de signe opposée) ou parce que ψ est nulle en i (pour le sommet opposé à i).

Pour les faces sans condition d'un élément K , on obtient de manière générale :

$$[C_{in_s}]_K = -\frac{1}{12} \vec{S}_{opn_s}$$

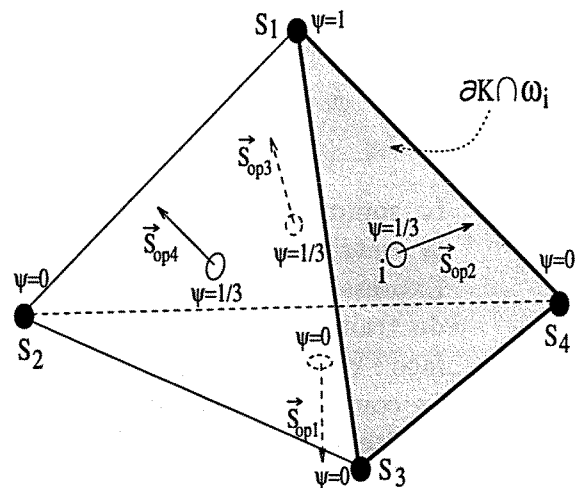


FIG. C.1 -

Pour une face i avec condition limite de type dirichlet : si la vitesse est définie, on ne prend pas en compte d'équation de quantité de mouvement en i , d'où, pour chaque sommet n_s de l'élément K , $C_{in_s} = 0$.

Pour une face i avec condition de symétrie : la composante normale du gradient est nulle.

- Pour le sommet S_2 opposé à la face i , la construction symétrique virtuelle de l'élément voisin impose la nullité de l'expression 1. Par ailleurs, la fonction de forme ψ_{S_2} est nulle sur $\partial K \cap \omega_i$. On obtient donc globalement : $C_{iS_2} = 0$.
- Pour un sommet adjacent à la face i (par exemple S_1 cf. fig. C.1), l'expression 2 est toujours nulle par construction symétrique. Issues de l'expression 1, les contributions restantes s'expriment par projection des surfaces normales concernées sur la face i . Par exemple, pour S_1 , le coefficient C_{iS_1} s'écrit :

$$C_{iS_1} = \frac{1}{12} (\vec{S}_{op3}/i + \vec{S}_{op4}/i) = -\frac{1}{12} \vec{S}_{op1}/i$$

3.2 Opérateur *divergence*.

Pour le calcul de la matrice divergence $B_{n_s i}$, on doit évaluer :

$$\int_{\Pi_{n_s}} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} dV = \sum_{n_t=1}^{NT} \left[\frac{\vec{U}_i}{4} \int_{\partial K_{n_t}} \phi_i \cdot \vec{n}_{\partial K_{n_t}} ds - \vec{U}_i \int_{\partial K_{n_t} \cap \Pi_{n_s}} \phi_i \cdot \vec{n}_{(\partial K_{n_t} \cap \Pi_{n_s})} ds \right]$$

(expression 1') (expression 2')

Pour une face i sans condition limite, appartenant à l'élément K :

on considère la contribution de la vitesse en i sur les différents volumes de contrôle Π_{n_s} concernant les sommets de l'élément K .

A- Pour les sommets adjacents à la face i :

pour S_1 dans K (cf. fig. C.2).

Expression 2' : sur $\partial K \cap \Pi_{S_1}$, on a :

$$\int_{\partial K \cap \Pi_{S_1}} \phi_i \cdot \vec{n}_{(\partial K \cap \Pi_{S_1})} ds = \frac{5}{36} (\vec{S}_{op4} + \vec{S}_{op3}) + \frac{1}{3} \vec{S}_{op2}$$

La sommation sur les K permet d'éliminer la contribution en \vec{S}_{op2} .

Expression 1' : la contribution s'annule lors du traitement de l'élément voisin de K de face i commune.

Le coefficient $B_{S_1 i}$ dans K (contribution de la vitesse i au sommet S_1 adjacent) s'écrit :

$$[B_{S_1 i}]_K = -\frac{5}{36} (\vec{S}_{op4} + \vec{S}_{op3})$$

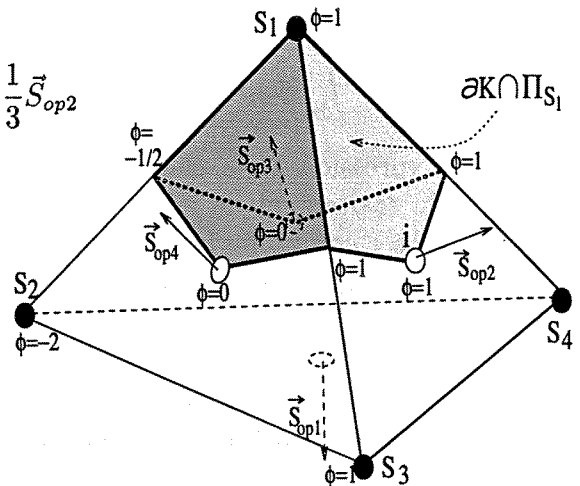


FIG. C.2 -

B- Pour le sommet S_2 opposé à la face i :
(cf. fig. C.3).

Expression 2' : sur $\partial K_{n_t} \cap \Pi_{S_2}$, on a :

$$\sum_{n_t=1}^{NT} \left[\int_{\partial K_{n_t} \cap \Pi_{S_2}} \phi_i \vec{n}_{\partial K_{n_t} \cap \Pi_{S_2}} ds \right] = \frac{5}{18} \vec{S}_{op2}$$

Expression 1' : Pour le sommet opposé S_2 , la contribution n'est plus annulée par la sommation :

$$\sum_{n_t=1}^{NT} \left[\int_{\partial K_{n_t}} \phi_i \vec{n}_{\partial K_{n_t}} ds \right] = \vec{S}_{op2}$$

D'où, le coefficient $B_{S_2 i}$ s'écrit :

$$B_{S_2 i} = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{18} \right) \vec{S}_{op2} = -\frac{1}{36} \vec{S}_{op2}$$

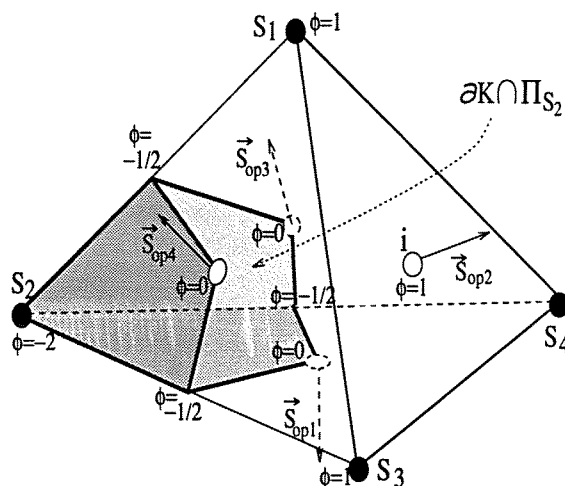


FIG. C.3 -

Pour une face i avec condition de symétrie :

- Pour le sommet S_2 opposé à la face i , la construction symétrique virtuelle de l'élément voisin impose la nullité des expressions 1' et 2' d'où $B_{S_2 i} = 0$.
- Pour un sommet adjacent à la face i (par exemple S_1 cf. fig. C.2), l'expression 1' est toujours nulle par construction symétrique. Les contributions restantes s'expriment par projection des surfaces normales concernées sur la face i . Par exemple, pour S_1 , le coefficient $B_{S_1 i}$ s'écrit :

$$B_{S_1 i} = -\frac{5}{36} \left(\vec{S}_{op4}/i + \vec{S}_{op3}/i \right)$$

Pour une face i avec condition limite de type dirichlet :

- Pour le sommet S_2 opposé à la face i , on conserve l'expression $B_{S_2 i} = -\frac{1}{36} \vec{S}_{op2}$.
- Pour un sommet adjacent à la face i (par exemple S_1), les contributions concernant la face i ne s'annulent plus par sommation sur les éléments K . L'expression 1' donne ainsi $\frac{1}{4} \vec{S}_{op2}$ et l'expression 2' rajoute $\frac{1}{3} \vec{S}_{op2}$. On obtient globalement :

$$B_{S_1 i} = - \left[\frac{1}{12} \vec{S}_{op2} + \frac{5}{36} \left(\vec{S}_{op4} + \vec{S}_{op3} \right) \right]$$

Annexe D

Compromis VEF/VDF, éléments prismatiques.

Nous illustrons ici, l'allure de l'élément mixte prismatique qui semble offrir, pour la description d'écoulements océaniques fortement anisotropes et vis à vis de notre type de résolution des équations de Navier Stokes, le meilleur compromis entre les modèles "volumes finis" structurés tridimensionnels et non-structurés bidimensionnels (modèle *P1-non conforme/P1-iso* en plan horizontal).

Les trois composantes de la vitesse sont localisées aux centres des arêtes des triangles horizontaux. Suivant la verticale, elles sont définies aux extrémités d'un élément prismatique K_z d'épaisseur h_z (cf. fig. D.1).

Pour les pressions, la localisation horizontale peut être également similaire au modèle VEF bidimensionnel. Par contre, leur décentrage vertical par rapport aux vitesses semble préférable, de manière à éviter des décorrélations entre les couches. Ainsi, on situe ce plan horizontal au milieu de l'élément caractéristique K_z , à l'altitude $z = h_z/2$.

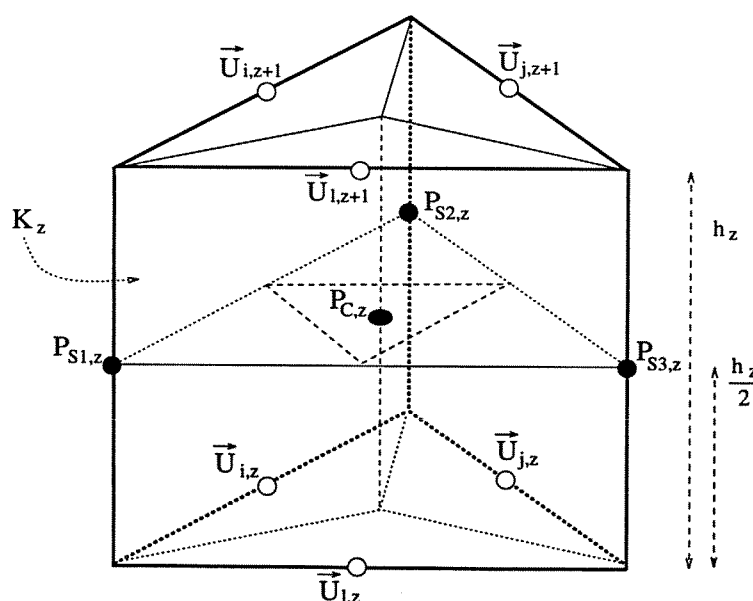


FIG. D.1 - Localisation des inconnues sur un élément prismatique K_z caractéristique.

Les volumes de contrôle associés se déduisent naturellement de cette discrétisation. Les figures D.2 et D.3 suivantes présentent les localisations caractéristiques de ces volumes à partir desquels doit s'effectuer l'évaluation des différents gradients et flux.

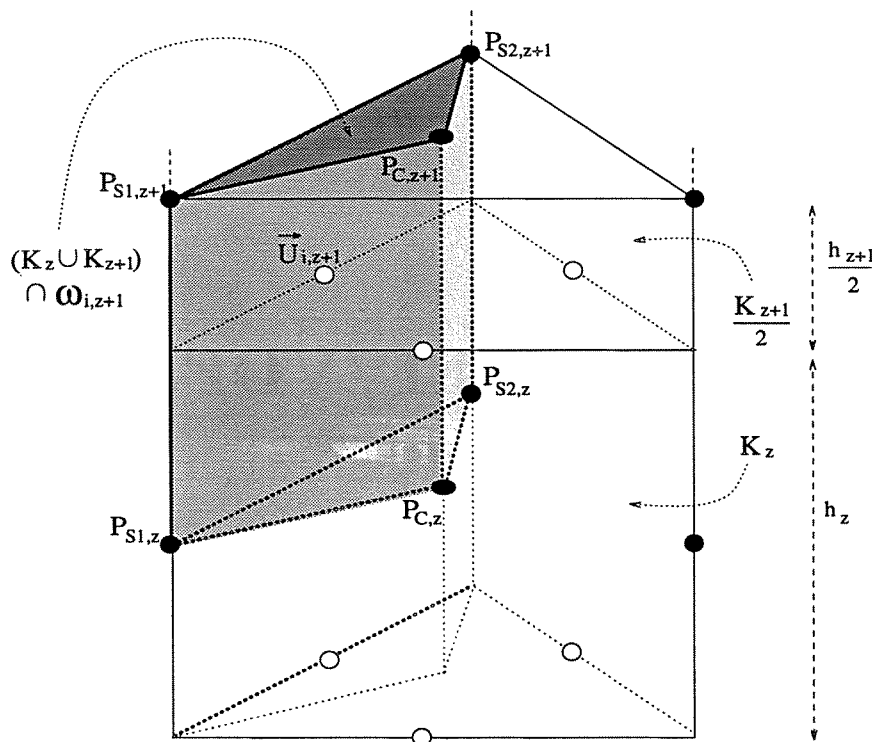


FIG. D.2 - Volume de contrôle $\omega_{i,z+1} \cap (K_z \cup K_{z+1})$ concernant l'intégration de la QDM pour la vitesse $\vec{U}_{i,z+1}$.

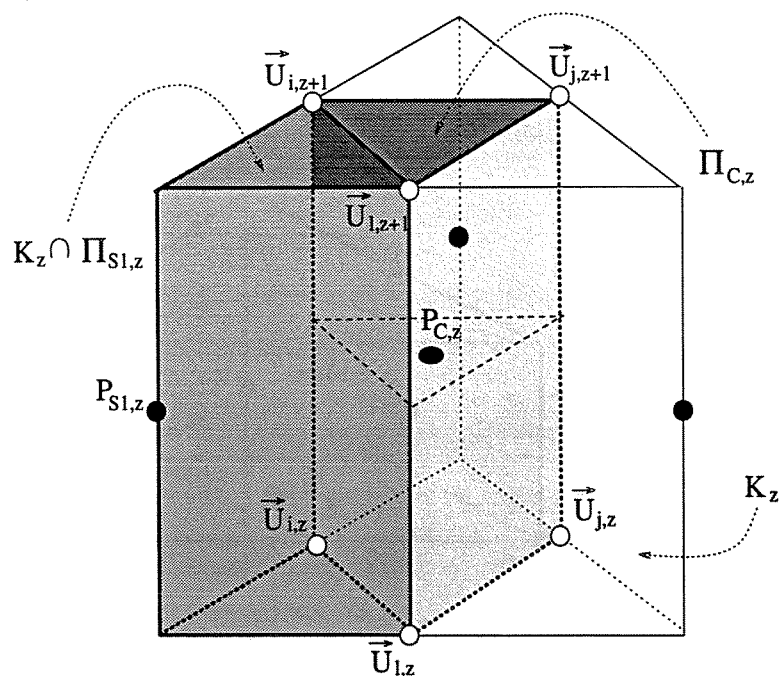


FIG. D.3 - Volumes de contrôle $\Pi_{S1,z} \cap K_z$ et $\Pi_{C,z}$ pour l'intégration de l'incompressibilité concernant les pressions $P_{S1,z}$ et $P_{C,z}$.

Signalons enfin que la prise en compte d'une stratification thermique ne doit pas, par la suite, poser de problèmes supplémentaires (localisation discrète du scalaire identique aux vitesses, mise en œuvre du couplage thermohydraulique par implémentation de l'hypothèse de Boussinesq).

Bibliographie

- [1] AKITOMO K., IMASATO N. and AWAJI T. A Numerical Study of a Shallow Sea Front Generated by Buoyancy Flux: Generation Mechanism. *J. Phys. Oceanogr.*, 20:172-189, 1990.
- [2] ARAKAWA A. and LAMB V. R. Methods in computational physics. Academic Press, 17:174-265, 1977.
- [3] ASSELIN R. Frequency filter for time integrations. *Monthly Weather Rev.*, 100.6:487-490, 1972.
- [4] AXELSSON O. A generalized SSOR method. BIT 13:443-467, 1972.
- [5] BARTHEL V. et VILLAND M. Trio-vf: note de présentation, notice d'utilisation, guide utilisateur. *Notes Cea*, /Str/Lml/94-270, 94-271, 94-272 1994.
- [6] BERNIER C. *Etude et parallélisation d'un code d'éléments finis pour la modélisation quasi-géostrophique des circulations océaniques*. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), 1990.
- [7] BLANKE B. and DELECLUSE P. Variability of tropical atlantic ocean simulated by a general circulation model with two different mixed-layer physics. *J. Phys. Oceanogr.*, 23:1363-1388, 1993.
- [8] BLECK R. and BOUDRA D. B. Initial testing of a numerical ocean circulation model using a hybrid (quasi-isopycnic) vertical coordinate. *J. Phys. Oceanogr.*, 11:755-770, 1981.
- [9] BLUMBERG A. F. and MELLOR G. L. Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the south atlantic bight. *J. Geophys. Res.*, 88.C8:4579-4592, 1983.
- [10] BONNET M. et MEURANT G. Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du gradient conjugué. *Notes Cea*, /CEA/N/2159.
- [11] BOYER M. and al. Stratified rotating flow over and around isolated three-dimensional topography. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A.322:213-241, 1987.
- [12] BRANGER H. *Modélisation des circulations océaniques à grande échelle, effet de la dorsale médio-atlantique*. Thèse INPG, 1984.
- [13] BRYAN K. A numerical method for the study of the circulation of the world ocean. *J. of Computational Physics*, 4:347-376, 1969.

- [14] BRYAN K. and COX M. D. An approximate equation of state for numerical models of ocean circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, 2:510–514, 1972.
- [15] BUFFARD T. *Analyse de quelques méthodes de volumes finis non-structurés pour la résolution des équations d'Euler*. Thèse de l'Université Paris VI, 1993.
- [16] CHAPMAN D. C. On numerical treatment of cross-shelf open boundaries in a barotropic coastal ocean model. *J. Phys. Oceanogr.*, 15:1060–1075, 1985.
- [17] CHARTIER M. *Un modèle numérique tridimensionnel aux équations primitives de circulation générale de l'océan*. Thèse de l'Université Paris VI, 1986.
- [18] CLEMENT P. *Résultats de modélisation d'un écoulement océanique barotrope au dessus d'une topographie isolée avec le logiciel TRIO-VF*. Rapport CEA STR/LML/94-245, 1994.
- [19] DELECLUSE P., MADEC G., IMBARD M. et LEVY C. *OPA, version 7, Ocean General Circulation Model, reference manual*. Rapport interne LODYC 93/05, Septembre 1993.
- [20] DUMAS E. *Modélisation des circulations océaniques générales par des méthodes aux éléments finis*. Thèse INPG, 1982.
- [21] EMONOT P. *Méthodes de volumes éléments finis: Applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence*. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1, 1992.
- [22] FALLON B. *Simulation des grandes échelles d'écoulements turbulents stratifiés en densité*. Thèse INPG, 1994.
- [23] FREEMAN N. G., HALE A. M. and DANARD M. B. A modified sigma equations approach to the numerical modeling of great lakes hydrodynamics. *J. Geophys. Research*, 77:1050–1060, 1972.
- [24] FRIEDRICH K. and LEVITUS S. An approximation to the equation of state for sea water, suitable for numerical ocean models. *J. Phys. Oceanogr.* 2:514–517, 1972.
- [25] GILL A. E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, 1982.
- [26] GRAND D. Modélisation de la turbulence avec deux équations. Note STT/LPML/86/17/C, 1986.
- [27] HAIDVOGEL D. B., WILKIN J. and YOUNG R. A semi-spectral primitive equation ocean circulation model using vertical and horizontal curvilinear coordinates. *J. of Computational Physics*, 1988.
- [28] HIRT C. W., NICHOLS B. D. and ROMERO N. C. SOLA - a numerical solution algorithm for transient fluid flows. *Los Alamos Scientific Laboratory*, Report LA-5852, 1975.
- [29] HUNT J. C. R. and SNYDER W. H. Experiments on stably and neutrally stratified flow over a model three-dimensional hill. *Journal of Fluid Mech.* 96.4:671–704 1980.

- [30] HUPPERT H. E. Some remarks on the initiation of inertial Taylor columns. *Journal of Fluid Mech.* 67.2:397–412 1975.
- [31] IANELLO V. The implementation of a quadratic interpolation scheme for convective terms of a scalar and vector conservation in TRIO-VF. *Note CEA, STT/LPML/86/25/c* 1986.
- [32] JONES H. and MARSHALL J. Convection with Rotation in a Neutral Ocean: A Study of Open-Ocean Deep Convection. *J. Phys. Oceanogr.*, 23:1009–1039, 1993.
- [33] LAROCHE H. *Simulations numériques directes des écoulements d'un fluide tournant ou stratifié en densité de façon stable autour d'un obstacle*. Thèse CEA/Université Joseph Fourier (UJF), 1991.
- [34] LEONARD B. P. Simple high-accuracy resolution program for convection modelling of discontinuities. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 8:1291–1318, 1988.
- [35] LE PROVOST C. On the use of finite element methods for ocean modelling. *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*, 557–580, 1986.
- [36] LE PROVOST C. and VERRON J. Wind-driven ocean circulation transition to barotropic instability. *Dynamics of Atms. and Ocean*, 11:175–201, 1987.
- [37] LE PROVOST C., BERNIER C. and BLAYO E. A comparison of two numerical methods for integrating a quasi-geostrophic multilayer model of ocean circulations: finite element and finite difference methods. *J. of Computational Physics*, 110.2:341–359, 1994.
- [38] LESIEUR M. *Mécanique des fluides et écoulements géophysiques*. Cours de DEA de Mécanique et MMGE (INPG,UJF), 1992.
- [39] LESIEUR M. *Turbulence in fluids*. Kluwer Publishers, Dordrecht (second revised edition) 1990.
- [40] LOTT F. MADEC G. and VERRON J. Topographic experiments in an ocean general circulation model. *Ocean modeling*, 5–7, July 1990.
- [41] LYNCH D. R. and WERNER F. E. Three-dimensional hydrodynamics on finite element. Part 1: linearized harmonic model. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 7:871–909, 1987.
- [42] LYNCH D. R. and WERNER F. E. Three-dimensional hydrodynamics on finite element. Part 2: non-linear time-stepping model. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 12:507–533, 1991.
- [43] MARTI O. *Etude de l'océan mondial: modélisation de la circulation et du transport des traceurs anthropiques*. Thèse de l'Université de Paris VI, 1992.
- [44] MEYER D. *Méthodes numériques en mécanique des fluides*. Cours de DEA de Mécanique, INPG, 1992.

- [45] MILLER M. J. and THORPE A. J. Radiation condition for lateral boundaries of limited area numerical models. *Quart. J. R. Meteorol. Soc.*, 107:615–628, 1981.
- [46] NGUYEN T. *Simulation numérique de la circulation océanique avec un modèle tridimensionnel aux équations primitives: effets de la topographie sous-marine à moyenne échelle*. Thèse INPG, 1991.
- [47] ORLANSKI I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. of Computational Physics*, 21.3:251–259, 1976.
- [48] PACANOWSKI R. C. and PHILANDER S. G. H. Parametrization of vertical mixing in numerical models of tropical oceans. *J. Phys. Oceanogr.*, 11:1443–1451, 1981.
- [49] PEDLOSKI J. *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1979.
- [50] RHINES P. B. Slow oscillation in a ocean of varying depth. Part 1: abrupt topography. Part 2: islands and seamounts. *Journal of Fluid Mech.*, 37:161–189 & 191–205, 1969.
- [51] SAAD Y. SPARSKIT: a basic tool kit for sparse matrix computations. *SPARSKIT documentation, VERSION 2* 1994.
- [52] SANCHEZ I. *Etude des données issues du modèle du GISS, essai de modélisation des vents en Antarctique à l'aide du code TRIO-VF*. Rapport de stage ENM/CEA, 1992.
- [53] SMAGORINSKY J. General circulation experiment with the primitives *Monthly Weather Rev.*, 91:99–164, 1963.
- [54] TREGUIER A. M. *Effet des vents fluctuants et de la topographie sur la turbulence océanique à moyenne échelle*. Thèse de l'Université de Bretagne Occidentale, 1987.
- [55] VAN LEER B. Toward the ultimate conservative difference schemes, a second order sequel to Godunov's method. *J. of Computational Physics*, 32, 1979.
- [56] VERRON J. and LE PROVOST C. A numerical study of quasi-geostrophic flow over isolated topography. *Journal of Fluid Mech.*, 154:231–252, 1985.
- [57] VERRON J. Utilisation de frontières ouvertes pour la simulation numérique d'un pavé d'océan. *Oceanologica Acta.*, 9.4:415–423, 1986.
- [58] WEAVER A. J. and SARACHIK E. S. On the importance of vertical resolution in certain ocean general circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 20:600–609, 1990.
- [59] YOUNG A. Comparative properties of some time differencing schemes for linear and non-linear oscillations. *Monthly Weather Rev.*, 96.6:357–364, 1968.



CEA/GRENOBLE/UST/EC/MCO/REPROGRAPHIE /1996