

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Mécanique des Fluides et Transferts

préparée au Laboratoire de Développements en Thermohydraulique Avancée (CEA Grenoble)
et au Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (Institut de Mécanique - Grenoble)
dans le cadre de l'Ecole Doctorale "Mécanique et Energétique"

présentée et soutenue publiquement

par

Caroline ACKERMANN

le 22 Décembre 2000

**Développements et Validation de
Simulation des Grandes Echelles
d'écoulements turbulents dans un code industriel**

Directeur de thèse : Olivier Métais

JURY :

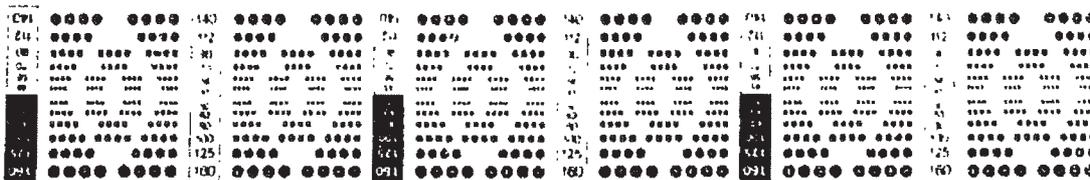
M. O. PIRONNEAU	Président
M. J.P. BERTOGLIO	Rapporteur
M. P. SAGAUT	Rapporteur
M. O. METAIS	Directeur de thèse
M. F. BARRE	Co-encadrant
M. D. LAURENCE	Co-encadrant

**MICROFICHE ETABLIE PAR L'ATELIER NATIONAL DE REPRODUCTION DES THESES
DE L'UNIVERSITE PIERRE MENDES FRANCE (GRENOBLE II).**

**LA REPRODUCTION TOTALE OU PARTIELLE ET SOUMISE A L'ACCORD PREALABLE
DES AYANTS-DROIT ET A CELLE DE L'ATELIER NATIONAL DE REPRODUCTION DES
THESES QUI CONSERVE LA MICROFICHE MERE.**

**CET OUVRAGE EST PROTEGE PAR LA LEGISLATION SUR LA PROPRIETE
LITTERAIRE ET ARTISTIQUE (Loi n°57-298 du 11 mars 1957).**

**© ANRT - UNIVERSITE PIERRE MENDES FRANCE - BP 47 - 38040 Grenoble cedex 9
Téléphone et télécopie : (33) 04.76.82.55.13.
E-mail : anrt@upmf-grenoble.fr**



MIRE ISO N° 1
NF Z 43-607

AFNOR

Cedex 7 - 92080 PARIS LA-DEFENSE

FOURNITURE DE DOCUMENTS. DOCUMENT DELIVERY SERVICE

TEL : 33 (0)3 83 50 46 64 FAX : 33 (0)3 83 50 46 66

2, allée du Parc de Brabois F-54514 Vandoeuvre Cedex

VOTRE DOCUMENT / YOUR DOCUMENT

T 136255

ISSN/ISBN: Bibliothèque: 01 545472303 Cote:
Titre Général: Développements et validation de simulation des grandes échelles
d'écoulements turbulents dans un code industriel = Developments and
validation of large eddy simulation of turbulent flows in an industrial

Auteur(s) Monographie: Caroline ACKERMANN

Collectivité d'Auteurs:

Editeur Commercial:

Année: 2000 Volume: . Numéro: . Numéro HS: Partie:
Mois:

Pages: 176P / .

Titre Article: DÉVELOPPEMENTS ET VALIDATION DE SIMULATION DES
GRANDES ÉCHELLES D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS DANS UN
CODE INDUSTRIEL [MICROFICHE]

Auteur(s):

Collectivité d'Auteurs:

Origine Serveur:

VOTRE DEMANDE / YOUR ORDER

Support souhaité: 06 PHOTOCOPIE Télécopie: 0442256255
N° Client: 0001690 N° Original: MA CADFD11159 N° INIST: 10687248
Référence Lecteur: CADFD11159/DELAFONTA Nombre d'Exemplaires: 1
Critère Devis: NEANT Accord le: Pour: 178 pages
Date d'édition: 30/04/2010 Heure: 12:35:39 N° Ligne: L1 3

Les documents transmis sont strictement réservés à l'usage privé du destinataire indiqué sur ce bordereau. Ils ne peuvent en aucun cas être reproduits, vendus ou communiqués à un tiers pour en faciliter la reproduction sauf accord préalable du Centre Français d'exploitation du droit de Copie. (cf: articles 5, 6 et 7 des conditions générales de ventes).

Documents supplied are exclusively for the personal use of the individual customer named on this form. They cannot at any time be reproduced, sold or given to a third party to be reproduced without prior permission of the Centre Français d'exploitation du droit de Copie. (See articles 5, 6 and 7 of the general conditions of selling).

0001690
Mr DELAFONTAINE Serge
CEA CADARACHE
Bat 727 P 3
13108 St Paul Lez Durance

En cas de réclamation, veuillez retourner
ce document à l'adresse ci-dessus
*In case of claim, please return this form to
the above address*

En précisant le motif de la réclamation
Please indicate the reason for your claim

NOUS regrettons de ne pouvoir
vous fournir une meilleure qualité
de reproduction pour ce document dont
le support d'origine est de qualité moyenne

Le Service Clients

10687248 MA CADFD11159

3



1 0 6 8 7 2 4 8

FORMULAIRE D'ENREGISTREMENT DE THESE SOUTENUE

A FOURNIR OBLIGATOIREMENT EN 2 EXEMPLAIRES
POUR TOUTE SOUTENANCE DE THESE, QUE CETTE THESE
SOIT OU NON REPRODUITE (*)

A remplir par la bibliothèque
voir page 4

N° d'identification
00111161011219

UTILISER LES MAJUSCULES D'IMPRIMERIE, UN CARACTERE PAR CASE

A REMPLIR PAR L'ÉTUDIANT

UNIVERSITE OU ÉTABLISSEMENT INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

NOM DE L'AUTEUR RICHERTIANNI
(doit être identique à la page de titre : ne pas utiliser les mentions "née" ou "épouse")

PRENOM CAROLINIE

ADRESSE PERSONNELLE (*)
ou s'il y a lieu
LABORATOIRE DE RATTACHEMENT

N° et RUE

CODE POSTAL

VILLE

Pays

DATE DE SOUTENANCE ANNÉE 2000 MOIS 11

DIRECTEUR DE THESE

NOM METAILS

PRENOM OLIVIER

TYPE DE DOCTORAT : COCHER LE CODE CORRESPONDANT AU TYPE DOCTORAT

5 DOCTORAT (arrêté du 30 mars 1992)

7 THESE dite "D'EXERCICE"

1 DOCTORAT D'ÉTAT

DOMAINE : COCHER LE CODE CORRESPONDANT AU DOMAINE

1 Lettres, sciences sociales et humaines

2 Sciences

3 Santé

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Nombre de volumes : 01 Nombre total de pages : 0176 Nombre de références bibliographiques : 058

AUCUN TEXTE MANUSCRIT N'EST ADMIS, DACTYLOGRAPHIER OU COLLER LE TEXTE IMPRIMÉ DANS LES ZONES PRÉVUES.
UTILISER LES MAJUSCULES, ACCENTS, PONCTUATION, LES CARACTÈRES LATINS : AUCUN SYMBOLE SPÉCIAL N'EST ADMIS.

TITRE DE LA THESE EN FRANÇAIS : 400 caractères maximum. En cas de dépassement, la coupure sera automatique.

Développements et Validation de Simulation des Grandes Echelles
d'écoulements turbulents dans un code industriel

(*) Les informations demandées sur ce formulaire sont destinées, à l'exception de l'adresse, à la constitution de la base de données TELETHESES. Le fichier TELETHESES a fait l'objet d'une déclaration à la CNIL (arrêté du 10 septembre 1991 - article IV publié au Journal Officiel du 1er octobre 1991). La déclaration est obligatoire en application de l'arrêté du 25 septembre 1985 relatif au dépôt, signalisation et reproduction des thèses ou travaux présentés en soutenance en vue du doctorat.
Le droit d'accès et de rectification prévu par la loi n°78 - 17 du 6 janvier 1978 relative à l'informatique, aux fichiers et aux libertés ne concerne que les informations de la première page de ce formulaire. Il peut s'exercer auprès de : Agence bibliographique de l'enseignement supérieur - TELETHESES - BP 4367 - 34196 MONTPELLIER CEDEX 5

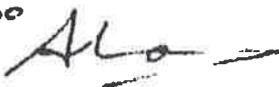
RESUME DE LA THESE EN ANGLAIS : Facultatif en Santé

2 000 caractères maximum espaces compris. En cas de dépassement la coupure sera automatique.

Large Eddy Simulation, where large scales of the flow are resolved and subgrid scales are modelled, is well adapted to the study of turbulent flow, in which geometry and/or heat transfer effects lead to unsteady phenomena. To obtain an improved numerical tool, simulations of elementary test cases, Homogeneous Isotropic Turbulence and turbulent plane channel, were done on both structured and unstructured grids, before moving to more complex geometries. This allowed the influence of the different physical and numerical parameters to be studied separately. On the structured grid, the different properties of the numerical methods corresponding to our problem were identified, a modification of the subgrid model was carried out and several laws of the wall tested : for this discretization, our numerical tool is yet validated. On the unstructured grid, the construction of numerical methods with the same properties as on the structured grid is harder, especially for the convection scheme : several numerical schemes were tested, and the subgrid model and the law of the wall were adapted to unstructured grids. Simulations of the same elementary tests were done : the results were not totally satisfactorily, most probably because the numerical methods chosen cannot perfectly isolate the effects between the convection scheme, physical modelling and the mesh chosen. Nevertheless, this work is the first stage towards the development of a practical Large Eddy Simulation tool for unstructured grid.

DATE ET SIGNATURE DE L'AUTEUR

01.12.2000



A REMPLIR PAR LE SERVICE DE DOCTORAT

UNIVERSITE ou
ETABLISSEMENT

INPG

CODE

103813128

N° D'ENREGISTREMENT

(OBLIGATOIRE pour les Lettres, Sciences humaines et sociales. Attribué par le Fichier Central des Thèses)

AUTORISATION DE REPRODUCTION PAR LE JURY

OUI

NON

NON : these non reproduite car non corrigée dans les 3 mois réglementaires

NON : these confidentielle JUSQU'EN _____

APRES VERIFICATION DATE et CACHET DU SERVICE DE DOCTORAT

20 FEV. 2001

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
Service Scolarité
46, avenue Félix Viallet
38031 GRENOBLE CEDEX

A Christiane et Alfred, mes parents,
A Jean-Marc et Mess.,
A Sébastien,

pour leurs encouragements,
leur soutien,
et leur patience ...

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Développements en Thermohydraulique Avancée du CEA Grenoble et au sein du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels de l'Institut de Mécanique de Grenoble. Je tiens à remercier les personnes qui ont été à l'initiative de cette thèse, en particulier Monsieur François Barré et Monsieur Marcel Lesieur. Je remercie également Monsieur Christian Chauliac de m'avoir accueilli au sein du Service d'Etudes et de Modélisation en Thermohydraulique ainsi que Monsieur François de Crecy, chef du LATA et Monsieur Fabien Boulanger, chef du LDTA, de m'avoir accueilli dans leur laboratoire.

Je remercie Monsieur Olivier Métails, directeur de thèse, pour son aide sur les aspects théoriques et son soutien précieux, qui me permettaient de repartir de son bureau plein d'idées et d'enthousiasme, ainsi que Monsieur François Barré, pour les passerelles jetées vers les applications industrielles, et Monsieur Dominique Laurence, pour son aide et son intérêt pour les aspects concernant les maillages non structurés.

Je remercie également les membres du Jury pour l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail, en particulier Messieurs Pierre Sagaut et Jean-Pierre Bertoglio, rapporteurs, ainsi que Monsieur Olivier Pironneau, Président du Jury.

Je remercie l'ensemble des personnes que j'ai côtoyé durant ces trois années, qui ont transformé cette expérience professionnelle en une expérience humaine très enrichissante. En particulier, je tiens à remercier chaleureusement les membres de l'équipe Trio.U, pour leur aide considérable (qui a permis de "dompter le milieu hostile"), leur patience, leur gentillesse et leur sympathie : Monsieur Philippe Emonot, Madame Olga Cueto, Messieurs Ulrich Bieder, Christophe Calvin, Bernard Menant et Emile Garré, ainsi que les thésards et stagiaires rencontrés : Messieurs Sébastien Heib (Merci Olga!), Olivier Cioni, Madame Céline Lemaire, Messieurs Arnaud Caillaux, Guillaume Dehais, Emmanuel Sergent, Jérôme Lacoste, Christophe Duquennoy, Laurent Lai Kan Thon et nos chères secrétaires, Mesdames Françoise Gignoux et Marinette Wursten, pour leur aide quotidienne (et bien d'autres encore ... Pardon à ceux que je n'ai pas cités et merci).

Merci également à tous ceux, qui au cours du temps m'ont beaucoup appris et m'ont conduit à prendre la décision d'entreprendre une thèse, en particulier à Monsieur Florian Fichot, qui m'a donné le goût de la Recherche Appliquée.

Les derniers remerciements (dans le cadre de ma thèse ...) vont aux membres de ma famille : à mes parents, dont les encouragements et l'amour m'ont porté jusqu'au moment où j'écris ces lignes et à qui je dois d'avoir réalisé ceci, à mon grand frère (et à Messa), pour son exemple, son soutien et sa présence à mes côtés, et à Sébastien, pour sa tendresse et sa grande patience.

Un dernier Merci à toutes les personnes que je ne cite pas ici et qui m'ont apporté leur soutien à un moment ou à un autre, comme le jour de la soutenance : qu'ils aient connaissance que ceci m'a été d'une grande aide, m'a apporté un grand réconfort et m'a profondément touché.

Table des matières

Introduction	11
I Présentation du cadre Théorique, Numérique et Physique	15
1 La Simulation des Grandes Echelles	17
1.1 Définition de la Turbulence	17
1.2 La Simulation Numérique de la Turbulence	17
1.3 La Simulation des Grandes Echelles	19
1.3.1 Principe	19
1.3.2 Le filtre	20
1.3.3 Les Equations de Navier-Stokes filtrées	22
1.3.4 Modélisation du tenseur de contraintes sous-maille T_{ij}	22
2 Résolution des équations de Navier-Stokes	23
2.1 Les équations continues à résoudre	23
2.2 Présentation de la méthode des Volumes Finis	23
2.2.1 Principe	23
2.2.2 Discrétisation en maillages structurés	24
2.2.3 Discrétisation en maillages non structurés	25
2.3 Algorithme de résolution	28
2.3.1 Description	28
2.3.2 Schémas en temps	29
2.3.3 Opérateur de diffusion	30
2.3.4 Opérateur de convection	32
2.3.5 La résolution en pression	32
2.3.6 Calcul du pas de temps de stabilité de la simulation	32
3 Modélisation sous-maille	35
3.1 Le terme à modéliser	35
3.2 Le modèle de Smagorinsky	35
3.2.1 Présentation	35
3.2.2 Détermination de C_s	35
3.2.3 Inconvénients du modèle	36
3.3 Le modèle de Smagorinsky dynamique	36
3.3.1 Principe	36
3.3.2 Mise en œuvre	38
3.4 Les modèles utilisant la fonction de structure	38
3.4.1 Résultats de la théorie EDQNM concernant la viscosité turbulente spectrale	39
3.4.2 Passage dans l'espace physique	40

3.4.3	Mise en œuvre du calcul de la fonction de structure	43
3.5	Le modèle de Bardina et le modèle mixte	44
4	Modélisation de la région de proche paroi : Description des lois de paroi	45
4.1	Description de la zone de proche paroi	45
4.1.1	Définition des notations	45
4.1.2	Caractéristiques d'un écoulement pariétal	45
4.2	Intérêt des lois de paroi	46
4.2.1	Contexte	46
4.2.2	Principe	47
4.3	Description des lois de paroi	47
4.3.1	La loi logarithmique	47
4.3.2	Lois vérifiant la loi logarithmique en moyenne	48
4.3.3	Lois basées sur d'autres hypothèses	52
4.3.4	Perspectives immédiates	53
5	Les Cas Tests Académiques	55
5.1	La Turbulence Homogène Isotrope en Décroissance Libre	55
5.1.1	Intérêt	55
5.1.2	Description de la Turbulence Homogène Isotrope	56
5.1.3	Évaluation des résultats	56
5.1.4	Configuration du calcul	57
5.1.5	Comparaison avec l'expérience de Comte-Bellot et Corrsin	59
5.2	L'écoulement dans un Canal Plan Turbulent	60
5.2.1	Intérêt	60
5.2.2	Présentation des simulations	61
5.2.3	Configuration du calcul	61
II	Simulations des Grandes Echelles en maillages structurés	65
6	THI en maillages structurés	67
6.1	Choix des schémas numériques	67
6.1.1	Contraintes posées sur les méthodes numériques	67
6.1.2	Test des schémas en temps et des schémas de convection	68
6.1.3	Conclusion	72
6.2	Tests des modèles sous-maille	72
6.2.1	THI avec le modèle de la fonction de structure standard et sa version sélective	73
6.2.2	Modification du modèle sélectif	75
6.2.3	Sensibilité au maillage des modèles sélectifs	81
6.2.4	Tests de THI avec le modèle de Smagorinsky	87
6.2.5	Tests de THI avec le modèle de Smagorinsky dynamique	88
6.2.6	Comparaison des différents modèles sous-maille	89
6.3	Simulation de l'expérience de Turbulence de Grille	90
6.3.1	Calcul de turbulence de grille sans initialisation	90
6.3.2	Calcul de turbulence de grille avec phase d'initialisation	92
6.3.3	Comparaison des simulations avec et sans phase d'initialisation	94
6.3.4	Conclusion à propos des simulations de la turbulence de grille	95
6.4	Conclusion	95

7	Canal en maillages structurés	97
7.1	Application du modèle sélectif modifié au cas du canal plan	97
7.2	Simulation avec condition d'adhérence	98
7.2.1	Maillage du domaine de calcul	98
7.2.2	Objectif des simulations	98
7.2.3	Analyse statistique des simulations	98
7.2.4	Analyse topologique	102
7.2.5	Conclusion	104
7.3	Simulations avec lois de paroi	105
7.3.1	Objectifs des simulations	105
7.3.2	Maillages utilisés et Simulations réalisées	105
7.3.3	Comparaisons des lois de paroi	106
7.3.4	Sensibilité au maillage de la loi Werner et Wengle	109
7.3.5	Calculs avec différents modèles sous-maille	110
7.3.6	Calcul avec le schéma Quick et le modèle sélectif	113
7.3.7	Conclusion concernant les simulations avec loi de paroi	115
7.4	Conclusion à propos des simulations de Canal Plan	115
III	Simulations des Grandes Echelles en maillages non structurés	117
8	Spécificités des maillages non structurés	119
8.1	Passage: maillages structurés → maillages non structurés	119
8.2	Méthodes Numériques	120
8.2.1	Présentation des schémas de convection testés	120
8.2.2	Présentation des méthodes couplant le schéma en espace et le schéma en temps	122
8.3	Implémentation des modèles sous-maille	126
8.3.1	Modèle de Smagorinsky	126
8.3.2	Modèle de la fonction de structure	126
8.3.3	Modèle sélectif de la fonction de structure modifié	128
8.4	Implantation des lois de parois	129
8.4.1	Éléments touchés par la loi de paroi	129
8.4.2	Calcul de la diffusion turbulente à la paroi	129
8.4.3	Les lois de paroi en maillages non structurés	130
9	THI en maillages non structurés	131
9.1	Objectif de ce chapitre	131
9.2	Simulations sans diffusion: Tests des schémas numériques	131
9.2.1	Tests des différents schémas de convection	131
9.3	Simulation avec le modèle de Smagorinsky	137
9.3.1	Influence des schémas de convection	137
9.3.2	Comparaison des simulations 1 et 2	138
9.3.3	Comparaison des simulations 2 et 3	139
9.3.4	Test du modèle de Smagorinsky	140
9.4	Implémentation de la fonction de structure en maillages non structurés . . .	143
9.4.1	Analyse des résultats	145
9.4.2	Conclusion	145
9.5	Modèle sélectif de la fonction de structure en maillages non structurés . . .	145
9.5.1	Analyse des résultats	146
9.5.2	Conclusion	147
9.6	Remarque sur les schémas numériques choisis	147

9.7 Conclusion	147
10 Canal en maillages non structurés	149
10.1 Choix des schémas numériques	149
10.2 Simulation avec condition d'adhérence	149
10.2.1 Maillage	149
10.2.2 Caractéristiques des simulations présentées	149
10.2.3 Analyse statistique de la simulation	150
10.2.4 Conclusion	151
10.3 Simulation avec loi de paroi	151
10.3.1 Maillage	151
10.3.2 Caractéristiques des simulations présentées	151
10.3.3 Identification d'un problème lié à l'opérateur de diffusion turbulente	152
10.3.4 Analyse statistique des simulations	152
10.4 Conclusion	151
Conclusion	157
Bibliographie	166
A Calculs des spectres spatiaux	169
A.1 Principe	169
A.2 En maillages structurés	169
A.3 En maillages non structurés	169
B Description du modèle de viscosité turbulente spectrale dynamique	171
C Schémas de convection en maillages structurés	173
C.1 Le schéma Amont	173
C.1.1 Principe	173
C.1.2 Implémentation	173
C.2 Le schéma Quick-Sharp	174
C.3 Le schéma Centré de second ordre	174
C.3.1 Principe	174
C.3.2 Implémentation	175
D Détermination de la force de volume	177
D.1 Force de volume : Gradient de pression moteur "simulé"	177
E Adimensionnalisation des résultats	179
E.1 Détermination de u_*	179
E.1.1 La définition	179
E.1.2 Retour aux équations moyennées	179
F Détermination de u^* avec la loi de Werner et Wengle	181
F.1 Description de la loi de paroi	181
F.2 Détermination de y_{lim}	182
F.3 Calcul pour $\Delta y < y_{lim}$	182
F.4 Calcul pour $\Delta y > y_{lim}$	182
G Détermination des exposants de décroissance pour la THH	183
G.1 Pente de décroissance de l'énergie cinétique et de l'ensrophie	183
G.2 Pente de décroissance de l'ensrophie filtrée	184

Introduction

La plupart des écoulements naturels (cascades, fleuves ...), "ménagers" (robinet coulant dans un lavabo, machine à laver ...) ou industriels (écoulements dans des conduites, dans un cœur de réacteur nucléaire ...) sont turbulents. En observant une cascade, nous pouvons retrouver les différentes caractéristiques de la Turbulence: la sensibilité aux conditions initiales (non répétitivité), la présence d'une très grande variété d'échelles et le mélange intense.



FIG. 0.1 - Cascade du Cirque de Gavarnie - Juillet 2000

De nombreuses applications industrielles utilisent le mélange turbulent: mixage d'espèces chimiques, refroidissement de dispositifs ... ce qui explique notre intérêt pour ces écoulements. Pour les processus sans changement de phase, qui sont étudiés ici, ce sont principalement les grandes échelles qui gouvernent l'écoulement, générées par la géométrie du dispositif.

Lors de ce travail, nous allons utiliser la Simulation Numérique pour représenter et comprendre les phénomènes complexes se produisant dans les écoulements. Si nous

cherchons à représenter toutes les échelles présentes, nous nous heurtons rapidement à la limitation actuelle des moyens informatiques. Or, nous sommes principalement intéressés par les mouvements à grande échelle : en simulant uniquement ceux-ci, nous pouvons aborder des situations plus réalistes. Il faut alors modéliser ce qui se passe aux échelles inférieures, considérées comme ayant un mouvement isotrope plus universel. C'est le principe de la **Simulation des Grandes Echelles**, que nous allons utiliser au cours de ce travail.

Nous travaillons dans le code **PRICELES** (Plate-forme Rapide Industrielle CEA EDF pour la LES (Large Eddy Simulation = Simulation des Grandes Echelles, en anglais)), développé en collaboration par le CEA (Commissariat à l'Energie Atomique), EDF (Electricité de France) et des laboratoires universitaires (LEGI¹ - INPG Grenoble, LMFA² - ECL Lyon, LAN³ - Université Pierre et Marie Curie Paris 6, UMIST⁴ - Manchester). C'est un code à vocation industrielle.

Au cours de ce travail, nous allons mettre en place *une méthode de validation systématique pour la simulation d'écoulements turbulents de fluide monophasique incompressible, en maillages structurés et en maillages non structurés*, afin de parvenir à simuler les phénomènes instationnaires dus à la turbulence. Nous décrivons maintenant l'originalité de la démarche choisie.

Nous considérons qu'il y a deux types de Simulation des Grandes Echelles (notée SGE dans la suite) :

- d'une part, les SGE réalisées avec des modélisations dans l'espace spectral et des méthodes numériques très précises (spectrales, pseudo-spectrales ...). Celles-ci sont limitées à l'étude d'écoulements dans des géométries simples, comme la Turbulence Homogène Isotrope ou le Canal Plan : l'arrière plan théorique est très clair et ces simulations permettent de réaliser des études fondamentales.
- d'autre part, les SGE réalisées dans l'espace physique, à l'aide de méthodes numériques type Différences Finies ou Volumes Finis, d'ordre moins élevé. Elles permettent d'appréhender des problèmes à géométrie complexe (marche descendante, jets, faisceau de tubes ...): ce sont les méthodes utilisées dans les codes industriels comme PRICELES. Lors de ces simulations, les effets dus à la géométrie, aux phénomènes physiques, à la modélisation et aux erreurs numériques (plus importantes puisque les méthodes sont d'ordre moins élevé) se combinent : il est alors très difficile de les dissocier. L'interprétation et la compréhension de ces résultats deviennent assez complexe. Un besoin de simulations plus élémentaires pour bien comprendre les effets de chaque paramètre se fait sentir : c'est ce manque que nous allons chercher à combler.

Pour cette raison, nous allons réaliser des simulations sur des cas académiques, qui permettent d'étudier les différents effets de façon dissociée, avec le Code PRICELES destiné à la simulation d'écoulements dans des configurations industrielles complexes.

- Le premier cas test choisi est la **Turbulence Homogène Isotrope** (dénommée THH dans la suite). Il n'y a pas ici d'influence de la géométrie : nous étudions uniquement la décroissance de l'énergie cinétique, ce qui permet de se concentrer sur les effets des méthodes numériques choisies et sur le comportement des modèles sous-maille.
- Nous simulerons ensuite une des situations élémentaires d'écoulement pariétal, l'écoulement dans un canal plan turbulent, ce qui nous permettra d'une part, de

1. LEGI : Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels

2. LMFA : Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique

3. LAN : Laboratoire d'Analyse Numérique

4. UMIST : University of Manchester - Institut of Science and Technology

vérifier le comportement des modèles sous-maille à la paroi et d'autre part, de tester les lois de parois, indispensables lors de simulations à haut nombre de Reynolds et en géométrie complexe. En effet, à la paroi, les structures ont des échelles d'autant plus faibles que le nombre de Reynolds est élevé, ce qui pose des problèmes de modélisation de ces structures ainsi que des problèmes numériques.

A ce stade, nous aurons vérifié que le code retranscrit bien chaque effet séparément : nous espérons alors que leur combinaison ne dégrade pas la fiabilité des simulations et nous pourrions alors envisager la simulation de configurations industrielles. Or, la complexité de ces simulations résulte souvent de celle de leur géométrie. Afin de bien la représenter, il est nécessaire de raffiner localement (aux parois ou dans les zones de recirculation) : avec les maillages structurés que nous utilisons, le raffinement local est impossible, car tout raffinement dans une direction se propage sur l'ensemble du domaine. C'est ici que nous introduisons les maillages non structurés : en effet, avec ce type de maillage, les raffinements locaux sont possibles, sans trop augmenter le nombre de mailles. Pour simuler des dispositifs industriels à géométrie complexe, il est donc intéressant d'utiliser les maillages non structurés. Or, les SGE en maillages non structurés sont beaucoup plus rares que celles en maillages structurés.

La déstructuration des maillages ajoute de nombreux problèmes :

- la modélisation sous-maille est classiquement utilisée en maillages structurés : il est nécessaire de l'adapter aux maillages non structurés.
- la modélisation des parois pose également des problèmes supplémentaires, que nous développerons dans ce mémoire.
- des méthodes numériques spécifiques doivent être utilisées.

La même démarche progressive sera utilisée en maillages non structurés qu'en maillages structurés. Nous allons tout d'abord réaliser des simulations de THI (dans un premier temps, sans viscosité moléculaire, ce qui est rarement fait), de canal plan turbulent avec adhérence et avec lois de paroi. Une fois ces cas d'analyse traités, nous pourrions envisager des géométries plus complexes.

L'originalité de notre travail réside donc dans le fait :

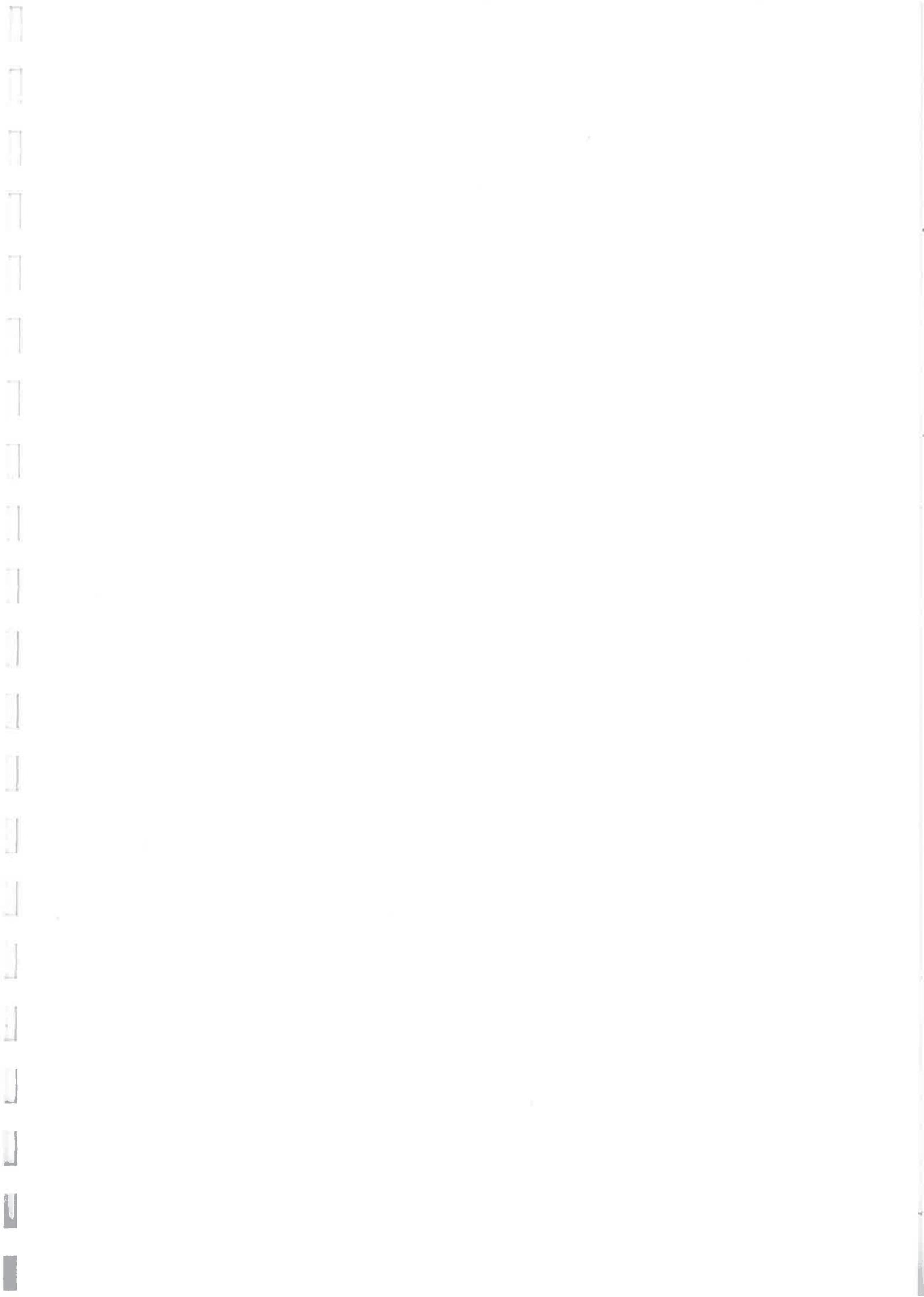
- de réaliser des simulations de cas académiques très sévères avec un code à vocation industrielle,
- de suivre cette démarche systématique aussi bien maillages structurés qu'en maillages non structurés, avant de s'intéresser à des cas complexes, pour mettre en place un outil de simulation fiable.
- d'apporter, sur la base d'idées théoriques et grâce à des études très précises, des améliorations au modèle sous-maille dit de la fonction de structure sélectif, qui de plus permet d'envisager son adaptation en maillages non structurés,

Plan du mémoire Dans la première partie, nous décrivons le cadre général de l'étude, en rappelant les principes de la Simulation des Grandes Echelles au chapitre 1, en décrivant au chapitre 2, la méthode de résolution employée, au chapitre 3, la modélisation sous-maille choisie, puis la modélisation de la région de proche paroi au chapitre 4 et au chapitre 5, les cas académiques simulés.

La deuxième partie rassemble les simulations réalisées en maillages structurés. Dans le chapitre 6 sont présentés les différentes simulations de THI, comprenant l'élaboration du nouveau modèle sélectif. Les simulations de canal plan turbulent réalisées avec condition d'adhérence ainsi que celles permettant de tester les lois de paroi sont rassemblées dans le chapitre 7.

Dans la troisième partie, nous nous intéressons aux maillages non structurés: nous précisons tout d'abord les spécificités du passage des maillages structurés aux maillages non structurés au chapitre 8, puis nous présentons les simulations de TIII au chapitre 9 et les simulations de canal plan au chapitre 10.

Nous concluons alors notre travail en tentant d'évaluer la fiabilité de l'outil développé pour réaliser des Simulations des Grandes Echelles d'écoulements turbulents en géométrie complexe d'intérêt industriel.





Première partie

**Présentation du cadre Théorique,
Numérique et Physique**

Chapitre 1

La Simulation des Grandes Echelles

1.1 Définition de la Turbulence

La plupart des écoulements réels dans la vie de tous les jours, dans la nature et dans l'industrie sont turbulents. Intuitivement, nous comprenons bien ce que cela signifie ; nous rappelons ici les principales caractéristiques de la Turbulence (cf. [LES97c]).

- Dans un écoulement turbulent, une petite perturbation (même non perceptible) va être amplifiée fortement : une expérience ne sera pas reproductible, puisqu'une toute petite modification de l'état initial influera fortement sur l'évolution ultérieure. Dans ces conditions, la prévision exacte des états des écoulements est impossible.
- Un écoulement turbulent possède une grande capacité de "mélange". Cette caractéristique est souvent exploitée dans les dispositifs industriels, pour permettre par exemple, le refroidissement de dispositifs ou le mélange de constituants.
- Un écoulement turbulent contient une très grande variété d'échelles.

Il y a schématiquement :

- les grandes structures, qui sont principalement dues à la géométrie,
- les petites structures dissipatives, qui sont plus universelles.

C'est sur cette propriété des petites structures que se base, en partie, la modélisation de la turbulence.

1.2 La Simulation Numérique de la Turbulence

Comme nous venons de le dire, un écoulement turbulent contient un très grand nombre d'échelles. Si nous voulons simuler toutes ces échelles (i.e. jusqu'au nombre d'onde de coupure de Kolmogorov¹), il est nécessaire d'avoir un nombre de points de l'ordre de $Re^{3/4}$ (Re : nombre de Reynolds²), par direction. En trois dimensions, il faut donc $Re^{9/4}$ points. Nous présentons maintenant les principales techniques classiquement utilisées pour simuler des écoulements turbulents.

La Simulation Numérique Directe (SND ou DNS = Direct Numerical Simulation) consiste à résoudre toutes les échelles du mouvement (cf. figure 1.1).

1. le nombre d'onde de Kolmogorov k_λ est celui où se produit la dissipation d'énergie cinétique et correspond aux plus petites structures turbulentes présentes dans l'écoulement.

2. Le nombre de Reynolds est un nombre adimensionnel permettant d'évaluer le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il est formé par une échelle de longueur l , une échelle de vitesse u et par la viscosité moléculaire ν . Son expression est : $Re = \frac{ul}{\nu}$. Plus il est élevé, plus l'écoulement est turbulent.

La SND permet de disposer de "toutes" les statistiques (moyenne, moments de $n^{i\text{ème}}$ ordre, corrélations ...), puisque nous calculons les grandeurs instantanées.

Elle permet également la réalisation de visualisations d'écoulement équivalentes à celles obtenues lors d'expériences de laboratoire, l'avantage étant que toutes les grandeurs instantanées sont connues de façon non intrusive.

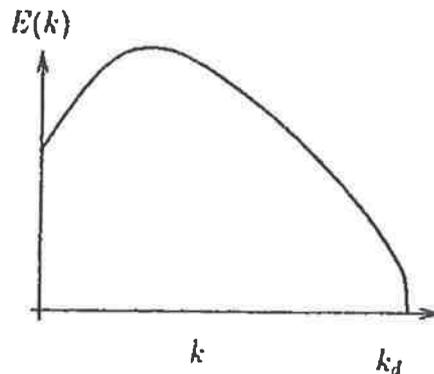


FIG. 1.1 - Spectre d'énergie turbulente - En SND, tout est simulé

Mais cette technique nécessite l'utilisation de maillages très importants (de l'ordre $Re^{9/4}$ points de discrétisation). Pour les écoulements à haut nombre de Reynolds, nous sommes actuellement limités par la capacité des calculateurs; les calculs industriels à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 ou plus ne sont donc pas envisageables pour le moment. C'est pour cette raison que d'autres modélisations ont été développées.

Les approches moyennées (RANS = Reynolds Averaged Navier-Stokes) permettent de simuler des écoulements à des nombres de Reynolds plus grands. Une moyenne statistique des grandeurs de l'écoulement est calculée et les fluctuations par rapport à cette moyenne sont modélisées (cf. [SAG98] et figure 1.2). Habituellement, la moyenne statistique correspond à une moyenne temporelle, ce qui nécessite moins de points de discrétisation, car l'opération de moyenne diminue considérablement le nombre d'échelles présentes dans l'écoulement, et permet donc de réaliser des simulations à plus haut nombre de Reynolds. La méthode $k - \epsilon$ est un exemple d'approche RANS.

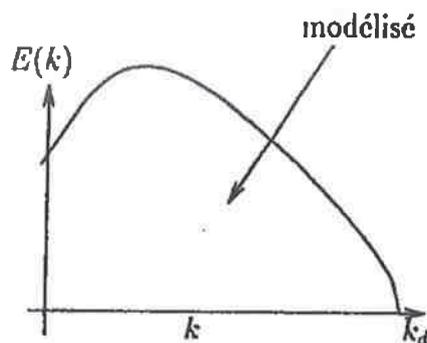


FIG. 1.2 - Spectre d'énergie turbulente - En RANS

Ce type d'approche ne permet pas de simuler tous les types d'écoulements. Par exemple, la simulation d'écoulements instationnaires n'est pas envisageable, dans le cas où la grandeur calculée correspond à une moyenne temporelle. L'approche intermédiaire aux méthodes RANS et à la SND est celle que nous allons utiliser dans notre travail.

La Simulation des Grandes Echelles (ou LES = Large Eddy Simulation) permet de simuler toutes les échelles, jusqu'à une échelle spatiale, que nous nommons *échelle de coupure* : les échelles plus petites sont alors modélisées (figure 1.3). Par rapport à une SND, moins de points de discrétisation sont nécessaires, ce qui permet d'envisager des situations à des nombres de Reynolds plus élevés et, par rapport à une méthode RANS, nous avons accès à des informations supplémentaires .

Elles sont de deux types :

- des informations statistiques, comme les valeurs moyennes, mais aussi les fluctuations des différentes grandeurs (écart types ...), ou des spectres temporels (ou spatiaux dans certains cas).
- des informations sur la topologie de l'écoulement : nous pouvons voir les structures cohérentes (tourbillons ...), présentes dans l'écoulement.

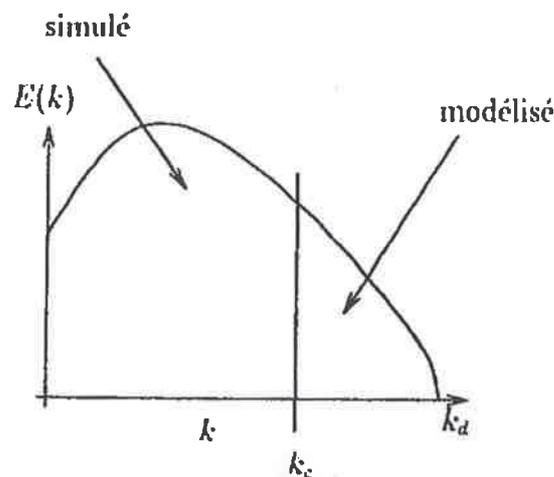


FIG. 1.3 - Spectre d'énergie turbulente - En SGE

Nous allons maintenant nous intéresser à la Simulation des Grandes Echelles.

1.3 La Simulation des Grandes Echelles

1.3.1 Principe

La dynamique des fluides visqueux Newtoniens est régie par les équations de Navier-Stokes. Pour un fluide incompressible à masse volumique constante, elles prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu S_{ij}) + f_i \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{avec } S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

où \vec{f} représente les forces de volume.

Comme nous l'avons décrit ci-dessus, en Simulation des Grandes Echelles, nous résolvons explicitement les grandes échelles et nous modélisons ce qui se passe aux échelles plus petites. Ceci revient à appliquer un filtre passe-bas (pour les nombres d'onde), qui élimine les fluctuations des échelles inférieures à la largeur du filtre $\bar{\Delta}$, appelées *échelles sous-maille*.

1.3.2 Le filtre

Soit G ce filtre, et \bar{f} la grandeur filtrée correspondant à f . L'opération de filtrage correspond à un produit de convolution, nous avons :

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = (G * f)(\vec{x}, t) = \int f(\vec{y}, t) G(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} \quad (1.4)$$

1.3.2.1 Propriétés du filtre

Pour que les équations de Navier-Stokes filtrées conservent les propriétés mathématiques des équations de Navier-Stokes, le filtre doit vérifier les propriétés suivantes (cf. [SAG98]) :

- il doit conserver les constantes : $\bar{a} = a$, si a est une constante (par construction),
- il doit être linéaire : $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$. Cette propriété est vérifiée quelque soit G , du fait de la linéarité du produit de convolution.
- il doit commuter avec la dérivation : $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \bar{\frac{\partial f}{\partial x}}$.

La propriété de commutation "filtre \leftrightarrow dérivées" n'est pas toujours vérifiée. L'erreur en résultant est alors négligée (c'est ce que nous ferons) ou modélisée (cf. [GEU00]).

1.3.2.2 Filtres utilisés en SGE

Nous présentons les filtres classiquement utilisés en Simulation des Grandes Echelles. Nous les écrivons pour le cas mono-dimensionnel.

- Pour une SGE dans l'espace spectral, le filtre classiquement utilisé est le **filtre droit** ou **filtre porte**, défini par :

$$G(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < k_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

k_c est le nombre d'onde de coupure du filtre.

Les autres filtres explicites utilisés sont :

- le **filtre gaussien** défini par :

$$G(x) = \left(\frac{\gamma}{\pi \bar{\Delta}^2} \right) \exp\left(-\frac{\gamma \|x\|^2}{\bar{\Delta}^2} \right) \quad (1.6)$$

où γ est une constante, habituellement prise égale à 6.

- le **filtre boîte** ou **filtre droit** dans l'espace physique défini par :

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}} & \text{si } \|x\| < \frac{\bar{\Delta}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.7)$$

Par définition, $k_c = \frac{2\pi}{\Delta}$ et $\bar{\Delta} = 2\Delta x$, d'où : $k_c = \frac{\pi}{\Delta x}$.

Ces filtres sont définis pour le cas mono-dimensionnel et à maillage homogène (i.e. à pas de maillage constant).

Pour passer :

- au cas 2D ou 3D, on peut supposer que les directions sont indépendantes. Le filtre a alors la forme suivante : $G(\vec{x}) = \prod_{i=0}^{dimension-1} G(x_i)$.
- au cas inhomogène, on peut se ramener par un changement de variables au cas homogène (cf. [GM95]). Dans ce cas, un problème se pose car la longueur de coupure est variable sur le domaine ; en particulier, du fait de l'inhomogénéité du maillage, les opérateurs de dérivation et de filtrage ne commutent plus. Dans l'article cité plus haut, Ghosal et Moin ont montré que l'erreur de commutation est du second ordre. D'après ces auteurs, si les schémas numériques sont d'ordre inférieur ou égal à 2, cette erreur peut être négligée. Sinon, il faut utiliser des filtres discrets construits pour être commutatifs ([VLM98]). D'un autre côté, B.J. Geurts (cf. [GEU00]) dit qu'il est nécessaire, même en utilisant des schémas de second ordre, de modéliser l'erreur de commutation, en particulier quand le filtre utilisé est le filtre implicite du maillage. Nous définirons ce que nous appelons le filtre implicite au paragraphe suivant. Pour lui, c'est également nécessaire d'en tenir compte quand on utilise un filtre explicite, tant que sa largeur de coupure n'est pas trois fois supérieure à celle du filtre correspondant au maillage. De plus, des résultats récents de A. Meri et H. Wengle (cf. [MW00]) ont montré que l'utilisation de schémas d'ordre plus élevé (schéma de convection du quatrième ordre) sans filtrage explicite conduit à une amélioration des résultats sur le cas du canal plan. Nous y reviendrons quand nous parlerons des simulations de cette configuration. La problématique liée aux erreurs de commutation est donc un sujet de recherche ouvert.
- aux maillages non structurés, on peut étendre ce qui est obtenu pour des maillages non homogène en ne travaillant que sur les points voisins (notion qu'il faudra alors définir), comme l'a fait P. Rollet-Miet (cf. [RM97]). La difficulté dépend alors de la discrétisation choisie : la définition d'un filtre explicite n'est pas aisée dans le cas d'élément fini non conforme.

1.3.2.3 Définition du filtre utilisé au cours de ce travail

En pratique, le filtre considéré est un *filtre implicite*. Nous ne savons pas le caractériser, car il est composé des éléments suivants :

- le filtre lié à la discrétisation : il est de largeur $2\Delta x$. En Volumes Finis, le filtre implicite dû au maillage peut être assimilé à un filtre boîte, car les grandeurs calculées peuvent être considérées comme leur moyenne sur les volumes de contrôle.
- le filtre induit par les erreurs des différents schémas numériques utilisés (cf. la représentation des erreurs des schémas à l'aide du nombre d'onde modifié [I.EL92]).
- le filtre induit par les erreurs de modélisation.

Pour ce travail, nous supposons que le filtre commute avec les opérateurs de différentiation et que les différentes erreurs sont du même ordre : erreurs numériques des schémas utilisés, erreur de commutation due à l'inhomogénéité et erreurs de modélisation. Nous avons voulu insister sur ce point, pour bien mettre en valeur les limitations de notre approche actuelle.

1.3.3 Les Equations de Navier-Stokes filtrées

Nous appliquons le filtre passe-bas aux équations de Navier-Stokes (équations 1.1 et 1.2). Nous obtenons :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{S}_{ij} + T_{ij}) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{avec } T_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j} \quad (1.10)$$

T_{ij} est le tenseur des contraintes sous-maille.

Ce terme caractérise les effets des échelles sous-maille sur les grandes échelles ; c'est celui-ci que nous allons modéliser.

L'idée de base de la Simulation des Grandes Echelles est l'universalité des mouvements à petite échelle, soumis à une turbulence tridimensionnelle isotrope.

Cette hypothèse est généralement valide :

- loin des parois,
- pour les écoulements non réactifs,
- pour les écoulements sans interface.

En effet, près des parois, lors de changement de phase ou de réactions chimiques, les longueurs caractéristiques des phénomènes qui se produisent sont beaucoup plus faibles que celles liées à la turbulence : les petites échelles jouent un rôle plus important, et ne sont pas forcément isotropes. Par exemple, dans le cas d'écoulements réactifs (combustion ...), il faut tenir compte de phénomènes qui ont lieu à des nombres d'onde plus grands que le nombre d'onde de Kolmogorov.

Les écoulements que nous étudierons ne font pas partie de ce dernier type d'écoulement : nous nous intéressons à des écoulements monophasiques de fluide incompressible. Par contre, le problème des parois nous concerne : près des parois, les mouvements à petite échelle ne sont plus isotropes, car ils sont confinés par celles-ci. Il faudra donc traiter de façon particulière les parois ; nous y reviendrons dans la suite de ce mémoire.

1.3.4 Modélisation du tenseur de contraintes sous-maille T_{ij}

L'effet des petites échelles sur les grandes est classiquement modélisé grâce à une hypothèse de viscosité turbulente ; nous l'utiliserons au cours de ce travail.

Nous avons :

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{ll} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (1.11)$$

d'où :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} - \frac{1}{3} \rho T_{ll})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}) \quad (1.12)$$

Il nous reste à déterminer une expression pour ν_t . Nous décrirons différents modèles sous-maille dans le chapitre 3 (cf. [LM96] et [RM97]).

Nous allons maintenant nous intéresser à la méthode utilisée pour la résolution des équations de Navier Stokes.

Chapitre 2

Résolution des équations de Navier-Stokes

2.1 Les équations continues à résoudre

Pour un fluide monophasique incompressible à masse volumique constante, nous devons résoudre :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_t) S_{ij}) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{où} \quad \bar{P} = \bar{p} - \frac{1}{3} \rho_0 T_{ii} \quad (2.3)$$

La méthode utilisée pour résoudre ces équations est une méthode de Volumes Finis.

Son principe permet de conserver *localement* la masse (i.e. sur chaque volume de contrôle), ce qui n'est pas le cas des méthodes de Différences Finies et d'Éléments Finis. Pour cette raison, la méthode des Volumes Finis est bien adaptée à la résolution des équations de conservation et donc des équations de Navier-Stokes.

2.2 Présentation de la méthode des Volumes Finis

2.2.1 Principe

Afin d'écrire les équations de Navier-Stokes en formulation Volumes Finis, il faut définir les volumes de contrôle pour résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de la masse (appelée également équation de continuité). Leur définition dépend de la discrétisation choisie, nous les précisons dans les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3.

Nous garantissons la conservation de la quantité de mouvement et de la masse, en imposant la continuité des flux sur les faces des volumes de contrôle.

Soit V , un volume de contrôle pour la conservation de la quantité de mouvement, et K , le volume de contrôle pour la conservation de la masse, ∂V et ∂K étant leur contour respectif.

Nous intégrons les équations 2.1 et 2.2, sur leur volume de contrôle respectif :

$$\int_V \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} dv + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) dv = - \int_V \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} dv + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}) dv \quad (2.4)$$

$$\int_K \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} dx = 0 \quad (2.5)$$

D'après la formule d'Ostrogradski et puisque les volumes de contrôle sont invariants dans le temps, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \bar{u}_i dv \right) + \int_{\partial V} \bar{u}_i \bar{u}_j n_j ds = - \int_V \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} dv + \int_{\partial V} 2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij} n_j ds \quad (2.6)$$

$$\int_{\partial K} \bar{u}_i n_i ds = 0 \quad (2.7)$$

\bar{n} étant la normale aux faces des volumes de contrôle.

Les équations que nous allons résoudre sont les équations 2.6 et 2.7. La solution de ces équations est constituée par le couple vitesse-pression : (\vec{u}, p) .

Nous allons maintenant présenter les deux discrétisations utilisées au cours de ce travail, pour les simulations en maillages structurés et en maillages non structurés.

2.2.2 Discrétisation en maillages structurés

En maillages structurés, nous utilisons la méthode des Volumes Différences Finies. Nous résolvons les équations ci-dessus, en évaluant les différentes grandeurs rencontrées (les dérivées par exemple) par Différences Finies.

Les maillages structurés sont constitués de rectangles en deux dimensions, et de parallélépipèdes rectangles en trois dimensions, qui seront nommés éléments dans la suite.

Nous utilisons une grille décalée : la vitesse et la pression ne sont pas définies aux mêmes points. Une telle grille a de nombreux avantages, par rapport aux approches colocalisées, car la vitesse et la pression sont fortement couplées, ce qui supprime un certain nombre de problèmes de convergence et d'oscillations (exemple : mode parasite en pression ("checkerboard mode"), cf. [FP97]).

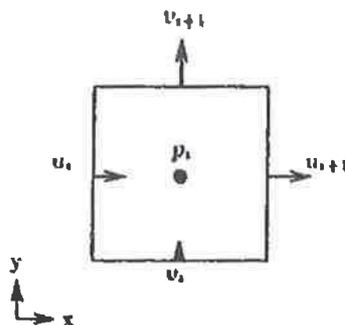


FIG. 2.1 - Description de la discrétisation - en 2D

Les variables scalaires (et en particulier la pression) sont discrétisées au centre de gravité des éléments, les composantes normales de la vitesse au centre de gravité des faces des éléments (cf. schéma 2.1).

Nous définissons plusieurs types de volumes de contrôle (cf. figure 2.2) :

- le volume de contrôle pour résoudre l'équation de conservation de la masse, qui correspond à l'élément lui-même.
- un volume de contrôle par composante de la vitesse, pour résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement, projetée sur la direction considérée.

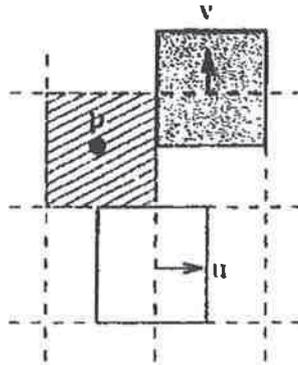


FIG. 2.2 - Description des volumes de contrôle - en 2D

Nous reviendrons sur les propriétés de cette discrétisation ultérieurement.

2.2.3 Discrétisation en maillages non structurés

Les maillages non structurés permettent de représenter des géométries complexes, car les raffinements locaux sont possibles, contrairement au cas des maillages structurés monoblocs conformes.

Les maillages non structurés, avec lesquels nous allons travailler, sont constitués de triangles en deux dimensions, et de tétraèdres en trois dimensions.

Nous utilisons la méthode des Volumes Éléments Finis (VEF) (cf. [EM092]) : l'évaluation des intégrales de volume et des flux sur les faces des volumes de contrôle se font avec des techniques issues de la méthode des Éléments Finis, i.e. à l'aide des fonctions de forme de l'élément fini choisi, sauf dans certains cas comme pour la convection par exemple.

2.2.3.1 Présentation de l'élément de discrétisation

L'élément choisi est l'élément P1NC/P1Bulle. Les vitesses sont discrétisées au centre de gravité des faces, la pression au centre de gravité des éléments et à leurs sommets.

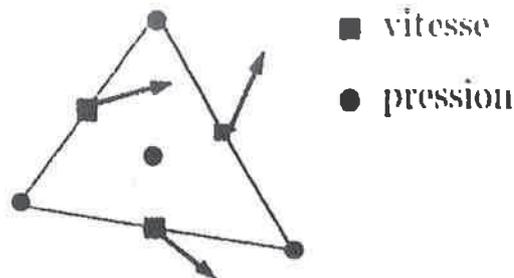


FIG. 2.3 - Discrétisation de la vitesse et de la pression pour l'élément fini P1NC/P1Bulle

Discrétisation de la vitesse

La vitesse est *P1 non conforme*: elle est linéaire par élément et s'exprime à l'aide des fonctions de forme, dépendant des coordonnées barycentriques. Elle est dite *non conforme*, car elle n'est pas continue aux faces, sauf au centre de gravité de celles-ci.

La vitesse s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{u}(\vec{x}_i) \phi_i(\vec{x}) \quad (2.8)$$

où N est le nombre de degré de liberté (ddl) en vitesse, correspondant au nombre de faces. Soit Ω l'ensemble du domaine, d la dimension.

Soit λ_i^K , la coordonnée barycentrique associée au sommet S_i , de l'élément K .

Avec les notations de la figure 2.4, les ϕ_i sont définies par :

$$\phi_i(\vec{x}) = \begin{cases} 1 - d \lambda_i^{K_1}(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in K_1 \\ 1 - d \lambda_i^{K_2}(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in K_2 \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in \Omega \setminus \{K_1 \cup K_2\} \end{cases}$$

Le volume de contrôle, que nous utilisons pour résoudre l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, est représenté en gris sur la figure 2.4.

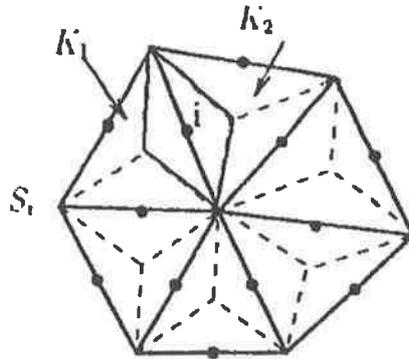


FIG. 2.4 - Description des volumes de contrôle pour la conservation de la quantité de mouvement

Discrétisation de la pression

La pression est dite *P1 bulle*: elle est linéaire sur les κ_i , décrit sur la figure 2.5.

Elle s'écrit :

$$p(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{M_s-1} p(\vec{x}_{s_i}) \Psi_{s_i}(\vec{x}) + \sum_{j=0}^{M_c-1} p(\vec{x}_{c_j}) \Psi_{c_j}(\vec{x}) \quad (2.9)$$

où : M_s est le nombre de sommets, M_c le nombre d'éléments, \vec{x}_{s_i} , la position du sommet S_i , et \vec{x}_{c_j} , le position du centre de gravité de l'élément K_j .

Les fonctions de forme sont les suivantes :

- pour la pression au centre des éléments :

$$\Psi_{c_j}(\vec{x}) = \begin{cases} (d+1) \min_{i=1..d+1} \lambda_i^K(\vec{x}) & \text{si } \vec{x} \in K_j \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in \Omega \setminus K_j \end{cases}$$

- pour la pression aux sommets :

$$\psi_{s_i}(x) = \begin{cases} \lambda_{s_i}(x) - \frac{1}{d+1} \psi_c(x) & \forall K_j \supset s_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il y a deux types de volume de contrôle, pour résoudre l'équation de conservation de la masse : ceux entourant un sommet et ceux entourant le centre de gravité d'un élément (qui est l'élément lui-même). Ils sont représentés ci-dessous (figure 2.5).

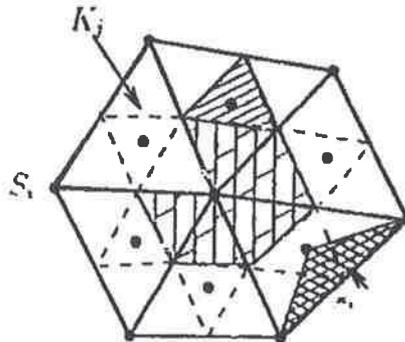


FIG. 2.5 - Description des volumes de contrôle pour la conservation de la masse

2.2.3.2 Justification de ce choix

Cet élément n'est pas standard : c'est une évolution de l'élément de Crouzeix-Raviart, qui est P1 non conforme en vitesse et P0 en pression, puisqu'on y a ajouté des degrés de liberté en pression.

Les raisons de ce choix sont les suivantes :

- L'augmentation du nombre de ddl en pression a été dicté par les résultats de la thèse de P. Rollet-Miet (cf. [RM97]) : elle a mis en évidence l'importance d'avoir un nombre de ddl en pression proche du nombre de ddl en vitesse, pour avoir le même filtre en vitesse et en pression, puisque c'est ce que nous supposons quand nous établissons les équations de Navier-Stokes filtrées : nous nous en approchons avec cet élément.
- Pour l'élément P1NC/P0, le gradient de pression n'est pas consistant, puisqu'il n'est défini que dans les directions normales aux faces. Avec le nouvel élément P1NC/P1bulle, le gradient est défini dans les directions normales aux faces, grâce aux points de pression situés au centre de gravité des éléments, et dans les directions tangentes aux faces, grâce aux points de pression situés aux sommets : le gradient est plus consistant.
- L'espace à divergence nulle est trop grand pour l'élément de Crouzeix-Raviart : en effet, le champ de vitesse représenté sur la figure 2.6 a une divergence nulle discrète alors que sa divergence continue ne l'est clairement pas. Avec l'élément P1NC/P1Bulle, l'espace à divergence nulle est réduit : un tel champ a une divergence discrète non nulle, puisque l'équation de continuité est résolue sur les deux types de volumes de contrôle définis ci-dessus.

L'analyse mathématique de cet élément a été réalisé dans le cadre des Eléments Finis par C. Bernardi et F. Hecht ([BH00]) : elle est poursuivie dans le cadre des Volumes Eléments Finis qui est le notre par S. Heib ([HE01]). Lors de cette analyse, S. Heib a démontré l'existence d'un mode parasite asymptotique en pression : un filtrage permet de l'éliminer et d'accéder à la pression physique.

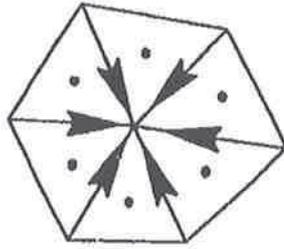


FIG. 2.6 - Exemple de champ de vitesse ayant une divergence discrète nulle pour l'élément de Crouzeix-Raviart et une divergence continue non nulle

2.3 Algorithme de résolution

2.3.1 Description

La solution des équations de Navier-Stokes est formée par le couple vitesse-pression. Le problème de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes consiste dans le fait que la vitesse et la pression sont couplées par l'intermédiaire du gradient de pression, mais qu'il n'existe pas d'équations pour la pression seule. La solution de ces équations est donc une pression et une vitesse qui satisfont l'équation de continuité.

Une méthode de résolution peut donc être interprétée comme un problème d'optimisation sous contrainte: nous recherchons un champ de vitesse qui vérifie l'équation de conservation de la quantité de mouvement et qui vérifie également l'équation de continuité (contrainte). La méthode utilisée ici est un schéma de projection matricielle, inspiré de la méthode SOLA, développé par Hirt [HNR75] (cf. [EMO92], [BEL99], [BAR00]).

2.3.1.1 Principe de l'algorithme utilisé

Afin d'obtenir une équation pour la pression, nous calculons la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Si nous supposons que la divergence de la dérivée temporelle est nulle (puisque nous voulons $\text{div}(\vec{u}) = 0$), nous obtenons une équation linéaire en pression, appelée *équation de Poisson*, que nous résolvons. Nous évaluons ensuite le gradient de pression, que nous réinjectons dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ce qui nous permet alors d'obtenir la vitesse de façon explicite.

2.3.1.2 Formalisme

Ceci peut s'écrire sous forme matricielle, de la manière suivante :

$$M \frac{dU}{dt} + A \cdot U^t + L(U^t) \cdot U^t + B^T \cdot P^{t+1} = SM^t \quad (2.10)$$

$$B \cdot U^{t+1} = 0 \quad (2.11)$$

où nous avons :

- A = matrice de l'opérateur de diffusion
- $L(U^t)$ = matrice de l'opérateur de convection
- B = matrice de l'opérateur de divergence
- B^T = matrice de l'opérateur de gradient
- M = matrice de masse approchée : $M = \left(\int_{K_i} dv \right) I$
- SM = second membre (somme des forces de volume)

$$U^t = \begin{pmatrix} u(x_0, t) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}, t) \\ v(x_0, t) \\ \vdots \\ v(x_{N-1}, t) \\ w(x_0, t) \\ \vdots \\ w(x_{N-1}, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{t+1} = \begin{pmatrix} p(x_{c_0}, t+1) \\ \vdots \\ p(x_{c_{M_c-1}}, t+1) \\ p(x_{s_0}, t+1) \\ \vdots \\ p(x_{s_{M_s-1}}, t+1) \end{pmatrix}$$

N représente ici le nombre total de ddl en vitesse, M_c le nombre de ddl en pression situés aux centre de gravité des éléments et M_s le nombre de ddl en pression situés aux sommets (en maillage structuré: $M_s = 0$).

En multipliant l'équation 2.10 par BM^{-1} et en supposant que : $B \frac{dU}{dt} = 0$, nous obtenons l'équation à résoudre pour la pression, qui correspond à la résolution d'un système linéaire, dont P^{t+1} est la solution :

$$BM^{-1}B^T \cdot P^{t+1} = BM^{-1}(SM^t - (A \cdot U^t + L(U^t) \cdot U^t)) \quad (2.12)$$

En notant :

$$\begin{aligned} E &= BM^{-1}B^T \\ N(U) &= M^{-1}(SM^t - (A \cdot U^t + L(U^t) \cdot U^t)) \\ P &= I - M^{-1}B^TE^{-1}B \end{aligned}$$

Nous avons à résoudre le système suivant, constitué d'une équation différentielle ordinaire et d'une équation algébrique :

$$\frac{dU}{dt} = PN(U) \quad (2.13)$$

$$P = E^{-1}BN(U) \quad (2.14)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à chaque terme de l'équation.

2.3.2 Schémas en temps

Le terme de gauche de l'équation 2.13 est la dérivée temporelle de la vitesse. Elle peut être évaluée de plusieurs manières, selon la précision désirée. Nous allons présenter ici deux méthodes, que nous utiliserons dans la suite : la méthode d'Euler explicite et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.

2.3.2.1 La méthode d'Euler Explicite

Nous évaluons la dérivée temporelle au 1^{er} ordre:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U^{t+1} - U^t}{\Delta t} \quad (2.15)$$

2.3.2.2 La méthode de Runge Kutta d'ordre 3

Nous cherchons à résoudre l'équation suivante:

$$\frac{dU}{dt} = f(U^t) \quad (2.16)$$

Soit $X_0 = U^t$ et $q = \frac{dU}{dt}$.

Nous avons:

$$\begin{cases} q_1 = f(X_0) \cdot \Delta t \\ X_1 = X_0 + b_1 \cdot q_1 \\ q_2 = f(X_1) \cdot \Delta t + a_1 \cdot q_1 \\ X_2 = X_1 + b_2 \cdot q_2 \\ q_3 = f(X_2) \cdot \Delta t + a_2 \cdot q_2 \\ X_3 = X_2 + b_3 \cdot q_3 \end{cases} \quad \text{avec les coefficients suivants: } \begin{matrix} a_1 = -5/9 \\ a_2 = -153/128 \\ b_1 = 1/3 \\ b_2 = 15/16 \\ b_3 = 8/15 \end{matrix} \quad (2.17)$$

Cette méthode demande un grand nombre de calculs par pas de temps, elle est donc assez coûteuse en temps de calcul. Par contre, c'est une méthode très robuste et très précise (cf. [WIL80]).

2.3.3 Opérateur de diffusion

Nous allons nous intéresser au terme diffusif de l'équation 2.6, qui a la forme suivante:

$$F_d = \int_{\partial V} 2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij} n_j ds \quad (2.18)$$

La viscosité turbulente est constante par élément. Selon la discrétisation, nous évaluons les différents termes de la façon suivante:

- En VDF, nous évaluons les dérivées croisées (i.e. $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ avec $i \neq j$) aux arêtes des éléments (notées a_{ij} , cf. figure 2.7 pour les notations), et les dérivées non croisées aux faces. Soit S_{face} , la surface de la face considérée et K_{ij} l'élément ij . Les faces des volumes de contrôle sont appelées *facettes* (et notées $fa7$). Nous avons alors:

$$\int_{\partial V} 2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij} n_j ds = \sum_k (\bar{S}_{ij})|_{fa7_k} (\nu + \nu_t|_{fa7_k}) S_{fa7_k} \quad (2.19)$$

$$\text{où: } \nu_t|_{fa7_k} = \begin{cases} \nu_t|_{K_{ij}} & \text{si } fa7_k \subset K_{ij} \\ \frac{1}{4} (\nu_t|_{K_{i-1j}} + \nu_t|_{K_{i-1j+1}} + \nu_t|_{K_{ij+1}} + \nu_t|_{K_{ij+1}}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.20)$$

En deux dimensions, l'expression est alors la suivante (avec les notations de la figure 2.7):

$$\begin{aligned}
 F_d = & -2(\nu + \nu_{t|i-1,j}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{|i-1,j} Sx_{i-1,j} + 2(\nu + \nu_{t|i,j}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{|i,j} Sx_{i,j} \\
 & + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{|a_i,j+1} (\nu + \nu_{t|a_i,j+1}) Sy_{a_i,j+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{|a_i,j} (\nu + \nu_{t|a_i,j}) Sy_{a_i,j}
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

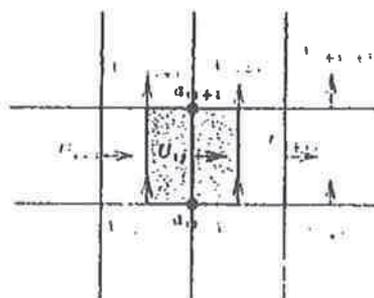


FIG. 2.7 - Notations pour le calcul de la diffusion en VDF

- En VEF, comme la vitesse est linéaire sur les éléments, nous pouvons calculer ses dérivées, qui sont constantes par élément.

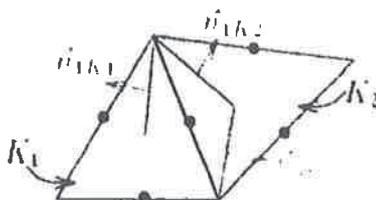


FIG. 2.8 - Notations pour le calcul de la diffusion en VEF

Avec les notations de la figure 2.8, nous avons :

$$\int_{\partial V} 2(\nu + \nu_t) \tilde{S}_{ij} n_j ds = \sum_{i=1}^3 \tilde{S}_{ij,K_i} (\nu + \nu_{t(K_i)}) (S_{j\alpha\tau_i}(\partial V \cap K_i) u_{i\alpha K_i} + S_{j\beta\tau_i}(\partial V \cap K_i) u_{i\beta K_i})
 \tag{2.22}$$

Le traitement des conditions aux limites de paroi sera précisé au chapitre 4.

Calcul du pas de temps de stabilité

- En maillages structurés, nous avons :

$$\Delta t_D = \frac{1}{\max_{\Omega} \left[2\nu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right]}
 \tag{2.23}$$

- En maillages non structurés, nous avons :

$$\Delta t_D = \min_{\Omega} \left[\frac{h_{curr,K}}{2\nu \dim} \right]
 \tag{2.24}$$

où $h_{curr,K} = \frac{Vol(K)}{\max_i(S_{face_i})}$, K étant un élément et $face_i$, ses faces.

2.3.4 Opérateur de convection

Le terme convectif s'écrit :

$$F_c = \int_{\partial V} \bar{u}_i \bar{u}_j n_j ds \quad (2.25)$$

C'est le terme non linéaire des équations de Navier-Stokes, et à ce titre, celui qui pose le plus de problèmes. Son traitement dépend de la discrétisation, mais également du schéma de convection choisi. Nous en reparlerons dans la suite de ce travail, puisque c'est un des points sur lequel s'est porté notre attention.

Calcul du pas de temps de stabilité

- En maillages structurés, nous calculons le pas de temps tel que le fluide ne traverse pas plus d'une maille par pas de temps. Cela correspond à la condition de Courant-Friedrich-Lewy (CFL) : $CFL = 1$.

Soit $flux_{ent} = S.u$, le flux entrant dans un volume de contrôle, de mesure Vol .

Nous avons :

$$\Delta t_C = \min_{\Omega} \left[\frac{Vol}{flux_{ent}} \right] \quad (2.26)$$

- En maillages non structurés, nous le calculons d'une manière analogue, bien que l'interprétation en terme de condition CFL soit moins immédiate.

2.3.5 La résolution en pression

Nous résolvons l'équation de Poisson, correspondant à la résolution d'un système linéaire :

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}) \right) + \frac{\partial f_u}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) \right) \quad (2.27)$$

Nous pouvons utiliser les différentes méthodes de résolution des systèmes linéaires. Les méthodes actuellement disponibles sont :

- le gradient conjugué avec préconditionnement SSOR
- le méthode de Cholesky
- des méthodes multi-grille.

La méthode utilisée au cours de ce travail est le gradient conjugué avec préconditionnement SSOR, car elle converge plus rapidement que les méthodes multi-grille et qu'elle permet de traiter tous les maillages, alors que la méthode de Cholesky (méthode de résolution directe) reste limité à des maillages relativement petits (de l'ordre de 200 000 éléments) du fait de l'encombrement mémoire.

2.3.6 Calcul du pas de temps de stabilité de la simulation

Nous avons vu, que pour chaque opérateur, nous calculons un pas de temps de stabilité. Pour calculer le pas de temps du calcul (si nous ne le fixons pas), nous utilisons l'expression suivante :

$$\Delta t = \frac{1}{\frac{1}{\Delta t_C} + \frac{1}{\Delta t_D}}$$

On peut ensuite introduire un facteur de sécurité (le "Fascsec") pour réduire le pas de temps. Nous avons alors : $\Delta t_{réel} = Fascsec \times \Delta t_{calculé}$, situation correspondant alors à une CFL égale à Fascsec.

Chapitre 3

Modélisation sous-maille

3.1 Le terme à modéliser

Comme décrit au paragraphe 1.3.4, nous utilisons une hypothèse de viscosité turbulente, pour déterminer l'expression du tenseur des contraintes sous-maille.

Nous avons alors :

$$T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{ii} = 2\nu_t\bar{S}_{ij} \quad (3.1)$$

Les différents modèles présentés ci-dessous donnent une expression pour la viscosité turbulente.

3.2 Le modèle de Smagorinsky

3.2.1 Présentation

C'est historiquement le premier modèle sous-maille. Il a été élaboré et utilisé par Smagorinsky en 1963 ([SMA63]), pour simuler les mouvements à grande échelle de l'atmosphère.

On fait ici l'hypothèse que les petites échelles sont en équilibre, c'est-à-dire que la production et la dissipation d'énergie se compensent.

ν_t est alors proportionnelle à :

- une longueur caractéristique sous-maille : Δx ,
- une vitesse caractéristique turbulente : $\nu_{\Delta x} = \Delta x \|\bar{S}\|$, où $\|\bar{S}\| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ représente un gradient de vitesse typique à l'échelle de Δx .

Nous avons alors :

$$\boxed{\nu_t = (C_s \Delta x)^2 \|\bar{S}\|} \quad (3.2)$$

3.2.2 Détermination de C_s

Soit $E(k)$, le spectre d'énergie cinétique turbulente et ϵ la dissipation de l'énergie cinétique au nombre d'onde de Kolmogorov k_d . L'hypothèse d'équilibre entre la production et la dissipation conduit à :

$$\epsilon = \int_0^{\infty} 2\nu_t k^2 E(k) dk \quad (3.3)$$

Pour calculer la constante, nous supposons que la turbulence est isotrope, c'est-à-dire que le spectre est un spectre de Kolmogorov : $E(k) = C_k \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$, pour $k \in [0, +\infty[$. C_k est la

constante de Kolmogorov.

La valeur théorique est alors :

$$C_s \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{3C_k}{2} \right)^{-3/4} \quad (3.4)$$

Pour $C_k = 1.4$, $C_s \simeq 0.18$: cette valeur donne de bons résultats en Turbulence Isotrope.

Pour la simulation d'écoulements en canal ou cisailés, la constante $C_s = 0.1$ est préférée (cf. [LM96]). En effet, en présence de cisaillement moyen, il faut diminuer la constante de Smagorinsky, car le gradient de vitesse moyenne résolue est sur-estimé (Moin et Kim [MK82]).

La valeur $C_s \simeq 0.1$ est utilisée pour les écoulements suivants :

- écoulement cisailé libre
- écoulement en canal (avec des lois d'amortissement) (Moin et Kim [MK82], Deardorff [DEA70])
- écoulement sur une marche descendante
- écoulement en conduite, où $C_s = \min(l_m, C_s \Delta x)$ avec l_m longueur de mélange dans la région près de la paroi.

3.2.3 Inconvénients du modèle

Ce modèle pose un certain nombre de problèmes.

- près des parois : la viscosité turbulente ne tend pas vers 0. Or, comme dans la région de proche paroi, les forces visqueuses sont prépondérantes par rapport aux forces d'inertie, la viscosité turbulente doit tendre vers 0. Il faut alors utiliser des lois de paroi, comme la loi de Van Driest, pour forcer le bon comportement. La viscosité turbulente prend alors la forme suivante :

$$\nu_t = (C_s D \Delta x)^2 \|\hat{S}\| \text{ avec } D = 1 - \exp \left[- \left(\frac{y^+}{A^+} \right) \right], \quad A^+ = 25 \quad (3.5)$$

- le modèle est trop dissipatif : il inhibe la transition à la turbulence, dans certaines situations. On peut introduire des fonctions d'intermittence permettant de rendre ν_t nulle dans les premiers instants de la transition.

3.3 Le modèle de Smagorinsky dynamique

Le modèle précédent est trop dissipatif : il faut adapter la constante du modèle au cas considéré. Il n'y a pas de constante universelle pour tous les types d'écoulement : en transition, avec parois, cisailés... L'idée du modèle dynamique est de calculer la constante du modèle à chaque pas de temps. On n'utilise plus de constante imposée a priori : elle s'adapte au régime de l'écoulement (cf. [GPMC91]).

3.3.1 Principe

On considère ici deux filtres :

- le premier, appelé filtre SGE et noté G , est le filtre utilisé (i.e. implicite ou explicite) dans les calculs SGE non dynamique, de largeur $\bar{\Delta}$.
- Le deuxième \tilde{G} , appelé filtre test, a une largeur de coupure plus grande $\tilde{\Delta}$.

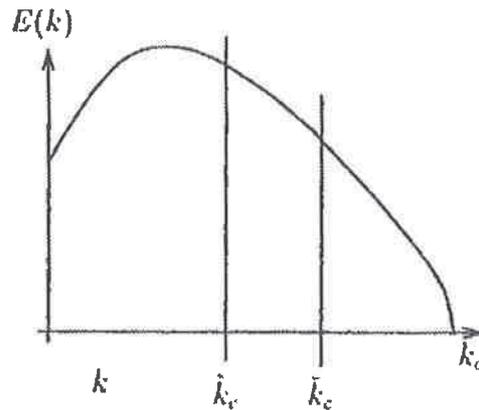


FIG. 3.1 – Filtre SGE et filtre test du modèle dynamique

Soit $\tilde{\tilde{G}} = \tilde{G} * \tilde{G}$.

L'utilisation des deux filtres permet de déterminer la constante du modèle numériquement. En effet, une partie des échelles modélisées par le filtre test est résolue explicitement par le filtre SGE (cf. figure 3.1, zone grisée).

Nous avons :

- Filtrage par \tilde{G}

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \tilde{S}_{ij}) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{avec } \tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (3.8)$$

- Ensuite filtrage par \tilde{G}

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\tilde{p}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \tilde{\tilde{S}}_{ij}) - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{avec } T_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j \quad (3.11)$$

T_{ij} et τ_{ij} , les tenseurs sous-maille relatifs aux équations filtrées précédentes, doivent être modélisés. Les tensions résolues sont :

$$\mathcal{L}_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j$$

Cette grandeur représente les contributions aux tensions de Reynolds des échelles comprises entre la largeur du filtre SGE et du filtre test. \mathcal{L}_{ij} peut être calculée explicitement. L'identité de Germano ([GER92]), nous donne :

$$\mathcal{L}_{ij} = T_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} \quad (3.12)$$

Nous supposons que nous pouvons utiliser le même modèle (ici le modèle de Smagorinsky) pour T_{ij} et τ_{ij} , avec le même coefficient. En d'autres termes, nous faisons une hypothèse de similarité d'échelle entre les tensions sous-maille au niveau du filtre SGE et du filtre test, c'est-à-dire que nous supposons que les deux filtres agissent sur la même zone du spectre d'énergie turbulente : la zone inertielle. Le modèle dynamique peut être utilisé avec tout autre modèle sous-maille basé sur une hypothèse de viscosité turbulente.

Nous avons alors :

$$r_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} r_{kk} = -2 C \bar{\Delta}^2 \|\bar{S}\| \bar{S}_{ij} \quad (3.13)$$

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{kk} = -2 C \hat{\Delta}^2 \|\hat{S}\| \hat{S}_{ij} \quad (3.14)$$

En supposant que C fluctue peu sur l'échelle du filtre, nous pouvons le sortir de l'opérateur de filtrage, et nous obtenons :

$$\mathcal{L}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \mathcal{L}_{kk} = -2 C M_{ij} \quad (3.15)$$

$$\text{avec } M_{ij} = \Delta^2 (\alpha^2 \|\hat{S}\| \hat{S}_{ij} - \|\bar{S}\| \bar{S}_{ij}) \text{ et } \alpha = \frac{\hat{\Delta}}{\bar{\Delta}} \quad (3.16)$$

Il y a alors plusieurs méthodes pour extraire la constante (cf. [RM97]). Nous avons choisi d'utiliser l'approche des moindres carrés, proposée par Lilly (cf. [LIL92]) :

$$Q = \left(\mathcal{L}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \mathcal{L}_{kk} + 2 C M_{ij} \right)^2 \quad (3.17)$$

Q est minimum quand : $C = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}$.

Avec cette expression, C peut devenir négatif. On peut alors considérer que le modèle représente le transfert inverse d'énergie (backscatter), bien qu'il ne se fasse plutôt d'une manière mathématique que physique. Il faut donc borner ce coefficient, pour ne pas risquer de voir apparaître des oscillations numériques. Pour limiter les instabilités, C est moyenné localement et borné entre -0.3 et 0.5.

3.3.2 Mise en œuvre

Les détails de l'implémentation peuvent être trouvés dans le rapport [BCE97]. Nous voudrions ici préciser quelques points sur le filtre-test, car des modifications ont été apportées.

Le filtre test utilisé est un filtre discret. On peut le considérer comme étant l'application successive d'un filtre discret monodimensionnel aux différentes directions. Son noyau de convolution est défini par :

$$G(x-y) = \sum_{l=-N}^N a_l \delta(x-y+l\Delta x) \quad (3.18)$$

avec $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{-1} = a_1 = \frac{1}{4}$

Ce filtre a une largeur de coupure $\sqrt{6}\Delta x$ (cf. [SAG98]). Il correspond à un filtre gaussien discrétisé sur trois points. Nous avons donc $\alpha = \sqrt{6}$.

Le modèle dynamique est actuellement uniquement implanté en maillages structurés, car en maillages non structurés se pose le problème de l'implantation d'un filtre discret. P. Rollet-Miet ([RM97]) s'est intéressée à ce problème avec une discrétisation colocalisée P1/P1. Pour notre discrétisation, ce problème se pose à nouveau : la non-conformité de l'élément entraîne des difficultés pour la définition d'un filtre test.

3.4 Les modèles utilisant la fonction de structure

Le modèle de la fonction de structure est la transposition dans l'espace physique du modèle de viscosité turbulente spectrale, obtenu dans le cadre de la théorie EDQNM (Eddy Damped Quasy Normal Markovian) (cf. [LES97c],[ML92]).

3.4.1 Résultats de la théorie EDQNM concernant la viscosité turbulente spectrale

En EDQNM, nous cherchons à résoudre l'équation régissant l'évolution du spectre d'énergie cinétique turbulente des échelles résolues \bar{E} :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) \bar{E}(k, t) = T_{<k_c}(k, t) + T_{>k_c}(k, t) \quad (3.19)$$

où $T_{>k_c}$ est le terme représentant les transferts d'énergie à travers la coupure k_c , correspondant aux transferts d'énergie entre les triades de nombres d'onde, où au moins un des nombres d'onde est supérieur à k_c , et $T_{<k_c}$ est celui représentant les transferts aux grandes échelles (pour $k < k_c$).

La viscosité turbulente est définie de la manière suivante :

$$\nu_t \left(\frac{k}{k_c}\right) = -\frac{T_{>k_c}(k, t)}{2k^2 E(k, t)} \quad (3.20)$$

$\bar{E}(k, t)$ vérifie alors l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\left(\nu + \nu_t \left(\frac{k}{k_c}\right)\right) k^2\right) \bar{E}(k, t) = T_{<k_c}(k, t) \quad (3.21)$$

Expression de ν_t avec "cusp"

Si on suppose que k_c se trouve dans une zone inertielle de vitesse en $k^{-5/3}$, la viscosité turbulente spectrale prend la forme suivante (cf. [LM96]) :

$$\nu_t(k, k_c) = 0.441 C_k^{-3/2} \left[\frac{E(k_c)}{k_c}\right]^{1/2} \nu_t^* \left(\frac{k}{k_c}\right) \quad (3.22)$$

$\nu_t^*(k/k_c)$ est une viscosité turbulente adimensionnelle, qui est constante et égale à 1 si $k/k_c \leq 0.3$, et croît fortement pour les plus grandes valeurs de k , jusqu'à $k/k_c = 1$, exprimant que l'essentiel des transferts d'énergie se font entre nombre d'onde proche de k_c . Son expression peut être déterminée de deux manières différentes.

- Nous pouvons écrire ν_t^* sous la forme : $\nu_t^*(x) = 1 + \nu_n^* x^{2n}$.
 ν_n^* est alors déterminé grâce à l'égalité du flux d'énergie cinétique sous-maille et du flux d'énergie cinétique de la cascade de Kolmogorov :

$$\epsilon = \int_0^\infty 2\nu_t k^2 E(k) dk, \text{ en supposant } E(k) = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \text{ pour } k \in [0, +\infty[\quad (3.23)$$

d'où :

$$\nu_n^* = \left(1 + \frac{3n}{2}\right) \left(\frac{2}{3 \times 0.441} - 1\right) \quad (3.24)$$

- J.P. Chollet ([CHO85]) a déterminé l'expression de ν_n^* par calage empirique des valeurs du transfert sous-maille, calculé numériquement. L'expression est la suivante :

$$\nu_t^* \left(\frac{k}{k_c}\right) = 1 + 34.5e^{-3.03 \left(\frac{k}{k_c}\right)} \quad (3.25)$$

L'expression de la viscosité turbulente ainsi obtenue est dénommée sous le nom de *modèle de viscosité turbulente spectrale* abrégé dans la suite par *modèle VTS*.

Expression de ν_t sans "cusp"

Si dans un premier temps on ne veut pas tenir compte du "cusp", on peut utiliser l'équation 3.23 pour déterminer une expression moyenne de ν_t sur l'ensemble des nombres d'onde considérés. (cf. [LQ96], [ML92]).

Nous avons alors :

$$\nu_t = \frac{2}{3} C_k^{-3/2} \left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \quad (3.26)$$

Hypothèse importante Pour être dans le domaine de validité de ces modèles, il faut que k_c soit dans la zone inertielle. Si k_c correspond à des échelles plus grandes, (celles des tourbillons injectant de l'énergie dans l'écoulement), tout ceci n'est plus valable, car supposer k_c dans la zone inertielle revient à supposer l'isotropie à petite échelle et en particulier aux échelles modélisées.

3.4.2 Passage dans l'espace physique**3.4.2.1 Modèle de la fonction de structure**

Dans l'espace physique, on utilise le principe de la viscosité turbulente spectrale, en lui donnant une expression locale : on veut pouvoir prendre en compte l'intermittence locale de la turbulence et réduire ν_t , là où la turbulence à petite échelle n'est pas développée. Il faut donc déterminer un spectre d'énergie cinétique local pour définir ν_t .

En passant dans l'espace physique (cf. [ML92]), nous avons :

$$\nu_t(\vec{x}, \Delta\vec{x}) = \frac{2}{3} C_k^{-3/2} \left[\frac{E_{\vec{x}}(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

Pour exprimer le spectre d'énergie cinétique local $E_{\vec{x}}(k_c)$, nous utilisons la fonction de structure du second ordre du champ de vitesse filtré, noté \tilde{F}_2 . En effet, $\tilde{F}_2 \approx v_r^2$, où v_r est typique de la différence de vitesse entre deux points d'un tourbillon distants d'une amplitude de r .

Par définition,

$$F_2(\vec{x}, \Delta\vec{x}) = \langle \|\tilde{u}(\vec{x}, t) - \tilde{u}(\vec{x} + \vec{r}, t)\|^2 \rangle_{\|\vec{r}\|=\Delta\vec{x}} \quad (3.28)$$

F_2 est la fonction de structure d'ordre 2 du champ de vitesse \tilde{u} , \tilde{F}_2 , celle du champ de vitesse filtré \tilde{u} .

On suppose que la turbulence sous-maille correspond à une turbulence tridimensionnelle isotrope, ce qui est vérifié si k_c est "assez élevé", i.e. si k_c est dans la zone inertielle.

D'après la formule de Batchelor, nous avons :

$$F_2(\vec{x}, \Delta\vec{x}) = \int_0^\infty E(k) \left(1 - \frac{\sin(k\Delta\vec{x})}{k\Delta\vec{x}} \right) dk \quad (3.29)$$

d'où :

$$E_x(k_c) = \frac{1}{4,8211^{5/3}} \Delta\vec{x} F_2(\vec{x}, \Delta\vec{x}) \quad (3.30)$$

Or :

$$F_2(\vec{x}, \Delta\vec{x}) = 2,53 \tilde{F}_2(\vec{x}, \Delta\vec{x}) \quad (3.31)$$

Nous obtenons alors :

$$\nu_t(\bar{x}, \Delta x) = 0.105c_k^{-3/2} \Delta x [\bar{F}_2(\bar{x}, \Delta x)]^{1/2} \tag{3.32}$$

Pour la suite, nous noterons : $C_{FS} = 0.105c_k^{-3/2}$.

Conséquence du passage dans l'espace physique :

Dans l'espace spectral, tant qu'il n'y a pas d'énergie à la coupure (i.e. $E(k_c) = 0$: l'écoulement est laminaire ou en transition), la viscosité turbulente spectrale est nulle : nous perdons cette propriété au passage dans l'espace physique. En effet, comme nous évaluons l'énergie grâce à la fonction de structure d'ordre 2 des vitesses, nous devenons sensible aux gradients moyens de vitesse de l'écoulement, qui peuvent être présents dans des situations laminaires ou pendant la transition. Or, dans ces situations, la viscosité ne doit pas être trop forte pour ne pas inhiber, par exemple, la transition ; elle devrait même être nulle dans le cas laminaire. Nous verrons ci-dessous les modèles de la fonction de structure sélective et filtrée, qui cherchent à pallier ce défaut.

Le modèle présenté ci-dessus donne de bons résultats pour les types d'écoulements suivants :

- Turbulence isotrope (cf. [LM96])
- écoulements cisailés libres (cf. [LM96], [GON93])

Par contre, il produit une trop grande dissipation dans des situations quasi-bidimensionnelles ou en transition : la transition est alors inhibée. (cf. [LM96])

3.4.2.2 Version sélective du modèle (E. David) (SFS)

L'idée de ce deuxième modèle est d'annuler la viscosité turbulente quand l'écoulement n'est pas "assez tridimensionnel", ce qui sous-entend ici pas "assez turbulent", pour éviter le problème décrit ci-dessus. Or, la présence de petites échelles turbulentes doit se traduire par une forte variabilité de la vorticité d'une maille à l'autre, c'est pourquoi le critère mis au point par E. David (cf. [DAV93]) est basé sur l'angle formé par la vorticité au point M considéré $\vec{\omega}(M)$, et $\bar{\omega}(M)$, la vorticité moyenne calculée sur les points voisins M_i . Elle peut être évaluée grâce à l'expression suivante :

$$\bar{\omega}(M) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d(M, M_i)} \vec{\omega}(M_i)}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d(M, M_i)}} \tag{3.33}$$

Soit α l'angle formé par $\vec{\omega}(M)$ et $\bar{\omega}(M)$: $\alpha = (\vec{\omega}(M), \bar{\omega}(M))$. Une grande valeur de α signifie que la direction de la vorticité varie beaucoup d'un point à l'autre, ce que l'on interprète comme un indicateur de turbulence à petite échelle. Inversement, une petite valeur de α montre une tendance à l'alignement de la vorticité sur un certain voisinage, ce qui est le cas en régime laminaire ou au début de la transition, avant que l'écoulement n'ait développé de tridimensionnalité.

On considère que l'écoulement n'est localement pas assez turbulent, si $(\vec{\omega}, \bar{\omega}) < 20^\circ$; la viscosité turbulente est alors annulée. L'angle de 20° a été déterminé par E. David, grâce à l'étude des statistiques de simulation de turbulence isotrope, pour des résolutions de 32^3 et 48^3 , à partir d'un état initial où le spectre d'énergie est un spectre de Kolmogorov, sur toutes les échelles représentées.

Il faut alors modifier la constante C_{FS} pour que le flux d'énergie cinétique sous-maille

soit le même pour les deux modèles, pour des simulations de turbulence isotrope: pour cela, il a cherché à égaler les moyennes spatiales de la viscosité turbulente obtenues avec le modèle non sélectif et sa version sélective. La constante déterminée par E. David est: $C_{FSS} = 1.56 \times C_{FS}$.

Nous avons alors:

$$\nu_t(k) = 0.104 \Phi_{20^\circ}(\bar{x}, t) \Delta x [\bar{F}_2(\bar{x}, \Delta x)]^{1/2} \quad (3.34)$$

où $\Phi_{20^\circ}(\bar{x}, t)$ est la fonction indicatrice de l'angle α , définie par:

$$\Phi_{20^\circ}(\bar{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \geq 20^\circ \\ 0 & \text{si } \alpha < 20^\circ \end{cases}$$

Ce modèle donne de bons résultats pour les types d'écoulements suivants:

- turbulence isotrope
- écoulements cisailés libres (amélioration par rapport au précédent cf. B. Fallon [FAL94])
- écoulements compressibles (E. David ([DAV93]))
- transition dans les jets (G. Urbin [URB98])

Nous reviendrons sur ce modèle au chapitre 6, car c'est celui-ci que nous avons choisi d'utiliser et que nous serons amené à modifier.

3.4.2.3 Version filtrée du modèle (F. Ducros) (FFS)

Cette version cherche à corriger le même défaut du modèle de la fonction de structure que la version précédente. L'idée est qu'il ne faut pas que les basses fréquences de l'écoulement influence la détermination de la viscosité turbulente, comme par exemple la présence de forts gradients moyens.

On soumet alors la vitesse résolue (i.e. la vitesse filtrée par le filtre SGE) à un filtre passe-haut, pour s'affranchir des oscillations basses fréquences qui influencent la détermination de $E_x(k_c)$. Le filtre passe-haut choisi par F. Ducros ([DUC95]) est un tri-laplacien discrétisé, par différences centrés d'ordre 2 (en maillages structurés).

Nous avons alors:

$$\nu_t(k) = 0.0014 C_k^{-3/2} \Delta x [\bar{\bar{F}}_2(\bar{x}, \Delta x)]^{1/2} \quad (3.35)$$

où $\bar{\bar{F}}_2$ est la fonction de structure du champ filtré par les deux filtres successifs (le filtre passe-bas SGE et le filtre explicite passe-haut).

Ce modèle donne de bons résultats pour les types d'écoulements suivants:

- Turbulence Isotrope,
- transition dans une couche limite se développant spatialement (incompressible ou faiblement compressible) ([DUC95], [BRI99]),
- couche de mélange compressible,
- écoulement de canal plan et au dessus d'une cavité ([DUB00]).

Ce modèle permet de bien simuler des écoulements en transition, alors que le modèle de la fonction de structure standard l'inhibe par sa trop forte dissipation. Par contre, ce modèle pose le problème de l'implantation d'un filtre discret (dans ce cas: passe-haut). Son adaptation en maillages non structurés n'est donc pas immédiate.

3.4.2.4 Versions plus avancées

Une critique commune à toutes les versions du modèle de la fonction de structure existe : l'absence de pic de viscosité turbulente au voisinage de k_c . Des modèles sous-maille cherchent à corriger cette lacune, en donnant une expression particulière au terme de dissipation sous-maille en utilisant certaines idées du modèle de la fonction de structure filtrée. Ce sont les modèles de la fonction de structure filtrée avec pic spectral ("Spectral-cusp filtered structure function") et les modèles s'écrivant avec un terme supplémentaire correspondant à une hyperviscosité (cf. [LM96], [MET97]).

3.4.3 Mise en œuvre du calcul de la fonction de structure

3.4.3.1 Détermination de \bar{F}_2 et adaptation aux maillages inhomogènes:

Nous calculons \bar{F}_2 en faisant la moyenne sur les six points voisins de \vec{x} ($N = 3$ dans la formule ci-dessous, cas général), ou sur les 4 points voisins ($N = 2$) s'il existe une direction d'homogénéité (plan horizontal dans le cas d'un canal plan).

Pour un maillage régulier, nous avons:

$$F_2(\vec{x}, \Delta x, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\|\bar{u}(\vec{x}, t) - \bar{u}(\vec{x} + \Delta x_i \vec{e}_i, t)\|^2 + \|\bar{u}(\vec{x}, t) - \bar{u}(\vec{x} - \Delta x_i \vec{e}_i, t)\|^2) \quad (3.36)$$

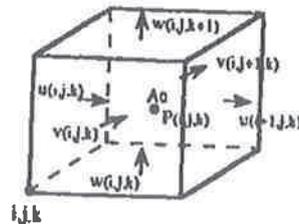
Pour un maillage irrégulier appelé également *inhomogène* (pas de maillage différents selon les directions), il faut adapter ce calcul. La formulation initiale de la loi de Kolmogorov ([KOL41]) nous donne : $F_2 \approx v_r^2 \approx (cr)^{2/3}$ pour les échelles inertielles.

Nous calculons alors \bar{F}_2 dans le cas d'un maillage inhomogène, de la manière suivante :

$$\bar{F}_2(\vec{x}, \Delta x, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[(\|\bar{u}(\vec{x}, t) - \bar{u}(\vec{x} + \Delta x_i \vec{e}_i, t)\|^2 + \|\bar{u}(\vec{x}, t) - \bar{u}(\vec{x} - \Delta x_i \vec{e}_i, t)\|^2) \left(\frac{\Delta c}{\Delta x_i} \right)^{2/3} \right] \quad (3.37)$$

La valeur choisie pour Δc est précisée selon l'implémentation.

3.4.3.2 Implémentation en maillages structurés



En maillage structuré, la fonction de structure est calculée au centre des éléments, en utilisant les valeurs des vitesses dans les trois directions. (cf. B. Fallon [FAL94])

Par interpolation linéaire, la fonction de structure dans la direction x , s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(\vec{x}, \Delta x_1, t) &= (U_{ijk} - U_{i+1jk})^2 \\ &+ \frac{1}{4} [(V_{ijk} - V_{i+1jk})^2 + (V_{ij+1k} - V_{i+1j+1k})^2 + (V_{i-1jk} - V_{ijk})^2 + (V_{i-1j+1k} - V_{ij+1k})^2] \\ &+ \frac{1}{4} [(W_{ijk} - W_{i+1jk})^2 + (W_{ijk+1} - W_{i+1jk+1})^2 + (W_{i-1jk} - W_{ijk})^2 + (W_{i-1jk+1} - W_{ijk+1})^2] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nous avons alors :

$$\bar{F}_2(\bar{x}, \Delta c, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{F}_2(\bar{x}, \Delta x_i, t) \left(\frac{\Delta c}{\Delta x_i} \right)^{2/3} \quad (3.39)$$

Δc est pris égal à la racine cubique du volume : $\Delta c = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 \Delta x_i}$.

L'implémentation en maillages non structurés sera présentée au chapitre 8.

3.5 Le modèle de Bardina et le modèle mixte

Nous avons présenté uniquement les modèles que nous utiliserons au cours de notre travail, mais il existe un grand nombre de modèles sous-maille (cf. [RM97], [SAG98]). Nous allons décrire le principe du modèle de Bardina ou de similitude d'échelles ainsi que le modèle mixte qui en dérive, car ce dernier modèle permet, pour un filtrage dans l'espace physique, de bien reconstituer une partie des effets sous-maille importants.

Le modèle de Bardina, contrairement à tous ceux présentés jusqu'à maintenant, n'impose pas l'alignement des axes du tenseur sous-maille et du tenseur de déformation, ce qui est plus proche de la réalité, puisque des analyses sur des champs de vitesse résultant d'une Simulation Numérique Directe montrent une très faible corrélation entre ces deux tenseurs ([CFR79],[MF80] et [LMK94]). Pour cela, Bardina utilise un double filtrage, car il considère que les interactions les plus importantes ont lieu entre les plus petites échelles résolues et les plus grandes échelles modélisées. Il propose donc d'évaluer le tenseur sous-maille à l'aide de l'expression suivante :

$$T_{ij} = \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j \quad (3.40)$$

Des tests à priori de ce modèle montre que l'évaluation des contraintes est très bonne. Par contre, dans une Simulation des Grandes Echelles, il ne produit pas assez de dissipation. Pour pallier cela, il est possible de le combiner avec un modèle utilisant le principe de viscosité turbulente, ce qui constitue alors le modèle mixte. De très bons résultats sont obtenus avec ce modèle, en particulier sur le cas du canal plan turbulent.

D'autres variantes du modèle de Bardina ont été proposées. Il prend alors la forme suivante :

$$T_{ij} = C_l \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j \quad (3.41)$$

C_l est une constante adimensionnelle ; l'opérateur $\bar{\bar{\cdot}}$ correspond à une moyenne spatiale pour la variante proposée par Goutorbe ([GLM]) et à un second filtre ayant une largeur de coupure différente pour celle de Liu ([LMK94]).

Chapitre 4

Modélisation de la région de proche paroi : Description des lois de paroi

4.1 Description de la zone de proche paroi

Avant de nous intéresser aux lois de paroi proprement dites, nous rappelons les principales caractéristiques d'un écoulement pariétal, car leur connaissance est nécessaire pour la modélisation de la zone de proche paroi.

4.1.1 Définition des notations

Nous allons définir les unités de paroi, que nous utiliserons tout au long de ce travail. Elles sont constituées d'une longueur l_p et d'une vitesse u^* , appelée *vitesse de frottement*, caractéristiques. Soit τ_p , la norme de la contrainte tangentielle à la paroi. Par définition, nous avons :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad \text{et} \quad l_p = \frac{\nu}{u^*}$$

Nous travaillerons avec des grandeurs adimensionnées par u^* et l_p . Nous définissons :

$$u_i^+ = \frac{\bar{u}_i}{u^*} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y}{l_p} = \frac{y u^*}{\nu}$$

4.1.2 Caractéristiques d'un écoulement pariétal

Dans un écoulement pariétal, on peut distinguer deux zones :

- une région externe où l'écoulement est dominé par les effets inertiels,
- une mince couche près de la paroi, au sein de laquelle les effets de viscosité sont prépondérants.

Dans la zone de paroi, pour $0 < y^+ < 50$, il existe des courants longitudinaux de haute et basse vitesses. Au sein des courants de haute vitesse, le fluide descend et vient impacter la paroi, ce qui crée des zones où le frottement à la paroi est plus fort : le profil de vitesse s'écrase, la vorticité longitudinale augmente. Un haut frottement à la paroi peut donc être la trace de courants de haute vitesse. A l'inverse, dans les courants de basse vitesse, le fluide monte. Ces courants ("streaks", en anglais) forment des structures allongées avec un espacement latéral moyen (normalisé en unités pariétales)   peu près indépendant du nombre de Reynolds et de l'ordre de 100. La largeur de ces structures est de l'ordre de 25, leur longueur de l'ordre de 500.

Une des explications avancées de la présence de ces courants (cf. M. Lesieur [LES97b]) est l'existence de tourbillons longitudinaux alternés à la paroi, mais ceci reste une question controversée, car ils n'ont jamais été observés. Il existe d'autres hypothèses concernant l'origine de ces courants ([LES97c]).

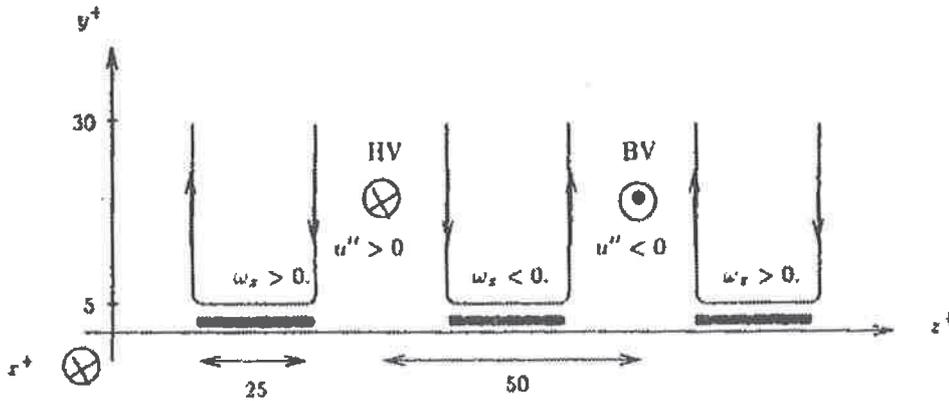


FIG. 4.1 – Tourbillons longitudinaux alternés : une explication possible de l'existence des "streaks". u'' représente la fluctuation de la vitesse longitudinale par rapport à sa valeur moyenne temporelle

Dans la zone externe, des structures tourbillonnaires en épingle à cheveux ("hair-pin") sont présentes. Il ne semble pas y avoir de dépendance au nombre de Reynolds : les structures dans la zone externe sont peu sensibles à la viscosité (cf. [LAM96]).

4.2 Intérêt des lois de paroi

4.2.1 Contexte

Pour bien simuler un écoulement pariétal, il faut bien représenter les structures présentes dans la zone proche de la paroi. Or, les échelles de longueur de celles-ci sont beaucoup plus réduites que celles des structures se développant dans le reste de l'écoulement, à cause du confinement par la paroi. De plus, quand le nombre de Reynolds augmente, les échelles de ces structures diminuent.

Pour réaliser des SND, il faut alors s'approcher très près de la paroi, i.e. mettre le premier point de maillage à $y^+ \simeq 1$. Même pour la géométrie simple du canal plan, cela engendre un maillage avec un grand nombre de points, regroupés pour la plupart dans la zone de paroi.

En RANS, le problème est souvent résolu en utilisant des lois de paroi, comme par exemple la loi dite logarithmique. Ceci donne de bons résultats en canal plan, mais dès qu'il y a des géométries particulières (générant des recirculations par exemple) ou des situations plus complexes (jet impactant, écoulement tournant), les résultats ne sont plus satisfaisants. Certains modèles RANS tiennent directement compte des parois (modèle V2F [MP99], modèle à deux couches [XCN98]). D'autres personnes cherchent à déterminer de nouvelles lois de paroi, qui pourraient être valables pour un spectre plus large de configurations (S. Gent, A. Gerasimov et V. Boyer à UMIST par exemple).

En SGE, ce problème se pose aussi crucialement, mais il est souvent contourné en utilisant à la paroi un maillage semblable à celui d'une SND. Ceci permet de simuler les phénomènes pariétaux, mais augmente considérablement le nombre de points nécessaires : pour une géométrie complexe, il devient à lui seul prohibitif. C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser aux lois de parois, et plus particulièrement à celles mise en œuvre dans le cadre de la SGE.

4.2.2 Principe

L'intérêt d'une loi de paroi est de déterminer le tenseur des contraintes à la paroi à partir de quantités calculées loin de la paroi et de rendre ainsi compte de la turbulence pariétale. On impose alors le "bon" frottement à la paroi; sans utiliser de loi de paroi lorsque le premier point de maillage est placé à $y^+ \geq 5$, la turbulence à la paroi est fortement sous-estimée et l'écoulement simulé, modifié.

4.2.2.1 Mise en œuvre en maillages structurés

La loi de paroi intervient au niveau du calcul des termes diffusifs, puisqu'elle fournit la valeur de la contrainte tangentielle à la paroi, $\tau_p = \rho u^*$, correspondant à la norme $\tau_i = \tilde{S}_{ij} n_j$, où \vec{n} est la normale à la paroi.

Il reste alors à déterminer le signe et les composantes du cisaillement à la paroi (projection de $\vec{\tau}_p$ sur la base de l'espace considéré). Le signe du cisaillement est celui de la dérivée de la vitesse selon la direction normale à la paroi, notée: $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$. Il est donné d'une part par le signe de la composante de la vitesse considérée à la première maille et d'autre part par une donnée géométrique permettant de dire si le point considéré est "au-dessous" ou "au-dessus" de la paroi.

En reprenant les notations du paragraphe 2.3.3 et en deux dimensions, nous avons, si la paroi comprend l'arête a_{ij} :

$$F_d = -(\nu + \nu_{t|i-1,j}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{|i-1,j} S_{x_{i-1,j}} + (\nu + \nu_{t|i,j}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{|i,j} S_{x_{i,j}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{|a_{i,j+1}} (\nu + \nu_{t|a_{i,j+1}}) S_{y_{a_{i,j+1}}} - \boxed{\nu \frac{\tau_p}{\rho} S_{y_{a_{i,j}}}} \quad (4.1)$$

Nous avons encadré le terme, où la loi de paroi est prise en compte.

L'implantation en maillages non structurés sera décrite au chapitre 8.

4.3 Description des lois de paroi

Nous allons maintenant présenter différentes lois de paroi, qui sont actuellement utilisées en Simulation des Grandes Echelles, en fonction de leurs hypothèses.

Nous pouvons séparer les lois présentées en deux types:

- le premier type est basé sur l'existence d'une sous-couche logarithmique dans la zone externe de la couche de paroi,
- le second type ne suppose pas l'existence d'une zone logarithmique.

4.3.1 La loi logarithmique

Cette loi est fréquemment utilisée pour les simulations RANS.

Nous supposons que la vitesse calculée (qui est la vitesse moyenne (cf. chapitre 1), ce qui diffère de celle calculée lors d'une SGE) vérifie les lois décrites ci dessous.

L'écoulement présente trois zones distinctes:

- la sous-couche visqueuse, où les effets visqueux sont prépondérants. Les contraintes turbulentes deviennent négligeables vis à vis des contraintes visqueuses. Le profil de

vitesse est linéaire.

Nous avons:

$$u^+ = y^+ \quad (4.2)$$

Cette zone s'étend de la paroi jusqu'à $y^+ = 5$ environ.

- la zone logarithmique : plus loin de la paroi, les effets turbulents sont prépondérants sur les effets visqueux. Nous avons:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \quad \kappa \simeq 0.41 \text{ et } B \simeq 5.5 \quad (4.3)$$

Cette zone débute vers $y^+ \simeq 30$.

- la zone tampon se situe entre les deux précédentes, i.e. entre $y^+ = 5$ et $y^+ = 30$. Les effets visqueux et turbulents sont tous les deux présents. La loi de Reichard permet de raccorder les deux zones.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + 0.4 + y^+) + 7.8 \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) \right) \quad (4.4)$$

* erreur de signe *

Dans l'implémentation, nous n'utilisons pas cette loi, mais des tabulations des différents paramètres, obtenus à l'aide du modèle de longueur de mélange amélioré par Van Driest.

Dans chaque zone, nous pouvons déterminer la valeur de u^* , directement dans la sous-couche visqueuse ou en résolvant une équation dans la zone logarithmique. Nous disposons alors de la valeur de la norme de la contrainte à la paroi $\tau_p = \rho u^{*2}$.

L'utilisation de cette loi donne de bons résultats, dans des situations simples, comme le canal plan ou l'écoulement sur une plaque plane, avec les méthodes RANS. Mais cette loi est vérifiée pour la vitesse moyenne, nous ne pouvons donc pas l'utiliser directement en Simulation des Grandes Echelles, puisque cela obligerait la vitesse instantanée à vérifier une loi vraie pour la valeur moyenne et donc imposerait une contrainte trop forte sur la vitesse résolue. Un grand nombre des lois de parois proposées pour la Simulation des Grandes Echelles ont donc pour objectif de vérifier la loi logarithmique en moyenne, la moyenne considérée ici pouvant être la moyenne spatiale calculée sur les plans parallèles aux parois.

4.3.2 Lois vérifiant la loi logarithmique en moyenne

Toutes les lois présentées ici sont adaptées au cas du canal plan. Des adaptations sont nécessaires pour les utiliser dans d'autres configurations. Soit un canal plan, d'envergure infinie et de demi-hauteur h , dont les parois sont parallèles au plan défini par (\vec{i}, \vec{k}) (cf. figure 4.2). Nous allons décrire le calcul de la contrainte tangentielle à la paroi, qui s'écrit de la manière suivante, puisque la normale \vec{n} est orientée selon y :

$$\vec{\tau}_p = \tau_1 \vec{i} + \tau_3 \vec{k}, \quad \text{avec } \tau_p = \|\vec{\tau}_p\|$$

Les lois de paroi permettent donc de calculer τ_1 et τ_3 , composantes de la contrainte tangentielle au premier point de maillage à la paroi.

4.3.2.1 Loi proposée par Schumann

En plus de vérifier la loi logarithmique en moyenne, Schumann [SCH75] suppose que la contrainte tangentielle τ_1 est proportionnelle à la vitesse longitudinale, nous avons alors:

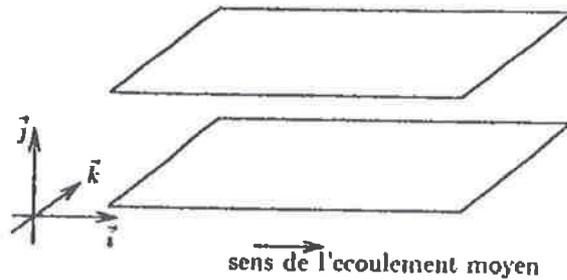


FIG. 4.2 - Définition des notations pour la présentation des lois de paroi

$$\tau_p = \frac{\bar{u}(x, y, z)}{\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle} \langle \tau_p \rangle \quad (4.5)$$

Dans le cas du canal plan, Schumann propose d'évaluer :

- $\langle \tau_p \rangle$ à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement sur l'ensemble du domaine de calcul, i.e. en fonction du gradient de pression longitudinal. En effet, en considérant l'écoulement en canal comme quasi-stationnaire, la première composante de la vitesse vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (4.6)$$

En écrivant le bilan de quantité de mouvement selon cette composante sur l'ensemble du canal plan, de dimension $(L_x, 2h, L_z)$ et soit V son volume, nous avons :

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv + \int_V \frac{\partial uu_j}{\partial x_j} dv = - \int_V \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dv + \int_V \nu \Delta u dv \quad (4.7)$$

D'après la formule d'Ostrogradski, nous avons :

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv + \int_{\partial V} uu_j n_j ds = -L_x 2h L_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \int_{\partial V} \nu \frac{\partial u}{\partial r_j} n_j ds \quad (4.8)$$

En évaluant les différents termes, nous arrivons à l'expression suivante :

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv}_{=0 \text{ (débit constant)}} - \underbrace{\int_{S(x=0)} u^2 ds + \int_{S(x=L_x)} u^2 ds}_{=0} = -L_x 2h L_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu L_x L_z \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=2h} - \nu L_x L_z \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (4.9)$$

Comme par définition : $\tau_p = \rho \nu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0}$ et comme : $\frac{du}{dy} \Big|_{y=2h} = -\frac{du}{dy} \Big|_{y=0}$, nous obtenons l'expression de τ_p , à partir de la valeur du gradient de pression, qui peut être connu à priori :

$$\tau_p = -h \frac{dp}{dx} \quad (4.10)$$

- $\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle$ est obtenu à l'aide de la loi logarithmique, où u^* est remplacé par sa définition : $\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$. $\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle$ vérifie donc l'équation suivante :

$$\frac{\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y u^*}{\nu} \right) + 5.5 \quad (4.11)$$

Pour les autres cas, il calcule $\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle$ à l'aide d'une moyenne spatiale sur le plan parallèle à la paroi de $\bar{u}(x, y, z)$ au temps précédent, et $\langle \tau_p \rangle$ à l'aide de l'équation 4.11 en utilisant la valeur de $\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle$.

Pour l'évaluation de τ_3 , Schumann suppose que \bar{w} a un profil linéaire dans la première maille, ce qui conduit à :

$$\tau_3 = \frac{2}{h^+} \frac{\bar{w}(x, y, z)}{y} \quad (4.12)$$

où h^+ est le nombre de Reynolds turbulent, basé sur u^* et h : $h^+ = \frac{u^* h}{\nu}$.

Comme la moyenne (spatiale ou temporelle) de \bar{w} est égale à 0, nous vérifions bien la loi logarithmique en moyenne.

4.3.2.2 Loi proposée par Grötzbach

La loi de Grötzbach est une extension du modèle de Schumann, à des écoulements où le gradient de pression n'est pas connu a priori.

- Dans l'équation 4.5, $\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle$ correspond maintenant à la moyenne spatiale de $\bar{u}(x, y, z)$ sur le plan constitué par les premiers points de maillage à la paroi supposé plan d'homogénéité. Pour les écoulements stationnaires, on utilise cette valeur moyennée temporellement.
- $\langle \tau_p \rangle$ est alors calculé en résolvant l'équation suivante (correspondant à la loi logarithmique), puisqu'on connaît $\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle$:

$$\frac{\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{y u^*}{\nu} \right) + 5.5 \quad (4.13)$$

On obtient alors u^* , puis $\langle \tau_p \rangle = \rho u^{*2}$

τ_1 et τ_3 sont supposés proportionnelles respectivement à $\bar{u}(x, y, z)$ et $\bar{w}(x, y, z)$, nous avons alors :

$$\tau_1 = \frac{\bar{u}(x, y, z)}{\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle} \langle \tau_p \rangle \quad (4.14)$$

$$\tau_3 = \frac{\bar{w}(x, y, z)}{\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle} \langle \tau_p \rangle \quad (4.15)$$

4.3.2.3 Deux lois proposées par Piomelli, Ferziger, Moin, Kim

L'hypothèse de corrélation de la vitesse à la paroi dans la zone logarithmique avec le frottement à la paroi (posée également dans les deux lois précédentes) est basée sur des

observations expérimentales. Ces corrélations augmentent avec un décalage temporel et un décalage spatial. De plus, les corrélations sont encore plus fortes quand un filtre passe-bas est appliqué, ce qui est une hypothèse bien adaptée à la SGE.

D'après ces remarques, si pour le calcul du frottement à la paroi on utilise un point décalé dans le sens l'écoulement, cela devrait améliorer les performances de la condition aux limites du modèle de Schumann. On améliorera également la prédiction de la composante transversale du frottement à la paroi en utilisant le même principe que pour la composante longitudinale.

Le modèle "décalé" : "shifted model"

Cette première loi de paroi tient compte de la structure des courants de haute et basse vitesse (présentée au paragraphe 4.1.2), présents dans l'écoulement, en particulier de leur inclinaison par rapport à la paroi. Pour évaluer les valeurs à la paroi, Piomelli ([PFMK89]) propose donc d'utiliser les valeurs de la vitesse en un point décalé, par rapport au point considéré (cf. figure 4.3).

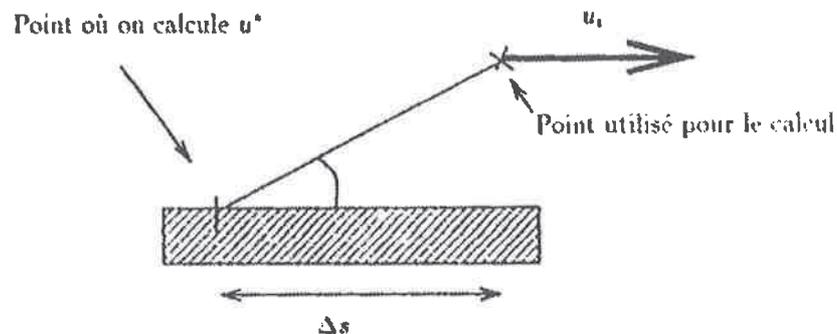


FIG. 4.3 - Décalage pour le calcul de u^*

Nous avons alors :

$$\tau_1 = \frac{\bar{u}(x + \Delta s, y, z)}{\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle} \langle \tau_i \rangle \quad (4.16)$$

$$\tau_3 = \frac{\bar{w}(x + \Delta s, y, z)}{\langle \bar{w}(x, y, z) \rangle} \langle \tau_v \rangle \quad (4.17)$$

Δs est obtenu expérimentalement ou numériquement : $\Delta s = |y| \cot(8^\circ)$ pour $30 \leq y^+ \leq 50 - 60$. 8° correspond à l'angle d'inclinaison des courants de basses vitesses par rapport à la paroi. Si y^+ est plus grand, la corrélation maximale est obtenue pour un plan incliné à 13° .

Le modèle de conditions aux limites d'éjection : "ejection boundary conditions model"

Les courants de haute et basse vitesses influencent le frottement à la paroi, comme nous l'avons décrit au paragraphe 4.1.2. L'impact du fluide à haute vitesse sur la paroi produit une augmentation de la vorticité et donc du frottement à la paroi, alors que l'effet est inverse pour les courants de basse vitesse, c'est à dire lors de l'éjection du fluide. Il y a donc une corélation entre les mouvements verticaux et le frottement, ce qui peut être retranscrit par les expressions suivantes (cf. [PFMK89]):

$$\tau_1 = \langle \tau_p \rangle - c u^+ \bar{v}(x + \Delta s, y_2, z) \quad (4.18)$$

$$\tau_3 = \frac{\bar{w}(x + \Delta s, y, z)}{\langle \bar{u}(x, y, z) \rangle} \langle \tau_p \rangle \quad (4.19)$$

"c" est une constante adimensionnelle telle que la variance de τ_p soit celle des expériences, réalisées sur un canal plan : on prend $c = 1$; $\langle \tau_p \rangle$ est obtenu par la loi logarithmique, comme précédemment.

Nous remarquons que l'expression de τ_1 reproduit bien les effets recherchés :

- Un courant de haute vitesse impacte vers la paroi : \bar{v} est négatif (en étudiant le cas de la paroi inférieure), l'équation 4.18 implique donc un frottement à la paroi plus important que la valeur moyenne,
- dans le cas d'un courant de basse vitesse, le fluide s'éloigne de la paroi, \bar{v} est alors positif et le frottement, plus faible que sa valeur moyenne.

4.3.3 Lois basées sur d'autres hypothèses

4.3.3.1 Loi proposée par Werner et Wengle

Werner et Wengle ([WW91]) proposent une loi basée sur un profil de vitesse suivant une loi en puissance, plutôt qu'une loi logarithmique, au vu de résultats d'expériences réalisées par Ruderich et Fernholz ([RF86]).

Ils supposent que la vitesse a le profil suivant, dans la première maille :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ \leq 11.81 \\ A (y^+)^B & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\text{avec } A = 8.3 \text{ et } B = \frac{1}{7}$$

Soient Δy la hauteur de la maille et u_p la norme de la composante selon x de la vitesse à la demi-maille. Pour obtenir la valeur de u^* , nous intégrons ce profil sur toute la hauteur de la première maille, nous avons :

$$u_p \Delta y = \int_0^{\Delta y} u(y) dy \quad (4.21)$$

Nous obtenons alors pour chaque cas, i.e. pour $\Delta y < y_{lim}$ (y_{lim} correspondant à $y^+ = 11.81$) et $\Delta y > y_{lim}$, la valeur de u^* , les détails des calculs étant présentés dans l'Annexe F. Comme $\tau_p = \rho u^{*2}$, nous avons :

$$\|\tau_p\| = \rho \frac{2\nu \|u_p\|}{\Delta y} \quad \text{si } \|u_p\| \leq \frac{\nu}{2\Delta y} A \Gamma^{\frac{2}{7}} \quad (4.22)$$

$$\|\tau_p\| = \rho \left[\frac{1-B}{2} A^{\frac{1+B}{1-B}} \left(\frac{\nu}{\Delta y} \right)^{1+B} + \frac{1+B}{A} \left(\frac{\nu}{\Delta y} \right)^B \|u_p\| \right]^{\frac{7}{2}} \quad \text{si } \|u_p\| > \frac{\nu}{2\Delta y} A \Gamma^{\frac{2}{7}} \quad (4.23)$$

Les avantages de cette loi sont les suivants :

- la connaissance ou le calcul de $\langle \tau_p \rangle$ et $\langle \bar{u} \rangle$ n'est pas nécessaire,
- les problèmes liés à l'évaluation du terme $\frac{\bar{u}}{\langle \bar{u} \rangle} \langle \tau_p \rangle$ apparaissant lors du réattachement après une zone de recirculation ($\langle \bar{u} \rangle \simeq 0$) sont évités.

4.3.3.2 Conditions aux limites approchées à deux couches (E. Balaras, C. Benocci, U. Piomelli)

Cette approche est très différente de celles présentées ci-dessus. Nous ne supposons pas à priori la forme du profil de vitesse, mais nous résolvons ce qui se passe à la paroi avec une équation simplifiée (cf. [BBP96]).

- *Principe :*

Les équations de Navier-Stokes filtrées sont résolues jusqu'à la première maille. On résout ensuite l'équation simplifiée de couche limite bidimensionnelle dans la première maille, pour les composantes parallèles aux parois :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 u_i) + \frac{\partial}{\partial x_n}(u_n u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \quad (4.24)$$

x_n représente la direction perpendiculaire à la paroi.

La couche interne (contenue dans la première maille) est alors considérée comme entraînée par l'écoulement externe. La viscosité turbulente intervenant dans l'équation 4.24 n'est pas du même type que dans les équations SGE valable pour le reste de l'écoulement, car elle doit représenter l'action de toutes les échelles du mouvement et non pas uniquement celles des échelles sous-maille sur les échelles résolues. Piomelli et Balaras proposent d'utiliser un modèle de longueur de mélange, pour le cas du canal, mais ce choix n'est pas valable pour tous les cas traités.

Ainsi, la résolution de ce problème dans la première maille, nous permet de connaître le profil de vitesse; ceci permet alors le calcul du frottement à la demi-maille. Les conditions aux limites sont données par la vitesse et la pression au premier point de la grille du calcul SGE et par la condition d'adhérence à la paroi.

- *Application et résultats*

Cette loi donne de bons résultats pour le canal plan, le canal plan tournant (cf. [BBP96]). Par contre, pour des écoulements avec présence de décollement (comme la marche descendante), les résultats sont moins bons. Ceci résulte du fait que l'hypothèse de couche limite 2D faite dans la première maille n'est plus valide dans ces cas là.

- *Intérêt*

Cette loi donne de meilleurs résultats que les autres lois de paroi pour le canal, mais elle entraîne une forte augmentation du temps de calcul. De plus, dans des situations complexes, son adaptation ne semble pas aisée et sa validité réduite.

4.3.4 Perspectives immédiates

Notre objectif est d'évaluer les lois de parois, et d'en choisir qui soient applicables à des situations complexes en maillages non structurés. C'est pour cette raison que nous n'avons pas cherché à utiliser la loi à deux couches, car elle n'est pas encore envisageable avec ce type de maillage et sur ces configurations.

Nous allons donc tester, dans le chapitre 7, les lois suivantes :

- la loi logarithmique standard, car elle est, malgré ce qui a été souligné, utilisée dans certaines SGE,
- la loi "décalée" de Piomelli,
- la loi de Grützbaeh,
- la loi de Werner et Wengle.

Chapitre 5

Les Cas Tests Académiques

Nous allons maintenant présenter les cas d'analyse académiques sur lesquels nous allons travailler, afin de d'évaluer les différentes méthodes numériques, modèles sous-maille et lois de paroi. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, ces simulations nous permettent d'étudier séparément les différents phénomènes physiques ou numériques. Nous pouvons ainsi apporter des améliorations pour mieux décrire les phénomènes physiques et rechercher des méthodes numériques adaptées à notre problème. Nous pourrions alors évaluer la précision avec laquelle nous décrivons les différents phénomènes et mieux interpréter les résultats de simulation d'écoulements dans un dispositif industriel.

Ces cas d'analyse sont les suivants :

- la turbulence homogène isotrope en décroissance libre
- l'écoulement dans un canal plan turbulent

L'avantage de ces cas classiques est que nous disposons de beaucoup d'informations et de résultats, aussi bien théoriques qu'expérimentaux et numériques, ce qui permet les comparaisons avec des résultats de référence.

5.1 La Turbulence Homogène Isotrope en Décroissance Libre

5.1.1 Intérêt

Nous allons maintenant présenter le cas de la Turbulence Homogène Isotrope¹ en décroissance libre, abrégé THH dans la suite de ce document. La THH est un cas très intéressant pour les modèles sous-maille et les méthodes numériques. En effet, les modèles sous-maille, utilisés ici, sont basés sur des hypothèses d'isotropie locale à petite échelle. Pour ce cas, ils doivent donc reproduire fidèlement les différents phénomènes et permettre de retrouver les principales caractéristiques, que nous décrivons ci-dessous.

Nous imposons un champ de vitesse initial, ayant un certain spectre d'énergie cinétique turbulente. Au cours du calcul, aucune énergie n'est injectée : nous étudions la décroissance

1. Pour bien expliquer ce qu'est la THH, nous allons rappeler ce que signifie *homogène* et *isotrope*. (cf. [LES97c])

Soit un opérateur de moyenne d'ensemble, défini comme la moyenne statistique calculée sur un nombre infini de réalisations indépendantes.

- La turbulence est dite *homogène*, si toutes quantités moyennes construites avec un ensemble de n points $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, au temps (t_1, \dots, t_n) sont invariants par toutes translations de l'ensemble des $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Ceci implique (entre autre), en particulier, que la vitesse moyenne ne dépend que du temps et plus de la position : $\langle \vec{u}(\vec{x}, t) \rangle = \langle \vec{u}(t) \rangle$.
- La turbulence est dite *isotrope*, si toutes quantités moyennes construites avec un ensemble de n points $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, au temps (t_1, \dots, t_n) sont invariants par toutes rotations de l'ensemble des $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Ceci implique, en particulier, que la vitesse moyenne est nulle : $\langle \vec{u}(\vec{x}, t) \rangle = 0$.

de l'énergie cinétique, résultant de phénomènes de dissipation. Comme c'est un problème simple où l'on s'affranchit des effets de frontière et que les modèles sous-maille utilisés ici sont purement dissipatifs, nous étudions précisément ce que nous cherchons à modéliser. Ce cas nous permet donc de choisir les schémas numériques pertinents pour la Simulation des Grandes Echelles, de tester les modèles sous-maille et de déterminer leur implémentation en maillages non structurés.

La TH1 est une configuration élémentaire, permettant de tester les modèles de turbulence et les schémas numériques.

Nous allons confronter nos résultats aux résultats théoriques, à des résultats numériques obtenus au LEGI avec des méthodes spectrales [OSS] et aux résultats expérimentaux de turbulence de grille de Comte-Bellot et Corrsin [CBC71], la turbulence de grille étant une bonne représentation pratique d'un écoulement homogène et isotrope.

5.1.2 Description de la Turbulence Homogène Isotrope

Nous allons succinctement rappeler ici les principales caractéristiques de la TH1, décrites de façon plus détaillée dans le livre de M. Lesieur [LES97c].

Par analyse dimensionnelle, nous pouvons montrer, en supposant que le spectre d'énergie dépend uniquement de k et de ϵ pour $k > k_i$ (k_i correspondant au nombre d'onde des tourbillons les plus énergétiques), que l'expression du spectre d'énergie cinétique turbulente est la suivante : $E(k) = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ avec $C_k = 1.4$, constante de Kolmogorov. Ce résultat a beaucoup été utilisé dans la modélisation de la turbulence, et a été retrouvé expérimentalement et numériquement.

D'autres informations concernent l'évolution de l'énergie cinétique E_c et de l'enstrophie D , dont nous rappelons les définitions ci-dessous :

$$E_c = \frac{1}{2} \langle \bar{u}^2 \rangle = \int_0^{+\infty} E(k) dk \quad (5.1)$$

$$D = \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla} \wedge \bar{u} \rangle^2 = \int_0^{+\infty} k^2 E(k) dk \quad (5.2)$$

Si le champ initial a une distribution aléatoire gaussienne, les corrélations triples de la vitesse sont nulles. Pendant leur établissement durant les premiers instants, l'énergie cinétique reste constante et l'enstrophie croît. Ensuite, l'énergie cinétique décroît ainsi que l'enstrophie, leur coefficient de décroissance étant déterminé grâce à la théorie EDQNM : il dépend de la pente du spectre aux grandes échelles (soit s celle-ci). Si $s = 4$, ce qui sera notre cas, l'énergie cinétique décroît en $t^{-1.38}$ et l'enstrophie en $t^{-2.38}$: nous détaillons le calcul de ces coefficients dans l'Annexe G. Ces caractéristiques sont résumées dans le graphique 5.1 ci-dessous.

5.1.3 Evaluation des résultats

Nous allons vérifier, dans nos simulations, que nous retrouvons bien :

- un spectre en $k^{-5/3}$, aux petites échelles,
- les bonnes allures pour E_c et D (cf. figure 5.1 ci-dessus), en particulier le palier pour E_c et le pic pour D , ainsi que les bons exposants de décroissance pour ces deux grandeurs : -1.38 pour l'énergie cinétique filtrée et -1.6 pour l'enstrophie filtrée.

Le coefficient de décroissance pour l'enstrophie calculée est différent de celui cité ci-dessus, car nos simulations nous permettront d'accéder à l'enstrophie filtrée et non à l'enstrophie totale. Pour l'énergie cinétique, les échelles qui contribuent principalement à son évaluation sont résolues : nous pourrions donc bien représenter sa décroissance. Par contre, pour l'enstrophie, les échelles y contribuant sont plus petites (nombres d'onde plus élevés), une

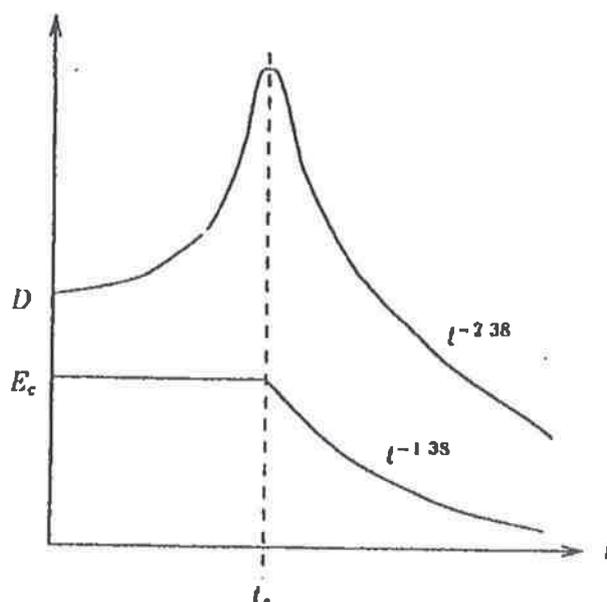


FIG. 5.1 - Evolution de l'énergie cinétique et de l'enstrophie lors d'une THI en décroissance libre

partie de ces échelles ne sont pas résolues (cf. figure 5.2) : il faut donc en tenir compte lors du calcul de l'exposant de décroissance. Nous indiquons sa détermination dans l'Annexe G.

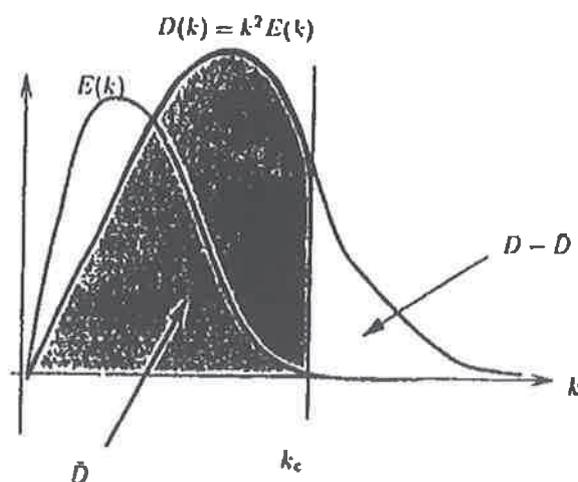


FIG. 5.2 - Spectre d'énergie cinétique turbulente et spectre d'enstrophie

5.1.4 Configuration du calcul

Nous simulons la turbulence homogène isotrope par un écoulement dans une *boite cubique de côté 2π* . Les conditions aux limites sont périodiques dans les trois directions, ce qui rend très important le choix de la condition initiale du champ de vitesse.

5.1.4.1 La condition initiale

Le champ de vitesse initial est généré pour avoir un spectre d'énergie turbulente fixé.

- Pour pouvoir comparer avec les résultats expérimentaux de turbulence de grille, nous

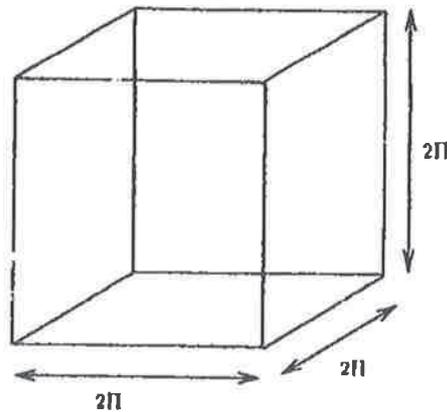


FIG. 5.3 - Configuration du calcul

imposons dans nos calculs un spectre initial correspondant à un des spectres expérimentaux. Nous préciserons les autres paramètres spécifiques dans le paragraphe 5.1.5.

- Pour les autres calculs, nous imposons un champ de vitesse, dont le spectre d'énergie est donné par l'expression suivante :

$$E(k, t = 0) = Ak^8 \exp\left(-4 \left(\frac{k}{k_i(0)}\right)^2\right) \quad (5.3)$$

avec A telle que $Ec(t = 0) = \frac{3}{2}$ et $k_i(0)$, position du pic du spectre, à l'instant initial. La pente du champ initial aux grandes échelles est $s = 8$: la théorie nous indique qu'elle doit alors tendre vers $s = -4$, d'où les exposants de décroissance précisés ci-dessus. Ce champ a été également choisi pour permettre des comparaisons avec des simulations de THH, obtenus avec un code spectral du LEGI, réalisées par S. Ossia [OSS].

Génération du champ de vitesse initial Le spectre d'énergie donne la norme de la transformée de Fourier de la vitesse : $E(k) = 2\pi k^2 \|\hat{u}(k)\|^2$. Pour la phase, nous procédons à un tirage aléatoire à l'aide de générateurs gaussiens. Le vitesse dans l'espace physique est alors obtenue en prenant la transformée de Fourier inverse.

Ce champ de vitesse a une distribution gaussienne : cela ne correspond pas à un champ de vitesse réaliste mais s'en rapproche. En effet, pour un champ aléatoire gaussien, les corrélations triples sont nulles alors que pour un écoulement réel, le facteur de dissymétrie² est proche de 0,4. Pour les écoulements simulés numériquement, il est de l'ordre de 0,4 à 0,5 ; au cours du calcul, nous tendrons vers ces valeurs.

5.1.4.2 Les grandeurs caractéristiques

On définit la vitesse caractéristique v_0 de l'écoulement par :

$$Ec = \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{3}$$

2. Expression du facteur de dissymétrie : $S = \frac{\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^3 \rangle}{\left(\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \rangle\right)^{3/2}}$. Il mesure les corrélations triples.

Le temps caractéristique correspond au temps de retournement des tourbillons contenant le plus d'énergie à l'instant initial (i.e. tel que $k = k_i(0)$). Il est défini par : $t_{ret} = \frac{1}{\nu_0 k_i(0)}$.

Le nombre de Reynolds de l'écoulement simulé est défini par : $Re = \frac{v_0}{\nu k_i(0)}$.

Pour le cas de la THI (excepté pour la simulation de turbulence de grille), la viscosité moléculaire est prise très petite, pour ne voir que l'effet du modèle sous-maille, le nombre de Reynolds étant alors très élevé.

Nous allons maintenant présenter les éléments spécifiques à la simulation de l'expérience de Turbulence de Grille.

5.1.5 Comparaison avec l'expérience de Comte-Bellot et Corrsin

5.1.5.1 Ecoulement isotrope et écoulement en aval d'une grille

L'écoulement en aval d'une grille est considéré comme la réalisation pratique de l'écoulement isotrope idéal. En effet, l'hypothèse de Taylor nous permet de passer de cet écoulement à l'écoulement turbulent isotrope : elle considère que la situation est la même pour un observateur, avançant à la vitesse moyenne de l'écoulement, et pour un autre placé dans la boîte périodique.

Ceci correspond à l'équivalence suivante : $\Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{U_0}$.

Comte-Bellot et Corrsin ([CBC71]) ont étudié l'écoulement en aval d'une grille, placée dans une conduite présentant un étranglement, qui permet de vérifier expérimentalement une isotropie fine.

Le but de la comparaison est de confronter nos résultats numériques à la réalité des mesures expérimentales. Ce test est un test classique pour les modèles sous-maille et les codes de calcul. Il est assez sévère, ce qui lui donne une grande signification.

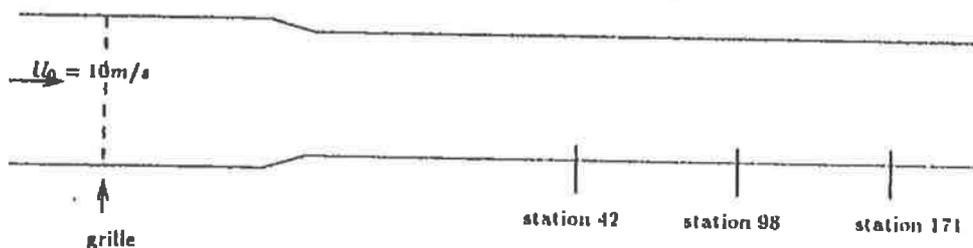


FIG. 5.4 - Configuration de l'expérience - Définition des points de comparaison

5.1.5.2 Modification de la condition initiale

Pour simuler cette expérience, les conditions initiales sont spécifiques. On impose un champ de vitesse dont le spectre d'énergie turbulente est le spectre expérimental, mesuré à la "station 42".

Nous avons faits deux simulations, différant par leur condition initiale.

- Le premier calcul est réalisé à partir d'un champ de vitesse initial, correspondant au spectre mesuré, mais dont les corrélations triples sont nulles, puisqu'il est obtenu à l'aide de générateurs gaussiens. Or, le champ de vitesse réel correspondant à l'expérience n'a pas un facteur de dissymétrie nul, c'est pourquoi nous avons entrepris un deuxième calcul.
- Pour le deuxième calcul, nous cherchons à avoir un champ de vitesse plus réaliste, en particulier avoir des corrélations triples non nulles et un écoulement pour lequel la

décroissance de l'énergie cinétique soit conforme à celle mesurée expérimentalement, c'est à dire en $t^{-1.25}$.

Pour cela, nous imposons initialement le spectre expérimental et nous menons le calcul jusqu'à un instant où les bonnes caractéristiques sont atteintes. Nous renormalisons alors ce champ afin d'obtenir le spectre expérimental initial.

5.1.5.3 Similitude avec l'expérience

Le but de cette similitude est de se ramener à un calcul dans une boîte cubique de côté 2π , dont l'énergie cinétique à l'instant initial est égale à 1.0.

Nous conservons le nombre de Reynolds basé sur l'échelle intégrale de la turbulence :

$$Re = \frac{\sqrt{u_1^2} L}{\nu}$$

Le tableau suivant donne les valeurs des différentes grandeurs pour l'expérience et pour l'écoulement en similitude.

Grandeurs	Expérience	Simulation
Re	188	188
$\sqrt{u_1^2}$ ($m.s^{-1}$)	0.222	$\sqrt{\frac{2}{3}q_0^2} = 0.8165$
k_i (m^{-1})	50	2.5
L (m)	0.0127	$\frac{1}{k_i} = 0.4$
ν ($m^2.s^{-1}$)	$1.5007.10^{-5}$	$\frac{\sqrt{u_1^2} L}{Re} = 1.7384.10^{-3}$
$t_{ret} = \frac{1}{k_i \sqrt{u_1^2}}$ (s)	$17.73 \frac{M}{U_0} = 9.009.10^{-2}$	0.4899

En particulier, nous déterminons les temps où nous réalisons les comparaisons, en terme de temps adimensionné par t_{ret} . Nous avons :

Station expérimentale	Simulation
$N = \frac{U_0 t}{M}$	$\frac{t}{t_{ret}}$
42	0
98	3.16
171	7.28

Le calcul de l'expérience de turbulence de grille sera fait uniquement en maillages structurés. En maillages non structurés, nous ne pouvons pas imposer la condition initiale de façon satisfaisante, du fait des contraintes imposées par le calcul des spectres spatiaux et de la non-conformité de l'élément de discrétisation. Nous expliquons le calcul des spectres en maillages non structurés dans l'Annexe A.

5.2 L'écoulement dans un Canal Plan Turbulent

5.2.1 Intérêt

Nous avons réalisé des simulations *temporelles* de canal plan, avec et sans loi de paroi.

Le cas du canal plan constitue une configuration simple d'écoulement pariétal, plus proche d'écoulements réels que des écoulements idéaux comme la THH. Il est ici destiné principalement à tester le comportement des modèles sous-maille et des méthodes numériques, en présence de paroi.

5.2.2 Présentation des simulations

Nous avons fait deux types de simulation, dont les buts diffèrent.

- le premier type est réalisé avec condition d'adhérence à la paroi : on s'intéresse à ce qui se passe à la paroi, et en particulier au comportement du modèle sous-maille dans cette zone.
- dans un deuxième temps, nous étudions le comportement des lois de paroi.

5.2.3 Configuration du calcul

Le canal est formé de deux plans parallèles, d'envergure infinie. La configuration est présentée sur la figure 5.5, où nous avons également représenté le vecteur rotation, utilisé pour l'initialisation du canal plan avec adhérence (cf. ci-dessous).

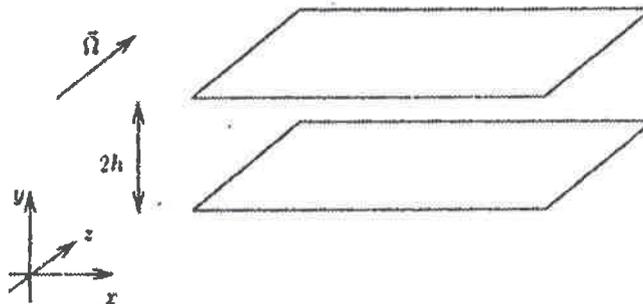


FIG. 5.5 - Canal plan

Nous allons maintenant préciser les conditions du calcul, en particulier définir ce qu'est une simulation temporelle.

5.2.3.1 Simulation temporelle et Conditions aux limites

Lors d'une simulation temporelle, une condition de périodicité est appliquée dans la direction longitudinale, ce qui permet une réduction du domaine de calcul (et donc du temps de calcul) et simplifie le choix des conditions aux limites. Par contre, le choix de la condition initiale devient plus important.

L'hypothèse de périodicité dans la direction longitudinale est justifiable ici par le fait que l'écoulement en canal plan est parallèle, i.e. la composante perpendiculaire aux parois du profil de vitesse moyenne est nulle, aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent, et qu'il contient des structures ayant des longueurs caractéristiques longitudinales et transverses bien définies. En choisissant "bien" la taille du domaine de calcul, la condition de périodicité n'a pas d'influence.

Par contre, puisqu'on impose une condition de périodicité sur la vitesse, on en impose également une sur la pression, ce qui implique que le gradient longitudinal de pression est nul. Or, c'est ce gradient qui est le moteur de l'écoulement. Il faut donc introduire une force de volume qui remplacera le gradient de pression longitudinal ; nous la décrivons dans l'annexe D.

Nous imposons également une condition de périodicité dans la direction transverse, puisque le canal simulé est de largeur infinie. Comme dans la direction longitudinale, les structures présentes dans l'écoulement ont des grandeurs caractéristiques précises (cf. 4.1.2). En choisissant bien les dimensions, l'influence de cette condition aux limites doit disparaître également.

Bien choisir la taille du domaine de calcul signifie que les statistiques en deux points, situés de part et d'autres du domaine dans chaque direction, sont décorréées. Dans l'article

[MK82], Moin et Kim se basent sur les résultats expérimentaux de Comte-Bellot ([CB63]), pour déterminer la taille du domaine de calcul. Les mesures expérimentales montrent que les corrélations en deux points deviennent négligeables en x pour une distance de $3.2h$, et en z pour $1.6h$. Pour que les conditions aux limites n'aient pas d'influence, il faut donc prendre un domaine de taille plus grande. Notre domaine de calcul a donc les dimensions suivantes : $(2\pi h, 2h, \pi h)$.

Aux parois, selon le type de simulation, nous imposons une condition d'adhérence ou nous utilisons une loi de paroi.

5.2.3.2 Grandeurs caractéristiques

Le champ de vitesse initial a un profil parabolique ; soit U_c , le vitesse au centre du canal, à l'instant initial. Le nombre de Reynolds (noté Re) que nous allons utiliser est basé sur U_c et la demi-hauteur h du canal. Nous utiliserons également le nombre de Reynolds turbulent (noté h^+) pour caractériser l'écoulement, qui lui est basé sur la vitesse de frottement u^* et la demi-hauteur du canal (cf. chapitre précédent pour la définition de u^*).

$$Re = \frac{U_c h}{\nu} \quad \text{et} \quad h^+ = \frac{u^* h}{\nu} \quad (5.4)$$

5.2.3.3 Condition initiale

La condition initiale dépend du nombre de Reynolds de la simulation. En effet, pour le canal plan, le nombre de Reynolds critique³ est de l'ordre de 5000. Si le nombre de Reynolds de la simulation numérique est de cet ordre ou inférieur, il est difficile de déstabiliser l'écoulement avec un simple bruit blanc. En apportant un soin particulier à la constitution du champ de vitesse initiale, il est possible de simuler numériquement la transition (cf. [LAM96]), mais ce n'est pas l'objet de cette étude : nous avons donc cherché un moyen rapide de déstabilisation de l'écoulement.

- Pour les simulations avec condition d'adhérence ($Re \simeq 5000$), nous avons, dans les premiers instants "fait tourner" le canal (i.e. on ajoute une force de Coriolis). Le vecteur rotation est indiqué sur la figure 5.5 : il est orienté suivant l'envergure. La force de Coriolis agit sur l'écoulement et le dissymétrise. L'écoulement se relaminarise sur la paroi cyclonique⁴ et la turbulence s'accroît sur la paroi anti-cyclonique (sous certaines conditions, cf. [LAM96]). Ceci permet de déstabiliser l'écoulement en imposant comme champ de vitesse initial, un profil parabolique sur lequel on superpose un bruit blanc, car le Reynolds critique du canal plan tournant⁵ est de l'ordre de 60. On arrête alors la rotation, et on utilise ce champ de vitesse comme condition initiale de la simulation du canal plan turbulent. Elle est dissymétrique, il faut donc attendre un peu plus longtemps pour atteindre un état statistiquement stationnaire.

3. Définition du nombre de Reynolds critique : le nombre de Reynolds critique marque la limite entre le régime laminaire et turbulent, plus exactement c'est le nombre en-dessous duquel aucune perturbation infinitésimale ne s'amplifie. Pour le canal plan, une analyse de stabilité linéaire donne un Reynolds critique égal à 5772 cf. [LAM96]. Comme cette étude est linéaire (et pas non linéaire), des écoulements turbulents existent pour des nombres de Reynolds inférieurs.

4. Soient $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ le vecteur rotation et $\vec{\omega} = (0, 0, -dU/dy)$ le vecteur vorticité de base. Si l'orientation de $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ est la même, on parle de situation cyclonique, si ce n'est pas le cas, de situation anti-cyclonique.

5. L'analyse de stabilité linéaire effectuée par E. Lamballais [LAM96] a donné une valeur de 66.45 pour un nombre de Rossby $Ro = \frac{U_c}{\Omega h}$ égal à 6, valeur qui correspond à notre simulation.

- Pour les calculs avec lois de paroi, nous simulons des écoulements à un nombre de Reynolds plus élevé, de l'ordre de 10000.

La condition initiale est maintenant constituée par un profil parabolique sur la composante longitudinale et la superposition d'un bruit blanc et d'une perturbation sinusoïdale sur la composante perpendiculaire aux parois :

$$\begin{cases} u(y) = U_c \frac{y}{h} \frac{h-y}{h} \\ v(x) = A * V_{al} + \frac{U_c}{10} \sin(\omega x) \\ w = A * V_{al} \end{cases} \quad (5.5)$$

V_{al} est une variable aléatoire, correspondant à un bruit blanc, A est son amplitude et ω la pulsation de la perturbation sinusoïdale. A ce nombre de Reynolds, ce champ initial suffit à déstabiliser l'écoulement, ce qui n'est pas le cas pour un nombre de Reynolds égal à 5000.

5.2.3.4 Evaluation des résultats

Nous chercherons à retrouver dans les visualisations et les statistiques de nos simulations les différentes caractéristiques citées ci-dessus, et nous comparerons également nos résultats à des résultats de Simulation Directe (DNS) et à des Simulations des Grandes Echelles.

En particulier, nous comparerons :

- le profil moyen de vitesse longitudinale
- les écarts types de u, v et w

Nous chercherons sur les visualisations à distinguer les structures cohérentes et nous tenterons de comparer leurs grandeurs caractéristiques à celles observées.

5.2.3.5 Les outils statistiques

Pour l'évaluation de nos résultats, nous calculons les moyennes statistiques des grandeurs de l'écoulement.

Description des moyennes en maillages structurés

Nous avons fait deux types de moyennes :

- nous calculons un profil instantané, moyenné sur les plans d'homogénéité, i.e. les plans parallèles à la paroi. Nous obtenons donc, en notant $\bar{(\cdot)}$ cette moyenne spatiale : $\bar{a} = f(t, y)$.
- nous moyennons également temporellement cette valeur, à partir d'un instant où nous considérons que nous avons atteint un état statistiquement stationnaire : nous intégrons alors sur un temps "suffisamment grand". Nous obtenons donc : $\langle \bar{a} \rangle = f(y)$, en notant $\langle \cdot \rangle$ la moyenne temporelle.

C'est principalement ces dernières grandeurs que nous utiliserons pour évaluer nos résultats, les premières permettant de juger l'état instantané du calcul et de déterminer le temps de début du calcul des statistiques. Nous arrêtons la simulation quand les profils moyens et les écart-types sont symétriques.

Description des moyennes en maillages non structurés

Nous allons faire le même type de moyenne qu'en maillages structurés : des moyennes spatiales et des moyennes temporelles. Par contre, la non structuration du maillage et la non conformité de la discrétisation de la vitesse entraînent des problèmes spécifiques. Pour

éviter les problèmes liés à la non-conformité, nous utilisons directement les valeurs de la vitesse calculées au point de discrétisation (centre de gravité des faces): nous calculons les moyennes des grandeurs (\bar{u}_i , \bar{u}_i^2 et $\bar{u}\bar{v}$) sur les plans parallèles au paroi, en réalisant un échantillonnage selon y . Ces grandeurs sont ensuite moyennées temporellement.

Description rapide du calcul des statistiques

Pour les moyennes spatiales, nous calculons :

- la vitesse moyenne longitudinale : $\bar{U}(y, t) = \bar{u}(x, y, z, t)$,
- les écart-types : $\overline{u_i^2}(y, t) = (\widetilde{u_i^2} - \bar{u}_i^2)(x, y, z, t)$,
- le terme croisé (1,2) du tenseur de Reynolds : $-\overline{u'v'}(y, t) = (\widetilde{u\bar{v}} - \bar{u}\bar{v})(x, y, z, t)$

Soit \hat{f} , une des grandeurs définies ci-dessus. Les moyennes temporelles sont faites de la manière suivante :

$$\langle \hat{f} \rangle(y) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} \hat{f}(y, t) dt$$

Deuxième partie

Simulations des Grandes Echelles en maillages structurés

Chapitre 6

THI en maillages structurés

6.1 Choix des schémas numériques

6.1.1 Contraintes posées sur les méthodes numériques

Nous avons présenté dans le chapitre 2, la méthode choisie dans le code PRICELES, pour résoudre les équations de Navier-Stokes filtrées (équations 2.1 et 2.2). Il faut maintenant déterminer des méthodes numériques et des modèles physiques, qui permettront de résoudre au mieux notre problème. En effet, selon le problème physique à résoudre, le choix des méthodes numériques diffère.

1. Nous cherchons à simuler un écoulement instationnaire turbulent. L'instationnarité nous impose des contraintes sur les schémas en temps et les pas de temps : nous ne cherchons pas à atteindre un état stationnaire, mais à connaître les fluctuations temporelles.
2. Notre modélisation est purement dissipative : il faut que, dans la mesure du possible, la seule dissipation présente dans le calcul corresponde à la dissipation physique (moléculaire ou/et turbulente). Les méthodes numériques doivent donc être les moins dissipatives tout en étant stables.

Intéressons nous à l'équation de conservation de l'énergie cinétique. Nous l'obtenons à partir des équations de Navier-Stokes filtrées 2.1 et 2.2, en multipliant l'équation 2.1 par \bar{u}_i et en sommant sur les indices répétés.

Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \bar{u}_j \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{P}) + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}) + \bar{f}_i \bar{u}_i \quad (6.1)$$

Nous pouvons intégrer cette équation sur un domaine Ω , qui peut être le domaine de calcul dans son ensemble ou les volumes de contrôle de la quantité de mouvement. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) dv &= - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \bar{u}_j n_j ds - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho} \bar{u}_i \bar{P} n_i ds + \int_{\partial\Omega} \bar{u}_i 2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij} n_j ds \\ &\quad - \int_{\Omega} 2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dv + \int_{\Omega} \bar{f}_i \bar{u}_i dv \end{aligned} \quad (6.2)$$

Peric et Ferziger [FP97] définissent une conservation de l'énergie cinétique, au sens où l'énergie cinétique à l'intérieur du volume n'est pas modifiée par la convection ou les forces de pression, mais uniquement par l'action d'autres forces à la surface de Ω . Le but

est de trouver des schémas numériques (discrets), qui vérifient cette propriété de l'équation continue.

Pour les tests présentés ci-dessous, nous avons: $\nu = 0$, $f_i = 0$, et périodicité dans les trois directions.

Nous avons alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) dv = \int_{\partial\Omega} \bar{u}_i 2\nu_t \bar{S}_{ij} n_j ds - \int_{\Omega} 2\nu_t \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dv$$

L'énergie cinétique est uniquement dissipée par la turbulence. En particulier, si $\nu_t = 0$, l'énergie cinétique devrait être constante. Nous allons réaliser des simulations sans aucune dissipation, ce qui nous permettra de comparer les schémas de convection.

6.1.2 Test des schémas en temps et des schémas de convection

Nous avons fait plusieurs simulations, en changeant le schéma en temps et le schéma de convection.

Nous avons testé :

- pour le schéma en temps
 - Euler explicite (EE)
 - Runge Kutta ordre 3 (RK3)
- pour le schéma de convection
 - Amont
 - Quick-Sharp
 - Centré

Les schémas de convection cités ci-dessus sont décrits dans l'Annexe C.

Les premiers calculs sont réalisés avec le modèle sous-maille de la fonction de structure. Ils sont récapitulés dans le tableau 6.1.

Calcul N°	Schéma de convection		Schéma en temps		CFL ou pas de temps		
	Quick	Centré	Euler Explicite	RK3	CFL=1	CFL=0.5	CFL=0.1
1	•		*		*		
2	•		*			*	
3	•		*				*
4	•			*	*		
5	•			*		*	
6	•			*			*
7		•	*		*		
8		•	*			*	
9		•	*				*
10		•		*	*		
11		•		*		*	
12		•		*			*

TAB. 6.1 - Simulations effectuées pour les tests numériques, avec modèle sous-maille

Pour les tests suivants, nous avons réalisé des calculs sans diffusion. Ils sont décrits dans le tableau 6.2.

Calcul N°	Schéma en temps	Schéma de convection	CFL
13	RK3	Amont	1
14	RK3	Quick	1
15	RK3	Centré	1

TAB. 6.2 - Simulations effectuées pour les tests numériques, sans diffusion

6.1.2.1 Tests des schémas en temps

Nous comparons les différentes simulations, présentées dans le tableau 6.1. Tout d'abord, nous nous intéressons aux schémas en temps. Les comparaisons sont présentées sur les figures 6.1 à 6.4. Nous comparons tout d'abord les simulations réalisées avec les différents schémas en temps et le schéma de convection Quick puis celles réalisées avec le schéma Centré de deuxième ordre. Nous ne présentons que les calculs réalisés avec $CFL = 1$ et $CFL = 0.1$, afin d'alléger les graphiques.

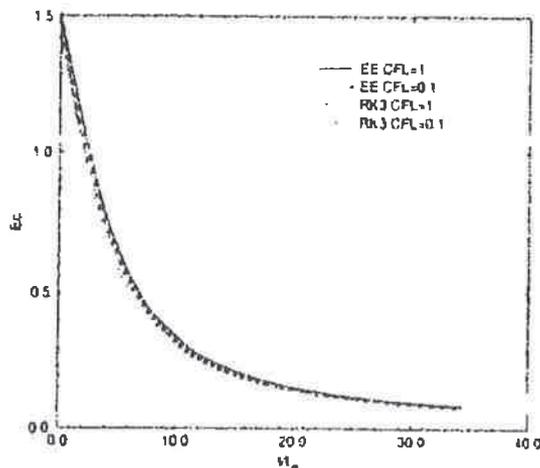
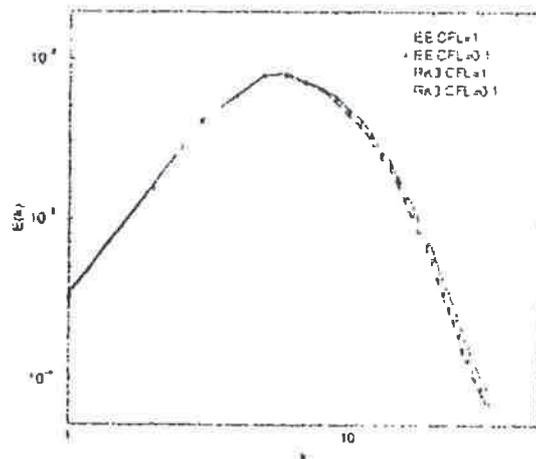
FIG. 6.1 - Evolution de l'énergie cinétique
Schéma Quick - EE vs. RK3

FIG. 6.2 - Spectres d'énergie cinétique turbulente - Schéma Quick - EE vs. RK3

Nous comparons les simulations 1, 3, 4 et 6, toutes réalisées avec le schéma Quick, représentées sur les figures 6.1 et 6.2.

Avec le schéma Runge Kutta d'ordre 3, l'influence de la CFL est très faible, ce qui n'est pas le cas des simulations réalisées avec le schéma Euler Explicite. Par contre, avec une $CFL=0.1$ et Euler Explicite, les résultats sont très proches de ceux obtenus avec Runge Kutta ordre 3. Il est donc plus précis (et plus intéressant) d'utiliser le schéma Runge Kutta d'ordre 3 : nous pouvons mener le calcul avec une $CFL=1$, ce qui conduit à un gain de temps, bien que le schéma soit en trois sous-pas de temps ($72 \times 3 = 216$ pas de temps pour RK3 et $CFL=1$).

Nous comparons maintenant les simulations 7, 9, 10 et 12, obtenues avec le schéma Centré du second ordre, représentées sur les figures 6.3 et 6.4.

Nous constatons la même chose qu'avec le schéma Quick : les résultats sont sensiblement les mêmes avec EE et $CFL=0.1$ qu'avec RK3 et $CFL=1$, et assez éloignés de ceux obtenus avec EE et une $CFL=1$. Nous choisissons donc le schéma Runge Kutta d'ordre 3 pour la suite de nos simulations, du fait de sa précision et du gain de temps.

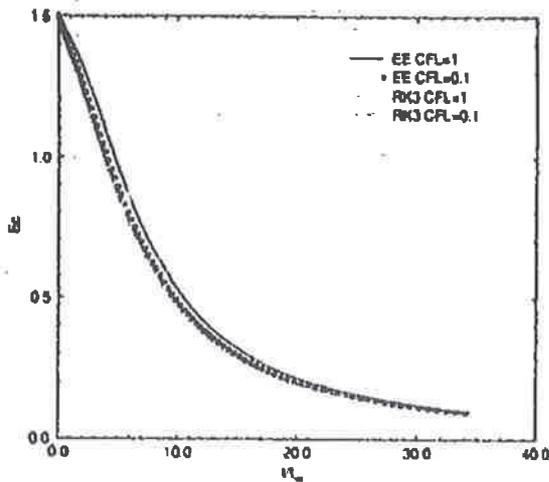


FIG. 6.3 - Evolution de l'énergie cinétique - Schéma Centré - EE vs. RK3

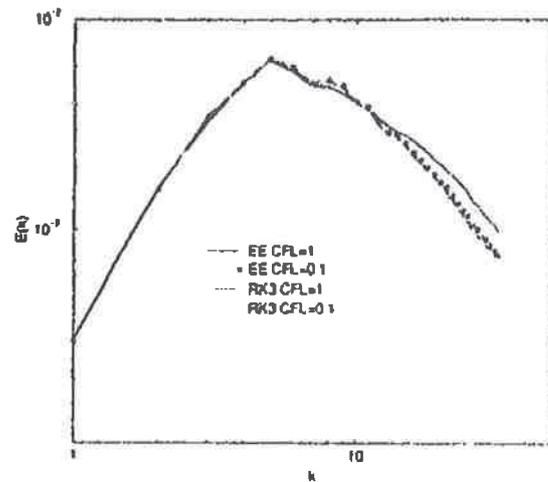


FIG. 6.4 - Spectres d'énergie cinétique turbulente - Schéma Centré - EE vs. RK3

6.1.2.2 Tests des schémas de convection

Avec Diffusion Turbulente

Nous comparons des simulations effectuées avec les schémas Quick-Sharp (calcul 4) et Centré (calcul 10). Le schéma Centré a été introduit, car le schéma Quick-Sharp est dissipatif, comme nous pouvons le constater sur les résultats des simulations présentées ci-dessous. Nous présentons l'évolution temporelle de l'énergie cinétique sur la figure 6.5 et les spectres d'énergie cinétique turbulente sur la figure 6.6.

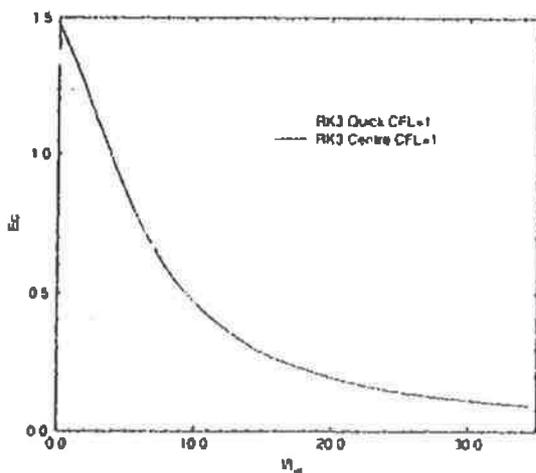


FIG. 6.5 - Evolution de l'énergie cinétique

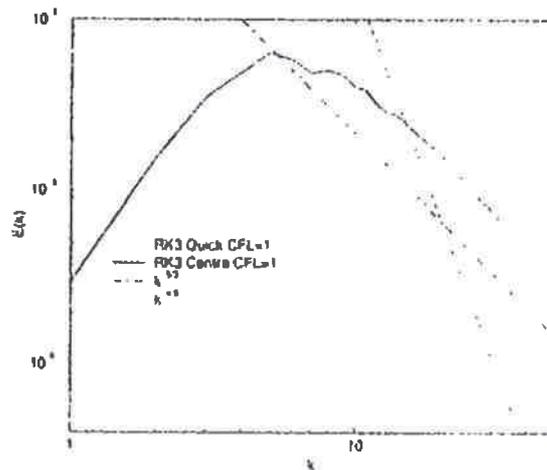


FIG. 6.6 - Spectres d'énergie cinétique turbulente

La décroissance de l'énergie cinétique est plus forte avec le schéma Quick-Sharp, qu'avec le schéma Centré. De plus, sur la figure 6.6, nous constatons des différences de pente du spectre aux petites échelles : avec le schéma Centré la pente est très proche de $-5/3$, alors qu'avec le schéma Quick, elle est beaucoup plus forte (de l'ordre de $-1,5$ par rapport à $-1,7$).

Ceci est une conséquence de la dissipation du schéma Quick : il ajoute de la dissipation

numérique (non physique) à la dissipation physique. Dans ce cas, l'effet du modèle sous-maille est masqué, puisque la modélisation choisie est purement dissipative et l'écoulement simulé a un nombre de Reynolds effectif plus faible, la dissipation numérique atténuant les fluctuations. Cela peut, par exemple, retarder ou même empêcher la transition à la turbulence.

Au paragraphe précédent, nous avons montré, que pour les équations continues, en absence de dissipation moléculaire ou turbulente, l'énergie cinétique est conservée. Nous allons donc réaliser une simulation sans aucune diffusion, pour vérifier si les schémas numériques que nous pensons choisir, à savoir le schéma en temps de Runge Kutta d'ordre 3 et le schéma de convection Centré d'ordre 2, satisfont cette condition.

Sans diffusion

Nous présentons les calculs 13 à 15, réalisés avec les schémas de convection Amont, Quick-Sharp et Centré sans diffusion. Nous traçons sur les figures 6.7 et 6.8 l'évolution de l'énergie cinétique, la figure 6.8 étant un agrandissement de la première.

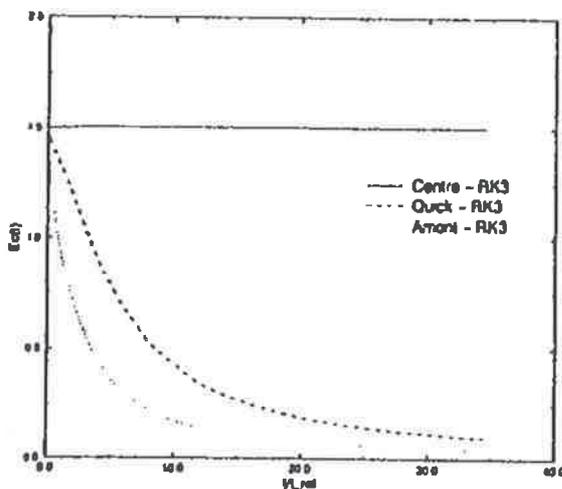


FIG. 6.7 - Evolution de l'énergie cinétique pour des calculs sans diffusion

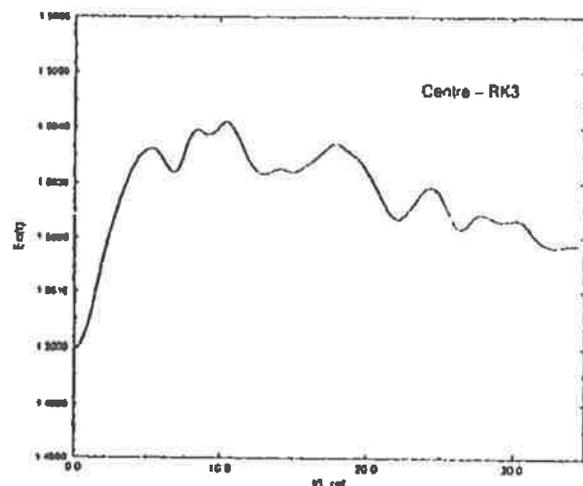


FIG. 6.8 - Evolution de l'énergie cinétique pour des calculs sans diffusion : Zoom

Nous constatons sur la figure 6.7, que l'énergie reste constante avec le schéma Centré, ce qui n'est pas le cas pour les deux schémas décentrés Amont et Quick-Sharp. Cela confirme ce qui a été dit au paragraphe précédent. La figure 6.8 permet de montrer la stabilité du schéma Centré: les oscillations produites sont très faibles (de l'ordre de 0.3%) et ne s'amplifient pas. Le schéma Centré d'ordre 2 et le schéma en temps RK3 semblent donc vérifier les propriétés recherchées.

Nous vérifions que, sans diffusion, nous retrouvons une pente du spectre à la coupure en k^2 , ce qui est conforme à la théorie (cf. figure 6.9).

Remarque sur la stabilité du schéma Centré

Le schéma Centré est classiquement dit *inconditionnellement instable*. Ce résultat est obtenu en étudiant la stabilité de l'équation d'advection linéarisée. Or, ici, nous résolvons les équations de Navier-Stokes. Dans ces équations, la pression joue un rôle tout à fait particulier: apparemment, la pression "avale" les instabilités générées par le schéma Centré. Ferziger et Peric montrent que la propriété de conservation au sens défini ci-dessus est préservée, si les opérateurs gradient et divergence sont discrétisés de façon cohérente. Cela signifie qu'il faut tenir compte de la manière dont est discrétisé l'un pour discrétiser

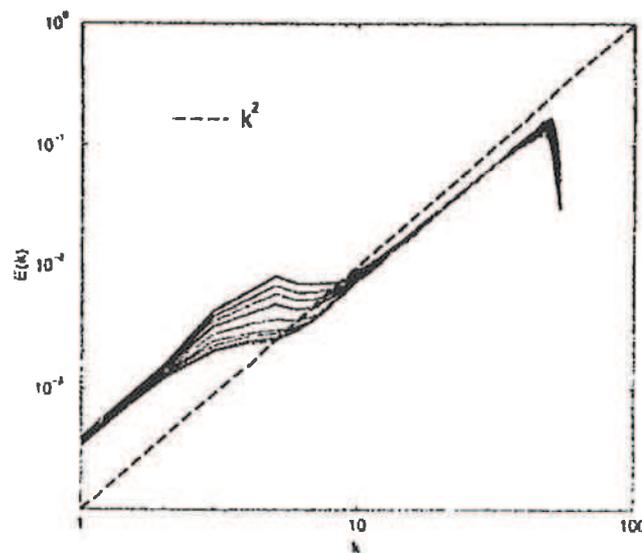


FIG. 6.9 - Spectres d'énergie cinétique pour des calculs sans diffusion : Pente en k^2

l'autre, puisque les deux équations de conservation ne sont pas résolues indépendamment. Or, c'est le cas ici, grâce au maillage décalé et à la méthode de résolution utilisée : l'équation de Poisson et l'équation de conservation de la quantité de mouvement ne sont pas résolues de façon indépendante ; le calcul de la divergence de la seconde permet de conduire à la première.

6.1.3 Conclusion

Nous avons vu qu'en utilisant le schéma de convection Centré d'ordre 2 et le schéma en temps Runge Kutta ordre 3, sans diffusion, l'énergie cinétique est conservée. De plus, lors de la simulation de TH1 avec le modèle de la fonction de structure, nous retrouvons une pente en $k^{-5/3}$ dans les petites échelles. Nous avons donc choisi des méthodes numériques qui semblent bien convenir aux Simulations des Grandes Echelles, et qui remplissent les contraintes que nous avons posées. Pour la suite des calculs, en maillages structurés, nous utiliserons donc ces deux schémas.

6.2 Tests des modèles sous-maille

Maintenant que nous avons choisi des méthodes numériques non dissipatives, nous allons pouvoir nous intéresser à la modélisation, puisqu'elles nous permettent d'isoler les effets du modèle sous-maille. Dans les tests que nous présentons dans cette section, la viscosité moléculaire est nulle. La seule dissipation présente dans le calcul est donc la dissipation due au modèle. Nous allons tenter de retrouver les caractéristiques de la TH1 présentées dans le chapitre 5.

Nous nous intéressons tout d'abord aux modèles utilisant la fonction de structure, puis nous testerons les modèles de Smagorinsky et de Smagorinsky dynamique.

Les simulations réalisées sont rassemblées dans le tableau 6.3.

Nous allons tout d'abord comparer le modèle de la fonction de structure et sa version sélective, ce qui nous amènera à modifier le second modèle. Nous ferons, ensuite, une étude de sensibilité au maillage, pour connaître le comportement de ces modèles et pour finir, nous comparerons nos résultats avec des résultats obtenus avec un code spectral du LEGI.

Calcul N°	Modèle sous-maille
16	fonction de structure sélectif
17	Smagorinsky $C_s = 0.18$
18	Smagorinsky $C_s = 0.19$
19	Smagorinsky $C_s = 0.2$
20	Smagorinsky dynamique

TAB. 6.3 - Simulations effectuées pour évaluer les modèles sous-maille

6.2.1 THI avec le modèle de la fonction de structure standard et sa version sélective

Nous allons comparer la simulation 10, faite avec le modèle de la fonction de structure non sélectif et la simulation 16, réalisée avec la version sélective, décrite au paragraphe 3.4.2.2. Le modèle sélectif est conçu pour corriger le comportement du modèle standard. Nous avons signalé au chapitre 3, que le modèle standard dissipe trop d'énergie dans certaines situations, car il est sensible aux gradients de vitesse moyenne. Or, ces gradients peuvent exister dans des situations laminaires (comme le canal plan laminaire) et le modèle ne doit alors pas agir. Pour pallier ce défaut, le modèle sélectif utilise le critère décrit au chapitre 3, pour savoir si l'écoulement est tri-dimensionnel ou non, en annulant la viscosité turbulente dans le second cas.

Nous cherchons à vérifier son bon comportement lors de la simulation de la THI.

Nous présentons sur les figures 6.10 à 6.14 respectivement, l'évolution temporelle de l'énergie cinétique, sa décroissance (correspondant à son évolution tracée en coordonnées "log-log"), l'évolution temporelle de l'enstrophie ainsi que sa décroissance et les spectres d'énergie cinétique turbulente.

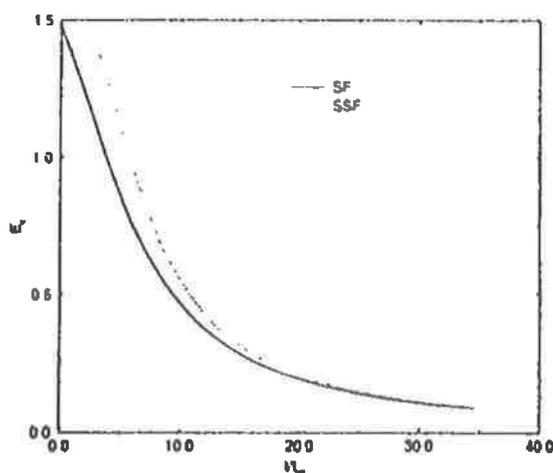


FIG. 6.10 - Evolution temporelle de l'énergie cinétique

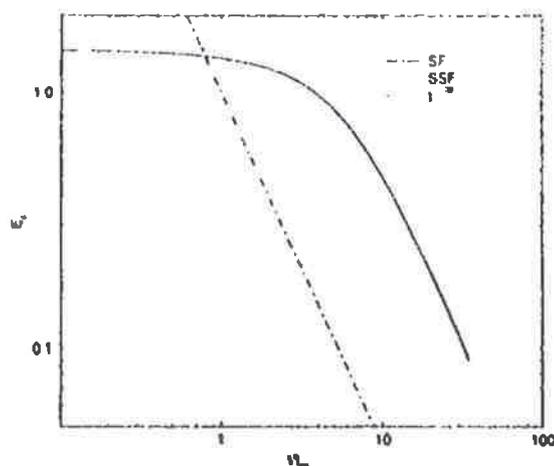


FIG. 6.11 - Décroissance de l'énergie cinétique

Comme nous l'avons présenté au paragraphe 5.1, dans les premiers instants de la simulation, l'énergie cinétique est constante et l'enstrophie augmente, en raison de l'établissement des corrélations triples. C'est ce qui se produit avec le modèle sélectif (cf. figures 6.10 et 6.12), mais pas avec le modèle standard. Le modèle sélectif joue donc bien son rôle et n'ajoute pas de viscosité turbulente à un moment où il n'en faut pas, ce qui n'est pas

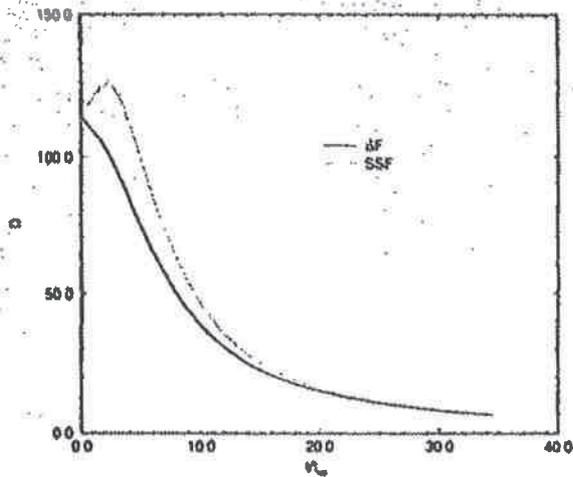


FIG. 6.12 - Evolution temporelle de l'entrophie

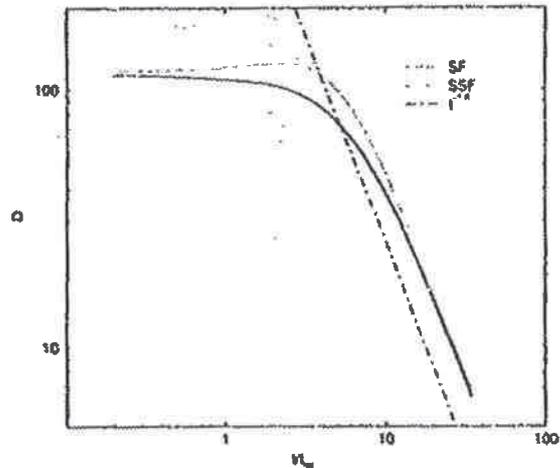


FIG. 6.13 - Décroissance de l'entrophie

le cas du modèle standard.

Les pentes de décroissance de l'énergie cinétique et de l'entrophie sont plus proches des valeurs théoriques (à savoir -1.38 pour l'énergie cinétique et -1.6 pour l'entrophie, cf. chapitre 5) avec le modèle sélectif (cf. figures 6.11 et 6.13).

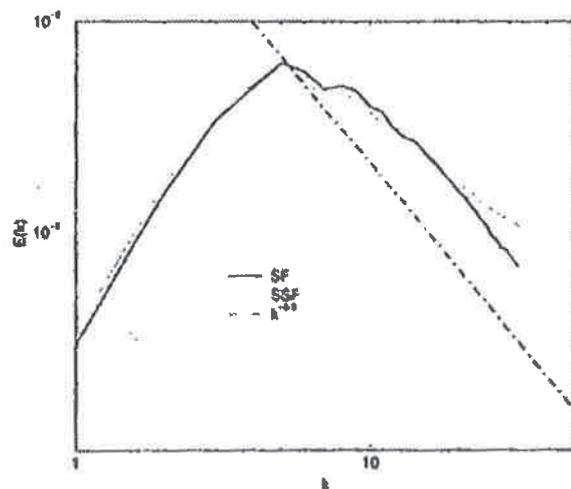


FIG. 6.14 - Spectre d'énergie cinétique turbulente

Sur la figure 6.14 représentant les spectres d'énergie cinétique calculés, nous constatons que la pente du spectre dans les petites échelles, obtenue avec le modèle de la fonction de structure standard, est très proche de $k^{-5/3}$, alors qu'elle est trop faible avec le modèle sélectif. Nous ne dissipons pas suffisamment aux petites échelles, et de ce fait nous ne retrouvons pas la zone inertielle. Par contre, aux grandes échelles, le modèle sélectif dissipe moins d'énergie que le modèle standard, ce qui correspond à un meilleur comportement. Cette faiblesse du modèle sélectif, ainsi que des considérations théoriques que nous présentons ci-dessous, nous ont conduit à en proposer une modification.

6.2.2 Modification du modèle sélectif

Nous allons réexaminer les deux hypothèses de base du modèle : l'angle de coupure α et la constante (cf. paragraphe 3.4.2.2).

- L'angle de coupure α_0 est déterminé comme celui correspondant au maximum de la densité de probabilité de l'angle α . E. David ([DAV93]) a déterminé que cet angle est égal à 20° , pour les résolutions testées, avec un champ de vitesse initiale ayant comme spectre d'énergie cinétique un spectre de Kolmogorov sur toutes les échelles représentées (en $k^{-5/3}$ de $k = 0$ à k_c).
- La constante du modèle permet d'avoir la même viscosité moyenne avec le modèle standard qu'avec le modèle sélectif. La constante ainsi trouvée est égale à 1.56. Or, nous voulons que *la dissipation de l'énergie cinétique soit la même pour les deux modèles*. Comme le terme de dissipation, qui se trouve dans l'équation de conservation de l'énergie cinétique, est non linéaire ($2\nu_i S_{ij} S_{ij}$), prendre la moyenne de ν_i ou de ce terme ne conduit pas au même résultat. Nous allons donc recalculer le coefficient, en évaluant le rapport des termes de dissipation obtenus avec le modèle standard et le modèle sélectif.

$$R_d = \frac{\langle 2\nu_{iFS} S_{ij} S_{ij} \rangle}{\langle 2\nu_{iFSS} S_{ij} S_{ij} \rangle} \quad (6.3)$$

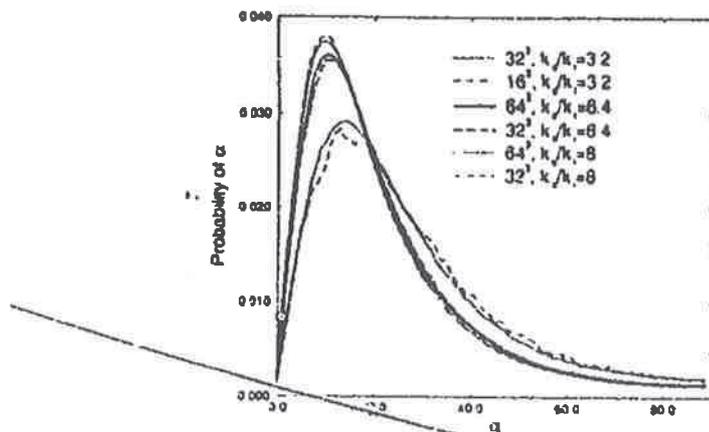
FS désignant la valeur obtenue avec le modèle de la fonction de structure standard et FSS celle obtenue avec la version sélective.

Afin de réexaminer ces deux hypothèses, nous avons réalisé plusieurs simulations en faisant varier k_c (simulations à des résolutions différentes) et $k_i(0)$ (nombre d'onde correspondant aux tourbillons contenant le plus d'énergie à l'instant initial (forme du spectre initial décrite au chapitre 5)), pour calculer α et R_d . Lors d'une TH en décroissance libre, k_i (position du pic du spectre) dépend du temps : nous le notons $k_i(t)$.

Nous présentons sur la figure 6.15 les densités de probabilité de l'angle $\alpha = (\bar{\omega}, \bar{\omega})$ et le rapport R_d obtenus (tableau 6.5) pour les différentes simulations. Nous les présentons en fonction de $k_c/k_i(t_{fin})$. $k_c/k_i(t)$ est le rapport entre le nombre d'onde de coupure du calcul et le nombre d'onde des tourbillons les plus énergétiques présents à l'instant t . Or ce sont ces tourbillons que nous voulons simuler ($k < k_c$) et non modéliser ($k > k_c$). C'est donc un très bon indicateur de la résolution de notre simulation et donc un de ses paramètres importants. Ces simulations sont résumées dans le tableau 6.4.

Calcul	Résolution	$k_i(0)$	$\frac{k_c}{k_i}(t_{fin})$
21	16^3	5	3.2
22	32^3	10	3.2
23	32^3	5	6.4
24	64^3	10	6.4
25	16^3	2	8
26	32^3	4	8
27	64^3	8	8
28	16^3	1	16
29	32^3	2	16
30	64^3	4	16

TAB. 6.4 – Simulations effectuées pour le calcul de α et de R_d

FIG. 6.15 - Densité de probabilité de l'angle α

Simulation	$\frac{k_c}{k_t}(t_{fin})$	R_d
21	3.2	1.22
22	3.2	1.23
23	6.4	1.35
24	6.4	1.36
25	8	1.39
26	8	1.39
27	8	1.41
28	16	1.17
29	16	1.19
30	16	1.5

TAB. 6.5: Valeur de R_d

Nous constatons que l'angle α_0 et le rapport R_d sont ~~forte~~ dépendant du rapport k_c/k_t . Les simulations précédentes nous donnent pour un rapport de k_c/k_t , une valeur de α_0 et une valeur de R_d . Nous avons réalisé de nouvelles simulations, en introduisant comme angle du modèle sélectif les valeurs de α_0 déterminées dans les simulations précédentes selon la valeur de k_c/k_t . Nous recalculons alors le rapport R_d . Ces simulations sont présentés dans le tableau 6.6.

Simulation	Résolution	$k_t(0)$	$\frac{k_c}{k_t}(t_{fin})$	Angle α (degrés)
31	32^3	10	3.2	14
32	32^3	5	6.4	11
33	64^3	10	6.4	11
34	32^3	4	8	9.5
35	64^3	8	8	9.5

TAB. 6.6 - Simulations effectuées pour la détermination de R_d , avec α calculé précédemment

Les nouveaux rapports calculés sont présentés sur la figure 6.16.

Nous constatons que les rapports calculés sont très proches pour les différentes simulations, leur valeur étant de l'ordre de 1.35. Ceci donne une nouvelle constante pour le modèle sélectif proche de 0.086, au lieu de 0.104 auparavant.

Afin d'avoir un modèle applicable pour d'autres résolutions, il nous faut maintenant trouver une régression permettant de donner l'angle de coupe α , en fonction du rapport k_c/k_t . Nous représentons sur la figure 6.17, l'évolution de l'angle en fonction du rapport k_c/k_t , pour les calculs effectués et une régression calculée à partir de ces points.

L'évolution de α_0 est alors la suivante:

- Nous constatons sur les calculs l'existence d'une asymptote à 9° , pour $k_c/k_t > 10$.
- Nous disposons de données pour $3.2 \geq k_c/k_t \geq 8$, qui nous permettent de calculer une régression, en utilisant la méthode des moindres carrés. Nous trouvons l'expression suivante: $\alpha \left(\frac{k_c}{k_t} \right) = 23. \left(\frac{k_c}{k_t} \right)^{-0.4}$.

Modèle modifié

Le modèle modifié est donc le suivant :

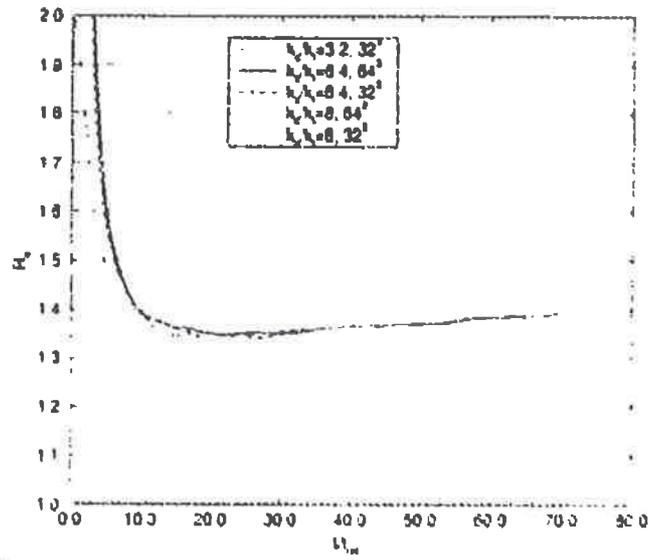


FIG. 6.16 - Evolution du rapport R_A

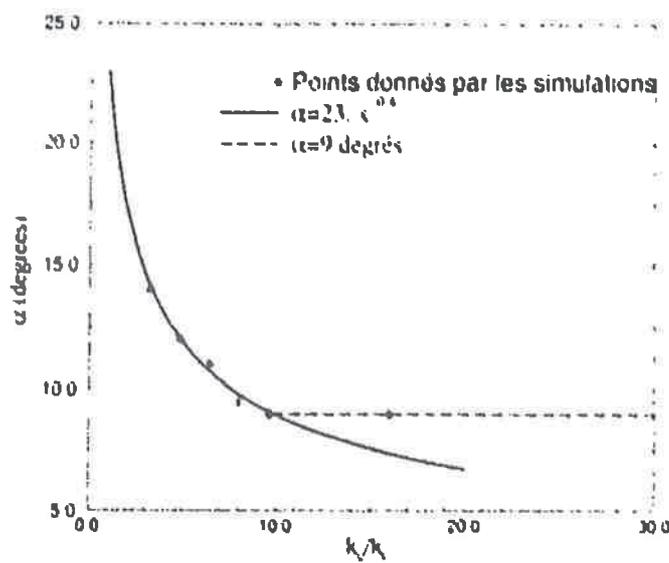


FIG. 6.17 - Evolution de l'angle α_0 - Régression

$$v_i(k) = C \Phi_o\left(\frac{k_c}{k_i}\right) (\bar{x}, t) \Delta x [F_2(\bar{x}, \Delta x)]^{1/2}$$

avec $C = 0.086$

$$\text{et } \alpha\left(\frac{k_c}{k_i}\right) = \begin{cases} 23 \cdot \left(\frac{k_c}{k_i}\right)^{-0.4} & \text{pour } 1 \leq \frac{k_c}{k_i} \leq 10. \\ 9. & \text{si } \frac{k_c}{k_i} > 10. \end{cases}$$

Validation du modèle modifié

Afin de vérifier que le nouveau modèle conserve les bonnes propriétés du modèle sélectif tout en corrigeant ses défauts, nous avons réalisé plusieurs simulations de THH, pour différentes valeurs du rapport k_c/k_i .

Nous allons vérifier, tout d'abord, que nous obtenons une bonne pente dans les petites échelles. Les différents calculs sont résumés dans le tableau suivant et les résultats sont présentés sur les figures 6.18 à 6.21.

Calcul	Résolution	$k_i(0)$	$\frac{k_c}{k_i} (l_{fin})$	Angle α (degrés)	comparé au calcul
36	32^3	10	3.2	14	22
37	32^3	5	6.4	11	23
38	64^3	10	6.4	11	24
39	64^3	8	8	9.5	27
40	32^3	4	8	9.5	cf. sensibilité

TAB. 6.7 - Simulations effectuées pour la validation du modèle sélectif modifié

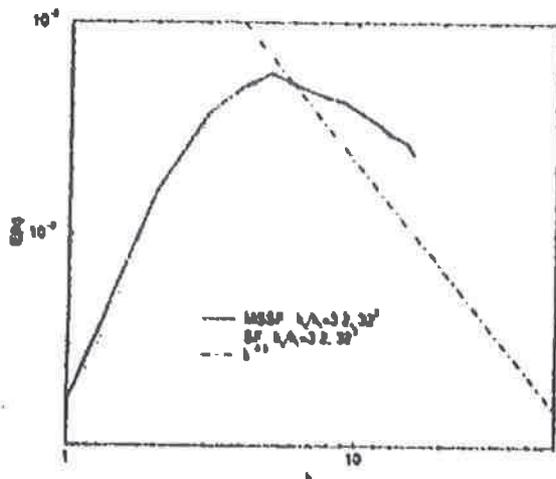


FIG. 6.18 - Spectres pour $k_c/k_i = 3.2$, résolution de 32^3

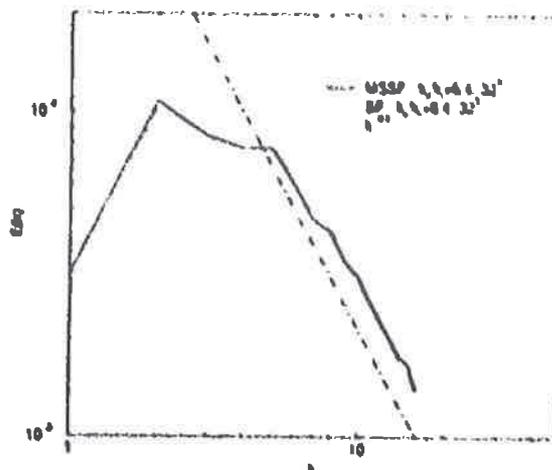


FIG. 6.19 - Spectres pour $k_c/k_i = 6.4$, résolution de 32^3

Nous constatons que la pente du modèle modifié est très proche de celle obtenue avec le modèle non sélectif, ce qui était le but recherché.

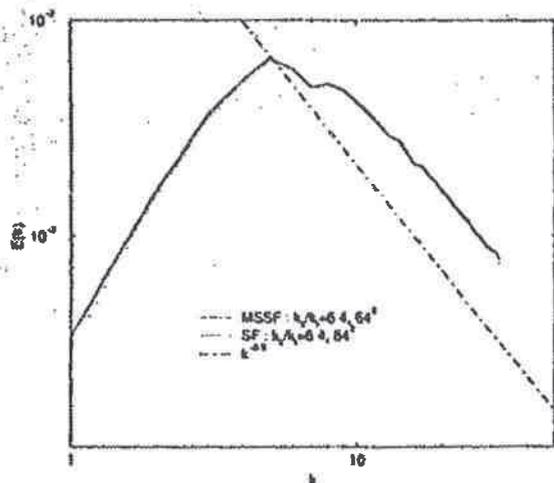


FIG. 6.20 - Spectres pour $k_c/k_i = 6.4$, résolution de 64^3

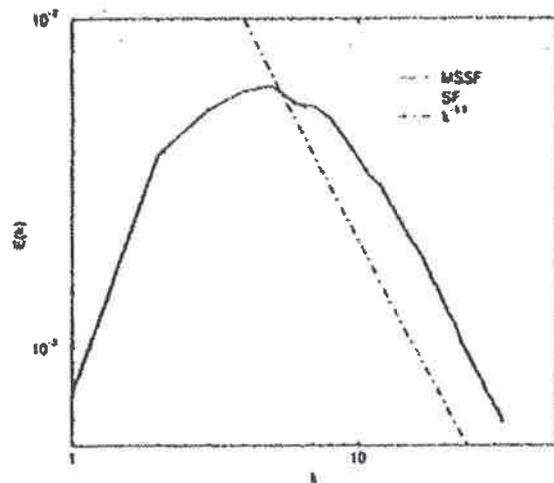


FIG. 6.21 - Spectres pour $k_c/k_i = 8$, résolution de 64^3

Nous allons maintenant vérifier son comportement aux grandes échelles, en comparant les trois modèles : standard (FS, calcul 10), sélectif (FSS, calcul 16) et sélectif modifié (FSSM, calcul 38). Les résultats sont présentés sur les figures 6.22 à 6.26.

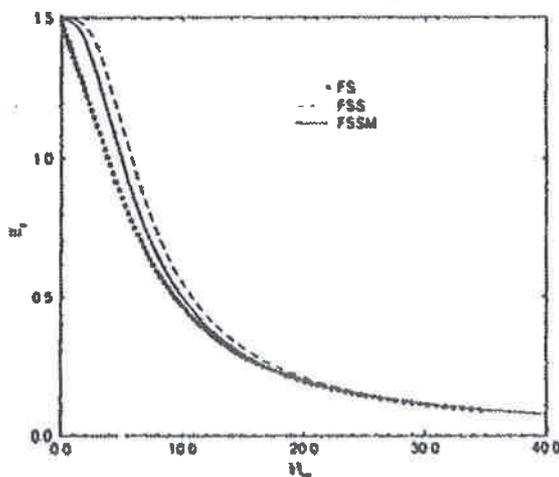


FIG. 6.22 - Evolution de l'énergie cinétique

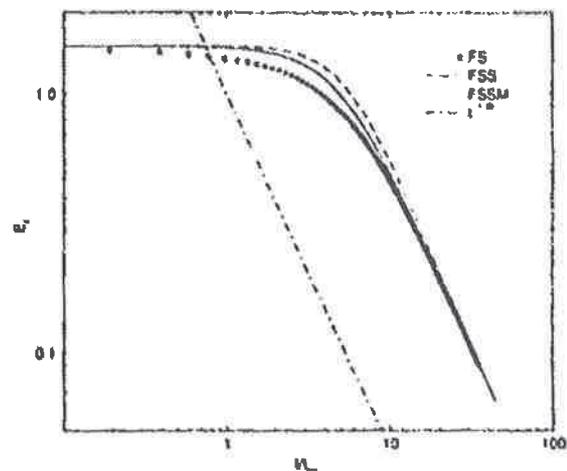


FIG. 6.23 - Décroissance de l'énergie cinétique

Sur la figure 6.22, nous vérifions le bon comportement du modèle modifié dans les premiers instants de la simulation : l'énergie cinétique reste constante, pendant quelques temps de retournement. Il dissipe un peu plus que le modèle sélectif standard, puisque la correction a pour effet d'augmenter la dissipation aux petites échelles qui était trop faible (cf. figure 6.26). Nous constatons sur la figure 6.23, que la pente de décroissance est conforme à la théorie.

L'entrophie a également le bon comportement, dans les premiers instants (cf. figure 6.24) : elle augmente, puis décroît ensuite, même si l'augmentation est moins forte qu'avec le modèle sélectif original pour la même raison que l'énergie reste moins longtemps constante. Sa pente de décroissance est proche de celle attendue (cf. figure 6.25).

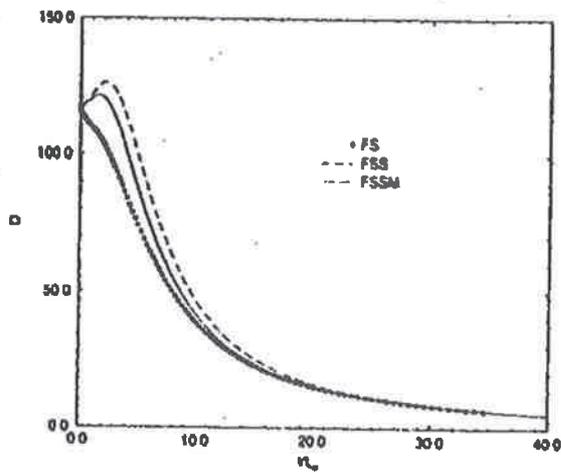


FIG. 6.24 - Evolution de l'enstrophie

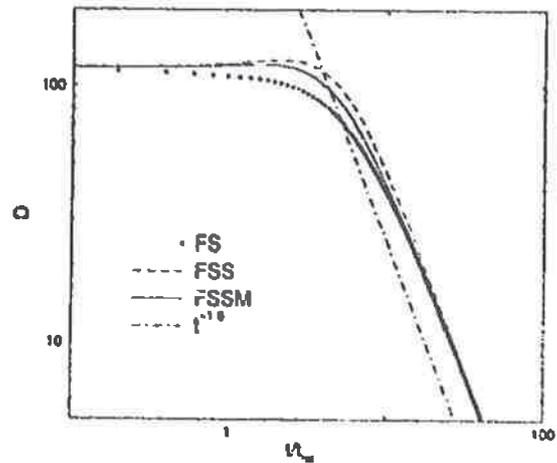


FIG. 6.25 - Décroissance de l'enstrophie

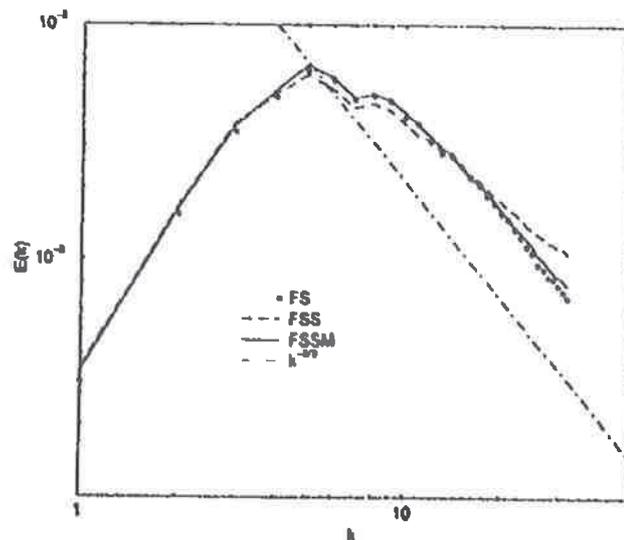


FIG. 6.26 - Spectre d'énergie cinétique turbulente

Nous constatons sur la figure 6.26 que la pente aux petites échelles est très proche de $-5/3$, proche en particulier de celle obtenue avec le modèle non sélectif. Aux grandes échelles, le spectre obtenu avec le modèle sélectif modifié est semblable à celui obtenu avec le modèle sélectif original, le modèle modifié conserve donc les bonnes propriétés du modèle sélectif à ces échelles.

Conclusion à propos du modèle sélectif modifié, appliqué au cas de la THI

Le but de la modification du modèle sélectif était d'avoir un modèle qui garde le bon comportement du modèle sélectif aux grandes échelles, mais qui dissipe correctement les petites échelles. Les résultats précédents nous ont montré que ce double objectif est atteint. Nous avons donc élaboré un modèle conduisant à de bons résultats en THI. Il faut maintenant s'intéresser à son adaptation à d'autres cas. Cette adaptation n'est pas évidente, car nous avons constaté une dépendance de l'angle de coupure au rapport k_c/k_i . La difficulté est maintenant, de déterminer ce rapport dans les différentes configurations. La prochaine application de ce modèle se fera sur un canal plan. Nous présenterons alors une méthode pour évaluer ce rapport.

6.2.3 Sensibilité au maillage des modèles sélectifs

6.2.3.1 Modèle sélectif standard

Nous avons fait des calculs de sensibilité au maillage, avec les résolutions suivantes : 32^3 , 48^3 , 64^3 et 96^3 , avec $k_i(0) = 10$. Les caractéristiques des calculs sont résumées dans le tableau 6.8.

Calcul	Temps	Convection	Résolution	Modèle
41	RK3	Centré	32^3	sélectif standard
42	RK3	Centré	48^3	sélectif standard
43	RK3	Centré	64^3	sélectif standard
44	RK3	Centré	96^3	sélectif standard

Tab. 6.8 - Calculs effectués pour les tests de sensibilité au maillage du modèle sélectif

Les résultats sont présentés sur les figures 6.27 à 6.31.

Pour l'énergie cinétique, nous constatons sur la figure 6.27 que la zone constante durant les premiers instants n'apparaît qu'à partir d'une résolution de 64^3 , les résolutions inférieures n'étant pas suffisantes. A 64^3 , la décroissance est proche de $t^{-1.38}$ (figure 6.28).

Quant à l'entrophie, nous constatons sur la figure 6.29, qu'elle est très sensible à la finesse du maillage. En effet, les échelles qui contribuent à l'entrophie sont des échelles plus petites que pour l'énergie cinétique, comme nous l'avons expliqué auparavant (cf. chapitre 5). Plus la résolution est grande, mieux ces échelles sont simulées, ce qui explique cette forte dépendance. On le voit également sur la pente de décroissance : nous nous approchons de $t^{-1.6}$ quand la résolution augmente (figure 6.30).

Sur la figure 6.31, nous représentons les spectres calculés pour des résolutions de 32^3 et 64^3 : les différences entre les résolutions sont moins nettes sur les spectres.

Pour bien représenter l'évolution de l'énergie cinétique, il est donc nécessaire d'aller à une résolution de 64^3 , pour $k_i(0) = 10$.

6.2.3.2 Sensibilité au maillage du modèle sélectif modifié

La sensibilité au maillage de ce modèle ne va pas s'exprimer dans les mêmes termes que pour le modèle sélectif, puisque le paramètre important est ici le rapport k_c/k_i . Les

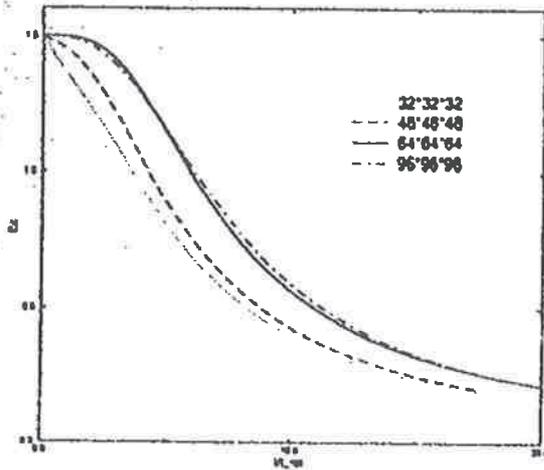


FIG. 6.27 - Evolution de l'énergie cinétique pour différents maillages avec le modèle sélectif standard

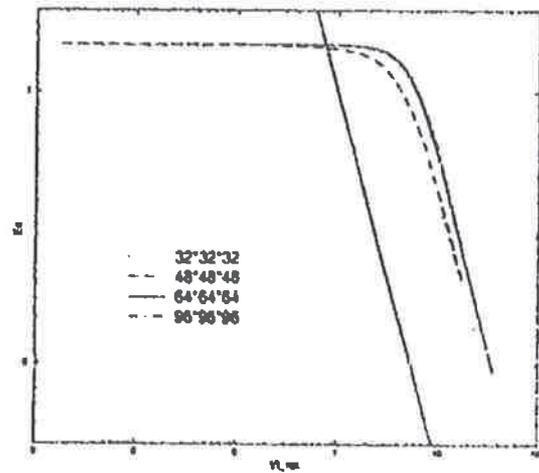


FIG. 6.28 - Pente de décroissance de l'énergie cinétique pour différents maillages avec le modèle sélectif standard

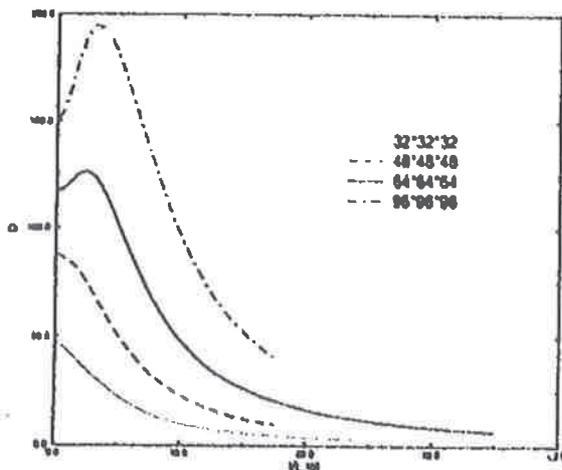


FIG. 6.29 - Evolution de l'ensotrophie pour différents maillages

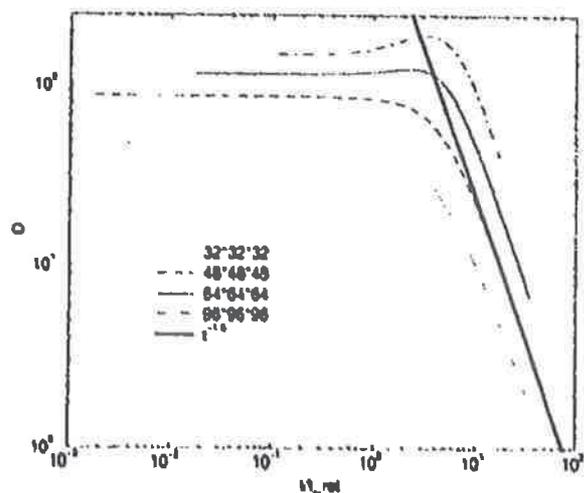


FIG. 6.30 - Pente de décroissance de l'ensotrophie pour différents maillages

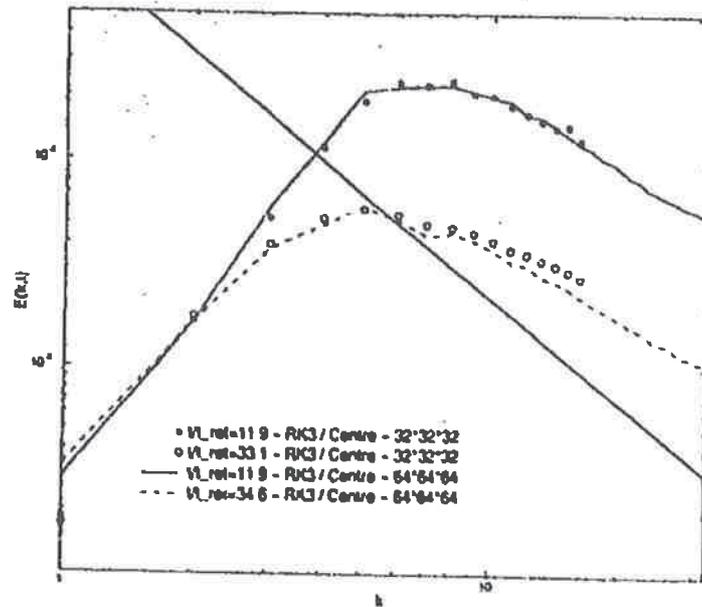


FIG. 6.31 - Spectres d'énergie turbulente pour différents maillages

simulations comparées ici font partie de celles présentées au paragraphe précédent.

Nous allons tout d'abord étudier les différentes caractéristiques de deux simulations de même rapport k_c/k_i , mais de résolution différente (i.e. de k_c différent). Ce sont les calculs 37 et 38.

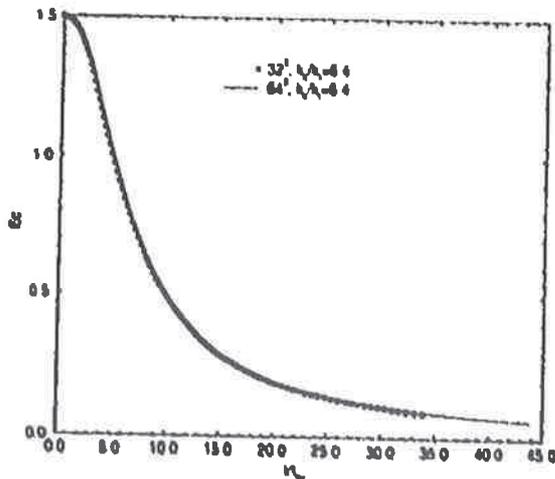


FIG. 6.32 - Evolution de l'énergie cinétique avec le modèle sélectif modifié - $k_c/k_i = 6.4$

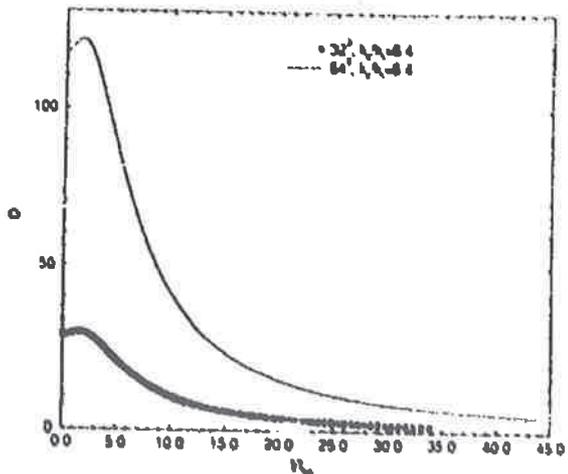


FIG. 6.33 - Evolution de l'ensrophie avec le modèle sélectif modifié - $k_c/k_i = 6.4$

L'évolution de l'énergie cinétique est semblable pour les deux résolutions (cf. figure 6.32). On retrouve la forme de l'évolution de l'ensrophie, les maxima se produisant au même instant (cf. figure 6.33), par contre les valeurs sont très éloignées : ceci est normal puisqu'il y a beaucoup plus d'échelles représentées dans la simulation à 64^3 que dans celle à 32^3 , et comme nous l'avons déjà dit, l'ensrophie dépend fortement des petites échelles. La pente de décroissance est assez proche de celle attendu pour ces deux résolutions (cf. figure 6.34).

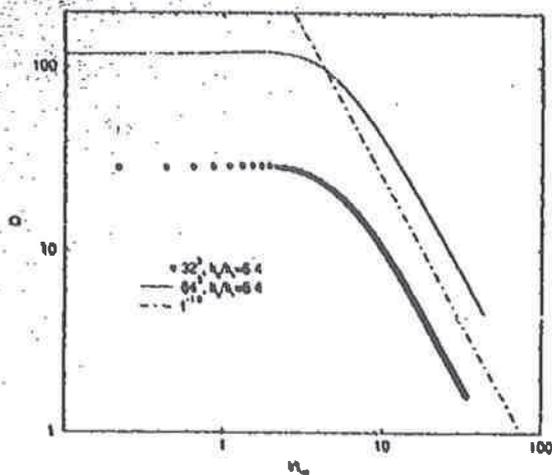


FIG. 6.34 - Décroissance de l'enstrophie avec le modèle sélectif modifié - $k_c/k_i = 6.4$

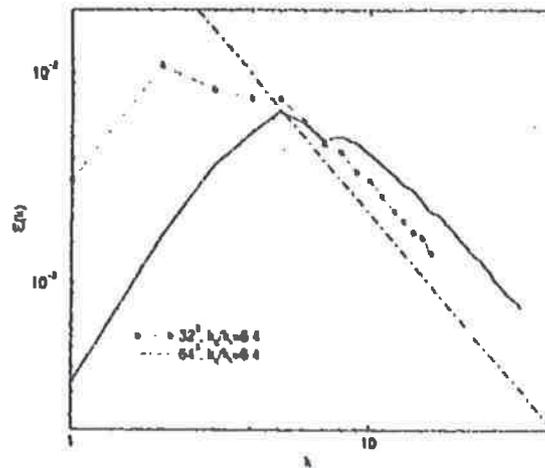


FIG. 6.35 - Spectres d'énergie cinétique avec le modèle sélectif modifié - $k_c/k_i = 6.4$

Sur la figure 6.35, nous comparons les spectres obtenus lors des deux simulations : les différences entre les deux spectres proviennent du fait que leur condition initiale n'est pas la même. En particulier, le pic du spectre d'énergie cinétique initiale est situé à $k_i = 10$ pour le calcul en 32^3 et à $k_i = 5$ pour celui à 64^3 . Pour les deux simulations, la pente est très proche de $-\frac{5}{3}$. Bien entendu, la zone inertielle est plus grande pour la simulation à 64^3 , puisqu'il y a plus d'échelles représentées (de 0 à 32 pour 64^3 et de 0 à 16 pour 32^3).

Pour des simulations ayant le même rapport k_c/k_i , nous retrouvons donc des résultats qualitativement semblables, les différences quantitatives provenant des différences de condition initiale. Ceci est un signe encourageant pour les calculs à faible résolution et montre le bon comportement du modèle, en particulier son adaptation à la taille des structures effectivement présentes dans l'écoulement simulé.

Nous allons maintenant comparer des simulations pour une résolution de 32^3 , mais des valeurs de k_c/k_i différentes, à savoir 3.2, 6.4 et 8. Ce sont les calculs 36, 37 et 40.

Sur la figure 6.36, nous retrouvons la bonne évolution de l'énergie cinétique (constante durant les premiers instants puis décroissante) pour un rapport $k_c/k_i > 6.4$. Pour $k_c/k_i = 3.2$, l'énergie cinétique décroît immédiatement. Nous constatons également sur la figure 6.37, que la pente de décroissance n'est pas bien prédite pour $k_c/k_i = 3.2$, mais qu'elle s'approche de la bonne valeur à partir de $k_c/k_i = 6.4$.

Des constatations du même ordre peuvent être faites sur la figure 6.38, à propos de l'évolution de l'enstrophie. Nous voyons apparaître le pic d'enstrophie à partir de $k_c/k_i = 6.4$, alors que pour $k_c/k_i = 3.2$, il est inexistant.

Il en est de même pour le spectre et l'existence de la zone inertielle (cf. figure 6.39) : elle apparaît à partir de $k_c/k_i = 6.4$; la pente pour $k_c/k_i = 3.2$ étant trop faible.

Nous constatons donc que pour retrouver les bonnes caractéristiques, il faut avoir une résolution supérieur à $k_c/k_i = 3.2$. Pour des valeurs supérieurs à $k_c/k_i = 6.4$, nous semblons avoir convergé en maillages, sauf pour l'enstrophie, très dépendante du maillage, mais dont l'allure de l'évolution est bien prédite. Nous retrouvons là le fait que pour pouvoir appliquer un modèle sous-maille et trouver de bons résultats, la coupure doit se trouver dans la zone inertielle, assez loin du nombre d'onde correspondant aux tourbillons les plus énergétiques. Ceci est une des hypothèses de base de la Simulation des Grandes Echelles, mais il est tout de même intéressant de retrouver ce résultat sur cette étude de

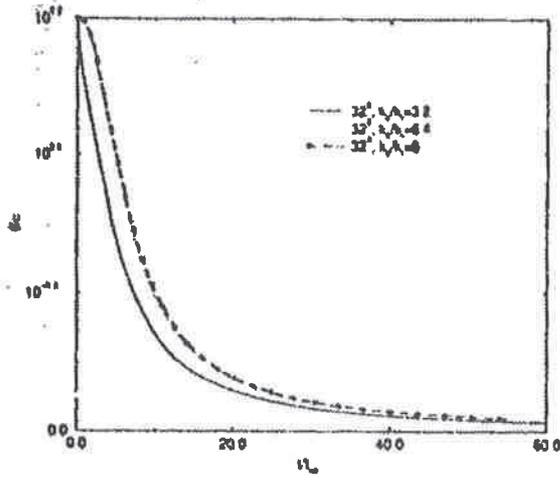


FIG. 6.36 - Evolution de l'énergie cinétique avec le modèle sélectif modifié pour différentes valeurs de k_c/k_i

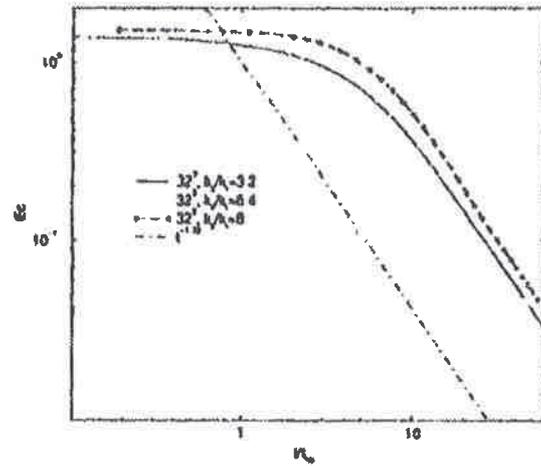


FIG. 6.37 - Décroissance de l'énergie cinétique avec le modèle sélectif modifié pour différentes valeurs de k_c/k_i

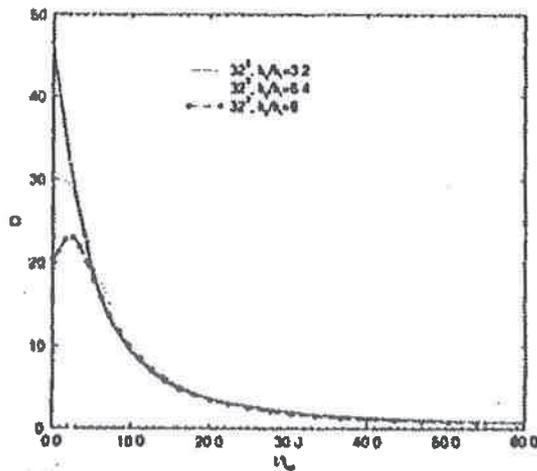


FIG. 6.38 - Evolution de l'entropie avec le modèle sélectif modifié pour différentes valeurs de k_c/k_i

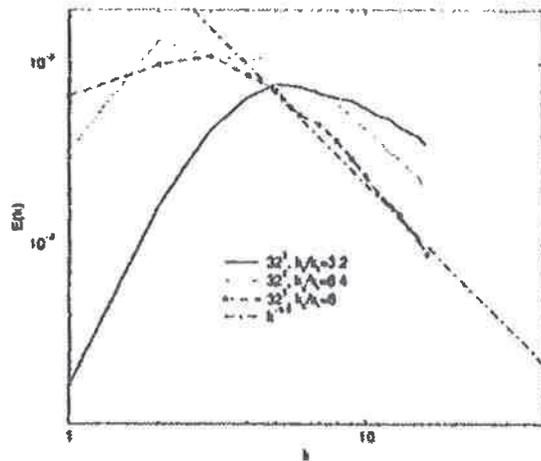


FIG. 6.39 - Spectres d'énergie cinétique avec le modèle sélectif modifié pour différentes valeurs de k_c/k_i

sensibilité au maillage.

Conclusion Cette étude de sensibilité au maillage nous a montré que notre modèle est sensible à la résolution "relative" de la simulation, en ce sens que cela ne dépend pas uniquement de la résolution du maillage (position de la coupure), mais que cela dépend de la coupure placée relativement au pic du spectre d'énergie.

6.2.3.3 Comparaison avec des résultats d'un code spectral du LEGI

Présentation Le champ initial des simulations a été choisi pour permettre les comparaisons avec les résultats spectraux du LEGI. Pour ces comparaisons, nous prenons $k_1(0) = 10$. La résolution de notre calcul est de 64^3 . Les tests de sensibilité précédent montrent que cette configuration permet de retrouver les principales caractéristiques de la THI. Les calculs spectraux ont été réalisés par Sepan¹ Ossia ([OSS]), à l'aide d'un code spectral et des modèles de viscosité spectrale turbulente (cf. paragraphe 3.4.1 et Annexe B).

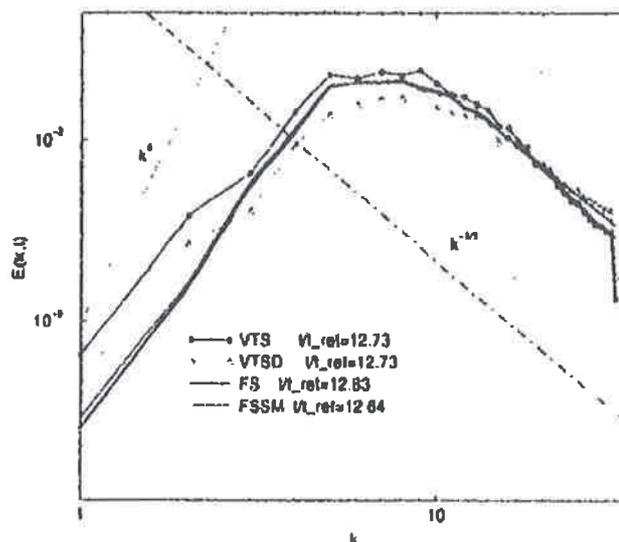


FIG. 6.40 - Comparaison avec les résultats spectraux

Résultats Sur la figure 6.40, nous présentons les résultats des calculs réalisés avec les modèles suivants :

- le modèle à viscosité turbulente spectrale (VTS)
- le modèle à viscosité turbulente spectrale dynamique (VTSD)
- le modèle sélectif modifié (calcul 38) (FSSM)
- le modèle de la fonction de structure non sélective (calcul 10) (FS)

Nous avons un très bon accord (après $k = 10$) entre les résultats obtenus avec le modèle VTS et le modèle de la fonction de structure non sélective. Nous pouvons rapprocher les résultats obtenus avec le modèle VTSD à ceux obtenus avec le modèle sélectif modifié. Au temps auquel nous faisons la comparaison, la pente du spectre obtenu avec ce modèle n'est pas encore de $-5/3$ alors que c'est le cas après 20 temps de retournement.

Conclusion Nous avons un bon accord entre nos résultats obtenus dans l'espace physique et les résultats spectraux. Ceci est encourageant car ces derniers sont plus précis que ceux réalisés dans l'espace physique. Pour finir de valider nos calculs, nous simulerons l'expérience de turbulence de grille (cf. paragraphe 6.3).

6.2.4 Tests de THI avec le modèle de Smagorinsky

Présentation Nous avons réalisé des simulations en faisant varier la valeur de la constante de Smagorinsky. Pour le premier calcul, nous avons utilisé la valeur théorique de C_s , c'est-à-dire 0.18, puis 0.19 et 0.2, (pour la valeur de la constante, se référer au chapitre 3 paragraphe 3.2). Ce sont les calculs 17, 18 et 19. Nous les comparons aux résultats du calcul 10 effectué avec le modèle de la fonction de structure standard.

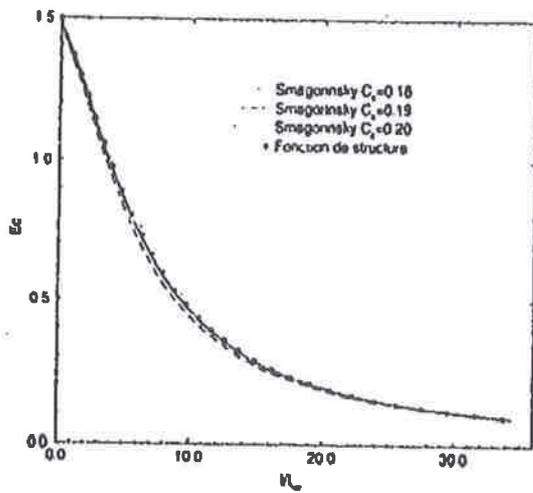


FIG. 6.41 - Evolution de l'énergie cinétique avec le modèle de Smagorinsky

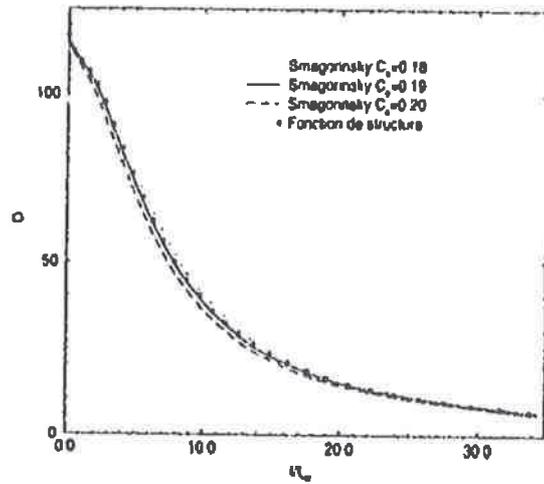


FIG. 6.42 - Evolution de l'enstrophie avec le modèle de Smagorinsky

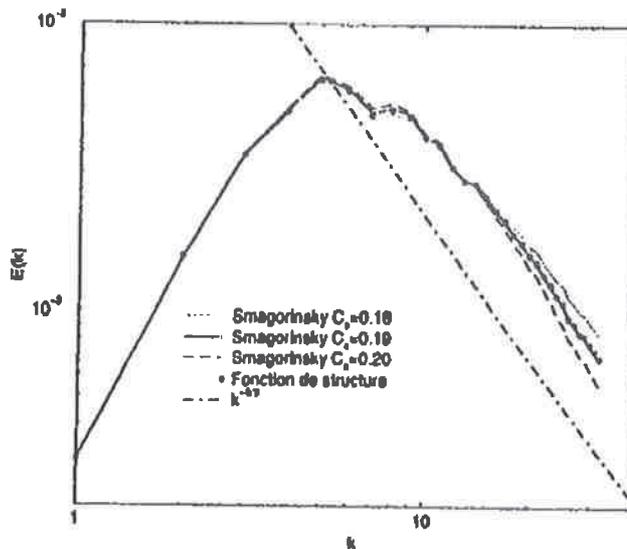


FIG. 6.43 - Spectres d'énergie cinétique avec le modèle de Smagorinsky

Résultats Ils sont présentés sur les figures 6.41 à 6.43. Sur les spectres, nous constatons que la pente est proche de $-\frac{5}{3}$ pour les valeurs de la constante testées, en particulier pour $C_s = 0.19$. Aux grandes échelles, les comportements du modèle de Smagorinsky et du modèle de la fonction de structure sont semblables. En particulier, comme avec le modèle de la fonction de structure non sélectif, nous ne retrouvons pas une énergie cinétique constante dans les premiers instants. La pente de décroissance de l'énergie cinétique est bien prédite ensuite.

Conclusion Nous retrouvons certaines des caractéristiques de la THI en utilisant le modèle de Smagorinsky avec $C_s \simeq 0.19$, mais il est trop dissipatif aux grandes échelles, ce qui est un défaut bien connu de ce modèle.

6.2.5 Tests de THI avec le modèle de Smagorinsky dynamique

Présentation Nous présentons les résultats du calcul 20. Nous les comparons aux résultats des calculs 10 (modèle de la fonction de structure) et 38 (modèle de la fonction de structure sélective modifié).

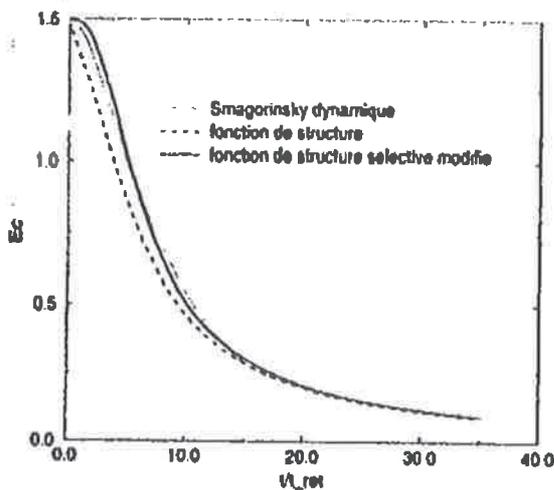


FIG. 6.44 - Evolution de l'énergie cinétique avec le modèle de Smagorinsky dynamique

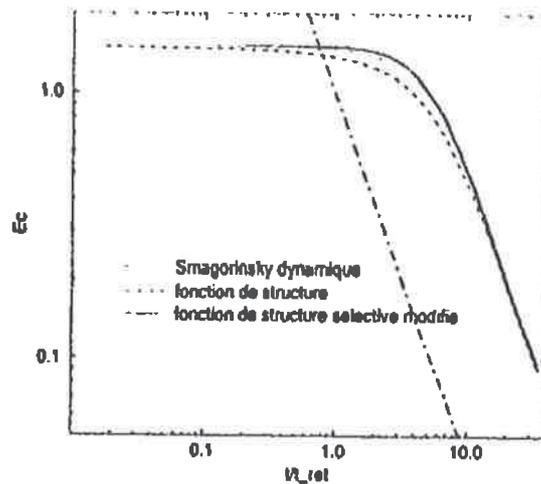


FIG. 6.45 - Décroissance de l'énergie cinétique avec le modèle de Smagorinsky dynamique

Résultats Ils sont présentés sur les figures 6.44 à 6.46. La pente du spectre aux petites échelles est proche de $-\frac{5}{3}$ avec ce modèle (cf. figure 6.46). Les grandes échelles sont moins dissipées qu'avec le modèle de la fonction de structure non sélective (et donc qu'avec le modèle de Smagorinsky). Le comportement aux grandes échelles du modèle dynamique et du modèle de la fonction de structure sélectif modifié est similaire, le second présentant l'avantage de demander moins de temps de calcul. Sur l'évolution de l'énergie cinétique, nous retrouvons un comportement proche des résultats théoriques, à savoir que l'énergie ne commence à décroître fortement qu'après quelques temps de retournement. Elle décroît néanmoins plus vite (durant les premiers instants) avec le modèle dynamique qu'avec le modèle de la fonction de structure sélectif modifié.

Conclusion Nous retrouvons les bonnes caractéristiques de la THI avec le modèle de Smagorinsky dynamique. De plus, les résultats sont proches de ceux obtenus avec le modèle

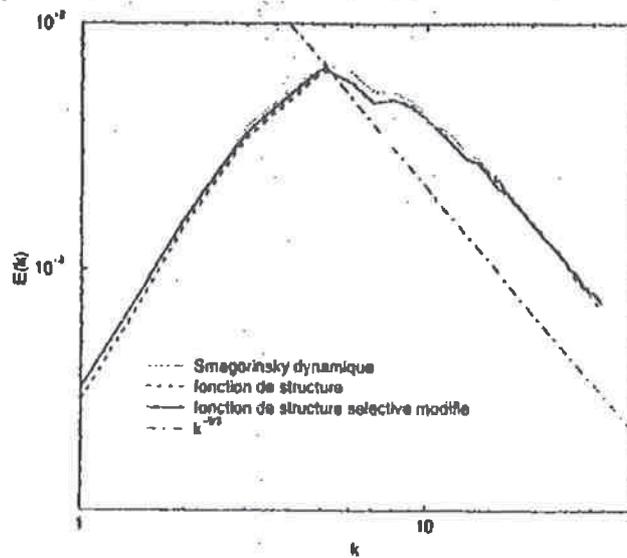


FIG. 6.46 - Spectres d'énergie cinétique avec le modèle de Smagorinsky dynamique

sélectif modifié, ce qui tend à montrer le bon comportement de ce dernier.

6.2.6 Comparaison des différents modèles sous-maille

Nous avons rassemblé sur la figure 6.47 les résultats obtenus avec différents modèles, à savoir : le modèle de Smagorinsky avec $C_s = 0.19$, le modèle de Smagorinsky dynamique, le modèle de la fonction de structure et le modèle sélectif modifié de la fonction de structure.

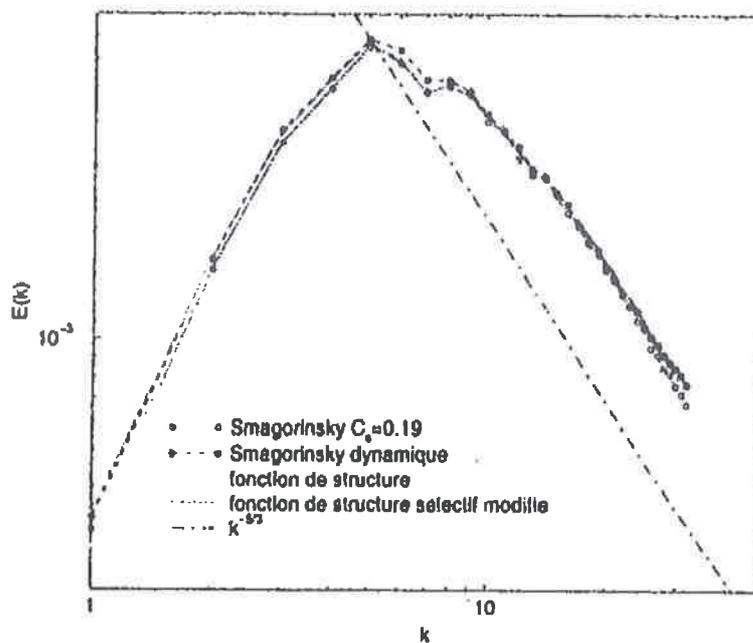


FIG. 6.47 - Spectres d'énergie cinétique avec les différents modèles sous-maille

Le comportement des différents modèles aux petites échelles est comparable. Par contre, aux grandes échelles, il diffère, les modèles de Smagorinsky et de la fonction de structure non sélectif étant plus dissipatifs.

6.3 Simulation de l'expérience de Turbulence de Grille

Nous allons maintenant présenter les résultats des simulations de l'expérience de turbulence de grille de Comte-Bellot et Corrsin ((CBC71)), dont les conditions sont décrites au paragraphe 5.1.5.

Nous avons fait deux calculs (cf. paragraphe 5.1.5.2):

- une première simulation en partant d'un champ de vitesse correspondant à un des spectres expérimentaux mais ayant une distribution aléatoire gaussienne et donc des corrélations triples nulles,
- une seconde simulation partant d'un champ de vitesse plus réaliste, i.e. ayant un facteur de dissymétrie de l'ordre de 0.4 et une pente de décroissance de l'énergie cinétique proche de la valeur expérimentale de -1.25, obtenu à partir du champ de vitesse de la première simulation renormalisé de manière à imposer le spectre expérimental choisi comme condition initiale.

Nous comparons les résultats obtenus avec le modèle sélectif et le modèle sélectif modifié.

Calcul N°	Modèle sous-maille	Avec ou sans phase d'initialisation
45	fonction de structure sélectif	Sans
46	fonction de structure sélectif modifié	Sans
47	fonction de structure sélectif	Avec
48	fonction de structure sélectif modifié	Avec

TAB. 6.9 - Simulations effectués pour la simulation de l'expérience de turbulence de grille

6.3.1 Calcul de turbulence de grille sans initialisation

Présentation Nous comparons les résultats obtenus lors des calculs, sans phase d'initialisation (calculs 45 et 46), aux résultats expérimentaux. Ils sont présentés sur les figures 6.48 à 6.50.

Résultats Nous constatons sur la figure 6.48 que le calcul donne des valeurs proches des valeurs expérimentales. Sur la figure 6.49, la pente décroissance calculée est proche de $t^{-1.25}$ (valeur expérimentale). Les différences entre les deux modèles ne sont pas très grandes: le modèle sélectif modifié dissipe un peu plus dans les premiers instants que le modèle standard, ce qui est cohérent avec son élaboration (cf. paragraphe 6.2.2). L'état final est le même avec les deux modèles.

Sur la figure 6.50, nous comparons les spectres :

- à grande échelle, nous sommes un peu éloignés des spectres expérimentaux, mais nous nous en rapprochons pour des nombres d'onde plus grands. Il faudrait certainement mettre plus de points à grande échelle pour mieux représenter le spectre expérimental, car nous n'avons (dans nos calculs) que deux points entre $k = 1$ et $k = 2$, alors qu'expérimentalement 4 points décrivent cet intervalle.

De plus, les erreurs de mesure sont plus grandes aux grandes échelles et l'influence des conditions limites du calcul plus grande également, ce qui peut expliquer les différences constatées aux grandes échelles.

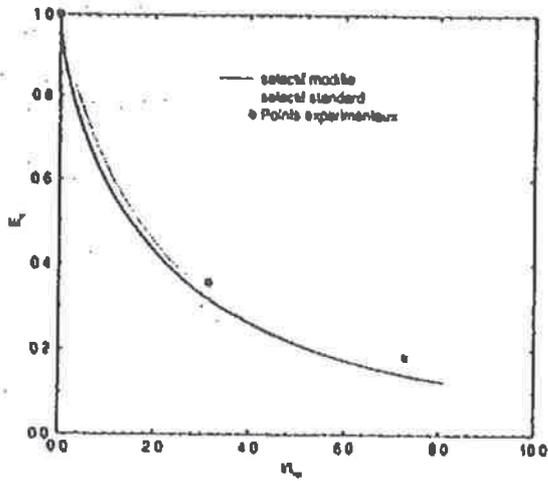


FIG. 6.48 - Evolution de l'énergie cinétique

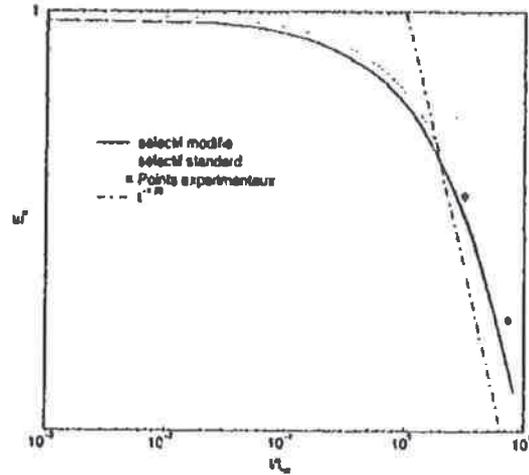


FIG. 6.49 - Décroissance de l'énergie cinétique

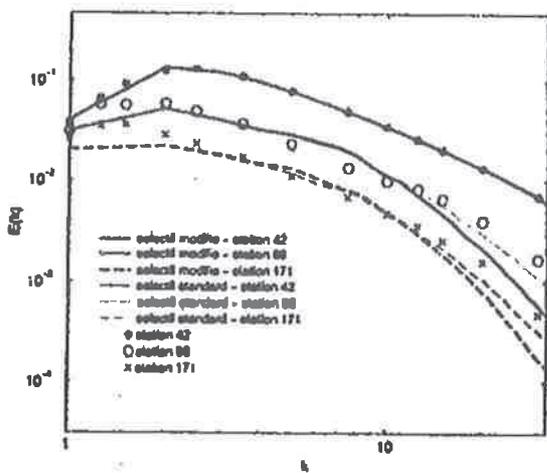


FIG. 6.50 - Spectres d'énergie turbulente

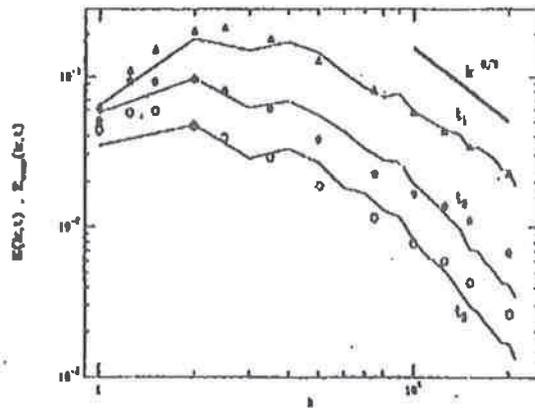


FIG. 6.51 - Spectres d'énergie turbulente obtenues avec le modèle VTSD (S. Ossia)

- aux petites échelles (après $k \approx 10$), les différences entre les deux modèles et avec les résultats expérimentaux augmentent : le modèle sélectif modifié est beaucoup plus dissipatif.

Ces différences peuvent être dues aux éléments suivants :

- à petite échelle, les erreurs numériques, par rapport aux grandeurs simulées, sont plus importantes et la précision de la simulation est donc inférieure.
- il y a peut-être un effet du nombre de Reynolds, car il n'y a pas de zone inertielle dans les simulations effectuées, alors que nous la retrouvons expérimentalement.

La figure 6.51 représente les résultats des simulations de l'expérience de turbulence de grille menées par S. Ossia ([OSS]) avec le modèle VTSD et une résolution de 64^3 . Nous constatons le même type d'écart avec les résultats expérimentaux que dans nos simulations, aussi bien aux grandes échelles qu'aux petites, bien que les méthodes utilisées soient beaucoup plus précises que les nôtres.

Conclusion Tout en tenant compte des remarques précédentes, nous considérons que nous parvenons à simuler l'expérience de Comte-Bellot - Corrsin de façon satisfaisante.

6.3.2 Calcul de turbulence de grille avec phase d'initialisation

Présentation Nous rappelons (cf. paragraphe 5.1.5.2) que nous utilisons comme champ de vitesse initial le champ de vitesse final du calcul précédent pour lequel les corrélations triples sont différentes de 0, que nous modifions en imposant à nouveau le spectre expérimental de "la station 42".

Durant la phase d'initialisation, nous vérifions que nous avons bien atteint un état où les corrélations triples ne sont plus nulles et le facteur de dissymétrie proche de 0.5 (cf. la figure 6.52), et que l'énergie cinétique décroît en $t^{-1.25}$ (cf. la figure 6.53).

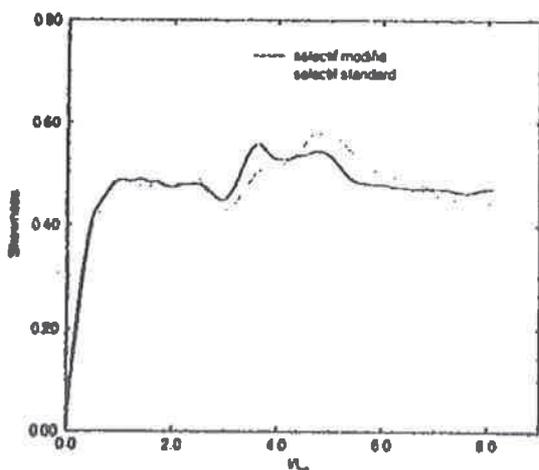


FIG. 6.52 - Evolution du facteur de dissymétrie durant la phase d'initialisation

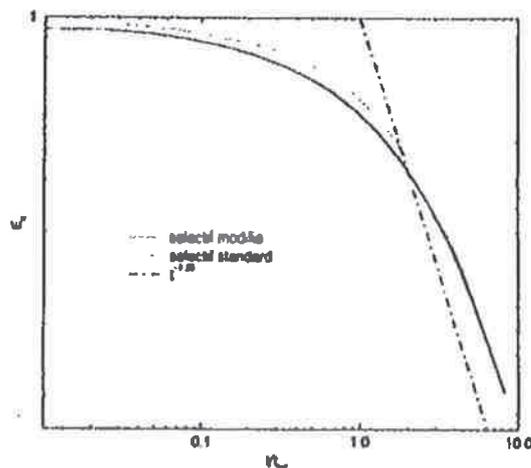


FIG. 6.53 - Evolution de l'énergie cinétique durant la phase d'initialisation

Nous comparons maintenant les résultats obtenus lors des calculs, avec phase d'initialisation (calculs 47 et 48), avec les résultats expérimentaux. Ils sont présentés sur les figures 6.54 à 6.56.

Résultats Sur les figures 6.54 et 6.55, nous constatons que le modèle modifié donne des résultats sensiblement meilleurs que le modèle standard. Les valeurs de l'énergie cinétique

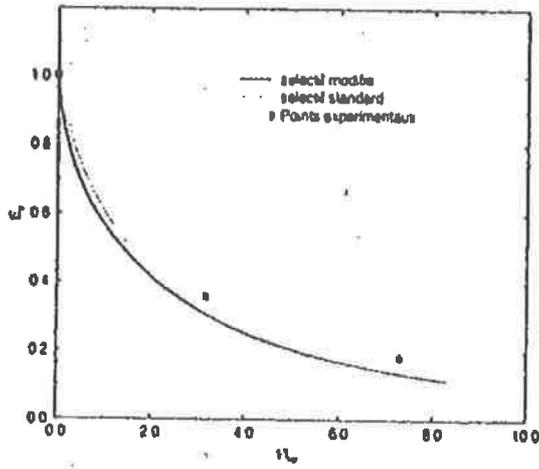


FIG. 6.54 - Evolution de l'énergie cinétique

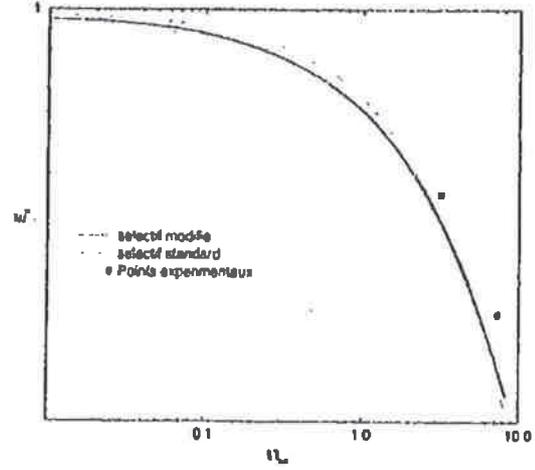


FIG. 6.55 - Décroissance de l'énergie cinétique

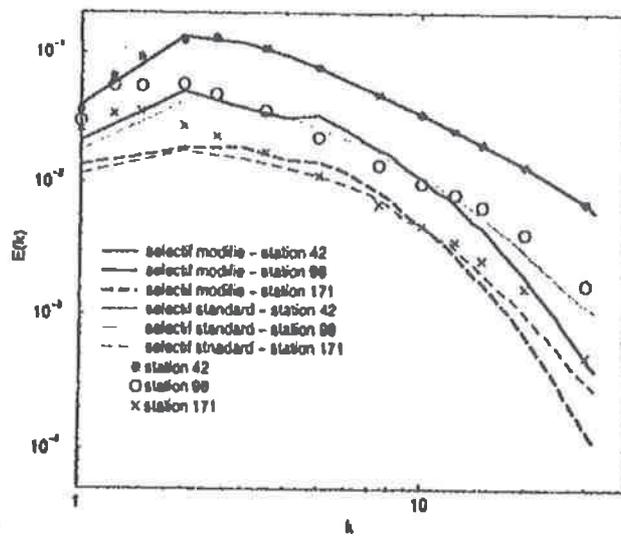


FIG. 6.56 - Spectres d'énergie turbulente

sont un peu plus proches avec le modèle modifié et la pente de décroissance est plus proche de la pente trouvée expérimentalement.

Nous constatons, sur la figure 6.56, qu'aux grandes échelles, nous nous sommes un peu éloignés des valeurs expérimentales, par rapport aux calculs précédents. Par contre, le modèle modifié donne des spectres plus proches des valeurs expérimentales que le modèle standard. Les remarques concernant les différences aux petites échelles, faites pour le calcul précédent, restent valables.

6.3.3 Comparaison des simulations avec et sans phase d'initialisation

Pour finir, nous allons comparer les différences obtenus avec le modèle sélectif modifié avec et sans phase d'initialisation. Ils sont présentés sur les figure 6.57 et 6.58.

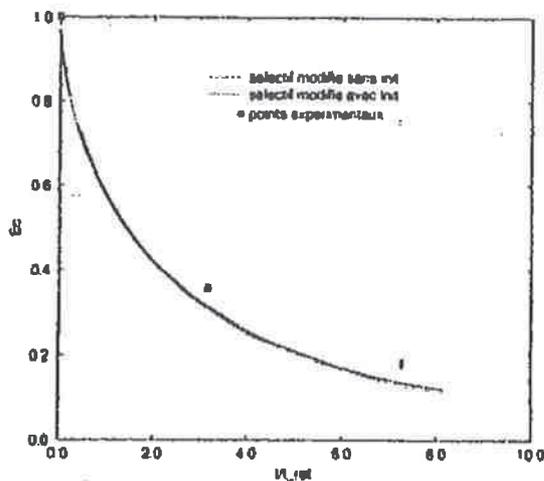


FIG. 6.57 - Evolution de l'énergie cinétique

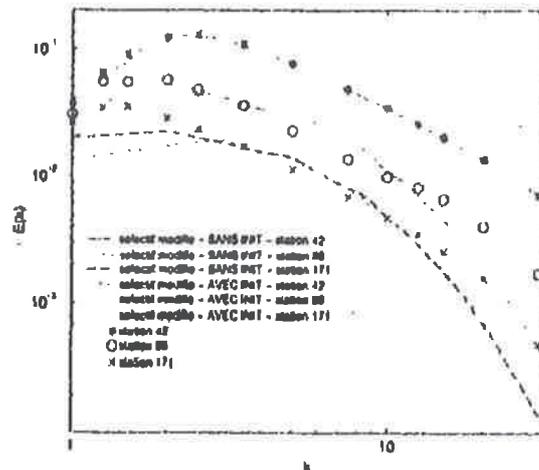


FIG. 6.58 - Spectres d'énergie turbulente

Les différences sont surtout sensibles sur le spectre aux grandes échelles (cf. figure 6.58). Il y a moins d'énergie à ces échelles, pour le calcul avec initialisation que pour celui sans initialisation. La phase d'initialisation, avec les choix effectués, ne nous permet donc pas d'améliorer la prédiction des valeurs expérimentales; par contre, une meilleure description du spectre initial aux grandes échelles permettrait peut-être une réelle amélioration, comme nous l'avons souligné auparavant.

Dans [dBKR98], de Bruyn Kops propose une technique d'initialisation pour obtenir un champ de vitesse initiale très proche de celui de l'expérience. Il cherche effectivement à avoir plus de points dans les grandes échelles et il utilise également une phase d'initialisation pour obtenir un facteur de dissymétrie proche de 0.5. Par contre, il ajoute une condition supplémentaire: en renormalisant pour avoir le spectre expérimental à chaque pas de temps de l'initialisation, il stoppe la phase d'initialisation quand les statistiques du champ de vitesse sont convergées (valeurs très proches entre deux sous pas de temps d'initialisation): il ne se contente pas uniquement d'avoir une bonne valeur de S . Pour s'assurer de la convergence, il conseille d'observer celle du transfert à chaque nombre d'onde ($T(k)$) puisqu'il le considère comme étant un des paramètres les plus significatifs. Ces deux éléments, supplémentaires par rapport à nos simulations, semblent apporter des améliorations.

6.3.4 Conclusion à propos des simulations de la turbulence de grille

Nous avons donné ci-dessus une interprétation des différences vues entre les deux modèles et les valeurs expérimentales. Nous considérons tout de même que nous parvenons à simuler de façon satisfaisante cette expérience.

6.4 Conclusion

Ce chapitre regroupe des tests fondamentaux sur les méthodes numériques et les modèles sous-maille. Nous considérons maintenant que nous utilisons des méthodes numériques performantes pour la Simulation des Grandes Echelles, qui en particulier ne masquent pas les effets des modèles sous-maille, ce qui est très important. De plus, nous avons testé les différents modèles disponibles, et nous les considérons comme validés. En complément, nous avons modifié le modèle sélectif. Pour les cas testés dans ce chapitre, le modèle sélectif modifié donne de meilleurs résultats que les modèles précédents basés sur la fonction de structure. De plus, ces résultats sont très proches de ceux obtenus avec le modèle de Smagorinsky dynamique, tout en étant plus simple à implémenter. Nous espérons que cette modification nous permettra d'améliorer les résultats en maillages structurés pour d'autres configurations (c'est ce que nous allons vérifier au chapitre suivant), et rendra possible son adaptation aux maillages non structurés. Nous allons maintenant nous intéresser à la Simulation du deuxième cas académique, le canal plan turbulent.

Chapitre 7

Canal en maillages structurés

Nous avons décrit les caractéristiques d'un écoulement pariétal au chapitre 4, ainsi que les principaux paramètres des simulations de canal plan turbulent au chapitre 5, que nous allons maintenant présenter. Nous allons faire deux types de simulation : les premières en raffinant fortement aux parois, pour pouvoir appliquer une condition d'adhérence, les secondes, en utilisant des lois de paroi (cf. chapitre 4), pour les évaluer. Auparavant, nous allons décrire l'adaptation du modèle sélectif modifié de la fonction de structure au cas du canal plan.

7.1 Application du modèle sélectif modifié au cas du canal plan

Dans le cas de la THH, la détermination de k_c/k_i est aisée, puisqu'il suffit de déterminer la position du pic du spectre d'énergie cinétique turbulente. Mais dans le cas général, le calcul du spectre en espace est impossible, il faut donc trouver une autre manière d'évaluer k_i . Or, k_i correspond à l'échelle des tourbillons les plus énergétiques; si nous parvenons à déterminer une échelle de longueur L de ces tourbillons, nous pouvons alors la relier à k_i de la manière suivante : $k_i = \frac{2\pi}{L}$. L'échelle intégrale de la turbulence nous renseigne sur la taille des structures les plus énergétiques présentes dans l'écoulement, elle correspond alors à l'échelle de longueur que nous recherchons pour calculer k_i .
Pour k_c , nous avons : $k_c = \frac{\pi}{\Delta x}$.

Nous pouvons donc évaluer le rapport k_c/k_i de la manière suivante :

$$\frac{k_c}{k_i} = \frac{L}{2\Delta x} \quad (7.1)$$

Le rapport k_c/k_i nous donne bien une information sur la résolution de notre simulation, puisque nous reconnaissons la largeur du filtre $2\Delta x$ au dénominateur, et L correspondant aux tourbillons que nous voulons résoudre et non modéliser au numérateur.

Il faut maintenant trouver un moyen pour évaluer l'échelle intégrale de la turbulence, pour différentes situations. Le longueur de mélange est une bonne évaluation de cette grandeur, son calcul dépendant de la configuration étudiée. Son expression dans le cas du canal plan est la suivante :

$$l_m = \begin{cases} \kappa y & \text{si } y < 0.2h \\ 0.2\kappa h & \text{si } y \geq 0.2h \end{cases} \quad (7.2)$$

avec $\kappa = 0.41$, la constante de Karman, et h est la demi-hauteur du canal.

Dans d'autres configurations et en maillages non structurés, il faudra rechercher une autre expression.

7.2 Simulation avec condition d'adhérence

7.2.1 Maillage du domaine de calcul

Comme nous l'avons dit ci-dessus, les premières simulations sont réalisées avec condition d'adhérence: il faut alors placer le premier point dans la direction orthogonale à la paroi dans la sous-couche visqueuse, vers $y^+ \simeq 1$.

Pour que cela n'implique pas une trop forte augmentation du nombre de points, nous utilisons un maillage en tangente hyperbolique, (cf. l'équation 7.3).

$$y_j = h \left(1 + \frac{1}{a} \tanh(\xi_j \tanh^{-1} a) \right) \text{ avec } \xi_j = -1 + \frac{2(j-1)}{N_y - 1}, j = 1, \dots, N_y \text{ et } 0 < a < 1 \quad (7.3)$$

Dans les directions de périodicité (x et z), le maillage est régulier.

7.2.2 Objectif des simulations

Nous allons tester *le modèle sélectif modifié* (noté FSSM), que nous allons comparer avec une simulation réalisée avec *le modèle sélectif standard* (noté FSS).

Nous récapitulons les principales caractéristiques des simulations effectués dans le tableau suivant.

Cas n	Modèle	Re	h^+	Dimension	Maillage
1	FSSM	5000	209	$(2\pi h, 2h, \pi h)$	$64 \times 65 \times 32$
2	FSS	5000	202	$(2\pi h, 2h, \pi h)$	$64 \times 65 \times 32$

Nous comparerons nos résultats avec une simulation de Piomelli et al. [PIO93], utilisant *le modèle de Smagorinsky dynamique* et un code pseudo-spectral, à un nombre de Reynolds proche du notre ($Re = 4875$). Nous comparerons également nos résultats avec ceux obtenus, pour un même nombre de Reynolds, par E. Lamballais avec *les modèles de viscosité turbulente spectrale* (noté VTS) et *spectrale dynamique* (noté VTSD), à l'aide d'un code ayant des méthodes numériques très précises (schéma compact d'ordre élevé selon la direction perpendiculaire aux parois) (cf. [LAM96], [LMI98]) ainsi qu'avec certains résultats de simulations de A. Meri ([MW00]). Leurs caractéristiques sont rassemblées ci-dessous.

Auteur	Modèle	Re	h^+	Dimensions	Résolution
U. Piomelli	Smagorinsky dynamique	4875	202.8	$(4\pi h, 2h, \pi h)$	$48 \times 65 \times 64$
E. Lamballais	VTS	5000	181	$(2\pi, 2, \pi)$	$64 \times 65 \times 32$
E. Lamballais	VTSD	5000	204	$(2\pi, 2, \pi)$	$64 \times 65 \times 32$
A. Meri et H. Wengle	Smagorinsky dynamique	4950	180	non communiqué	non communiqué

7.2.3 Analyse statistique des simulations

La figure 7.1 représente les profils de vitesse adimensionnée à l'aide des unités de paroi (définies au chapitre 4), obtenus avec les simulations 1 et 2, comparés aux résultats de Piomelli. La figure 7.2 permet de comparer les profils des écart-types de la vitesse pour ces mêmes simulations.

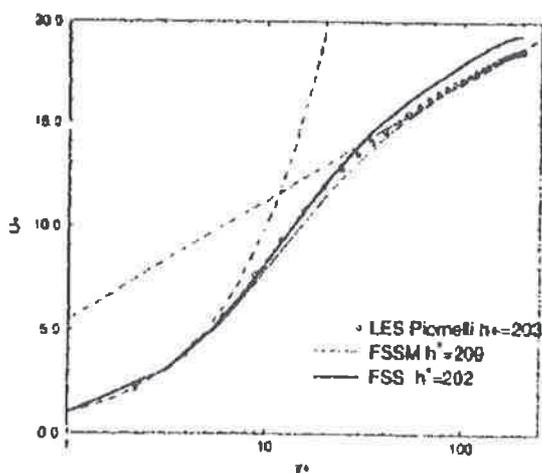


FIG. 7.1 - Profils de la vitesse adimensionnée

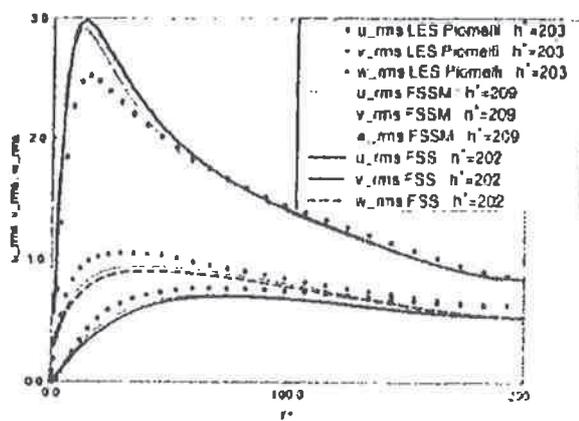


FIG. 7.2 - Profils de écart-types de la vitesse adimensionnée

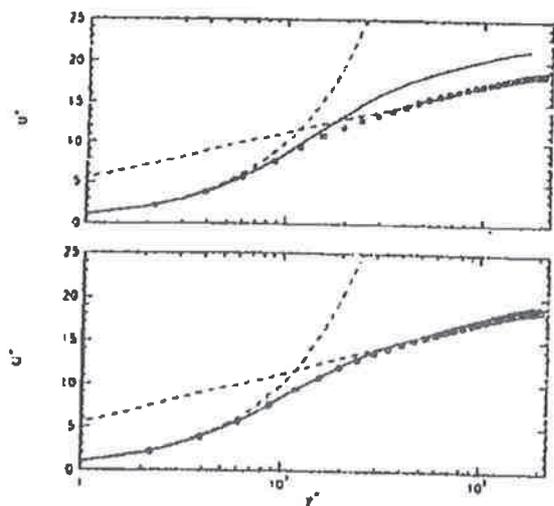


FIG. 7.3 - Profils de la vitesse adimensionnée: Modèle VTS en haut, Modèle VTSD en bas, comparés aux résultats de Piomelli (o)

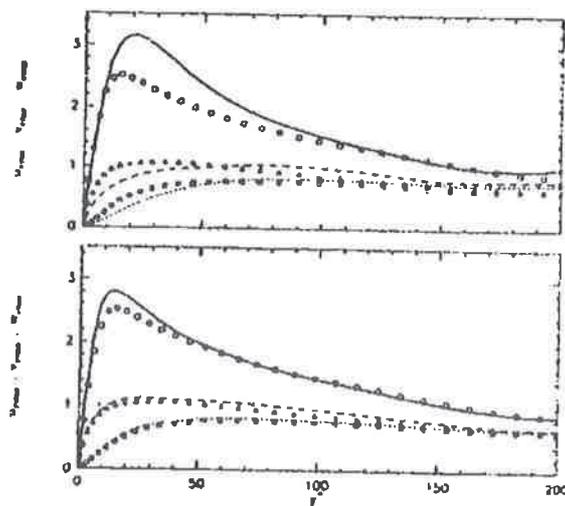


FIG. 7.4 - Profils de écart-types de la vitesse adimensionnée: Modèle VTS en haut, Modèle VTSD en bas, comparés aux résultats de Piomelli (o)

- Sur la figure 7.1, nous constatons un écart entre les résultats obtenus avec le modèle sélectif et le modèle sélectif modifié. Avec le premier, nous sur-estimons d'environ une unité la valeur de la vitesse au centre du canal, alors qu'avec le modèle modifié, nous sommes très proches de la loi logarithmique et des résultats de Piomelli. *Notre modification permet donc d'avoir de meilleurs résultats.* En fait, le modèle modifié agit sensiblement comme le modèle dynamique, puisqu'il s'adapte à la taille des structures présentes dans les différentes zones (cf. chapitre précédent, les discussions sur la signification du rapport k_c/k_i). Selon la zone dans laquelle on se trouve (cf. paragraphe 7.1), l'angle diffère, ce qui n'est pas le cas du modèle sélectif standard : on tient ainsi compte du fait que les structures à la paroi sont plus petites, ce qui se répercute au centre du canal, en donnant une meilleure estimation de la vitesse (ce qui se passe à la paroi conditionnant fortement le reste de l'écoulement). La figure 7.3 présente les résultats obtenus par E. Lamballais avec les deux modèles spectraux. Nous constatons que nos résultats avec le modèle sélectif modifié sont assez proches des résultats obtenus avec le modèle spectral dynamique. Cela rejoint ce que nous venons de dire à propos de la comparaison avec les résultats de Piomelli. Il faut de plus remarquer que nos résultats sont obtenus à l'aide de méthodes numériques relativement peu précises (volumes finis et ordre 2 en espace). Malgré cela, ils sont proches de simulations très précises.
- Par contre, l'accord avec les résultats de Piomelli est moins bon pour les écart-types. Le modèle modifié donne des résultats légèrement meilleurs que le modèle sélectif original, mais les différences sont moins nettes que précédemment

- Nous allons tout d'abord nous intéresser à u_{rms} . A la paroi, cette grandeur a un pic vers $y^+ = 12$, d'une amplitude de 2.6 environ, pour ce nombre de Reynolds. Pour le modèle FSSM, nous prédisons le pic vers $y^+ = 13.95$ (16% d'erreurs), avec une amplitude de 2.9 (11% d'erreurs). Comme précédemment, notre modèle donne de même meilleur résultat que le modèle VTS, qui prédit une erreur de 66% pour le positionnement du pic ($y^+ = 20$) et de 19% pour l'amplitude (pic à 3.2) et relativement proche du modèle VTSD, qui donne un pic vers $y^+ = 12$, d'une intensité de 2.8 (8% d'erreurs). L'accord est donc de bonne qualité avec les deux modèles testés. Le nouveau modèle donne une intensité un peu plus faible que le modèle sélectif original, qui prédit le pic à $y^+ = 13.5$ (12.5 % d'erreurs) avec une intensité de 2.99 (15 % d'erreurs), ce qui va dans le bon sens pour la prédiction de l'intensité du pic. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les prédictions des différents modèles et les pourcentage d'erreurs par rapport aux valeurs de référence.

	y^+		amplitude	
référence	12		2.6	
Modèle Smago. dynamique	15.4	28.3%	2.51	3.5%
Modèle VTS	20	66%	3.2	19%
Modèle VTSD	12	0%	2.8	8%
Modèle FSS	13.5	12.5%	2.99	15%
Modèle FSSM	13.95	16.25%	2.9	11.5%

- Nous regardons maintenant u_{rms} et w_{rms} . Nous sous-estimons légèrement ces deux grandeurs, mais l'allure des profils est bonne. Ceci est cohérent avec le fait que nous sur-estimons légèrement u_{rms} : les échanges entre la direction de l'écoulement (évaluables par u_{rms}) et les directions transversales, s'opérant par l'intermédiaire de la pression ne sont pas assez intenses à la paroi : il en résulte un déficit d'énergie pour les deux composantes transverses.

Par contre, l'accord est meilleur avec les simulations de E. Lamballais et de U. Piomelli, réalisées avec des modèles dynamiques, mais également des méthodes numériques beaucoup plus précises que celles utilisées dans nos simulations. Les différences constatées peuvent donc venir, soit d'un meilleur comportement des modèles sous-maille dans la zone de proche paroi, soit d'une plus grande précision des calculs. Or, nous avons constaté sur la figure 7.1 une amélioration significative de la prédiction de la vitesse moyenne, qui montre le meilleur comportement du nouveau modèle à la paroi, mais qui n'est plus constatable sur les écart-types. Les écart-types (moments de second ordre) sont beaucoup plus sensibles aux erreurs des méthodes numériques que la vitesse moyenne : il est donc possible que les erreurs numériques des méthodes utilisées (deuxième ordre en espace et troisième ordre en temps) soient ici en cause. Des résultats récents de A. Meri et H. Wengle ([MW00]) abondent dans ce sens : ils ont comparés des simulations réalisées avec des méthodes de discrétisation spatiales de second ordre et des schémas compacts de quatrième ordre à des résultats de SNI de Kim et al. ([KMM87]). La prédiction des vitesses moyennes n'est pas améliorée par l'augmentation de l'ordre des méthodes ; par contre, les écart-types y sont très sensibles, comme on peut le constater sur la figure 7.5. La localisation du pic reste la même, mais son intensité est mieux prédite : pour la simulation au quatrième ordre, l'erreur sur l'intensité du pic est de 11.5% alors qu'elle s'élève à 19% pour celle au deuxième ordre.

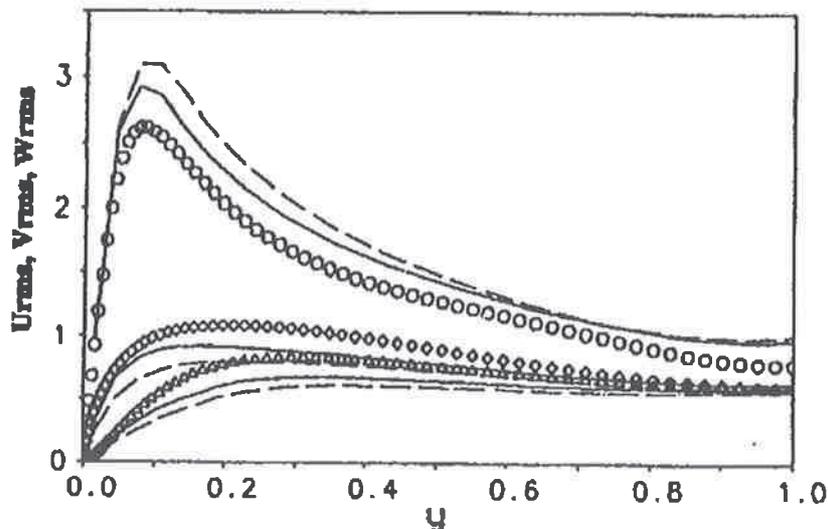


FIG. 7.5 - Ecart-types de la vitesse: SGE avec schéma compact d'ordre 4 pour la discrétisation spatiale (ligne pleine), SGE avec schéma centré du second ordre (ligne pointillée), DNS de Kim et al. (symboles)

Le fait que nous ne constatons pas d'amélioration sensible de la prédiction des écart-types avec le nouveau modèle résulte donc peut-être des erreurs des méthodes numériques utilisées ; toutefois, pour en être convaincu, il faudrait réaliser une simulation avec un schéma de convection de quatrième ordre.

Conclusion de l'étude statistique Le modèle sélectif modifié est en très bon accord avec les simulations de référence, pour le profil moyen de vitesse longitudinale : il y a une nette amélioration par rapport au modèle sélectif standard. Concernant les écart-types, les différences sont moins importantes entre ces deux modèles et les prédictions plus éloignées

des simulations de référence, mais nos simulations donnent tout de même de bons résultats, en particulier la position du pic de u_{rms} est assez bien prédite. La prédiction des écart-types pourrait probablement être améliorée par l'utilisation d'un schéma de convection d'ordre plus élevé et permettrait alors la connaissance de l'effet du modèle sélectif modifié sur les écart-types.

7.2.4 Analyse topologique

Nous allons maintenant chercher à savoir si le modèle sélectif modifié permet de retrouver les différentes structures présentes dans un écoulement en canal.

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la couche interne de l'écoulement et nous allons tenter de montrer l'existence, dans nos simulations, des courants de haute et basse vitesse. Nous nous intéresserons ensuite à la couche externe. Ces visualisations sont effectuées à partir de la simulation avec le modèle sélectif modifié (calcul 1).

7.2.4.1 Recherche des courant de hautes et basses vitesses

Sur les figures 7.6 et 7.7, nous cherchons à visualiser les courants de haute et basse vitesse présents dans l'écoulement, au-dessus de la paroi inférieure du canal. La figure 7.6 montre deux isosurfaces de u'' , ayant la même valeur absolue mais de signe opposé, la figure 7.7 montre la même chose pour v'' . Nous définissons ces grandeurs comme ci-dessous ($\langle \cdot \rangle$ représentant la moyenne temporelle) :

$$u'' = \bar{u} - \langle \bar{u} \rangle$$

$$v'' = \bar{v} - \langle \bar{v} \rangle$$

Nous représentons ainsi les fluctuations des grandeurs filtrées (résultats de la Simulation des Grandes Echelles) par rapport à leur moyenne temporelle. Cela nous permet de distinguer les mouvements à petite échelle, qui se superposent à la moyenne temporelle et qui sont présents dans les simulations des grandes échelles, contrairement aux méthodes RANS, qui ne simulent que les moyennes temporelles.

Sur ces deux figures, nous voyons l'alternance de zone d'isosurface à valeur négative et à valeur positive. Cela indique la présence de courants de haute et basse vitesse, puisque nous reconnaissons leur structure. En effet, une zone de u'' positif (zone de sur-vitesse par rapport à la vitesse moyenne) coïncide avec une zone de v'' négatif (mouvement vers la paroi, puisque nous sommes à la paroi inférieure) : cela correspond à des courants de haute vitesse ("sweeps"), qui impactent la paroi. Inversement, les zones à u'' négatif coïncident avec les zones de v'' positif : on retrouve la structure des courants de basse vitesse qui vont vers la zone externe ("ejection").

Ces courants de haute et basse vitesse ont des caractéristiques topologiques précises : leur espacement latéral moyen est de l'ordre de 100 unités de paroi et leur largeur de l'ordre de 25 unités de paroi (cf. chapitre 4).

Or, nous trouvons ici un espacement latéral de l'ordre de 145 unités de paroi et une largeur de 70. Nous ne retrouvons donc pas dans notre simulation les valeurs habituellement admises, mais ceci est classique pour les SGE (cf. [LAM96] et [DCL96]). Nous pourrions peut-être nous rapprocher de ces valeurs en augmentant la résolution de la simulation (en particulier dans la direction transverse) pour mieux résoudre ces structures et en simulant un domaine d'envergure plus grande, pour permettre à toutes les structures de se développer librement.

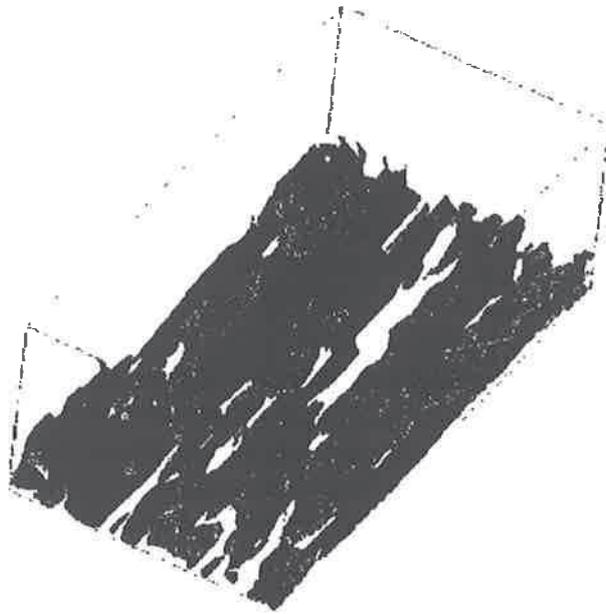


FIG. 7.6 - Isosurface de $u'' = \pm 1.5$ m/s

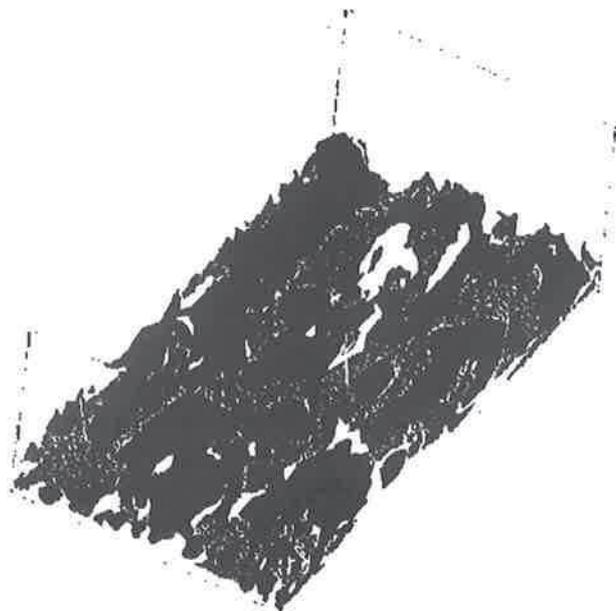


FIG. 7.7 - Isosurface de $v'' = \pm 0.4$ m/s

7.2.4.2 Structure de l'écoulement dans la zone externe

La figure 7.8 présente une isosurface de vorticité. La valeur choisie permet d'apprécier la structure de l'écoulement dans la zone externe.

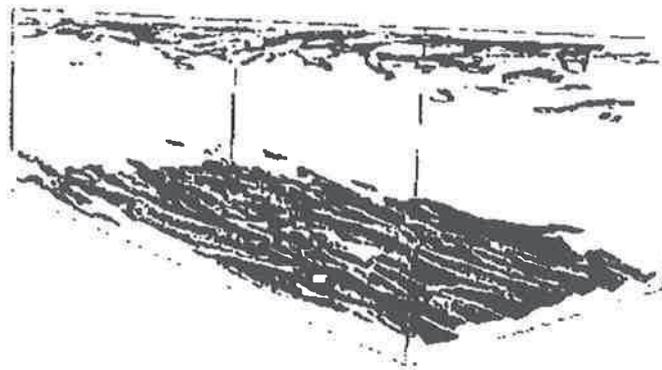


FIG. 7.8 - Isosurface de $\|\omega\| = 40 \text{ s}^{-1}$

Nous remarquons, sur cette figure, une certaine cohérence dans la structure de l'écoulement. En suivant l'analyse de Lamballais [LAM96], nous constatons qu'il n'y a pas de grandes oscillations dans le champ de vorticité, ce qui montre que le modèle joue bien son rôle en permettant de garder une cohérence à grande échelle. En effet, la vorticité est très sensible à l'accumulation de l'énergie dans les plus grands nombres d'ondes. Cela peut être le cas, si le modèle ne dissipe pas suffisamment.

7.2.5 Conclusion

Le modèle sélectif modifié nous permet de retrouver des statistiques satisfaisantes : c'est une amélioration du modèle sélectif standard, en particulier pour le profil moyen. Par contre, la prédiction des écart-types est moins bonne et l'influence du modèle semble être moindre : ceci est probablement dû au manque de précision de notre schéma de convection, qui n'est que du deuxième ordre. Nos résultats sont tout de même satisfaisants, puisque dans la zone interne de l'écoulement les différentes grandeurs sont bien prédites.

De plus, les visualisations confirment que le modèle joue bien son rôle et permet d'obtenir des champs de vitesse où l'on distingue une organisation cohérente et conforme à celle retrouvée sur d'autres Simulations des Grandes Echelles. Nous parvenons à distinguer une organisation à la paroi des courants de haute et basses vitesses, même si notre résolution (en particulier en z) ne nous permet pas de retrouver tout à fait les bonnes caractéristiques.

Notre nouveau modèle donne donc de bons résultats, aussi bien lors de simulations de THI ou d'écoulements pariétaux, comme le canal plan. De plus, nos méthodes numériques

("industrielles"), bien que d'ordre faible, nous permettent de simuler de façon satisfaisante ces écoulements.

7.3 Simulations avec lois de paroi

Nous avons faits des simulations de canal plan, avec les mêmes caractéristiques géométriques que précédemment, mais avec des maillages différents pour pouvoir tester les différentes lois de parois.

7.3.1 Objectifs des simulations

Nous allons tout d'abord comparer les lois suivantes, présentées au chapitre 4 :

- la loi de Grötzbach
- la loi "décalée" de Piomelli
- la loi de Werner et Wengle

Avec une des lois, la loi de Werner et Wengle, nous allons faire des tests de sensibilité au maillage et évaluer les différences dues aux différents modèles sous-maille disponibles.

Voici les paramètres communs à toutes les simulations :

Dimensions	$(2\pi h, 2h, \pi h)$
Paramètres	$Re = 10935$

7.3.2 Maillages utilisés et Simulations réalisées

Nous utilisons 3 maillages lors de ces simulations, se distinguant uniquement par un maillage différent dans la direction y . Il y a deux maillages réguliers avec $\Delta y = 0.1h$ et $\Delta y = 0.2h$ et un maillage nommé "progressif", qui a les caractéristiques suivantes :

- le premier point est placé tel que $y_1^+ \simeq 40$: $y_1 = 0.2h$, pour qu'il soit dans la zone externe de la couche de paroi, (zone logarithmique pour les deux premières lois et zone en puissance pour la loi de Werner et Wengle),
- le maillage se ressert progressivement vers le centre du canal, où la hauteur de la maille est de l'ordre de $0.1h$.

Il est représenté sur la figure 7.9.

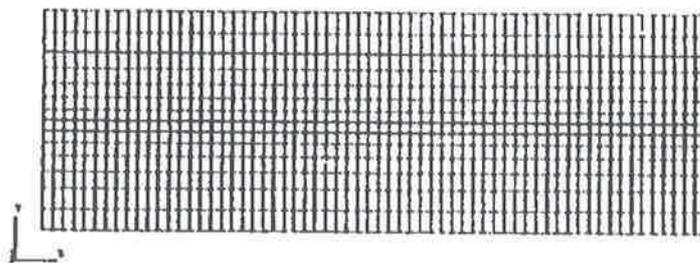


FIG. 7.9 - Maillage "progressif" utilisé pour les calculs de comparaison des lois

Nous avons choisi de placer le premier point vers $y^+ \simeq 40$ (sauf pour le maillage où $\Delta y = 0.1h$ ce qui correspond à $y^+ \simeq 20$ (point dans la zone tampon)), car le but est de tester la loi de paroi, qui a pour objectif de permettre l'éloignement du premier point de la paroi. Sans loi de paroi, comme nous l'avons dit précédemment, il faut placer le premier point en dessous de $y^+ = 5$: il est même plutôt conseillé de le placer vers $y^+ = 1$. Pour certaines simulations, nous raffinons vers le centre, pour voir l'effet d'une meilleure résolution au centre du canal. Nous comparons les résultats avec une simulation

des grandes échelles d'un canal plan turbulent avec le modèle spectral dynamique (VTSD) d'Eric Lamballais (cf [LAM96] et [LML98]).

Les caractéristiques de cette simulation sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

Auteur	Type	Modèle	Re	h^+	Dimensions	Résolution
E. Lamballais	SGE	VTSD	10500	386	$2\pi h \times 2h \times \pi h$	$128 \times 97 \times 64$

Nous rassemblons, dans les tableaux suivants, les principales caractéristiques des simulations réalisées. Sauf spécifié autrement, le modèle utilisé pour ces simulations est le modèle sélectif modifié et les schémas numériques sont Centré d'ordre 2 pour la convection et Runge Kutta ordre 3, pour le schéma en temps.

★ Comparaison des lois de paroi

Calcul N°	Loi de paroi	Maillage en z	u^*	h^+
3	Grotzbach	progressif	0.88	370
4	Shifted	progressif	0.87	365
5	Werner et Wengle	progressif	0.925	382
6	Loi log standard	progressif	0.87	365

★ Sensibilité au maillage de la loi Werner et Wengle

Calcul N°	Maillage	dimension en z	u^*	h^+
7	régulier : $\Delta y = 0.2h$	π	0.92	386
8	régulier : $\Delta y = 0.1h$	π	0.93	391

★ Calculs avec Werner et Wengle et les différents modèles

Calcul N°	Loi de paroi	Modèle	Maillage	u^*	h^+
9	WW	sélectif non modifié	progressif	0.93	391
10	WW	non sélectif	progressif	0.88	370
11	WW	Smagorinsky	progressif	0.91	382

★ Test avec le schéma de convection Quick

Calcul N°	Loi de paroi	Modèle	Maillage	Convection	u^*	h^+
12	WW	sélectif non modifié	progressif	Quick	0.95	399

Remarque: Comme le premier point est placé délibérément hors de la sous-couche visqueuse, vers $y^+ > 30$, nous n'espérons pas simuler les structures de proche paroi (les "streaks"), puisqu'ils s'étendent principalement entre $y^+ = 5$ et $y^+ = 50$, et qu'il faut une bonne résolution pour les reproduire. Pour la même raison, les valeurs obtenues au premier point de maillage après la paroi seront certainement éloignées de celles des références, mais l'application de la loi de paroi à la maille touchant la paroi a pour objectif de permettre une bonne prédiction des valeurs aux autres points.

7.3.3 Comparaisons des lois de paroi

Présentation

Nous allons comparer ici la loi de paroi de Grötzbach (Calcul 3), la loi "décalée" de Piomelli (Calcul 4) et la loi de Werner et Wengle (Calcul 5).

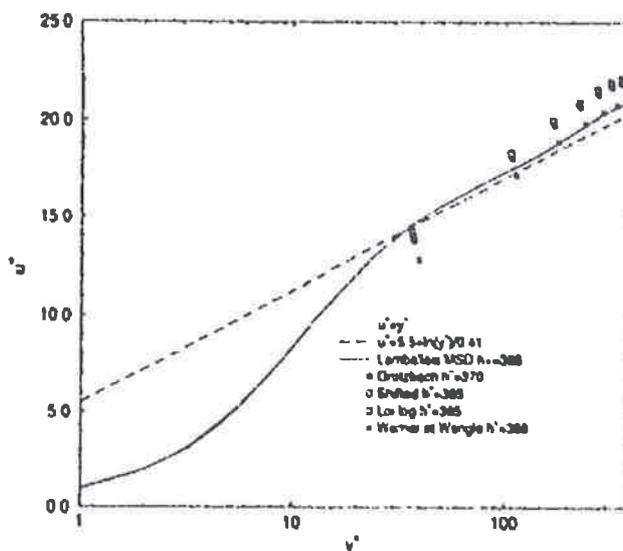


FIG. 7.10 - Profil de la vitesse adimensionnée

La vitesse moyenne

La figure 7.10 présente les profils adimensionnés de la vitesse moyenne longitudinale. Nous sur-estimons légèrement la vitesse au centre du canal, avec les trois lois testées. La vitesse obtenue avec la loi de Werner et Wengle est plus proche de la courbe de la loi logarithmique et très proche des résultats de Simulation des Grandes Echelles obtenus avec le modèle VTSD. Les deux autres lois se trouvent à une unité environ des résultats obtenus avec la loi de Werner et Wengle, ils sont donc également en assez bon accord avec la simulation de référence.

Les différences constatées sur la figure ci-dessus proviennent de prédictions différentes de la vitesse de frottement à la paroi u^* (dont la détermination est présentée dans l'Annexe E). Les trois lois ont tendance à sous-estimer légèrement la vitesse de frottement, c'est-à-dire à sous-estimer la turbulence pariétale. Or ce mécanisme gouverne l'écoulement : ses répercussions s'étendent à tout le canal. La pente du profil au centre du canal est par conséquent légèrement sur-estimée. En effet, lorsque la turbulence augmente, le profil de vitesse s'aplatit.

Nous constatons que les lois de Grotzbach et "décalée" de Piomelli donne des résultats très proches. Ceci n'est pas étonnant car leur principe est le même, la seule différence entre ces deux lois étant que, pour calculer la contrainte à la paroi avec la loi "décalée", on utilise les valeurs du premier point de maillage décalé légèrement par rapport au point où on la calcule. Ceci se justifie par la connaissance des structures pariétales, qui sont inclinées par rapport à la paroi (cf. chapitre 5).

Les moments de second ordre

Nous allons maintenant nous intéresser aux moments de second ordre de la vitesse (cf. figures 7.11, 7.12 et 7.13).

Nous constatons sur ces figures, que les écart-types sont très proches pour les différentes lois. Il y a moins de différences que sur le profil de vitesse moyenne, ce qui ressemble à la situation que nous avons rencontrée au paragraphe précédent lors des comparaisons des deux modèles sélectifs. Les erreurs numériques des méthodes choisies interfèrent probablement dans le calcul des moments de second ordre.

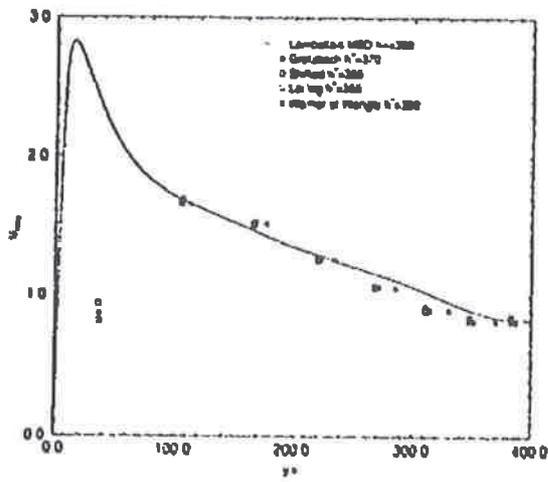


FIG. 7.11 - Profil de u_{rms}

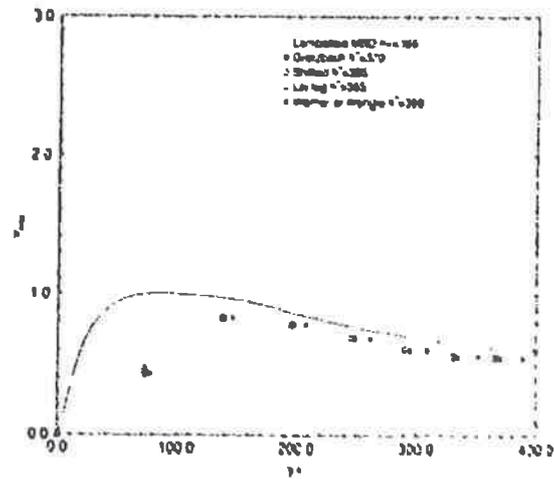


FIG. 7.12 - Profil de v_{rms}

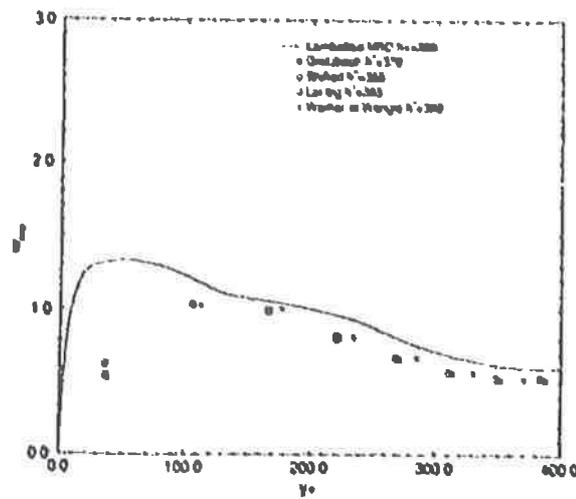


FIG. 7.13 - Profil de w_{rms}

Comme nous avons placé le premier point vers $y^+ = 40$, nous ne pouvons pas représenter le pic de u_{rms} . Le premier point est assez loin des résultats mieux résolus. Mais à partir du deuxième point, nous nous approchons de la simulation de référence. Nous constatons, par contre que nous sur-estimons légèrement u_{rms} et que nous sous-estimons v_{rms} et w_{rms} , comme pour les simulations avec adhérence. Ceci est cohérent avec les remarques précédentes : en effet, nous sous-estimons légèrement l'intensité turbulente, les échanges d'énergie entre les différentes composantes de la vitesse ne sont donc pas assez intenses. Il faudrait là aussi tester un schéma de convection d'ordre plus élevé pour voir l'impact de la précision des méthodes utilisées.

7.3.3.1 Conclusion

Nous obtenons des résultats corrects avec les trois lois de paroi testées, dans la mesure où le nombre de points que nous utilisons dans la direction orthogonale à la paroi est faible. En effet, nous nous comparons relativement bien avec les résultats de référence, qui eux résolvent la sous-couche visqueuse. En particulier, nous retrouvons l'allure des moments de second ordre, même avec un maillage grossier. Ceci nous différencie des simulations RANS, où l'hypothèse d'égalité des moments de second ordre (dans les modèles de base type $k - \epsilon$) est supposée.

Pour la suite de nos simulations, nous choisissons d'utiliser la loi de Werner et Wengle. Les raisons sont les suivantes :

- nous obtenons les meilleurs résultats avec cette loi,
- dans l'optique d'une géométrie complexe, c'est la seule réellement envisageable. En effet, les deux autres lois nécessitent le calcul d'une vitesse moyenne longitudinale à la paroi. Dans le cas du canal plan, nous la calculons sur les plans d'homogénéité (parallèles à la paroi) constitués par les premiers points de maillage. Or dans une situation complexe, une telle moyenne n'est pas envisageable. Si nous prenions alors la vitesse instantanée, cela conduirait à imposer la loi logarithmique classique.
- cette loi peut être appliquée aux zones où se produisent des recirculations ; elle a été conçue pour réaliser des simulations d'écoulement autour d'un cube posé sur une plaque plane ([WW91]) et n'implique pas une contrainte à la paroi tendant vers l'infini, quand la vitesse s'annule à la paroi, contrairement aux lois basées sur la loi logarithmique.
- de plus, pour la loi "shifted", nous utilisons une information relative à la connaissance de la topologie de l'écoulement en canal plan turbulent : l'angle selon lequel le décalage du point est calculé. Or une telle information n'est pas toujours disponible pour des écoulements complexes.

Pour toutes ces raisons, nous choisissons la loi de Werner et Wengle. Nous allons maintenant nous intéresser à sa sensibilité au maillage.

7.3.4 Sensibilité au maillage de la loi Werner et Wengle

Présentation

Nous testons ici la sensibilité au maillage de la loi de Werner et Wengle, en modifiant la taille des mailles placées selon la hauteur du canal. Nous comparons les calculs 5, 7 et 8.

Résultats

Les résultats sont présentés sur les figures 7.14 à 7.18.

Sur la figure 7.14, nous présentons les vitesses moyennes adimensionnées par les unités de paroi. Nous constatons une dépendance au maillage : plus le maillage est fin, plus les valeurs se rapprochent de la simulation de référence. Les résultats obtenus avec le maillage

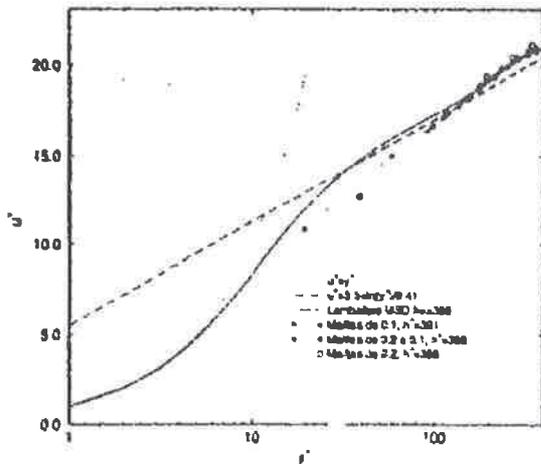


FIG. 7.14 - Profils de la vitesse adimensionnée

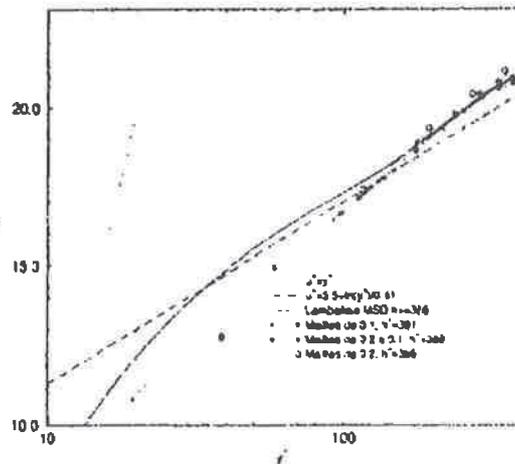


FIG. 7.15 - Profils de la vitesse adimensionnée: Zoom

le plus grossier donnent tout de même des résultats relativement bons, puisque la vitesse au centre du canal n'est sur-estimée que de 0.25 unité environ. Le premier point est placé vers $y^+ = 40$, ce qui est proche des valeurs que l'on cherchera à avoir lors de simulations en géométrie complexe. Le calcul le plus fin est en bon accord, alors qu'il y a seulement 20 mailles dans la hauteur du canal. Le premier point est placé à $y_1^+ = 20$: c'est un peu plus faible que ce qu'on cherche à avoir pour une géométrie complexe, par contre c'est assez loin de la paroi (i.e. hors de la sous-couche visqueuse) pour que la loi de paroi agisse.

Le maillage du calcul 5 (maillage progressif) se réduit vers le centre du canal: cela conduit à une meilleure prédiction de la vitesse au centre, mais ceci n'est pas envisageable en géométrie complexe. Ce dernier calcul sert uniquement à vérifier l'influence du placement du premier point (qui est le même que pour le calcul 7) et celle du maillage au centre, les deux semblant donc être importants.

Les écart-types sont présentés sur les figures 7.16 à 7.18. Les différences entre les calculs réalisés sont moins importantes. L'accord avec la simulation de référence est bon pour u_{rms} , alors que pour v_{rms} et w_{rms} , les valeurs sont légèrement en-dessous de la simulation de référence, mais les résultats sont tout de même satisfaisants. La sensibilité au maillage est moins visible sur les écart-types, les erreurs dues au schéma de convection empêchant probablement une meilleure prédiction.

Conclusion

Nous obtenons des résultats satisfaisants (erreurs de 0.34% à 1.62% sur la vitesse moyenne au centre du canal, de l'ordre de 4% sur u_{rms} et entre 10 et 20% pour v_{rms} et w_{rms} au centre du canal), avec un nombre de mailles très faible selon y . Nous ne parvenons pas à reproduire les phénomènes de paroi (structures cohérentes pariétales), mais les valeurs moyennes des différentes grandeurs au centre du canal sont bien prédites, aussi bien pour le profil moyen de vitesse longitudinale que pour les moments de second ordre.

7.3.5 Calculs avec différents modèles sous-maille

Présentation

Nous allons maintenant étudier les différences résultant des modèles sous-maille.

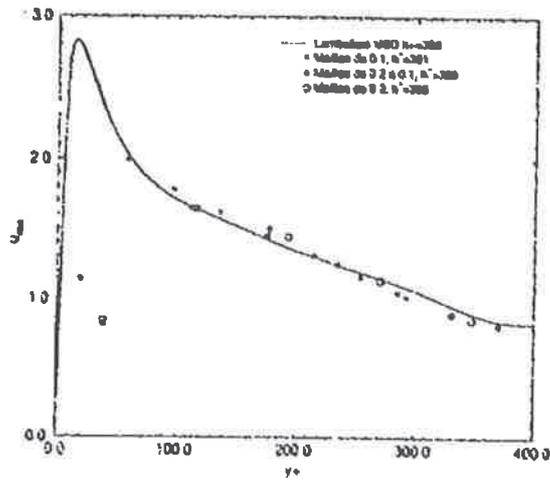


FIG. 7.16 - Profil de u_{rms}

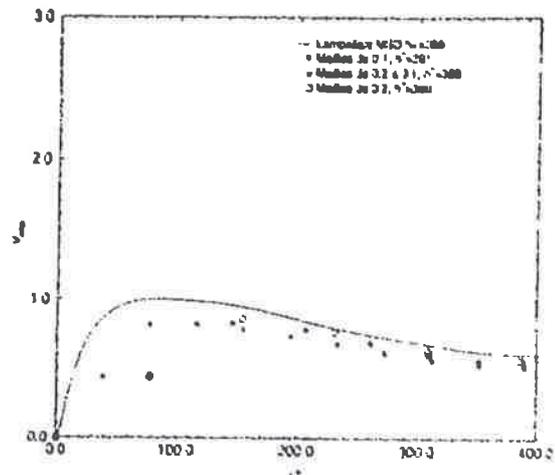


FIG. 7.17 - Profil de v_{rms}

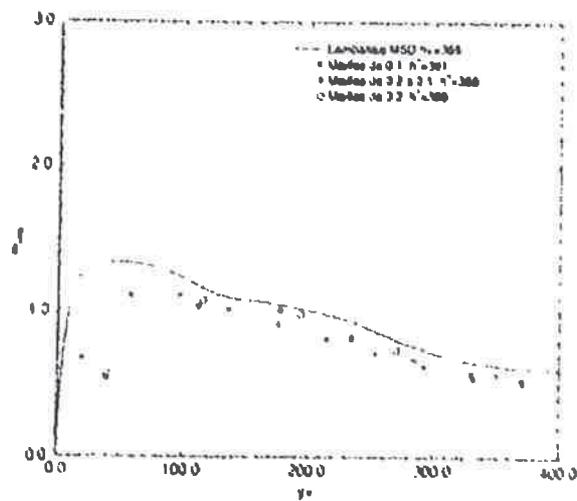


FIG. 7.18 - Profil de w_{rms}

Nous allons comparer les calculs, réalisés avec les modèles suivant :

- modèle de la fonction de structure sélectif modifié (calcul 5)
- modèle de la fonction de structure sélectif non modifié (calcul 9)
- modèle de la fonction de structure non sélectif (calcul 10)
- modèle de Smagorinsky (calcul 11)

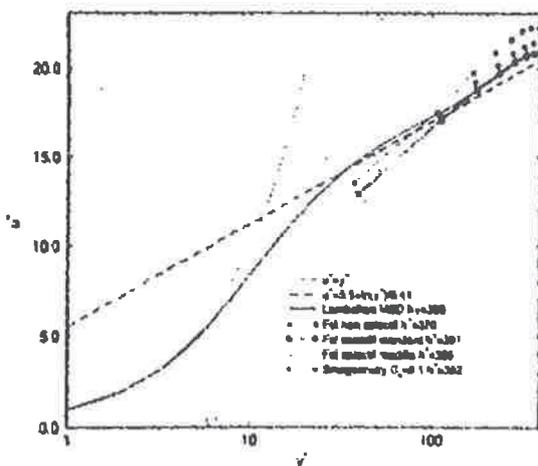


FIG. 7.19 - Vitesse adimensionnée

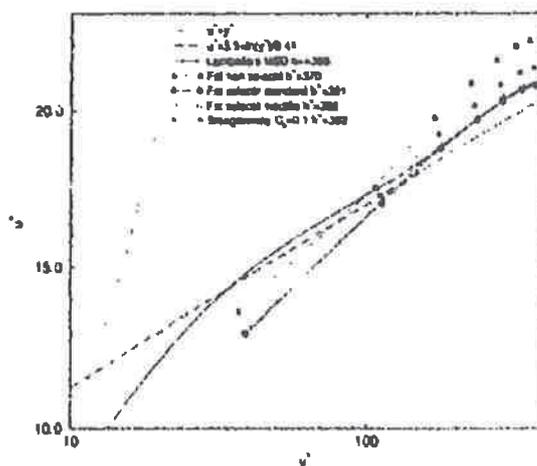


FIG. 7.20 - Vitesse adimensionnée : Zoom

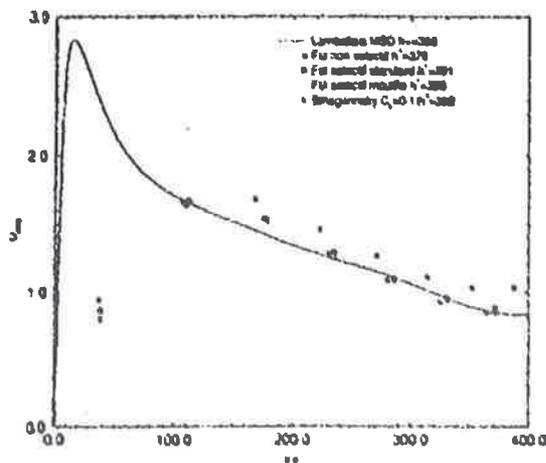


FIG. 7.21 - Profil de u_{rms}

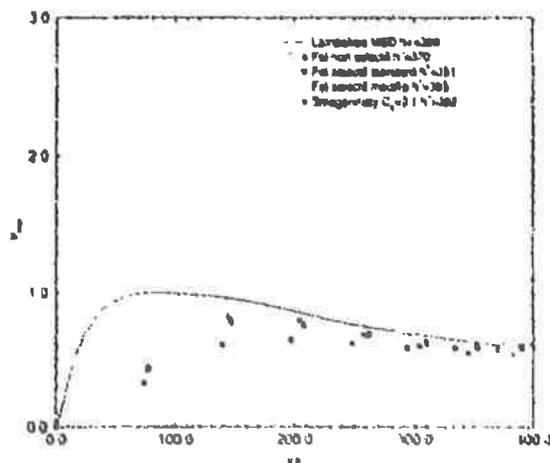


FIG. 7.22 - Profil de v_{rms}

Résultats

Il faut souligner, tout d'abord, que malgré l'utilisation d'une loi de paroi, des différences entre les modèles sous-maille existent, en particulier entre modèles sélectifs et non sélectifs. En effet, les modèles sous-maille non sélectifs conduisent à une sur-estimation non négligeable (2-3 unités) de la vitesse moyenne au centre du canal (et de la pente du profil) ainsi que de u_{rms} et à une sous-estimation de v_{rms} et w_{rms} . Ces modèles dissipent plus qu'ils ne devraient car ils tiennent compte du gradient de vitesse moyenne lors de l'évaluation de la viscosité turbulente. La diminution de la constante de Smagorinsky ($\lambda C_s = 0.1$,

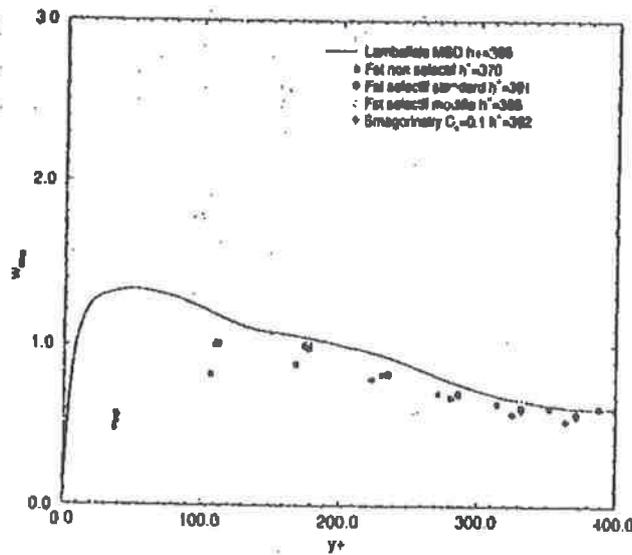


FIG. 7.23 - Profil de w_{rms}

valeur préconisée pour cette configuration) réduit la dissipation du modèle, mais il reste toujours trop dissipatif. Par contre, les résultats obtenus avec les modèles sélectifs sont plus proches des résultats de référence, ce qui montre leur bon comportement dans ce type de situation.

Il est à noter que les deux modèles sélectifs donnent des résultats très proches : cela confirme l'idée que les différences entre ces deux modèles proviennent du traitement différent de la zone de proche paroi, zone traitée ici par la loi de paroi et non par le modèle.

Conclusion

Nous constatons que même en présence de loi de paroi, les modèles sélectifs permettent une meilleure prédiction des différentes grandeurs statistiques et cela sans avoir à adapter la constante pour chaque cas considéré. Les différences entre les deux modèles sélectifs ne sont plus visibles, car l'amélioration concerne principalement son comportement à la paroi.

7.3.6 Calcul avec le schéma Quick et le modèle sélectif

Présentation

Nous comparons maintenant le calcul 9 et le calcul 12, i.e. deux simulations réalisées avec le modèle sélectif non modifié mais des schémas de convection différents : Quick sharp pour le calcul 12 et centré d'ordre 2 pour le calcul 9.

Résultats Les résultats des simulations sont présentés sur les figures 7.24 à 7.28.

Sur les figures 7.24 à 7.27, nous constatons que les intensités turbulentes simulées sont plus faibles avec le schéma Quick : cela se répercute sur la vitesse moyenne et également sur les écart-types, en particulier v_{rms} et w_{rms} . u_{rms} est fortement surestimé tandis que v_{rms} et w_{rms} sont fortement sous-estimés : les échanges entre composantes sont beaucoup plus faibles avec le schéma Quick. Ce résultat est conforme à ce que nous attendions et à ce que nous avons constaté lors de la simulation de Turbulence Homogène Isotrope. La dissipation numérique du schéma Quick s'ajoute à la viscosité turbulente (et cinématique) : l'écoulement simulé est donc beaucoup moins turbulent.

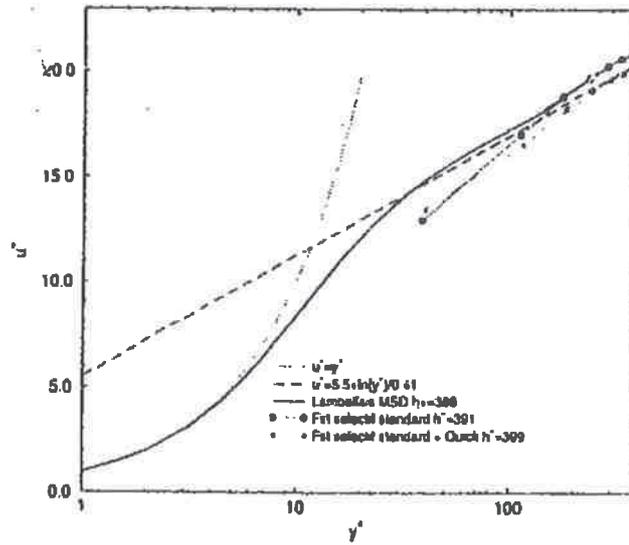


FIG. 7.24 - Vitesse adimensionnée

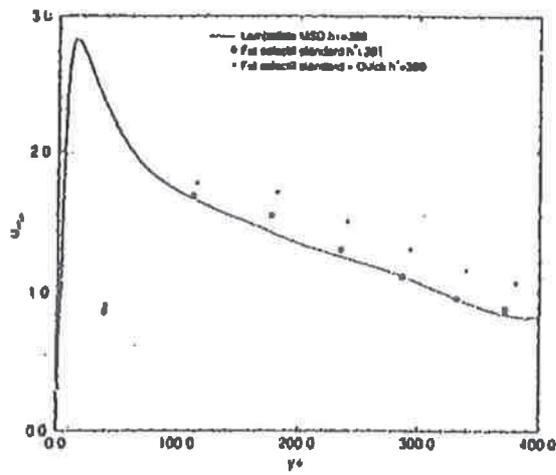


FIG. 7.25 - Profil de u_{rms}

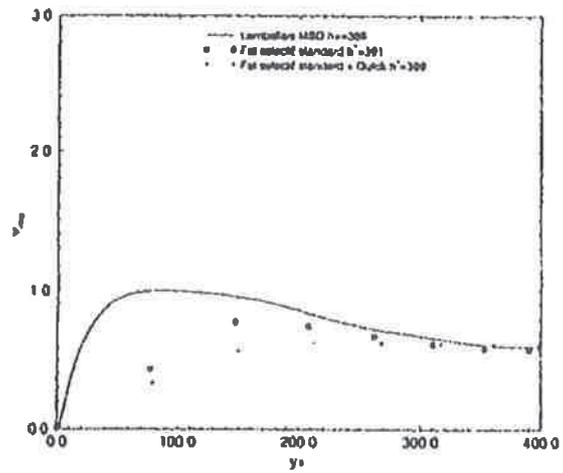


FIG. 7.26 - Profil de v_{rms}

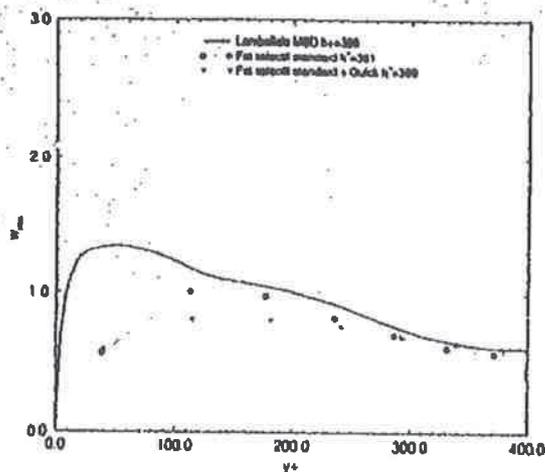
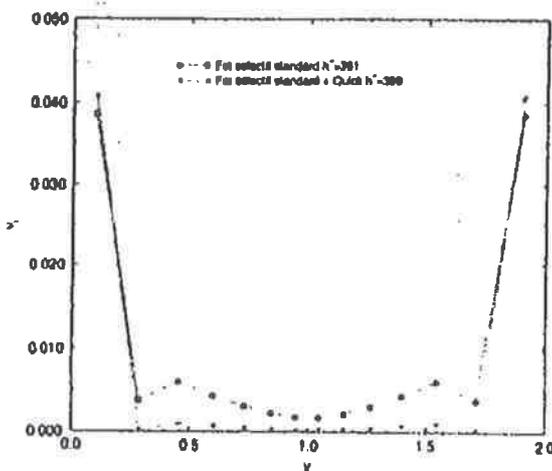
FIG. 7.27 - Profil de w_{rms} 

FIG. 7.28 - Viscosité turbulente moyenne

Ceci est confirmé sur la figure 7.28, qui représente le profil moyen (en espace et en temps) de viscosité turbulente obtenue pour ces deux simulations : entre $0.25h$ et $1.75h$, la viscosité turbulente est très proche de 0 ; elle est non négligeable uniquement dans la zone de proche paroi. La turbulence effectivement simulé est beaucoup plus faible, le modèle sous-maille ajouté à la dissipation du schéma numérique dissipant beaucoup trop les fluctuations turbulentes.

Conclusion Nous confirmons les constatations effectuées lors des simulations de Turbulence Homogène Isotrope : pour une Simulation des Grandes Echelles, il faut un modèle performant mais également des méthodes numériques non dissipatives, sans quoi l'effet du modèle est noyé dans la dissipation numérique.

7.3.7 Conclusion concernant les simulations avec loi de paroi

Nous obtenons des résultats satisfaisants avec le modèle sélectif modifié et la loi de paroi de Werner et Wengle, même avec très peu de points dans la direction orthogonale à la paroi. De plus, l'amélioration apportée par les modèles sélectifs est encore sensible quand on utilise une loi de paroi et l'utilisation d'un schéma numérique non dissipatif est vraiment indispensable.

7.4 Conclusion à propos des simulations de Canal Plan

Nous avons montré les améliorations apportées par le modèle sélectif modifié par rapport au modèle sélectif standard pour la simulation d'un canal plan turbulent avec condition d'adhérence. Les statistiques sont proches de celles des simulations de référence ; la prédiction des écart-types pourrait cependant être probablement améliorée par l'utilisation de méthodes de discrétisation en espace d'ordre plus élevé (4 au lieu de 2). Nos méthodes numériques "industrielles" et le modèle sélectif modifié conduisent néanmoins à de très bons résultats.

Nous avons ensuite testé plusieurs lois de paroi, qui permettent d'obtenir de bons résultats avec une réduction considérable du nombre de points de discrétisation, en particulier dans la direction perpendiculaire aux parois, et donc un gain de temps très important (ainsi que la possibilité de simuler des écoulements à un nombre de Reynolds plus élevé).

Les qualités de la loi de paroi de Werner et Wengle ont été révélées : elle es donc choisie pour la suite de ce travail, puisqu'elle donne de bons résultats, qu'elle est utilisable en géométrie complexe ainsi que transposable aux maillages non structurés.

Ces configurations élémentaires (Canal Plan et TIII) nous ont donc permis :

- de choisir des méthodes numériques "industrielles" convenant bien aux Simulations des Grandes Echelles,
- d'apporter des améliorations au modèle sélectif de la fonction de structure,
- de tester des lois de paroi

sur des cas académiques, pour lesquels nous avons des résultats de référence.

Maintenant que nous avons obtenu de bons résultats sur ces deux configurations élémentaires, nous allons pouvoir nous intéresser aux Simulations des Grandes Echelles en maillages non structurés. Les simulations réalisées en maillages structurés présentées aux chapitres 6 et 7 nous servirons à partir de maintenant de *simulations de références*, lors des simulations en maillages non structurés.

Les travaux effectués en maillages structurés ont mis en valeur des critères que les méthodes numériques doivent vérifier : elles doivent être les moins dissipatives possibles, tout en étant stables. Nous allons donc nous attacher à trouver de telles méthodes en maillages non structurés. Nous allons ensuite tester plusieurs implémentations de la fonction de structure et ensuite implanter le modèle sélectif modifié en maillages non structurés, puisque sa modification doit permettre son adaptation à ce type de maillages. La démarche suivie sera la même qu'en maillages structurés : nous réaliserons tout d'abord des simulations de TIII, puis des simulations de canal plan avec adhérence et avec la loi de Werner et Wengle.

Troisième partie

**Simulations des Grandes Echelles
en maillages non structurés**

Chapitre 8

Spécificités des maillages non structurés

Cette partie est consacrée au passage en maillages non structurés. Pour réaliser des SGE, nous allons être confrontés aux mêmes problèmes qu'en maillages structurés (détermination de méthodes numériques conservant l'énergie), auxquels s'ajoutent des problèmes spécifiques.

8.1 Passage : maillages structurés → maillages non structurés

La discrétisation utilisée en maillages non structurés est décrite au chapitre 2. Nous allons tenter d'énumérer les différents problèmes résultant du passage VDF → VEF. Ils viennent principalement de deux éléments :

- la modification de la discrétisation, entraînant les problèmes suivants :
 - difficultés pour calculer les dérivées d'ordre supérieur à 1, puisque la discrétisation est $P1NC/P1bulle$,
 - problèmes liés à la non-conformité de l'élément (non-continuité de la vitesse aux faces des éléments, excepté au centre de gravité de la face) : en particulier, cela entraîne des fortes variations de vitesse aux sommets des éléments, calculées par interpolation linéaire dans un élément.
- la non-structuration du maillage proprement dit :
 - du fait de l'irrégularité du maillage, les ordres des méthodes numériques sont délicats à évaluer,
 - l'implémentation des modèles sous-maille doit être adaptée, puisqu'ils sont généralement utilisés en maillages structurés. Il faut déterminer la largeur du filtre lié au maillage $\bar{\Delta}$, dans le cas des maillages non structurés. Dans le cas de la fonction de structure, il faudra tester les différentes implémentations envisagées, puisqu'elle n'a jamais été implantée en maillages non structurés. Certains modèles, comme le modèle de Smagorinsky, sont immédiatement adaptables, puisqu'il suffit d'évaluer des dérivées premières de la vitesse, ce qui est fait de manière exacte avec notre discrétisation. D'autres modèles, comme ceux utilisant la fonction de structure demandent un peu plus de travail.
 - il faut également réfléchir à l'implantation des lois de paroi, et en particulier au calcul de la contrainte tangentielle à la paroi, quand on utilise une loi de paroi.

Nous allons donc nous intéresser aux problèmes suivants :

- choix des méthodes numériques

- implémentation des modèles de turbulence
- implémentation des lois de paroi

Pour cela, nous allons utiliser les deux mêmes cas tests qu'en maillages structurés, la TMI et le canal plan, nos résultats en maillages structurés pouvant maintenant servir de référence.

8.2 Méthodes Numériques

Nous avons mis en évidence, dans les tests en maillages structurés, l'importance du choix du schéma convectif. L'idéal serait d'avoir un schéma conservant l'énergie cinétique en l'absence de diffusion physique.

Nous sommes parvenu à avoir un tel schéma en maillages structurés, mais cette tâche semble plus ardue en maillages non structurés. Un des objectifs des tests présentés ci-dessous est de trouver les schémas les moins dissipatifs tout en étant stables.

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les schémas que nous allons tester, à savoir :

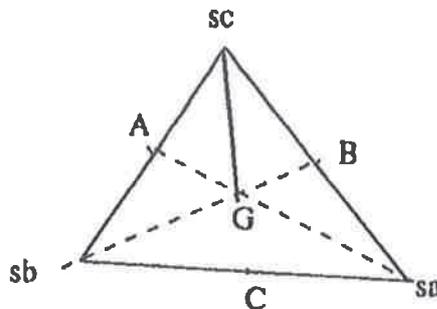
- des schémas de convection, que nous utiliserons avec le schéma Runge Kutta d'ordre 3 :
 - le schéma Centré
 - le schéma Centré EF
 - le schéma Muscl
- des méthodes numériques liant le schéma en temps et le schéma de convection
 - Schémas Mac Cormack et Prédicteur Correcteur avec les formes centrée, décentrée et "interpolée" du schéma alternant.

8.2.1 Présentation des schémas de convection testés

Nous devons évaluer les flux convectifs : nous les calculons sur les faces des volumes de contrôle utilisés pour résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement, appelées facettes (cf. paragraphe 2.2.3).

8.2.1.1 Le schéma centré

Nous calculons le flux au centre de la facette à l'aide des flux calculés aux sommets des facettes. Soient A, B, C (et D en trois dimensions) les centres de gravité des faces de l'élément considéré et s_A, s_B, s_C (et s_D) les sommets de celui-ci. Les valeurs entre parenthèses sont à prendre en compte en trois dimensions, les figures représentant la situation en deux dimensions.



Nous calculons linéairement la vitesse au centre de gravité :

$$\vec{v}_G = \frac{1}{\text{dimension} + 1} (\vec{v}_A + \vec{v}_B + \vec{v}_C + \underbrace{(\vec{v}_D)}_{\text{en 3D}})$$

puis aux sommets des facettes, confondus avec des sommets de l'élément : \bar{u}_{sc} , interpolation linéaire de \bar{u}_G et \bar{u}_C .

Le flux au travers de la facette est alors égal à :

$$\int_{fa7} \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) ds = \frac{1}{dimension} (\bar{u}_G(\bar{u}_G \bar{n}_{fa7}) + \bar{u}_{sc}(\bar{u}_{sc} \bar{n}_{fa7}) + \underbrace{(\bar{u}_{sd}(\bar{u}_{sd} \bar{n}_{fa7}))}_{en\ 3D}) \quad (8.1)$$

Ce schéma est centré, mais n'utilise pas l'approche Eléments Finis, pour évaluer le flux aux facettes.

8.2.1.2 Le schéma centré EF

Nous utilisons ici l'approche Eléments Finis. Nous calculons le flux "exact" au travers des facettes, à l'aide des fonctions de forme.

Il prend la forme suivante :

$$\int_{fa7} \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) ds = \sum_j \bar{u}(x_j) \left(\sum_k \bar{u}(x_k) \overbrace{\int_{fa7} \phi_j(x) \phi_k(x) \bar{n} ds}^{L_{jk}^*} \right) \quad (8.2)$$

avec :

$$\tilde{L}_{jk} = \begin{cases} \frac{|S_k G|}{6} [(\phi_j \phi_k)(S_k) + 4(\phi_j \phi_k)(M) + (\phi_j \phi_k)(G)] & \text{en 2D} \\ \frac{|S_{fa7}|}{3} \left[\sum_{i=0}^3 (\phi_j \phi_k)(x_{M_i}) \right] & \text{en 3D} \end{cases} \quad (8.3)$$

(M_i milieux des arêtes de la facette et S_{fa7} surface de la facette considérée)

Soit $p_{sc}(x_i) = \bar{u}(x_i) \cdot \bar{n}_{fa7}$, le produit scalaire au point x_i .
Les notations sont précisées sur la figure 8.1.

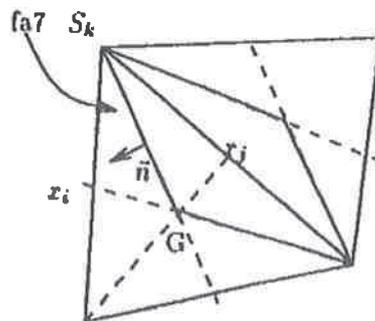


FIG. 8.1 - Définition des notations pour le calcul du flux à travers la facette fa7

Nous avons alors :

- en 2D :

$$\int_{fa7} \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) ds = \frac{1}{27} [(u(x_i) + u(x_j))(13(p_{sc}(x_i) + p_{sc}(x_j)) - 8p_{sc}(x_k)) - u(x_k)(8(p_{sc}(x_i) + p_{sc}(x_j)) - 7p_{sc}(x_k)))] \quad (8.4)$$

• en 3D :

$$\int_{\Gamma_{a7}} \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) = \frac{1}{32} [(u(x_i) + u(x_j))(19(psc(x_i) + psc(x_j)) - 7(psc(x_k) + psc(x_l))) - u(x_k)(7(psc(x_i) + psc(x_j)) - 15psc(x_k) + 9psc(x_l)) - u(x_l)(7(psc(x_i) + psc(x_j)) + 9psc(x_k) - 15psc(x_l))] \quad (8.5)$$

Nous sommes alors ces flux, calculés aux facettes du volume de contrôle, pour avoir le flux convectif pour l'ensemble du volume de contrôle.

8.2.1.3 Le schéma Muscl (MUSCL = Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws, cf. [FP97], [BET97])

Principe

Ce schéma est d'ordre 2. Il consiste à reconstruire la valeur transportée ϕ aux milieux des facettes des volumes de contrôle, par l'intermédiaire d'un développement limité d'ordre 2 de la variable. La valeur transportée extrapolée, notée ϕ_{amont} est :

$$\phi_{extrapolée} = \phi_{amont} + \bar{\nabla} \phi_{amont} (\bar{X}_{\Gamma_{a7}} - \bar{X}_{amont}) \quad (8.6)$$

A chaque itération temporelle, l'extrapolation de la variable ϕ passe donc par le calcul d'un gradient à évaluer sur chaque volume de contrôle pour la conservation de la quantité de mouvement, concerné par la vitesse définie *amont*.

Nous avons :

$$\int_{\Gamma_{a7}} \bar{u}(\bar{u} \cdot \bar{n}) ds = \frac{1}{dimension} \left(\bar{u}(G) \bar{n}(G) + \bar{u}(sc) \bar{n}(sc) + \underbrace{(\bar{u}(sd) \bar{n}(sd))}_{\text{en 3D}} \right) \bar{u}_{extrapolée} \quad (8.7)$$

Evaluation du gradient et limiteur minmod

L'estimation des pentes constitue une part déterminante du calcul du schéma. L'évaluation du gradient $\bar{\nabla} \phi_{amont}$ à l'ordre 2, par une discrétisation centrée sur les éléments, est réputée être relativement instable et génératrice d'oscillations numériques par création d'extrema locaux en présence de discontinuités dans la solution ou de forts gradients.

Le calcul de ces gradients est donc complété par une notion de limiteurs de pentes, qui consiste à imposer un principe de stricte monotonie dans la reconstruction de U . Cette notion de monotonie garantira une reconstruction finale ne générant aucun nouvel extremum local : la valeur reconstruite est comprise entre le minimum et le maximum des valeurs de la vitesse au centre des faces. Le limiteur utilisé ici est le limiteur "minmod". Ces critères de stabilité privilégient la pente décentrée minimale, pour le calcul des gradients sur les deux éléments entourant la face *amont* ; il impose une pente nulle, en présence d'inversion des gradients estimés, et enfin il permet de retrouver le schéma *amont*, en cas de fortes discontinuités des gradients. *Le limiteur rend ce schéma stable mais dissipatif.*

8.2.2 Présentation des méthodes couplant le schéma en espace et le schéma en temps

8.2.2.1 Principe

Pour les schémas présentés ci-dessous, les schémas en temps et en espace sont liés, contrairement aux schémas présentés ci-dessus (cf. [HIR90],[BEL99]). C'est un schéma *prédicteur correcteur*.

La méthode est basée sur un développement en série de Taylor.

Les deux étapes du schéma permettent d'évaluer la dérivée temporelle ci dessous :

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{\text{moy}} \Delta t \quad (8.8)$$

Nous décrivons tout d'abord la méthode dans le cas des différences finies.

• l'étape de prédiction

Dans cette étape, les dérivées spatiales de la vitesse convective sont calculées en utilisant une méthode de décentrement aval décrite ci-dessous et la vitesse transportante est calculée en prenant les valeurs centrées. Nous avons alors (en 1D) :

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_i^t = u_i^t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_i^t + Q_i^t \quad (8.9)$$

$$\text{avec } \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_i^t = \begin{cases} \frac{u_{i+1}^t - u_i^t}{\Delta x} & \text{si } \vec{u} \cdot \vec{x} > 0. \\ \frac{u_i^t - u_{i-1}^t}{\Delta x} & \text{si } \vec{u} \cdot \vec{x} < 0. \end{cases} \quad (8.10)$$



FIG. 8.2 - Définition des notations pour le calcul des dérivées spatiales de la vitesse

Q_i^t regroupe les contributions des autres termes de l'équation.

La valeur issue de l'étape de prédiction (notée \hat{u}), est la suivante :

$$\hat{u}_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_i^t \Delta t \quad (8.11)$$

• l'étape de correction

Pour la deuxième étape, nous décentrons le calcul des dérivées spatiales de la vitesse convective de l'autre côté, en amont. La vitesse transportante est calculée comme précédemment. Ces calculs sont faits à partir des valeurs de la vitesse prédite.

Nous avons alors :

$$\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \right)_i^{t+\Delta t} = \hat{u}_i^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} \right)_i^{t+\Delta t} + \hat{Q}_i^{t+\Delta t} \quad (8.12)$$

$$\text{avec } \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} \right)_i^{t+\Delta t} = \begin{cases} \frac{\hat{u}_i^{t+\Delta t} - \hat{u}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} & \text{si } \vec{u} \cdot \vec{x} > 0. \\ \frac{\hat{u}_{i+1}^{t+\Delta t} - \hat{u}_i^{t+\Delta t}}{\Delta x} & \text{si } \vec{u} \cdot \vec{x} < 0. \end{cases} \quad (8.13)$$

La valeur de la dérivée temporelle, que nous allons utiliser, est la moyenne de celles calculées dans les deux étapes.

Nous avons :

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_i^t + \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \right)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (8.14)$$

Ceci conduit à un schéma du second ordre en temps et en espace, si Q_i est également discrétisé à un ordre supérieur ou égal à 2.

Nous généralisons cela pour notre élément.

Nous avons deux versions de ce schéma.

- la première est le schéma *Mac Cormack*, où nous projetons sur l'espace à divergence nulle (cf. paragraphe 2.3.1) pour calculer la pression, à chaque sous-pas de temps,
- la seconde, appelée simplement *schéma Prédicteur Correcteur*, où nous calculons la pression à la fin du pas de temps, en effectuant uniquement la projection au cours de la deuxième étape.

Nous présentons maintenant plusieurs façons de calculer le flux convectif.

8.2.2.2 Première adaptation : forme centrée du schéma alternant

Lors de l'étape de prédiction, nous appliquons un décentrage d'un côté et lors de l'étape de correction, de l'autre, le sens du décentrage étant aléatoire. Durant l'étape de prédiction, nous évaluons le flux à la facette, calculé à l'aide de la vitesse en A' (cf. figure 8.3 pour les notations) :

- en 2D

$$flux_{pred} = \frac{1}{2} (\bar{u}(G)\bar{n}_{fa\tau} + \bar{u}(sc)\bar{n}_{fa\tau}) \bar{u}(A') \quad (8.15)$$

$$\text{où} \quad \bar{u}(A') = \frac{2}{3} \bar{u}(A) + \frac{1}{3} \bar{u}(sc) \quad (8.16)$$

- en 3D

$$flux_{pred} = \frac{1}{3} (\bar{u}(G)\bar{n}_{fa\tau} + \bar{u}(sc)\bar{n}_{fa\tau} + \bar{u}(sb)\bar{n}_{fa\tau}) \bar{u}(A') \quad (8.17)$$

$$\text{où} \quad \bar{u}(A') = \frac{1}{2} \bar{u}(A) + \frac{1}{4} (\bar{u}(sc) + \bar{u}(sd)) \quad (8.18)$$

Pour la deuxième étape, nous évaluons la vitesse transportée en B' . Dans les formules précédentes, il faut donc remplacer A par B et A' par B' .

Le segment $[A', B']$ est parallèle au segment $[sa, sb]$ et coupe le segment $[sc, G]$ en son milieu T . Avec ce choix de A' et B' , à la fin des deux étapes, le flux est évalué en T : c'est en ce sens que l'on dit que c'est un schéma centré.

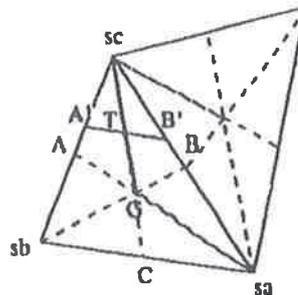


FIG. 8.3 - Définition des notations pour le schéma Prédicteur-Correcteur

8.2.2.3 Deuxième adaptation : forme décentrée du schéma alternant, en 3D

Le principe est le même que précédemment : nous calculons les vitesses transportées en A'' et B'' , ces points étant situés sur le même segment respectivement que A' et B' , mais se trouvant plus près de A et B , ce qui correspond à un léger décentrage.

Nous avons: $\bar{u}(A') = \frac{2}{3}\bar{u}(A) + \frac{1}{6}(\bar{u}(sc) + \bar{u}(sd))$. Il n'est implémenté qu'en trois dimensions.

8.2.2.4 Troisième adaptation : forme centrée "interpolée" du schéma alternant

Cette modification de la première adaptation concerne l'évaluation de la vitesse transportante, calculée au sommet. Pour la première adaptation, nous calculons la vitesse au sommet, en utilisant la linéarité de la vitesse dans l'élément (discrétisation P1NC).

Nous avons :

$$\bar{u}(sc) = \bar{u}(A) + \bar{u}(B) + \bar{u}(C) + \bar{u}(D) - dimension * \bar{u}(C) \tag{8.19}$$

Du fait de la non-conformité de l'élément, la vitesse n'est pas continue aux sommets. En un même sommet, la vitesse peut être très différente, selon l'élément que l'on considère, ce qui génère des oscillations haute fréquence.

Afin d'atténuer ce phénomène, nous filtrons la vitesse transportée au sommet (pas la vitesse transportante, car sinon nous n'aurions plus $\vec{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$.)

Nous avons alors :

$$\bar{u}(S)_{interpolée} = \left(1 - \frac{nb_voisins}{\alpha + dimension}\right)\bar{u}(S) + \frac{1}{\alpha + dimension} \sum_{i=0}^{nb_voisins-1} \bar{u}(S_i) \tag{8.20}$$

nb_voisins est égal à 2 en 2D et 3 en 3D, pour les faces internes. Nous représentons les éléments considérés sur la figure 8.4.

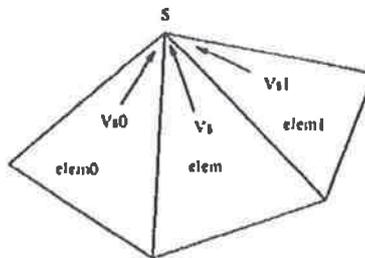


FIG. 8.4 - Éléments utilisés pour le calcul de la vitesse filtrée - en 2D

Une modification de α modifie les poids respectifs des valeurs aux sommets calculées dans les éléments voisins et l'élément considéré. La forme centrée peut être considérée comme un cas particulier de ce schéma, puisque cela correspond à donner un poids égal à 1 à la vitesse calculée dans l'élément et 0 dans les éléments voisins. Nous allons présenter les différentes valeurs des pondérations dans le tableau suivant, obtenues avec $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ et $\alpha = 4$, pour les trois éléments voisins en trois dimensions.

Pondération	α	poids à elem	poids à elem0	poids à elem1	poids à elem2
1	centrée	1.	0.	0.	0.
2	2.	1/2	1/6	1/6	1/6
3	3.	2/3	1/9	1/9	1/9
4	4.	3/4	1/12	1/12	1/12

Dans les tests présentés dans ce document, nous comparerons ces quatre pondérations.

8.3 Implémentation des modèles sous-maille

Dans ce paragraphe, nous allons uniquement décrire l'implémentation des modèles sous-maille en maillages non structurés, se trouvant dans PRICELES. Une description de ces modèles se trouve dans le chapitre 3.

8.3.1 Modèle de Smagorinsky

Nous rappelons rapidement l'expression de la viscosité turbulente avec le modèle de Smagorinsky.

Nous avons :

$$\nu_t = (C_s \Delta c)^2 \|\bar{S}\| \quad (8.21)$$

Or :

$$\|\bar{S}\| = 2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} \text{ avec } \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.22)$$

Puisque la vitesse est linéaire par élément, les dérivées de la vitesse sont constantes sur ceux-ci. Nous avons alors :

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv = V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (8.23)$$

Or, d'après la formule de Stokes, nous avons :

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv = \int_{\partial V} u_i \bar{x}_j \bar{n} ds \quad (8.24)$$

Nous avons donc :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} u_i \bar{x}_j \bar{n} ds \quad (8.25)$$

Nous prenons : $\Delta c = \sqrt[3]{V}$, où V est le volume de l'élément où est calculée la viscosité turbulente.

8.3.2 Modèle de la fonction de structure

Nous avons testé trois implémentations différentes. Pour les déterminer, nous sommes repartis de la définition de la fonction de structure, qui consiste à calculer l'incrément de vitesse pour des points situés sur une sphère de rayon r .

Remarque : Nous ne chercherons pas avoir une formulation particulière pour la simulation du canal plan (formulation en 4 points en maillages structurés), du fait de la non structuration du maillage et de la non universalité de cette expression.

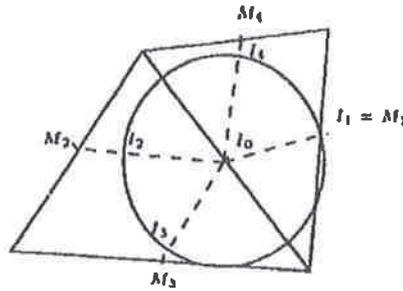


FIG. 8.5 - Notations pour la première implémentation de la fonction de structure

8.3.2.1 Première implémentation

La première consiste à calculer la fonction de structure au centre de gravité d'une face, en l'évaluant à l'aide de points situés sur la plus petite sphère inscrite dans le volume formé par les deux éléments touchant la face, passant par le centre de gravité d'une des faces (cf. figure 8.5).

Nous voulons calculer \bar{F}_2 au centre de la face, en I_0 . Pour cela, nous recherchons la distance minimale r entre ce point et le centre des M faces voisines. Ensuite, nous déterminons les points I_i , $1 \leq i \leq M$, intersections de la sphère de rayon r , centrée sur I_0 et des segments reliant I_0 aux centres des faces.

Nous interpolons linéairement la vitesse aux points I_i , à l'aide des vitesses au centre de gravité des faces, notés M_i .

Nous calculons \bar{F}_2 à l'aide de ces vitesses, i.e. :

$$\bar{F}_2(\vec{x}_{I_0}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\|\vec{u}_{I_0} - \vec{u}_{I_i}\|^2) \quad (8.28)$$

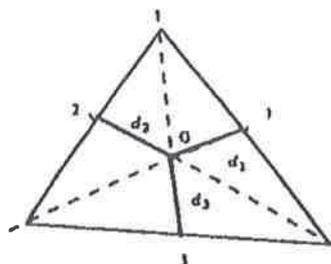
$$\bar{F}_2(\vec{x}_{I_0}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\|\vec{u}(\vec{x}_{I_0}, t) - \vec{u}(\vec{x}_{M_i}, t)\|^2) \left(\frac{r}{d(M_i, I_i)} \right)^2 \quad (8.29)$$

Nous obtenons alors la viscosité turbulente au centre des éléments en utilisant \bar{F}_2 calculée au centre des faces. Soit N , le nombre de faces par élément.

$$\nu_t(\vec{x}_G) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{FS} r(\text{face}_i) \sqrt{\bar{F}_2(\text{face}_i)} \quad (8.30)$$

8.3.2.2 Deuxième implémentation

Pour cette deuxième possibilité, nous évaluons les différentes grandeurs à l'aide d'un seul élément.



Nous calculons, en tenant compte de l'adaptation au maillage inhomogène décrite au paragraphe 3.4.3.1 :

$$F_2(\bar{x}_G, \Delta c) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \|(\bar{v}_i - \bar{v}_G)\|^2 \left(\frac{\Delta c}{d_i}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (8.31)$$

$$\text{avec } \Delta c = \sqrt[3]{V}$$

8.3.2.3 Troisième implémentation

La troisième cherche à utiliser des informations exactes que nous connaissons sur le maillage, i.e. la valeur des dérivées spatiales de la vitesse. D'après l'analyse de P. Comte (cf. [LES97c]), nous pouvons écrire, en évaluant la fonction de structure à l'aide des dérivées spatiales de la vitesse au 1er ordre :

$$\nu_1 \approx 0.777(C_s \Delta c)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} + \bar{\omega}_i\bar{\omega}_i} \quad (8.32)$$

où :

- $C_s \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{3C_k}{2}\right)^{-3/4} \approx 0.18$

- $\bar{\omega}$ est la vorticité du champ de vitesse filtré, calculée au centre de chaque élément.

Nous avons donc :

$$\nu_1 \approx 0.02587 \Delta c^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} + \bar{\omega}_i\bar{\omega}_i} \quad (8.33)$$

Nous prenons : $\Delta c = \sqrt[3]{V}$. \bar{S} et $\bar{\omega}$ sont évalués à l'aide des dérivées, dont le calcul est décrit au paragraphe 8.3.1.

8.3.3 Modèle sélectif de la fonction de structure modifié

La modification du modèle sélectif est également destinée à permettre son adaptation en maillages non structurés. En effet, les constantes du modèle sélectif original n'avait pas vraiment de sens pour un maillage très irrégulier, en particulier l'angle de coupure constant. Nous espérons que les modifications apportées nous permettront de retrouver un comportement semblable à celui du modèle sélectif en maillages structurés, c'est-à-dire qu'il sera moins diffusif dans les situations suivantes : transition, fort gradient global ...

L'expression du modèle sélectif modifié est la suivante :

$$\begin{aligned} \nu_1(k) &= C \Phi_{\alpha\left(\frac{k_c}{k_i}\right)}(\bar{x}, t) \Delta c [F_2(\bar{x}, \Delta x)]^{1/2} \\ \text{avec } C &= 0.086 \\ \text{and } \alpha\left(\frac{k_c}{k_i}\right) &= \begin{cases} 23 \cdot \left(\frac{k_c}{k_i}\right)^{-0.4} & \text{for } \frac{k_c}{k_i} \leq 10. \\ 9. & \text{if } \frac{k_c}{k_i} > 10. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction de structure est calculée comme décrit précédemment. Nous calculons la moyenne de la vorticité sur les éléments adjacents à celui où nous évaluons la viscosité turbulente, pondérée par l'inverse de la distance entre les centres de gravité de ces éléments.

Dans le cas de la THI, k_i est déterminé à l'aide du spectre d'énergie turbulente calculé et nous évaluons k_c localement par : $k_c = \frac{\pi}{V^{1/3}}$.

Dans le cas du canal, nous ferons comme décrit en maillages structurés, en utilisant l'évaluation local du k_c , décrit ci-dessus.

Nous aurons donc :

$$\frac{k_c}{k_i} = \frac{L}{2V^{1/3}} \quad (8.34)$$

8.4 Implantation des lois de parois

Les lois de paroi interviennent dans le calcul de la diffusion à la paroi et modifient la valeur de la viscosité turbulente dans les mailles de paroi, que nous définissons ci-dessous. Dans le cas de maillages non structurés composés de tétraèdres, deux problèmes principaux se posent :

- Quels sont les éléments qui vont être touchés par les modifications de la loi de paroi?
- Comment va-t'on prendre en compte la loi de paroi dans le calcul des termes diffusifs?

8.4.1 Eléments touchés par la loi de paroi

Dans le cas des maillages structurés, les éléments touchés sont en contact avec le bord (cf. figure 8.6) : ils forment une couche autour de la paroi. Or, ce n'est pas le cas en maillages non structurés, car certains éléments ne touchent la paroi que par un sommet (cf. figure 8.7, éléments hachurés) et non par une face (cf. figure 8.7, éléments grisés). Il faut donc tenir compte de tous les éléments en contact avec le bord par au moins un sommet. Au moment de calculer le cisaillement à la paroi, il faudrait appliquer la loi de paroi aux mailles ayant au moins un sommet sur la paroi. De plus, du fait de l'irrégularité du maillage, il est possible que certains points du maillage, se trouvant à la même distance de la paroi, subissent ou ne subissent pas l'influence de la loi de paroi (cf. figure 8.7, éléments quadrillés). Ce sont les inconvénients du maillage à l'aide de tétraèdres et ne se pose pas quand le maillage est composé d'hexaèdres.

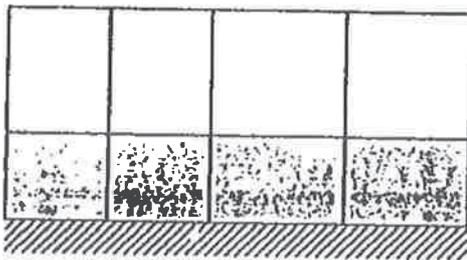


FIG. 8.6 - Eléments touchés par la loi de paroi en maillage structuré

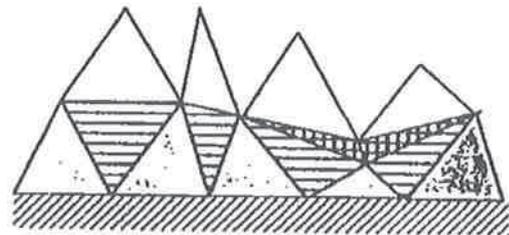


FIG. 8.7 - Eléments touchés par la loi de paroi en maillage non structuré

8.4.2 Calcul de la diffusion turbulente à la paroi

Nous avons décrit au paragraphe 2.3.3 le calcul des termes diffusifs à l'intérieur du domaine de calcul et celui des termes diffusifs prenant en compte les lois de paroi en maillages structurés au paragraphe 4.2.2.1. Nous allons maintenant décrire comment nous procéderons en maillages non structurés, pour les simulations avec loi de paroi.

Quand une face appartient à un élément de bord (i.e. touchant la paroi par une face au moins), il faut prendre en compte le cisaillement calculé par la loi de paroi. Une difficulté

s'ajoute, par rapport au cas des maillages structurés, car nous devons tenir compte du cisaillement pour des faces ne touchant pas la paroi (volume quadrillé, figure 8.8).

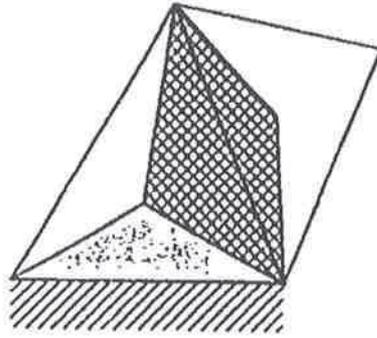


FIG. 8.8 - Volume de contrôle pour une face appartenant à un élément touchant la paroi

Pour cela, nous allons modifier \bar{S} pour les éléments touchant la paroi. Soit \bar{n} , la normale à la paroi. Comme : $\tau_i = \bar{S}_{ij} n_j$, nous allons calculer \bar{S} tel que $\bar{S}_{ij} n_j$ corresponde à τ_i , prédit par la loi de paroi.

Nous avons donc :

$$[\bar{S}_{ij}]_{mod} = \bar{S}_{ij} - (\bar{S}_{ik} n_k) n_j + \text{signe} * \tau_i n_j \quad (8.35)$$

Il faut déterminer maintenant le signe du cisaillement : c'est celui de $\bar{S}_{ik} n_k$. Nous obtenons donc finalement :

$$[\bar{S}_{ij}]_{mod} = \bar{S}_{ij} - (\bar{S}_{ik} n_k) n_j + \frac{\bar{S}_{ik} n_k}{\|\bar{S}_{ik} n_k\|} * \tau_i n_j \quad (8.36)$$

8.4.3 Les lois de paroi en maillages non structurés

8.4.3.1 La loi standard logarithmique

Le calcul se fait de la même manière en maillages non structurés qu'en structurés, car cela dépend uniquement de la distance du premier point à la paroi.

8.4.3.2 La loi de Werner et Wengle

Il faut calculer la distance de la paroi au sommet de l'élément considéré, pour avoir Δy (cf. chapitre 7.4 et Annexe F).

- Dans la loi linéaire, nous utiliserons la distance de la paroi au centre de gravité ($dist_G$), d'où : $\|r_p\| = \rho \frac{\nu \|u_p\|}{dist_G}$.
- Pour $y > y_{lim}$, nous conservons l'hypothèse de calcul suivante : $\|u_p\| \Delta y = \int_0^{\Delta y} u(y) dy$. Ceci introduit une petite erreur sur l'estimation de la vitesse de frottement, car cela suppose que le point considéré pour le calcul de $\|u_p\|$ se situe à la demi-maille. Or, il correspond en réalité au centre de gravité de l'élément, mais nous supposons cette erreur négligeable devant toutes les autres résultant des hypothèses posées.

Chapitre 9

THI en maillages non structurés

9.1 Objectif de ce chapitre

Nous allons maintenant réaliser des simulations de THI, pour tester les schémas numériques, puis l'implémentation des modèles de turbulence, en particulier ceux utilisant la fonction de structure. Nous avons présenté les caractéristiques de cette configuration aux chapitres précédents.

Sauf indication particulière, nous réaliserons des simulations avec un champ initial dont le pic du spectre d'énergie cinétique est situé à $k_i = 5$. Nous utiliserons un maillage structuré homogène à 32^3 , pour lequel chaque cube est découpé en 6 tétraèdres, afin de pouvoir effectuer des calculs de spectres spatiaux. Leur calcul est décrit dans l'Annexe A. Ce maillage est donc un maillage non structuré issu d'un maillage régulier structuré : dans ce chapitre, nous ne ferons pas de test avec un maillage "totalement" non structuré, en raison des contraintes posées par le calcul des spectres, et donc également sur l'imposition d'une condition initiale à spectre fixé sur un maillage non régulier.

9.2 Simulations sans diffusion : Tests des schémas numériques

Nous recherchons, comme annoncé auparavant, une méthode numérique la moins dissipative possible, mais qui soit stable. En effet, nous voulons pouvoir dissocier les différents effets :

- savoir ce qui vient du modèle sous-maille et donc pouvoir évaluer les effets du modèle et sa qualité,
- savoir ce qui résulte des erreurs liés aux méthodes numériques.

Pour tester cela, nous allons faire (comme en maillages structurés), des calculs de "THI" sans diffusion. Nous rappelons que nous recherchons un schéma qui, pour ce cas, maintient l'énergie constante. En effet, puisqu'il n'y a pas de diffusion "physique", la seule qui pourrait dissiper l'énergie est numérique.

9.2.1 Tests des différents schémas de convection

La figure 9.1 ci-dessus regroupe les tests sans diffusion réalisés avec les différents schémas de convection présentés au chapitre précédent et une *CFL* de 1. Différentes valeurs de la *CFL* seront testées ainsi que différentes valeurs de α pour la forme interpolée du schéma alternant.

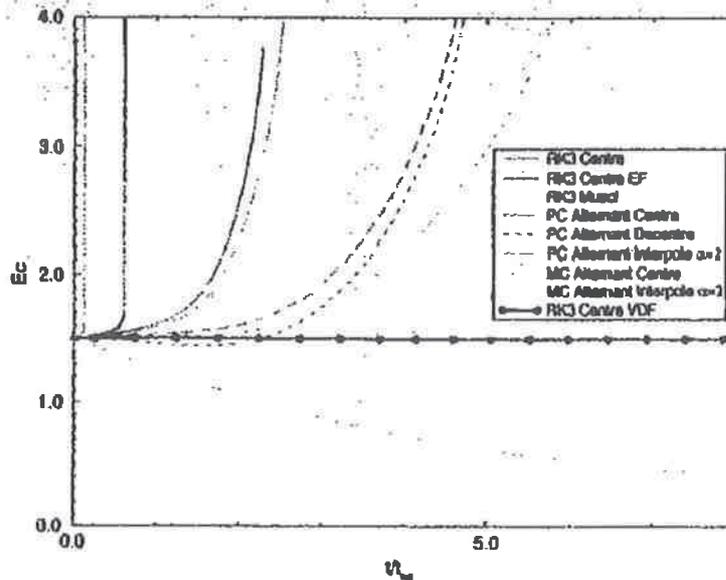


FIG. 9.1 - Evolution de l'énergie cinétique

Nous pouvons regrouper les différents schémas selon leur comportement :

- le schéma Muscl, pour lequel l'énergie cinétique décroît considérablement, ce qui montre sa forte dissipation numérique,
- les schémas centré, centré EF et la forme centré des schémas Prédicteur Correcteur et Mac Cormack pour lesquels l'énergie cinétique augmente,
- la forme décentrée du schéma Prédicteur Correcteur qui dissipe dans les premiers instants et diverge ensuite,
- les formes interpolées des schémas Prédicteur Correcteur et Mac Cormack qui conservent l'énergie durant les premiers instants (environ pendant deux pas de temps de retournement), puis divergent également.

Nous n'allons pas maintenant nous intéresser aux schémas dissipatifs, car ils ne permettent pas d'isoler la dissipation numérique de la dissipation physique. En particulier, si nous regardons les spectres obtenus avec le schéma MUSCL (sans diffusion physique - cf. figure 9.2), nous constatons que la pente dans la zone inertielle est déjà plus forte que $-5/3$, sans modèle sous-maille, c'est-à-dire uniquement avec la dissipation numérique. Ces schémas ne remplissent donc pas les conditions posées ci-dessus.

Par contre, nous allons tenter de comprendre pourquoi l'énergie cinétique augmente fortement avec les autres schémas que nous avons testés, alors qu'en maillages structurés, nous conservons l'énergie cinétique (avec le schéma de convection centré de second ordre et le schéma en temps RK3).

9.2.1.1 Conservation de l'énergie cinétique et méthodes numériques

Nous avons montré au chapitre 6 qu'en l'absence de diffusion physique, l'énergie cinétique doit rester constante. C'est ce qui arrive en maillages structurés, avec les méthodes numériques choisies. En maillages non structurés pour les schémas non dissipatifs, les tests précédents montrent qu'au mieux, l'énergie cinétique reste constante au début de l'évolution mais diverge ensuite : nous allons essayer de comprendre pourquoi.

Le schéma de convection prend de l'énergie dans les grandes échelles pour en transférer dans les petites échelles (cf. figure 9.3).

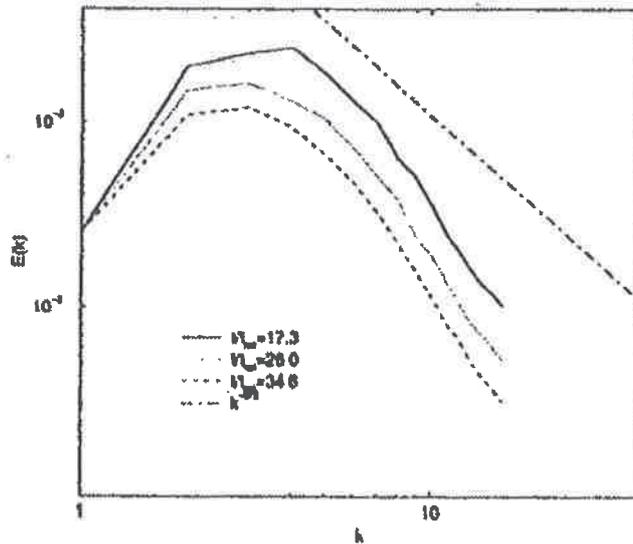


FIG. 9.2 - Evolution des spectres d'énergie cinétique, obtenus avec le schéma MUSCL, sans dissipation physique

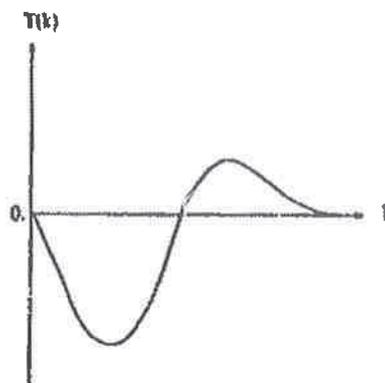


FIG. 9.3 - Transferts d'énergie cinétique dus au terme convectif

S'il n'y a pas de diffusion, l'énergie s'accumule aux petites échelles. Des gradients de plus en plus forts apparaissent alors, puisqu'il y a de grandes oscillations sur des petites distances.

Selon la stabilité de la méthode et de la discrétisation choisie, il y a alors divergence ou non. Ceci constitue peut être une explication de la non divergence en maillages structurés, car la méthode utilisée, proche de la méthode MAC (Marker and Cell (HW65)), est plus stable et moins sensible à ces forts gradients, alors que la discrétisation que nous avons en maillages non structurés n'est pas aussi stable. Nous allons étudier également l'influence de la CFL: en effet, avec des méthodes spectrales, sans diffusion, le pas de temps tend vers 0 pour ne pas diverger. Nous fixons également ici la CFL: le pas de temps diminue quand cela commence à diverger, nous allons donc vérifier que cela ne provient pas simplement de l'imposition d'une CFL trop importante ($CFL = 1$).

Les transferts convectifs, pour différents schémas, à l'instant initial sont représentés sur la figure 9.4.

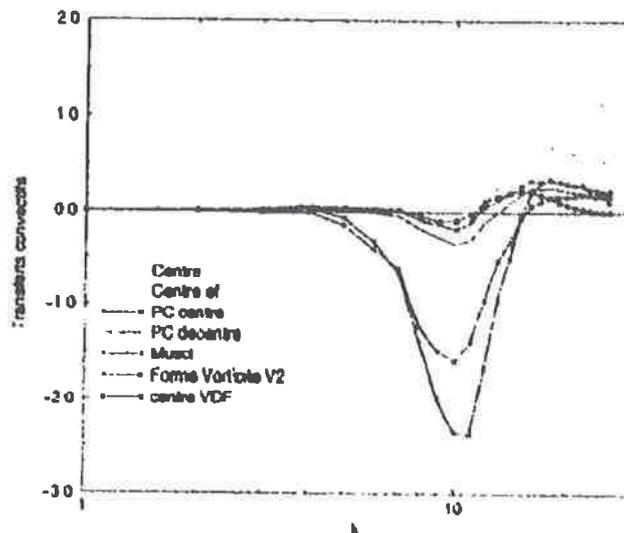


FIG. 9.4 - Transfert d'énergie cinétique à l'instant initial

Sur cette figure, nous constatons que les schémas dissipatifs prennent plus d'énergie aux grandes échelles, qu'elles n'en transfèrent aux petites. Les schémas qui divergent très vite transfèrent plus rapidement l'énergie vers les petites échelles et plus à chaque pas de temps. Les forts gradients apparaissent alors très vite, et font donc diverger le calcul très rapidement.

Comme en maillages structurés, nous cherchons à connaître la forme du spectre pour les calculs sans diffusion: les spectres sont présentés sur la figure 9.5.

Nous constatons que nous retrouvons une perte en k^2 à la coupure même pour les simulations qui divergent: cet élément n'est donc pas suffisant pour affirmer que nous disposons des méthodes numériques adéquates; la conservation de l'énergie cinétique est également nécessaire.

9.2.1.2 Test de la Forme interpolée du schéma Prédicteur-Correcteur

Nous allons nous intéresser maintenant plus particulièrement à la forme interpolée du schéma Prédicteur-Correcteur, puisqu'il conserve l'énergie durant les premiers instants. Or, ce cas n'est pas réaliste, puisqu'il n'y a aucune dissipation, ce qui peut peut-être

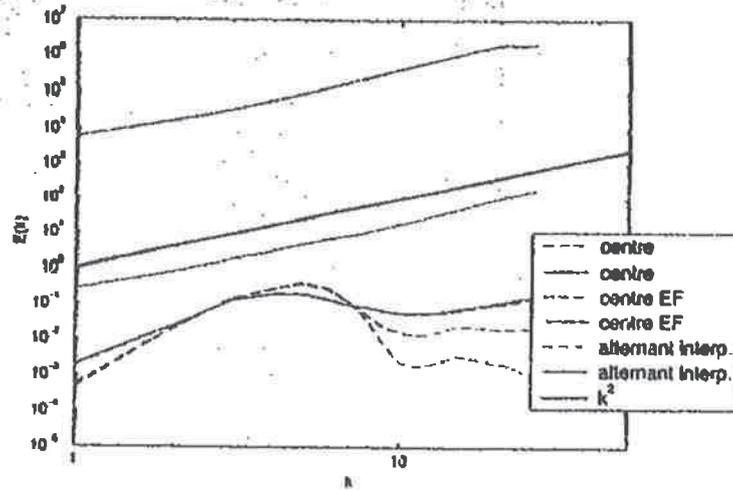


FIG. 9.5 - Spectres d'énergie cinétique turbulente sans diffusion

expliquer sa divergence, car les erreurs numériques dues aux forts gradients s'accumulent. Comme dans les premiers instants, son comportement est bon, nous espérons pouvoir l'utiliser dans des calculs avec dissipation physique : il ne devrait ni ajouter de dissipation (cas des schémas dissipatifs), ni diverger. De plus, l'énergie est conservée pendant environ deux temps de retournement. Or, les résultats du chapitre 6 ont montré, qu'en présence de dissipation turbulente avec le modèle sélectif modifié par exemple, l'énergie cinétique est conservée pendant deux temps de retournement ; il est donc plutôt encourageant que ce schéma conserve l'énergie cinétique pendant le même intervalle de temps.

Nous allons faire des tests en modifiant la valeur de α , c'est-à-dire en modifiant la pondération des vitesses aux sommets avec une $CFL = 1$. Dans ce cas, le schéma qui donne une énergie constante le plus longtemps est obtenu avec $\alpha = 2$, comme nous pouvons le constater sur la figure 9.6.

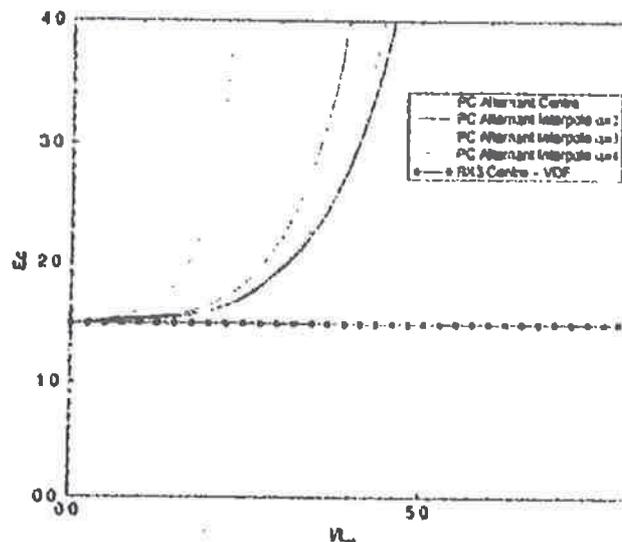


FIG. 9.6 - Evolution de l'énergie cinétique, avec différentes valeurs de α

Les prochains tests concernant ces schémas sont réalisés avec des modèles de turbulence.

9.2.1.3 Test entre schéma Mac Cormack et Prédicteur Correcteur

Seul le traitement de la pression est différent pour ces deux schémas, nous allons donc chercher à voir son influence. Nous utilisons une $CFL = 1$ et nous comparons le forme centrée et la forme interpolée avec $\alpha = 2$, obtenu avec ces deux schémas en temps.

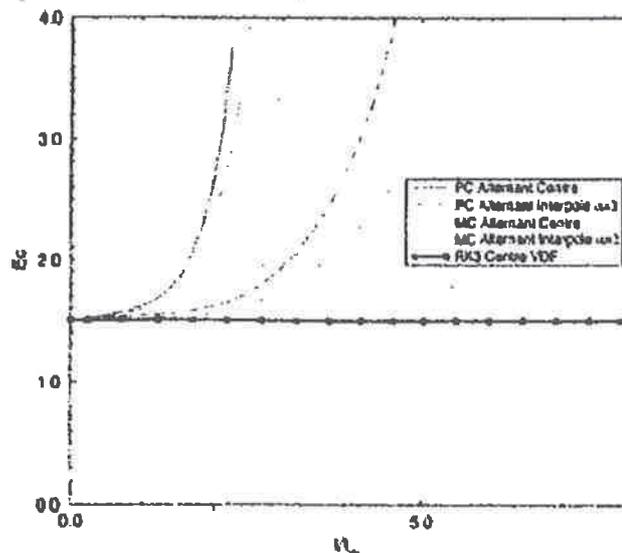


FIG. 9.7 - Evolution de l'énergie cinétique : Mac Cormack vs. Prédicteur Correcteur

Le schéma Mac Cormack semble sensiblement plus stable que le schéma Prédicteur Correcteur, par contre, il demande beaucoup plus de temps de calcul, puisque le système en pression est résolu deux fois. Nous refaisons ce test avec un modèle de turbulence.

9.2.1.4 Test sur la valeur imposée de la CFL

Nous allons faire un test en faisant varier la valeur de la CFL, pour vérifier que les effets décrits ci-dessus ne proviennent pas uniquement d'une CFL imposée trop grande. Nous réalisons deux simulations : avec $CFL = 0.1$ et $CFL = 1$. Le schéma utilisé est la forme interpolée du schéma de Mac Cormack avec $\alpha = 2$.

Nous constatons sur les figures 9.8 et 9.9, que la simulation à $CFL = 0.1$ diverge plus rapidement que celle à $CFL = 1$. Ceci peut s'expliquer par deux éléments :

- Pour un pas de temps du calcul à $CFL = 1$, nous effectuons environ 10 pas de temps pour la simulation à $CFL = 0.1$. Les erreurs faites à chaque pas de temps s'accumulent et peuvent alors dépasser l'erreur faite en un pas de temps pour la simulation à $CFL = 1$.
- L'interprétation du calcul de la CFL en maillages non structurés est beaucoup moins claire, qu'en maillages structurés. Pour calculer le pas de temps vérifiant la CFL imposée, nous calculons le rapport entre la mesure du volume de contrôle (de la quantité de mouvement) et le flux entrant dans celui-ci. En maillages structurés, cela revient à s'assurer que le fluide ne traverse pas plus d'une maille par pas de temps sur l'ensemble du domaine de calcul. C'est beaucoup moins évident en maillages non

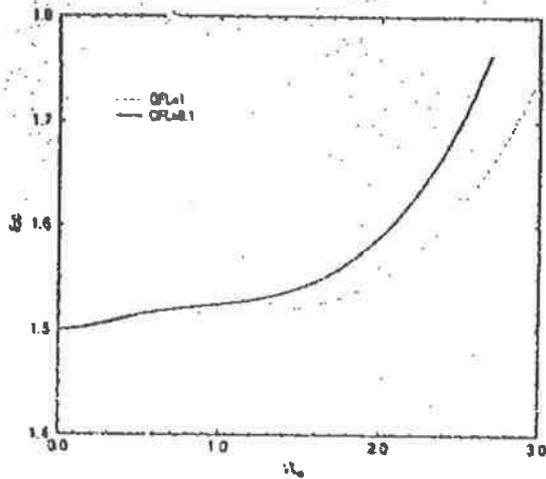


FIG. 9.8 - Evolution de l'énergie cinétique : CFL = 1 vs. CFL = 0.1

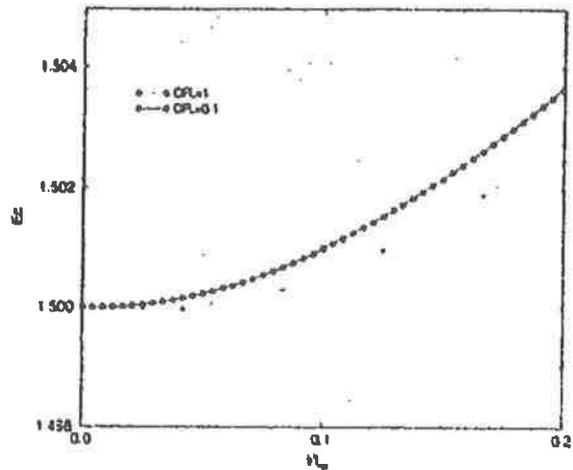


FIG. 9.9 - Evolution de l'énergie cinétique : CFL = 1 vs. CFL = 0.1

structurés (cf. figure 9.10), mais nous n'avons pas trouvé d'autres moyens pour la calculer.

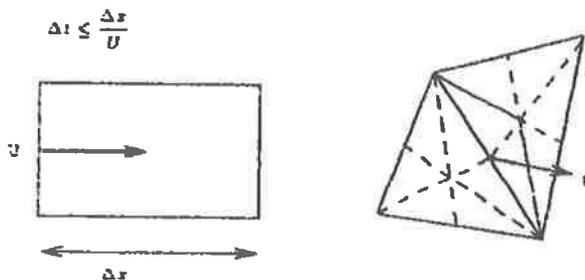


FIG. 9.10 - Calcul de la CFL en maillages structurés et en maillages non structurés

Au vu des résultats précédents, nous allons réaliser nos simulations avec une CFL égale à 1.

9.3 Simulation avec le modèle de Smagorinsky

Comme l'implémentation du modèle de Smagorinsky, en maillages non structurés, ne pose pas de problème particulier, nous allons pouvoir montrer l'influence du schéma numérique sur les résultats et tester ce modèle avec les méthodes numériques choisies auparavant. Nous allons comparer nos résultats avec ceux obtenus avec le même modèle, en maillages structurés, considérés comme référence pour ce modèle (cf. chapitre 6).

9.3.1 Influence des schémas de convection

Comme nous l'avons montré dans les paragraphes précédents, nous n'avons pas trouvé un schéma de convection conservant l'énergie cinétique, pour un calcul sans viscosité moléculaire. Par contre, nous avons sélectionné des méthodes, qui *durant les premiers instants* la conserve. Il faut rappeler que les calculs précédents sont faits avec une viscosité moléculaire nulle, il n'y a donc aucune diffusion physique : ceci correspond à un test très sévère. Il est possible que la divergence du calcul ne se produise pas avec une viscosité non nulle, car

les caractéristiques de stabilité numérique des équations avec et sans modèle sous-maille ne sont pas identiques.

Nous allons comparer des simulations réalisées avec le modèle de Smagorinsky (avec $C_s = 0.18$) et des méthodes numériques différentes (cf. tableau 9.1) :

- le schéma Prédicteur Correcteur comparé au schéma Mac Cormack utilisant tous deux la forme interpolé du schéma alternant $\alpha = 2$,
- la forme interpolée avec $\alpha = 2$ et la forme centré du schéma alternant en utilisant pour tous les deux le schéma Prédicteur Correcteur.

Cela nous permettra d'étudier l'influence du schéma numérique sur les différentes grandeurs et ainsi "d'évaluer qualitativement" l'erreur commise avec les méthodes choisies.

Calcul N°	Schéma en temps	Schéma de convection	C_s
1	Mac Cormack	Alternant interpolé $\alpha = 2$	0.18
2	Prédicteur Correcteur	Alternant interpolé $\alpha = 2$	0.18
3	Prédicteur Correcteur	Alternant centré	0.18

TAB. 9.1 - Simulations effectuées pour tester l'influence des schémas numériques

9.3.2 Comparaison des simulations 1 et 2

Nous étudions ici l'influence du traitement de la pression : avec le schéma Mac Cormack, nous projetons sur l'espace à divergence nulle à chaque sous-pas de temps (cf. paragraphe 8.2.2) alors qu'avec le schéma Prédicteur Correcteur, la projection est faite à la fin du deuxième sous-pas de temps.

Les comparaisons sont présentées sur les figures 9.11 à 9.13.

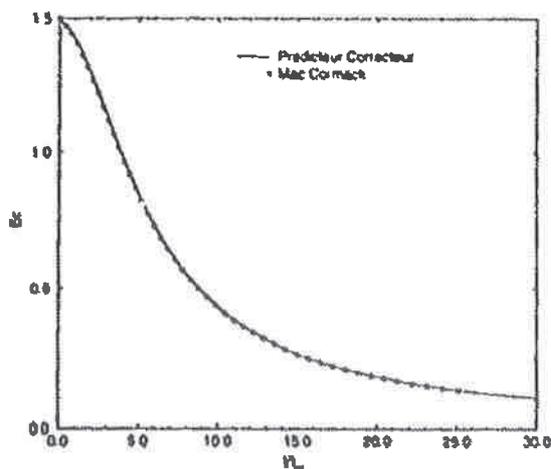


FIG. 9.11 - Evolution de l'énergie cinétique: Prédicteur Correcteur vs. Mac Cormack

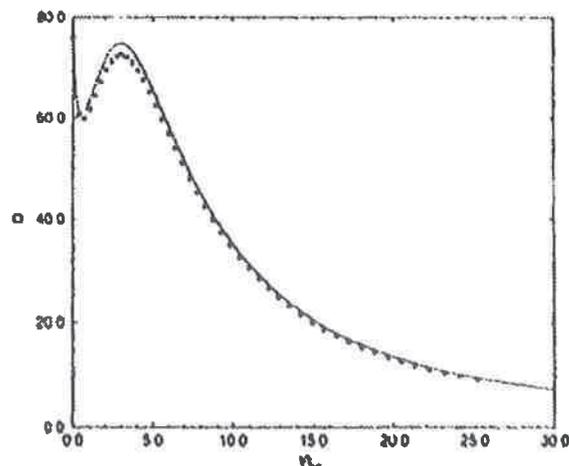


FIG. 9.12 - Evolution de l'enstrophie: Prédicteur Correcteur vs. Mac Cormack

Nous constatons qu'il n'y a pas de différences significatives entre les deux simulations. Pour le cas de la THI, nous allons donc utiliser le schéma Prédicteur Correcteur, car il est plus rapide, puisque nous résolvons le système en pression qu'une seule fois par pas de temps. Or, c'est dans la résolution de ce système que le calcul passe le plus de temps, soit environ 75% du temps de calcul.

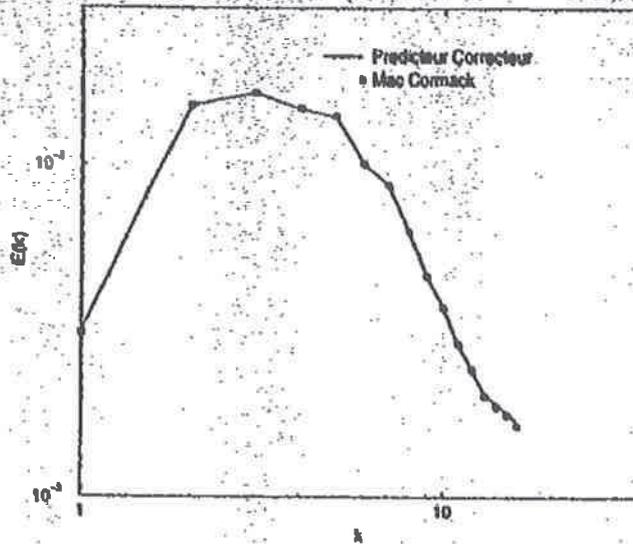


FIG. 9.13 - Spectres d'énergie cinétique turbulente : Prédicteur Correcteur vs. Mac Cormack

9.3.3 Comparaison des simulations 2 et 3

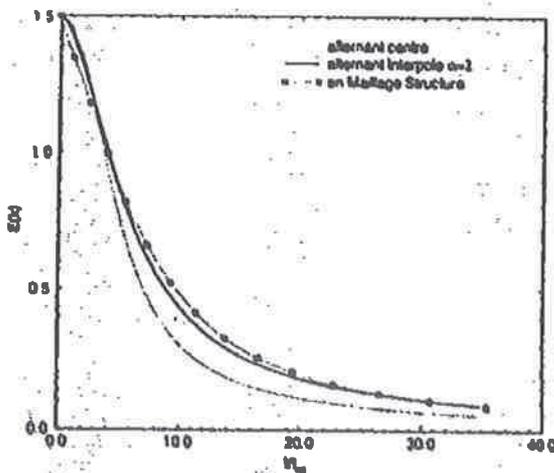


FIG. 9.14 - Evolution de l'énergie cinétique

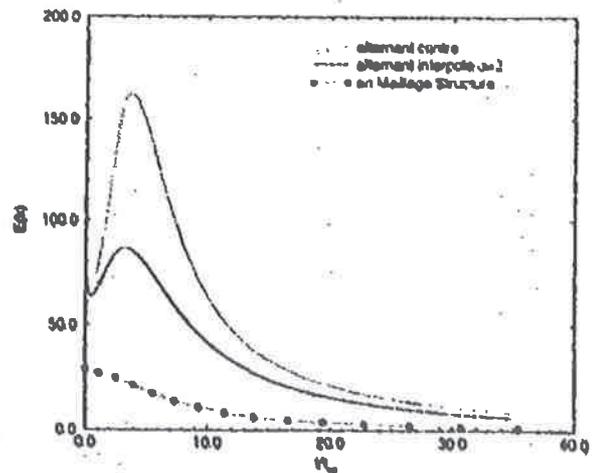


FIG. 9.15 - Evolution de l'ensrophie

Les comparaisons des calculs 2 et 3 sont présentées sur les figures 9.14 à 9.16. Comme nous l'avons montré au paragraphe précédent, le schéma *alternant centré* diverge assez rapidement sans diffusion. Un trop fort transfert des grandes échelles vers les petites en est probablement la cause. En effet, nous retrouvons ce fort transfert sur les trois courbes représentées :

- sur l'évolution de l'énergie cinétique (cf. figure 9.14) : avec le schéma *alternant centré*, l'énergie cinétique se situe en dessous des deux autres courbes (*alternant interpolé* et *VDF*). Comme il y a plus d'énergie transférée aux petites échelles, le modèle dissipe plus et l'énergie cinétique diminue plus rapidement.
- sur l'évolution de l'ensrophie (cf. figure 9.15) : nous avons déjà dit que l'ensrophie est

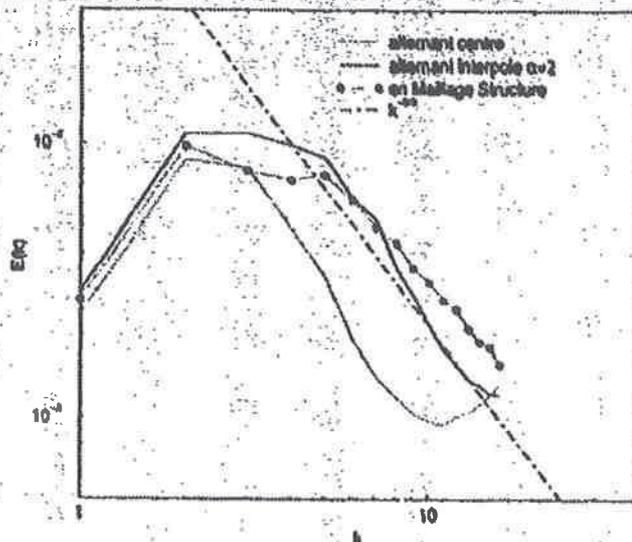


FIG. 9.16 - Spectres d'énergie cinétique

très sensible aux petites échelles. Avec la forme centrée de ce schéma de convection, elle est plus élevée, ce qui prouve également une plus grande proportion d'énergie à petite échelle, et confirme donc l'existence de ce fort transfert.

- sur le spectre d'énergie turbulente (cf. figure 9.16): le décalage des spectres provient du fait que nous les comparons au même instant, auquel l'énergie cinétique globale est plus faible avec l'alternant centré qu'avec l'autre schéma de convection. Nous constatons également que son allure est différente: il y a moins d'énergie aux échelles intermédiaires et plus aux petites échelles (remontée du spectre plus importante), ce qui est cohérent avec les remarques précédentes.

Par contre, nous voyons que les deux spectres ont sensiblement la même pente: le schéma de convection influence donc fortement sur le transfert de l'énergie et pas directement sur sa dissipation, qui est réalisée par le modèle sous-maille. Il a seulement une influence indirecte sur la dissipation, puisque c'est lui qui transfère plus ou moins d'énergie vers les échelles où se produit la dissipation du modèle sous-maille.

Conclusion Cette comparaison permet de voir comment le schéma de convection influence sur les transferts d'énergie et confirme l'hypothèse faite au chapitre précédent sur la raison de la divergence des schémas de convection testés.

9.3.4 Test du modèle de Smagorinsky

Nous allons maintenant comparer la simulation 2 avec une simulation réalisée avec $C_s = 0.18$ en maillages structurés avec la même condition initiale et un maillage régulier de 32^3 . La résolution de la simulation effectuée en maillages non structurés est plus fine que celle en maillages structurés, puisque chaque cube est découpé en 6 tétraèdres. Les comparaisons sont présentées sur les figures 9.17 à 9.21.

- Sur la figure 9.17, nous comparons les évolutions de l'énergie cinétique: elles sont très proches. Dans les premiers instants, la dissipation est plus faible en maillages non structurés; ceci peut être dû au fait que la résolution de la simulation en maillages non structurés est plus fine qu'en maillages structurés, puisque nous avons vu précédemment, lors des tests de sensibilité au maillage en maillages structurés, que

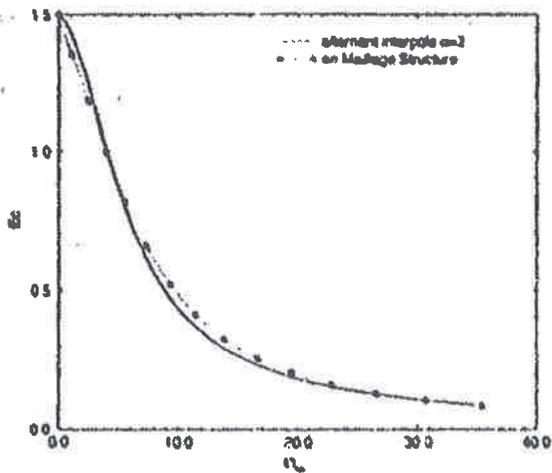


FIG. 9.17 - Evolution de l'énergie cinétique

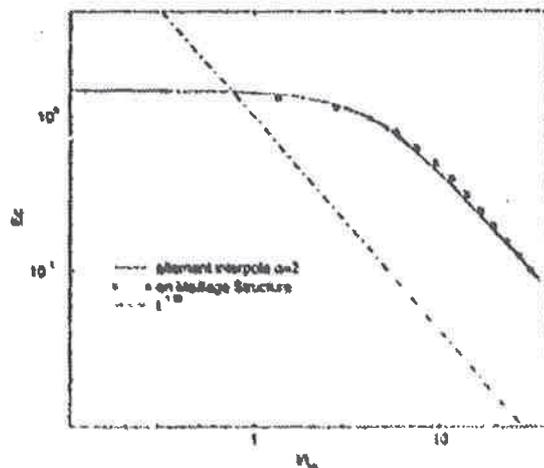


FIG. 9.18 - Décroissance de l'énergie cinétique

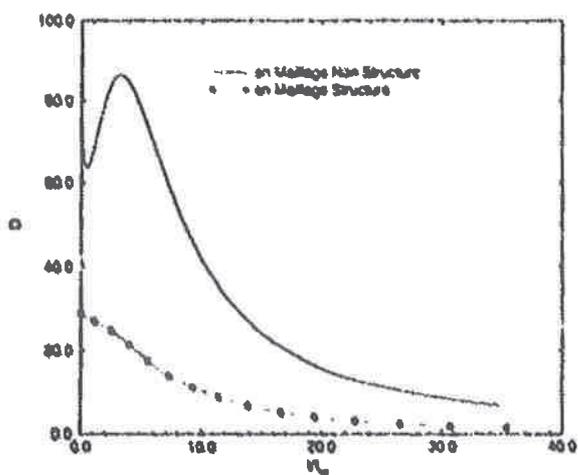


FIG. 9.19 - Evolution de l'enstrophie

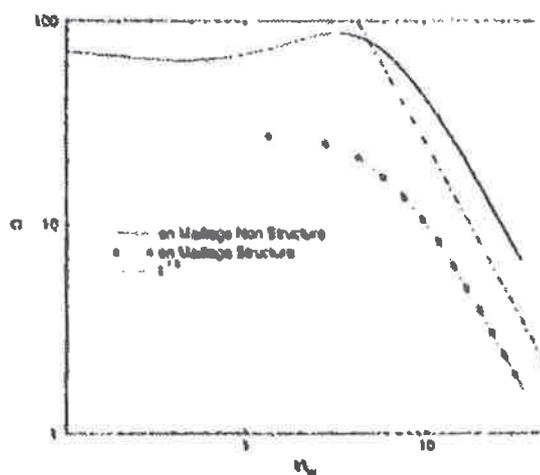


FIG. 9.20 - Décroissance de l'enstrophie

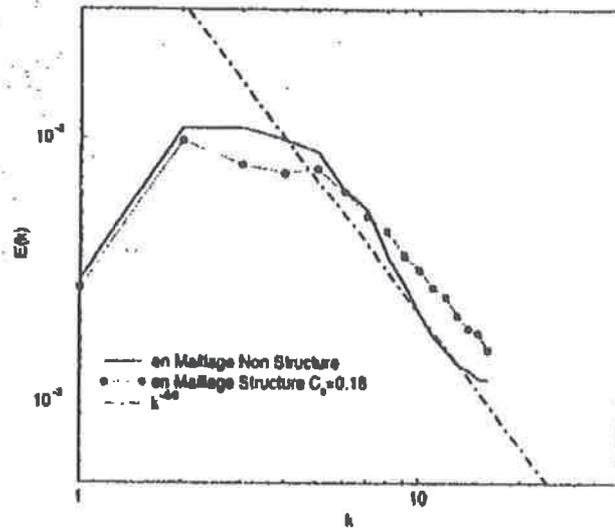


FIG. 9.21 - Spectres d'énergie cinétique

le raffinement permet de dissiper moins d'énergie dans les premiers instants. Cela peut également provenir de la différence d'implémentation du modèle sous-maille, et impliquer une réaction un peu différente de celui-ci. Mais comme nous l'avons dit plus haut, les différences ne sont pas très grandes : le niveau final est le même pour les deux types de maillage. Sur la figure 9.18, nous constatons que la pente de décroissance est très proche de celle obtenue en maillages structurés et de la valeur théorique de -1.38 .

- sur la figure 9.19, nous comparons l'évolution de l'enstrophie. Elles sont assez différentes, le niveau étant fortement plus élevé pour la simulation en maillages non structurés. Ceci s'explique par le fait que nous comparons deux calculs ayant une discrétisation différente. Le maillage non structuré est obtenu en redécoupant le maillage structuré, c'est-à-dire en coupant chaque cube du maillage structuré en 6 tétraèdres. Les mailles sont donc plus petites avec le maillage non structuré et donc les échelles représentées par le maillage non structuré également plus petites. Comme l'enstrophie est très sensible aux petites échelles, sa valeur est plus élevée. L'allure de l'enstrophie dans les premiers instants de la simulation provient probablement des défauts de notre schéma de convection. En effet, l'évolution "normale" avec un modèle de Smagorinsky est que l'enstrophie décroît dès les premiers instants. Or ici, c'est ce qui se passe dans les tous premiers instants, mais ensuite suit une remontée assez forte ($+1/5$ de l'enstrophie initiale). Ceci résulte probablement du trop fort transfert vers les petites échelles du schéma de convection. En même temps, la remontée de l'enstrophie correspond à ce qui est prévu théoriquement, du fait de l'établissement dans les premiers instants des corrélations triples : il est donc difficile de conclure entre les deux interprétations, les deux phénomènes se combinant probablement.

La pente de décroissance est proche de celle obtenue lors de la simulation en maillages structurés et de la pente théorique de -1.6 .
- Nous comparons maintenant les spectres d'énergie turbulente (cf. figure 9.21). Les spectres sont assez proches, en particulier aux grandes échelles. Il y a un peu plus d'énergie avec le maillage non structuré, aux échelles intermédiaires et un peu moins

aux petites échelles. La pente du spectre est un peu plus forte en maillage non structuré.

Conclusion

Les résultats obtenus sur cette configuration élémentaire et fondamental sont satisfaisants : nous n'atteignons pas tout à fait à la qualité des résultats obtenus en maillages structurés, mais ceci est normal, car la discrétisation utilisée en maillages structurés conduit à des résultats très précis. Au vu de ces résultats, nous considérons que nous avons maintenant des méthodes numériques, nous permettant de réaliser des simulations des Grandes Echelles, en maillages non structurés. Il faudra bien sûr s'intéresser au problème des parois, qui n'intervient pas dans ce cas : ce sera un des objectifs des simulation du canal plan. Avant cela, nous allons tester les implémentations envisagées pour le modèle de la fonction de structure.

9.4 Implémentation de la fonction de structure en maillages non structurés

Nous allons maintenant tester les trois implémentations de la fonction de structure, présentées dans le chapitre précédent, avec la forme interpolée $\alpha = 2$ du schéma de convection. Nous résumons les paramètres des différents calculs dans le tableau 9.2.

Calcul N°	Schéma en temps	Schéma de convection	Implémentation
4	Prédicteur Correcteur	Alternant filtre $\alpha = 2$	sur un élément
5	Prédicteur Correcteur	Alternant filtre $\alpha = 2$	sur deux éléments
6	Prédicteur Correcteur	Alternant filtre $\alpha = 2$	3 ^{ème} implémentation

TAB. 9.2 – Simulations effectuées pour tester les implémentations de la fonction de structure

Les comparaisons sont présentées sur les figures 9.22 à 9.27.

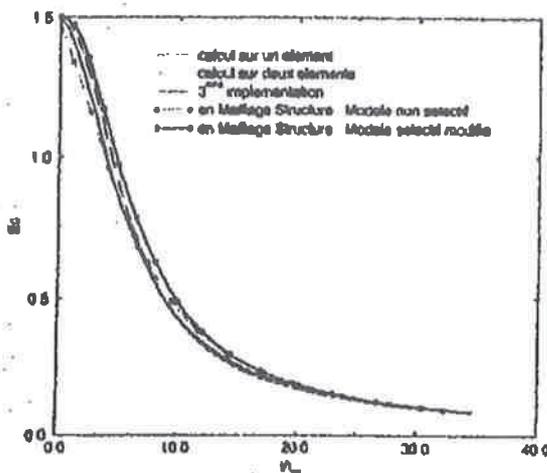


FIG. 9.22 – Evolution de l'énergie cinétique

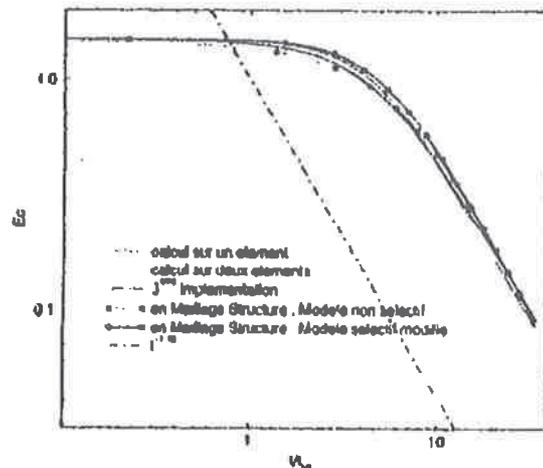


FIG. 9.23 – Décroissance de l'énergie cinétique

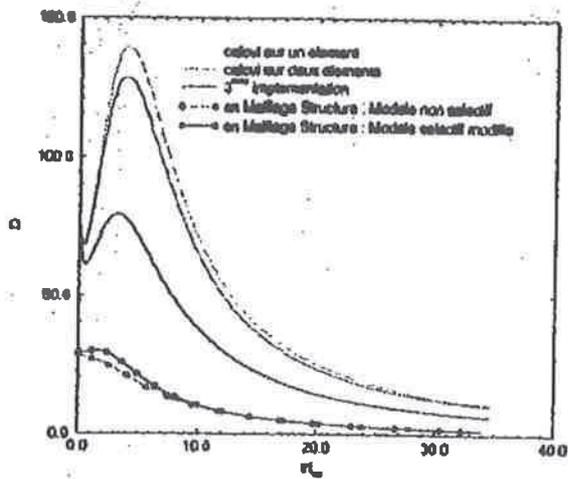


FIG. 9.24 - Evolution de l'entropie

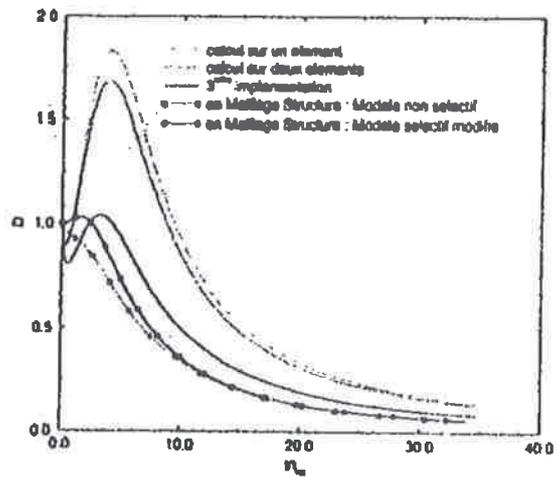


FIG. 9.25 - Evolution de l'entropie, normalisée par sa valeur initiale

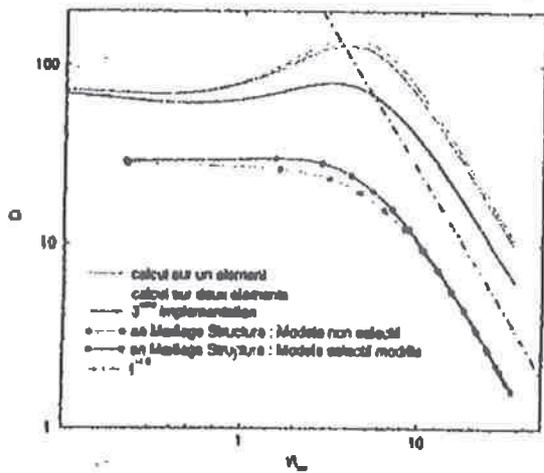


FIG. 9.26 - Décroissance de l'entropie

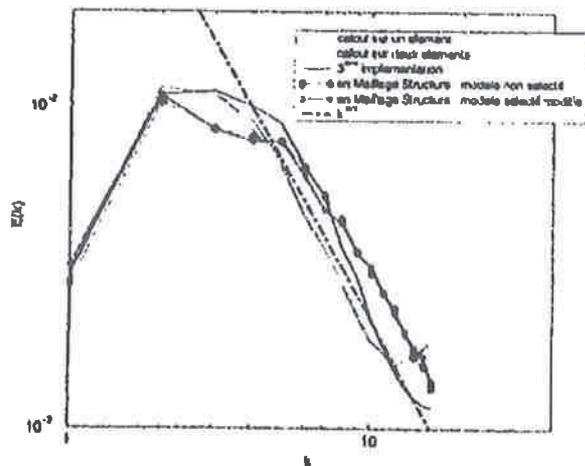


FIG. 9.27 - Spectres d'énergie cinétique

9.4.1 Analyse des résultats

Nous comparons les trois implémentations proposées, aux résultats obtenus en maillages structurés avec le modèle de la fonction de structure et sa version sélective modifiée.

- Sur les figures 9.22 et 9.23, nous nous intéressons à l'énergie cinétique : elle est comprise, pour les trois implémentations en maillages non structurés, entre les résultats obtenus en maillage structuré avec la version sélective et sélective. Les pentes sont alors également proches de la valeur théorique. Les résultats sont pertinents physiquement.
- Sur les figures 9.24 à 9.26, l'évolution de l'enstrophie est représentée. Les caractéristiques sont les mêmes que pour les résultats précédents obtenus avec le modèle de Smagorinsky, résultant principalement dans les différences de taille de mailles. Sur la figure 9.25, nous avons normalisé l'enstrophie de chaque simulation par sa valeur initiale : en maillages non structurés, le pic d'enstrophie est beaucoup plus marqué qu'en maillages structurés, ce qui provient probablement des différences de schémas numériques, comme nous l'avons supposé auparavant.
Les deux premières implémentations sont assez proches, mais sont distinctes de la troisième, cette dernière ayant un principe différent des deux autres. Les pentes de décroissance sont proches de celles obtenues en maillages structurés et proche de la valeur théorique de -1.6 pour l'enstrophie filtrée.
- Sur la figure 9.27, nous représentons les spectres d'énergie cinétique turbulente. Ceci va nous permettre de choisir une des implémentations, puisque les autres grandeurs caractéristiques ne nous le permettent pas. Comme précédemment, les deux premières implémentations donnent des résultats très proches, alors que la troisième se détache. Pour les grandes échelles, les trois implémentations sont proches des résultats obtenus en maillages structurés, ensuite cela s'en éloigne en restant tout de même assez proche.

Nous allons choisir une des deux premières implémentations, car la pente aux petites échelles est vraiment très proche de $-5/3$, ce qui n'est pas le cas pour la troisième implémentation, proche des résultats obtenus avec le modèle de Smagorinsky. Avec ces deux implémentations, nous avons une légère remontée du spectre près de la coupure, ce qui résulte probablement des défauts du schéma de convection utilisé.

Finalement, nous utiliserons dans la suite de ce travail, l'implémentation de la fonction de structure, calculée dans un élément (correspondant à la deuxième cf. paragraphe 8.3.2.2), car il y a moins d'opérations à réaliser pour le calcul de la viscosité turbulente qu'avec l'autre version, les résultats de THI avec ces deux implémentations étant très proches. Ce choix n'est pas définitif : les simulations ultérieures pourront éventuellement conduire à le reconsidérer.

9.4.2 Conclusion

Nous avons choisi l'implémentation de la fonction de structure calculée sur un élément, car les résultats obtenus sont assez proches des résultats en maillages structurés, la pente du spectre étant très proche de $-5/3$. Nous considérons que nos résultats en THI avec le modèle de la fonction de structure sont satisfaisants.

9.5 Modèle sélectif de la fonction de structure en maillages non structurés

Nous allons maintenant faire une simulation avec l'adaptation présentée au chapitre précédent du modèle sélectif modifié. En effet, les modifications effectuées sur le modèle sé-

lectif avaient également pour objectif l'adaptation du modèle en maillages non-structurés : avec le modèle sélectif standard, l'angle de coupe est constant, ce qui semble difficilement applicable dans le cas de maillages totalement non structurés et inhomogènes (cf. [LES97a]).

Nous avons comparé les résultats des simulations réalisées avec la version sélective et la version non sélective. Nous utilisons pour les deux modèles l'implémentation de la fonction de structure choisie ci-dessus. Les comparaisons sont présentées sur les figures 9.28 à 9.31.

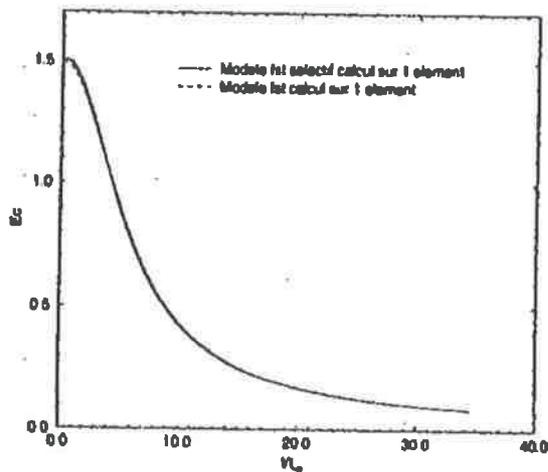


FIG. 9.28 - Evolution de l'énergie cinétique

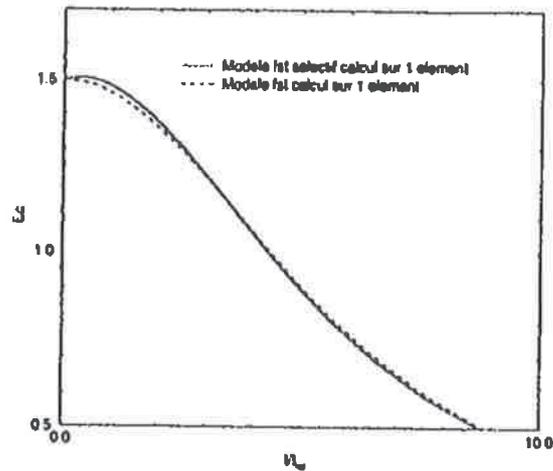


FIG. 9.29 - Evolution de l'énergie cinétique: Zoom sur les premiers instants

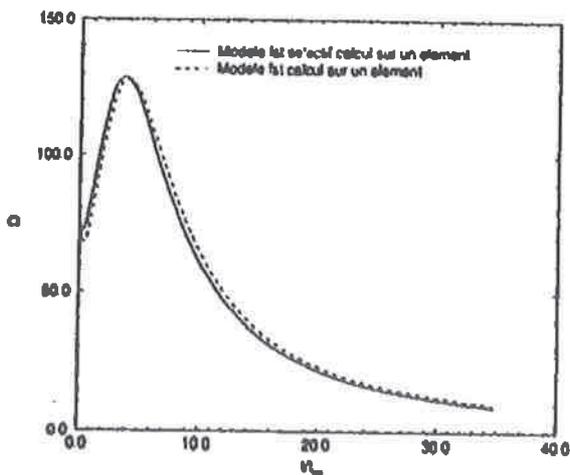


FIG. 9.30 - Evolution de l'ensrophie

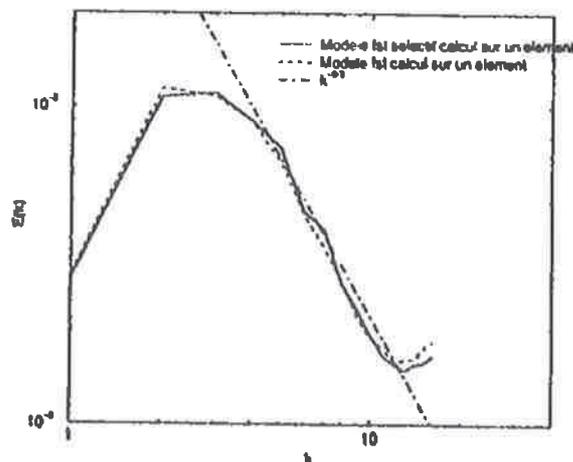


FIG. 9.31 - Spectres d'énergie cinétique

9.5.1 Analyse des résultats

Nous constatons que les différences entre les deux versions sont beaucoup moins sensibles qu'en maillages structurés, les résultats obtenus en maillages non structurés étant déjà assez proches des résultats théoriques. Nous constatons que la version sélective agit

dans le bon sens : l'énergie cinétique reste constante quelques instants et décroît ensuite, alors que la version non sélective décroît immédiatement (cf. figure 9.29).

Les différences sur l'enstrophie sont également plus faibles, mais vont également dans le bon sens : le pic d'enstrophie est plus fort pour le modèle sélectif.

Les différences sur les spectres sont vraiment très faibles : les pentes sont très proches de $-5/3$.

9.5.2 Conclusion

Nous avons vu que les différences entre la version sélective et non sélective ne sont pas très grandes en maillages non structurés sur le cas de la THI. Il faudra la tester dans le cas du canal plan, pour voir si les différences sont plus marquées et poursuivre la réflexion sur son adaptation aux maillages non structurés et aux géométries complexes.

9.6 Remarque sur les schémas numériques choisis

Les simulations présentées ci-dessus nous ont permis de choisir des méthodes numériques, qui nous permettent de simuler la THI, avec les différents modèles testés, de façon satisfaisante. Nous allons, à partir de maintenant, réaliser tous les calculs avec le schéma Mac Cormack ou Prédicteur Correcteur et la forme interpolée avec $\alpha = 2$ du schéma alternant.

Il existe cependant d'autres schémas qui n'ont pas été testés ici et qui font l'objet d'études. En particulier, S. Benhamadouche (cf. [BL00]), en changeant la méthode de résolution et la façon d'écrire les différents termes des équations, a obtenu un schéma numérique permettant de conserver l'énergie cinétique sans diffusion. Sur le cas de la THI avec modèle sous-maille, les résultats sont un peu plus éloignés des simulations en maillages structurés que les nôtres, c'est pourquoi ce travail se poursuit actuellement.

Pour finir, nous voudrions insister sur le fait que la discrétisation en maillages structurés, inspirée de la Méthode *Marker and Cell* ([HW65]) a de nombreuses propriétés, qui cadrent très bien avec nos exigences. Retrouver une discrétisation aussi exceptionnelle en maillages non structurés paraît être une tâche ardue, mais à laquelle certaines personnes s'attellent (S. Salmon et F. Dubois [SAL99]).

9.7 Conclusion

Nous avons déterminé une méthode numérique qui nous permet d'avoir des résultats de simulations de THI satisfaisants. De plus, nous avons choisi une façon d'implémenter le modèle de la fonction de structure en maillages non structurés, qui semble donner de bons résultats. Nous avons également testé le modèle de Smagorinsky, pour lequel la pente calculée est un petit peu trop forte. Ces résultats sont proches de ceux obtenus en maillages structurés. Nous considérons donc que nous parvenons à simuler convenablement la Turbulence Homogène Isotrope.

Chapitre 10

Canal en maillages non structurés

Nous allons maintenant présenter les simulations de canal plan, réalisées en maillages non structurés, avec adhérence et avec loi de paroi. Nous allons ainsi pouvoir, comme en maillages structurés, vérifier le bon comportement à la paroi et nous donner une première idée de la fiabilité de notre outil. Nous comparerons avec les résultats obtenus en maillages structurés, puisque les simulations effectuées ont les mêmes paramètres.

10.1 Choix des schémas numériques

Nous avons réalisé les simulations de TH1 avec le schéma Prédicteur Correcteur en temps et la forme interpolée avec $\alpha = 2$ du schéma alternant pour la convection, car les différences entre celui-ci et le schéma Mac Cormack et alternant interpolé ($\alpha = 2$) étaient négligeables alors que les temps de calculs étaient inférieurs. Nous avons donc réalisé les premières simulations de canal plan avec ces mêmes schémas numériques : cela a conduit à la divergence du calcul. Nous avons alors testé le schéma Mac Cormack et alternant interpolé ($\alpha = 2$) : ces simulations n'ont pas divergé. Les simulations présentées ci-dessous sont donc réalisées avec le schéma Mac Cormack et alternant interpolé ($\alpha = 2$), où nous projetons la vitesse à chaque sous-pas de temps sur l'espace à divergence nulle : le système en pression est résolu à chaque sous-pas de temps. Ceci semble indispensable pour ne pas faire diverger la simulation.

10.2 Simulation avec condition d'adhérence

10.2.1 Maillage

Afin de pouvoir appliquer une condition d'adhérence, nous allons procéder comme en maillages structurés, i.e. utiliser un maillage en tangente hyperbolique. Nous utilisons pour cela le mailleur interne. Chaque hexaèdre est ensuite découpé en 40 tétraèdres relativement homogène (plus homogène que le découpage en 6). Nous présentons une coupe à z constant de ce maillage sur la figure 10.1.

10.2.2 Caractéristiques des simulations présentées

Nous utilisons comme champ initial le champ de vitesse obtenu à la fin du calcul correspondant en maillages structurés (calcul 1 chapitre 7). Ceci permet de réduire les coûts de calcul, puisque cela supprime toute la phase de déstabilisation. Il faut vérifier ensuite que l'on atteint à nouveau un état statistiquement stationnaire, ce qui est fait en contrôlant la convergence des statistiques calculées. Leur calcul est décrit au chapitre 5. La conservation du débit est imposée comme en maillages structurés, à l'aide d'un

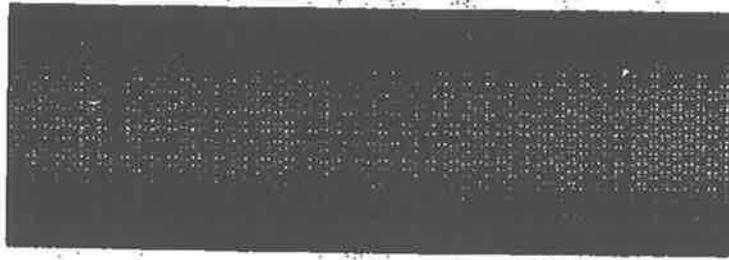


FIG. 10.1 - Maillage du canal généré par le mailleur interne

terme source (cf. Annexe D). Le modèle sous-maille utilisé est le modèle de la fonction de structure calculée sur un élément (version non sélective).

Les caractéristiques de la simulation sont résumées dans le tableau suivant.

Cas n	Re	h^+	Dimension	Nb éléments
1	5000	197	$(2\pi h, 2h, \pi h)$	595 200

Les statistiques de la simulation présentées ci-dessous ne sont pas tout à fait convergées : il est nécessaire de poursuivre le calcul pour atteindre la convergence. En particulier, nous ne savons pas si nous avons totalement perdu l'influence de la condition initiale.

10.2.3 Analyse statistique de la simulation

Nous présentons le profil de vitesse longitudinal et les écart-types sur les figures 10.2 et 10.3.

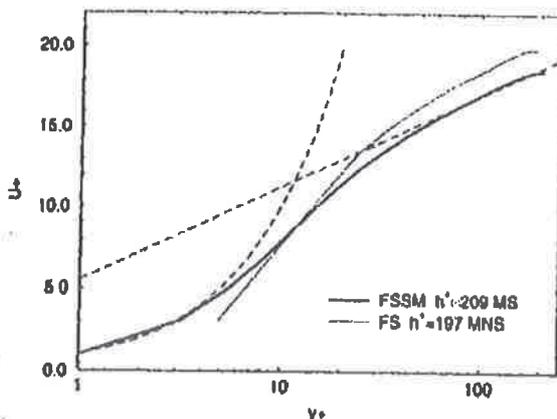


FIG. 10.2 - Profils de la vitesse adimensionnée: Maillages non structurés vs. Maillages structurés

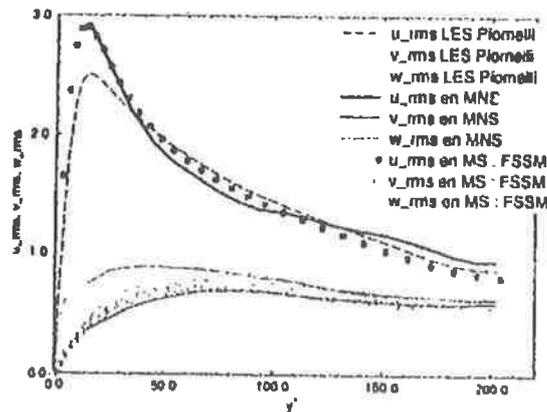


FIG. 10.3 - Profils des écart-types de la vitesse adimensionnés: Maillages non structurés vs. Maillages structurés

La vitesse moyenne longitudinale

Le profil moyen de vitesse longitudinale est légèrement au-dessus (1.5 unités) de celui obtenu en maillages structurés (cf. figure 10.2), proche des résultats de référence de U. Piomelli ([PIO93]). Nous utilisons le modèle *non sélectif* de la fonction de structure, ce qui explique certainement les différences observées.

Les écart-types

La non convergence des statistiques est constatable sur l'allure des écart-types (figure 10.3), en particulier sur celle de u_{rms} . Néanmoins, les écart-types sont assez proches de ceux calculés en maillages structurés: les valeurs de v_{rms} et w_{rms} sont légèrement plus faibles dans la zone de paroi et proche des résultats de référence au centre du canal. Comme nous l'avons dit en maillages structurés, les erreurs des méthodes numériques ont beaucoup d'influence sur la prédiction des écart-types; or en maillages non structurés, l'ordre des méthodes est beaucoup plus complexe à évaluer et la déstructuration des maillages diminue leur ordre. La précision sur les écart-types est par conséquent plus faible en maillages non structurés qu'en maillages structurés.

10.2.4 Conclusion

Les résultats présentés sont encourageants, conformes à ceux attendus avec un modèle sous-maille non sélectif: il serait nécessaire de tester le modèle sélectif sur cette configuration. Pour conclure définitivement, il faut néanmoins attendre la convergence des statistiques.

10.3 Simulation avec loi de paroi

Nous allons tester la loi de paroi de Werner et Wengle en maillages non structurés. De plus, nous allons étudier l'influence de la non structuration du maillage, en comparant les résultats obtenus avec un maillage généré par le mailleur interne et un autre généré par le mailleur ICEM, ainsi que l'influence de l'implémentation de l'opérateur de diffusion turbulente.

10.3.1 Maillage

Nous présentons ici les deux maillages:

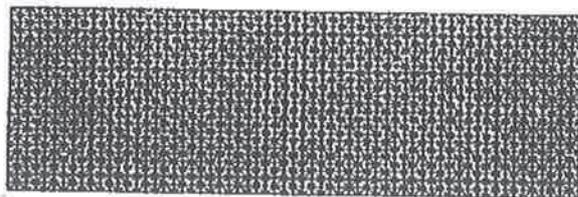


FIG. 10.4 - Maillage généré par le mailleur interne

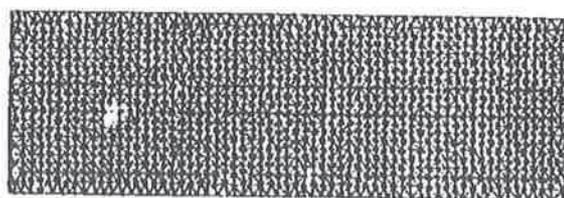


FIG. 10.5 - Maillage généré par ICEM

10.3.2 Caractéristiques des simulations présentées

Comme pour la simulation avec adhérence, nous prenons, comme condition initiale, le champ de vitesse final d'une simulation en maillage structuré ayant 20 mailles selon y et utilisant la loi de Werner et Wengle (simulation 8 chapitre 7). Pour les deux simulations présentées, nous utilisons la loi de Werner et Wengle et le modèle non sélectif de la fonction de structure calculée sur un élément.

Nous résumons les caractéristiques des simulations dans le tableau 10.1.

Pour ces simulations également, les statistiques ne sont pas encore totalement convergées.

Cas n	Re	h^+	Dimension	Nb elts	Mailleur
2	10935	454	$(2\pi h, 2h, \pi h)$	223 200	Interne
3	10935	47	$(6.28h, 2h, 3.14h)$	257 070	ICEM

TAB. 10.1 – Simulations avec loi de paroi en maillages non structurés

10.3.3 Identification d'un problème lié à l'opérateur de diffusion turbulente

En réalisant ces simulations, nous avons identifié un problème provenant de l'implémentation de l'opérateur de diffusion turbulente, en particulier du terme transposée (cf. expression 10.1). Cela se traduit par un niveau très élevé des valeurs des écart-types.

$$T_{D_{ij}} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.1)$$

Solution "provisoire" trouvée

Nous avons choisi une autre formulation pour ce terme pour tenter d'éliminer ce problème : nous ne tenons compte uniquement de la viscosité turbulente pour le terme transposée (cf. expression 10.2).

$$T_{D_{ij}} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \nu_t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (10.2)$$

Explication proposée

Ces problèmes proviennent probablement de la non-conformité : elle introduit des sauts de gradient transposée aux faces des éléments, ce qui entraîne de fortes oscillations de la vitesse qui se répercute sur les moments de second ordre.

10.3.4 Analyse statistique des simulations

Nous adimensionnons nos résultats par U_c , vitesse au centre du canal du profil parabolique initial, pour la vitesse et par h , demi-hauteur du canal, pour les longueurs au vu de la faible précision des simulations sur les moments de second ordre. Or, la vitesse de frottement u_τ est déterminé à l'aide de $\overline{u'v'}$ et sa détermination est donc difficile. Nous présentons les statistiques des simulations 2 et 3 sur les figures 10.6 à 10.9.

La vitesse moyenne longitudinale

Au centre du canal, les vitesses longitudinales moyennes calculées en maillages non structurés sont assez proches de celle obtenue en maillages structurés. Par contre, les profils de vitesse des simulations en maillages non structurés sont plus proches d'un profil parabolique, signe d'une sous-estimation de la turbulence pariétale. Ceci provient probablement de l'utilisation d'un modèle sous-maille non sélectif.

Les écart-types

Nous constatons de grandes différences entre les trois simulations pour les écart-types. Pour u_{rms} , nous pouvons néanmoins reconnaître l'allure attendue, mais les niveaux sont beaucoup plus élevés. Pour v_{rms} et w_{rms} , nous ne reconnaissons même plus leur allure et il y a également de grandes différences entre les deux simulations réalisées en maillages non structurés.

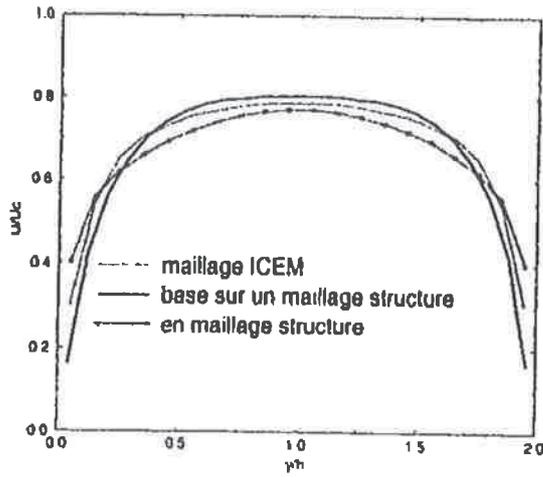


FIG. 10.6 - Profils de la vitesse adimensionnée

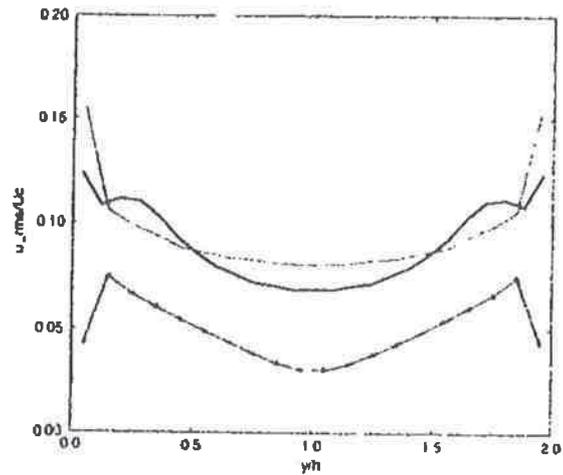


FIG. 10.7 - Profils de u_{rms}

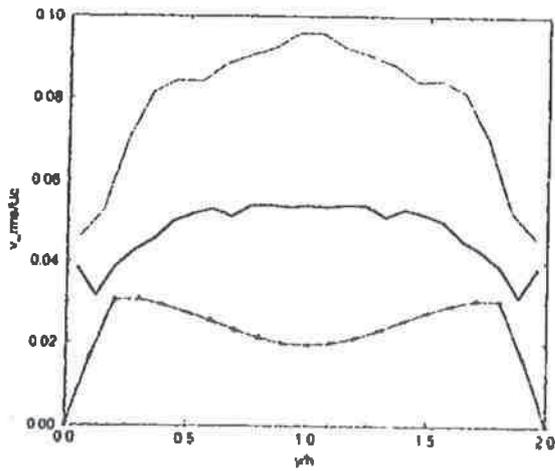


FIG. 10.8 - Profils de v_{rms}

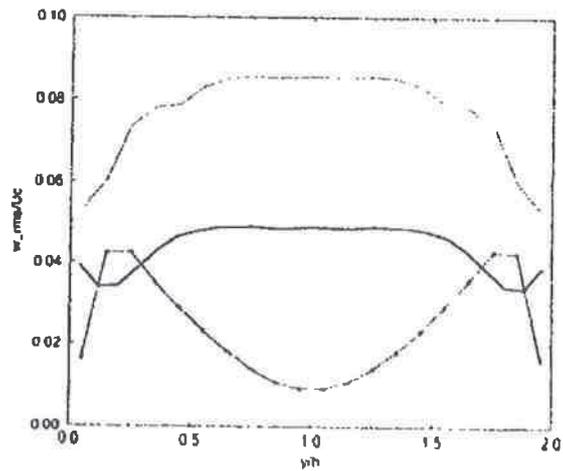


FIG. 10.9 - Profils de w_{rms}

Avec le maillage "vraiment non structuré", i.e. la simulation 3 réalisée avec un maillage issu du mailleur ICEM, les valeurs de v_{rms} au centre sont environ deux fois plus grandes que celles obtenues lors de la simulation 2, qui sont elle-même deux fois plus grandes que celles obtenues en maillages structurés. La non-structuration du maillage augmente donc l'erreur faite sur la prédiction des écart-types, en particulier pour v_{rms} et w_{rms} .

Conclusion

Nous avons constaté plusieurs différences par rapport à nos simulations réalisées en maillages structurés: pour le profil de vitesse moyenne longitudinale, les prédictions sont assez bonnes, les différences résultant probablement de l'utilisation d'un modèle sous-maille non sélectif. Par contre, pour les écart-types, il y a de grandes différences, en particulier pour v_{rms} et w_{rms} : ceci semble provenir de l'implémentation de l'opérateur de diffusion turbulente ainsi que de la non-structuration du maillage. Il est donc indispensable de poursuivre la recherche d'une implémentation du terme transposé présent dans l'opérateur de diffusion turbulente.

10.4 Conclusion

Avant de conclure définitivement à propos de ces simulations, il faudrait les poursuivre jusqu'à convergence des statistiques.

A ce stade, la simulation avec condition d'adhérence donne des résultats encourageants, mais il semble subsister quelques problèmes pour les simulations avec loi de paroi, résultant probablement de l'implémentation de l'opérateur de diffusion turbulente. Il serait également intéressant de réaliser ces simulations avec l'adaptation du modèle sélectif modifié. De plus, il est également possible qu'un certain nombre de problème proviennent de ceux soulignés au chapitre 8 concernant l'implémentation des lois de paroi en maillages non structurés: il serait donc intéressant de réaliser cette simulation à l'aide d'un maillage composé d'hexaèdres, ce qui sera bientôt possible avec PRICELES. Cela correspondra en fait à un maillage structuré: les résultats devraient ainsi être améliorés et l'implémentation des lois de paroi testées.

Conclusion

Le but de ce travail était de développer et de valider les différents éléments nécessaires à la réalisation de Simulations des Grandes Echelles en maillages structurés et non structurés avec le code PRICELES, dédié à l'étude des écoulements dans des dispositifs industriels.

Pour atteindre cet objectif, nous avons choisi une démarche systématique, originale dans un contexte industriel. En effet, nous nous sommes intéressés à des configurations assez éloignées des préoccupations pratiques des industriels, mais permettant une étude minutieuse des différents paramètres et une validation fine des méthodes numériques et des modèles employés. La THI et le canal plan turbulent sont des cas académiques élémentaires et bien documentés, permettant le test des différentes méthodes employées : les méthodes numériques, en particulier le schéma en temps et le schéma de convection, les modèles sous-maille et la modélisation de la zone de proche paroi. Nous avons ainsi réalisé la simulation de ces deux cas tests, tout d'abord en maillages structurés, puis en maillages non structurés.

La simulation de la THI nous a permis de mettre en avant la nécessité d'utiliser des méthodes numériques non dissipatives pour la SGE. Nous avons choisi d'utiliser le schéma en temps Runge Kutta d'ordre 3 et le schéma Centré d'ordre 2 pour la convection. Nous avons montré que sans dissipation physique, l'énergie cinétique est conservée. Cela nous a permis d'étudier isolément la dissipation des modèles sous-maille, et nous a amené à :

- élaborer un nouveau modèle sélectif de la fonction de structure, basé sur la version originale du modèle sélectif, à partir de considérations théoriques. Ce modèle a permis de simuler avec succès le cas de la THI et de réaliser une simulation satisfaisante de l'expérience de turbulence de grille de Comte-Bellot et Corrsin.
- Nous avons également comparé ces résultats avec des simulations réalisées avec le modèle de Smagorinsky dynamique et avec des simulations plus précises. Le résultat est encourageant pour le modèle sélectif modifié, pour les méthodes numériques utilisées et donc pour le code dans son ensemble.

Nous nous sommes alors intéressés au cas du canal plan turbulent : avec ce cas test, nous ajoutons les difficultés liées à la présence de paroi, le bon traitement de la paroi étant primordial dans le cadre de simulation d'écoulements dans des dispositifs industriels à géométrie complexe. Nous avons réalisé des simulations de canal plan turbulent avec condition d'adhérence à la paroi : nous avons ainsi pu démontrer l'amélioration apportée par notre nouveau modèle sélectif. Ce modèle nous permet d'obtenir une vitesse moyenne longitudinale très proche des résultats de référence de U. Piomelli, réalisés avec des méthodes pseudo-spectrales. Par contre, au cours de ces simulations, nous avons également montré les limites des méthodes numériques employées, en particulier pour la prédiction des écart-types : nos méthodes d'ordre 2 semblent être le facteur limitant pour l'amélioration des prédictions de ces grandeurs, car elles occultent les effets du modèle sélectif modifié, mais ces erreurs sont tout de même acceptables.

Comme dans un contexte industriel, il est impossible de résoudre finement la zone de proche paroi, nous nous sommes intéressés aux lois de paroi. Nous avons réalisé des simu-

lations avec différentes lois de paroi, proposées pour la SGE, en particulier avec la loi de Grötzbach, la loi "décalée" de Piomelli et la loi de Werner et Wengle. Nous avons obtenu des résultats très proches des simulations de référence de E. Lamballais, malgré le faible nombre de points dans la direction perpendiculaire aux parois. La loi de Werner et Wengle a donné les meilleurs prédictions des différentes grandeurs statistiques, tout en présentant les mêmes biais sur les écart-types, que lors des simulations avec adhérence. Nous avons alors choisi d'étudier la loi de paroi de Werner et Wengle, puisqu'elle a l'avantage d'être utilisable en maillages non structurés ainsi que dans des configurations où se produisent des recirculations. Avec seulement dix mailles dans la direction perpendiculaire aux parois, les prédictions des différentes grandeurs sont satisfaisantes. De plus, même en utilisant des lois de paroi, l'effet des modèles sous-maille se fait sentir; en particulier l'utilisation des modèles sélectifs conduit à de meilleurs résultats.

Après ces deux étapes en maillages structurés, nous sommes passés aux maillages non structurés, en adoptant la même démarche progressive, la déstructuration apportant des difficultés supplémentaires, en particulier au niveau du choix des méthodes numériques et de la représentation de la zone de proche paroi. La difficulté majeure de ce travail a été de trouver une méthode numérique stable et non dissipative: pour ces études, nous avons réalisé des simulations de Turbulence Homogène Isotrope sans dissipation physique. La simulation de la THH a ensuite permis de choisir une implémentation de la fonction de structure en maillages non structurés, ainsi que celle du modèle sélectif modifié, les résultats obtenus étant satisfaisants. Nous avons alors simulé l'écoulement dans un canal plan turbulent: avec condition d'adhérence, les résultats sont encourageants; avec loi de paroi, nous avons montré la nécessité de poursuivre le travail sur l'implémentation de l'opérateur de diffusion turbulente en maillages non structurés et l'influence à la non structuration du maillage. De plus, il serait intéressant de réaliser ces deux simulations avec le modèle sélectif modifié.

Nous avons maintenant un outil performant permettant de réaliser des SGE en maillages structurés et un premier outil satisfaisant pour les SGE en maillages non structurés. Les configurations étudiées, à priori éloignées des préoccupations industrielles, permettent des validations élémentaires d'un code industriel, indispensables avant d'aborder l'étude d'écoulements dans des dispositifs complexes. Cet outil peut maintenant permettre la réalisation de simulations pour des configurations, où les possibilités d'appréhender les phénomènes qui y ont lieu n'existent pas ou sont trop coûteuses.

Perspectives Ceci est une première étape nécessaire dans l'élaboration d'un outil industriel fiable. Des simulations d'écoulements dans des dispositifs industriels sont actuellement en cours; leurs résultats seront confrontés à des mesures expérimentales, si elles sont disponibles.

Il faut maintenant poursuivre le travail sur:

- les méthodes numériques (schéma de convection et schéma en temps,
- l'implémentation de l'opérateur de diffusion turbulente,
- l'adaptation du nouveau modèle sélectif aux maillages non structurés et à des géométries complexes.

Pour ce dernier point, nous avons mis en valeur que le comportement du modèle sous-maille à la paroi est très important: pour l'adapter à des géométries complexes, il faut tenir compte de la diminution des longueurs caractéristiques à l'approche de la paroi. Ceci peut être réalisé de manière similaire à celle utilisée lors de l'adaptation à la configuration du canal plan: il suffit de donner une expression de l'échelle intégrale de la turbulence à la paroi.

Il serait également intéressant d'implémenter des modèles sous-maille dynamiques, mais cela pose alors le problème du filtre test en maillages non structurés avec une formulation non conforme. C'est surtout ce dernier point qui pose problèmes pour mettre en place un filtre test performant. Un changement d'élément fini est actuellement à l'étude, pour tenter de résoudre conjointement les différents problèmes : implémentation de l'opérateur de diffusion turbulente, filtre test ...

Bibliographie

- [BAR00] BARRE F. - TRIO-U : Incompressible single phase flow module for newtonian fluids. - Rapport technique, CEA - GRENOBLE, 2000.
- [BBP96] BALARAS E., BENOCCI C. et PIOMELLI U. - Two layer approximate boundary conditions for Large-Eddy Simulations. *AIAA Journal*, vol. 34, n° 6, June 1996.
- [BCE97] BARSAMIAN H., CUETO O. et EMONOT P. - Application of the Dynamic Subgrid Scale Model to TRIO-U. - Note Technique SMTH/LATA n° 97-23, CEA/GRENOBLE, Décembre 1997.
- [BEL99] BIEDER U., EMONOT P. et LAURENCE D. - PRICELES : Summary of the Numerical Scheme. - Note Technique SMTH/LATA n° 98-50, CEA/GRENOBLE, Mars 1999.
- [BET97] BETIN S. - Implémentation de schémas numériques et de modèles de turbulence en volumes éléments finis dans le logiciel Trio Unitaire. - Juillet 1997. Mémoire de DESS de Modélisation Mécanique et Analyse Numérique (Université de Poitiers).
- [BH00] BERNARDI C. et HECHT F. - More pressure in the finite element discretization of the Stokes problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 34, n° 5, Septembre-Octobre 2000, pp. 953-980.
- [BL00] BENHAMADOUCHIE S. et LAURENCE D. - Conservation globale de l'énergie cinétique sur maillages non-structurés : Application à la Simulation des Grandes Echelles (LES). - Rapport technique, EDF RD, MFTT, 2000.
- [BRI99] BRIAND E. - Dynamique des structures cohérentes en couche limite transitionnelle et turbulente étudiée par Simulation des Grandes Echelles. - Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.
- [CB63] COMTE-BELLOT G. - Contribution à l'étude de la turbulence de conduite. - Thèse, Université de Grenoble, 1963.
- [CBC71] COMTE-BELLOT G. et CORRSIN S. - Simple eulerian time correlation of full-and narrow-band velocity signals in grid-generated 'isotropic' turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 48, n° 2, 1971, pp. 273-337.
- [CFR79] CLARK R., FERZIGER J. et REYNOLDS W. - Evaluation of the subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 91, 1979, pp. 1-16.
- [CHO85] CHOLLET J. P. - Two point closure used for a subgrid scale model in large eddy simulations. In: *Turbulent Shear Flows*. pp. 62-72. - Springer.
- [DAV93] DAVID E. - Modélisation des Ecoulements Compressibles et Hypersoniques : Une approche instationnaire. - Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993.
- [dBKR98] de BRUYN KOPS S. M. et RILEY J. J. - Direct numerical simulation of laboratory experiments in isotropic turbulence. *Phys. fluids*, vol. 10, n° 9, 1998.

- [DCL96] DUCROS F., COMTE P. et LESIEUR M. - Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary-layer developing spatially over a flat plate. *J. Fluid Mech.*, vol. 326, 1996, pp. 1-36.
- [DEA70] DEARDORFF J. - A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, vol. 41, n° 2, 1970, pp. 453-480.
- [DUB00] DUBIEF Y. - Simulation des Grandes Echelles de la turbulence de la région de proche paroi et des écoulements décollés. - Thèse, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2000.
- [DUC95] DUCROS F. - Simulations Numériques Directes et des Grandes Echelles de couches limites compressibles. - Thèse, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1995.
- [EMO92] EMONOT P. - Méthodes de Volumes Eléments finis : Application aux Equations de Navier-Stokes et Résultats de convergence. - Thèse, *Université Claude Bernard - LYON I*, 1992.
- [FAL94] FALLON B. - Simulation des Grandes Echelles d'écoulements turbulents stratifiés en densité. - Thèse, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1994.
- [FP97] FERZIGER J. et PERIC. - Computational method for fluid dynamics. - *Springer*, 1997.
- [GER92] GERMANO M. - Turbulence : the filtering approach. *J. Fluid Mech.*, vol. 238, 1992, pp. 325-336.
- [GEU00] GEURTS B. - How can we make les to fulfill its promise? In: *EUROMECH Colloquium 412*.
- [GLM] GOUTORBE T., LAURENCE D. et MAUPU V. - A priori test of a subgrid-scale stress tensor model including anisotropy and backscatter effects. In: *Direct and Large-Eddy simulations I*, éd. par P.R. VOKE, L. KLEISER J. C. pp. 121-131. - *Kluwer*.
- [GM95] GHOSAL S. et MOIN P. - The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry. *Journal of Computational Physics*, vol. 118, 1995, pp. 24-37.
- [GON93] GONZE M. - Simulation numérique des sillages en transition à la turbulence. - Thèse, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1993.
- [GPMC91] GERMANO M., PIOMELLI U., MOIN P. et CABOT W. - A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, vol. 3, n° 7, 1991.
- [HE01] HEIB S. et EMONOT P. - Analyse de l'élément P1 non conforme - P1 bulle introduit dans le code PRICELES. - Note Technique SMTII/LDTA - CEA Grenoble n° 2001-03, *CEA GRENOBLE*, Janvier 2001.
- [HIR90] HIRSCH C. - Numerical Computation of internal and external flows. - *WILEY*, 1990 volume 2 - Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows.
- [HNR75] HIRT C., NICHOLS B. et ROMERO N. - Sola - a numerical solution algorithm for transient flow. - Rapport technique n° LA-5852, *Los Alamos National Laboratory*, 1975.
- [HW65] HARLOW F. H. et WELCH J. E. - Numerical Calculation of Time-Dependant Viscous incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Phys. Fluids*, vol. 8, n° 12, December 1965, pp. 2182-2189.
- [KMM87] KIM J., MOIN P. et MOSER R. - Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, vol. 177, 1987, pp. 133-166.
- [KOL41] KOLMOGOROV A. - The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1941.

- [LAM96] LAMBALLAIS E. - Simulations numériques de la turbulence dans un canal plan tournant. - Thèse, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1996.
- [LEL92] LELE S. - Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, vol. 103, 1992, pp. 16-42.
- [LEO88] LEONARD B. - Simple high-accuracy resolution program for convection modelling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, 1988, pp. 1291-1318.
- [LES97a] LESIEUR M. - Etude de modèles sous-maille pour la thermohydraulique. - Rapport technique, *INPG Entreprises-SA*, 1997.
- [LES97b] LESIEUR M. - Mécanique des Fluides Approfondies et Turbulence. - Cours du DEA de Mécanique des Fluides et Transferts, *INPG*, 1997.
- [LES97c] LESIEUR M. - Turbulence in Fluids. - *Kluwer Academic Publishers*, 1997.
- [LIL92] LILLY D. - A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A*, vol. 4(3), 1992, pp. 633-635.
- [LM96] LESIEUR M. et METAIS O. - New trends in Large-Eddy Simulations of turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 28, 1996, pp. 45-85.
- [LMK94] LIU S., MENEVEAU C. et KATZ J. - On the properties of the similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in turbulent jets. *J. Fluid Mech.*, vol. 275, 1994, pp. 83-119.
- [LML98] LAMBALLAIS E., METAIS O. et LESIEUR M. - Spectral-dynamic model for large-eddy simulations of turbulent rotating channel flow. *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, vol. 12, 1998, pp. 149-177.
- [LQ96] LESLIE D. et QUARINI G. - The application of turbulence theory to the formulation of subgrid modelling procedures. *J. Fluid Mech.*, vol. 91, 1996, pp. 65-91.
- [MET97] METAIS O. - Numerical Simulation of Geophysical Turbulence. *Scientia Marina*, vol. 61, n° (Suppl.1), 1997, pp. 75-91.
- [MF80] MILLAN O. M. et FERZIGER J. - Test of new subgrid-scale models in strained turbulence. *AIAA Journal*, vol. 80, 1980.
- [MK82] MOIN P. et KIM J. - Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 118, 1982, pp. 341-377.
- [ML92] METAIS O. et LESIEUR M. - Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 239, 1992, pp. 157-194.
- [MP99] MANCEAU R. et PARNEIX S. - Computations of turbulent flows using v2f model in a finite element code. In: *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 4*. - Elsevier.
- [MW00] MERI A. et WENGLE H. - Large eddy simulation of a turbulent flow over a backward-facing step using 2nd- and higher-order discretization methods. In: *EUROMECH Colloquium 412*.
- [OSS] OSSIA S. - Validation d'un modèle de simulation des grandes échelles en turbulence homogène isotrope. - Mémoire de DEA de Mécanique des Fluides et des Transferts (ENSHMG - Grenoble) - Septembre 1997.
- [PFMK89] PIOMELLI U., FERZIGER J., MOIN P. et KIM J. - New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows. *Phys. Fluids A*, vol. 6, Juin 1989.
- [PIO93] PIOMELLI U. - High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model. *Phys. Fluids A*, vol. 5, n° 1484-1490, 1993.
- [RF86] RUDERICH R. et FERNHOLZ H. - An experimental investigation of a turbulent shear flow with separation, reverse flow, and reattachment. *J. Fluid Mech.*, vol. 163, 1986, pp. 283-322.

- [RM97] ROLLET-MIET P. - Simulation des Grandes Echelles sur maillages non-structurés pour géométries complexes. - Thèse, *Ecole Centrale de Lyon*, 1997.
- [SAG98] SAGAUT P. - Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible. - *Springer*, 1998.
- [SAL99] SALMON S. - Développement numérique de la formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de Stokes. - Thèse, *Université Pierre et Marie Curie - Paris VI*, Décembre 1999.
- [SCH75] SCHUMANN U. - Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli. *Journal of computational Physics*, vol. 18, 1975, pp. 376-404.
- [SMA63] SMAGORINSKY J. - General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weather*, vol. 91, 1963, pp. 99-164.
- [TL72] TENNEKES H. et LUMLEY J. - A first course in turbulence. - *The MIT Press*, 1972.
- [URB98] URBIN G. - Etude numérique par simulation des grandes échelles de la transition à la turbulence dans les jets. - Thèse, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1998.
- [VLM98] VASILYEV O. V., LUND T. S. et MOIN P. - A general class of commutative filters for les in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, vol. 146, 1998, pp. 82-104.
- [WIL80] WILLIAMSON J. H. - Low-Storage Runge-Kutta Schemes. *Journal of Computational Physics*, vol. 35, 1980, pp. 48-56.
- [WW91] WERNER H. et WENGLE H. - Large Eddy Simulation of Turbulent Flow over and around a cube in a plate channel. In: *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*. Technical University of Munich.
- [XCN98] XU W., CHEN Q. et NIEUWSTADT T. M. - A new turbulence model for near-wall natural convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1998.

Annexes

Annexe A

Calculs des spectres spatiaux

A.1 Principe

Nous cherchons à calculer le spectre d'énergie cinétique turbulente, défini en trois dimensions par :

$$E(k) = 2\pi k^2 \|\hat{\vec{u}}(k)\|^2 \quad (\text{A.1})$$

Il faut calculer la transformée de Fourier spatiale de la vitesse. Pour cela, nous utilisons un algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT), il est donc nécessaire de disposer des valeurs de la vitesse sur une grille homogène, et d'avoir une vitesse périodique selon les trois directions. Ce dernier point est vérifié, par contre le premier pose un problème.

A.2 En maillages structurés

Nous utilisons un maillage homogène cubique. Le seul problème vient de la discrétisation, puisque nous disposons uniquement des vitesses perpendiculaires aux faces. Les trois composantes de la vitesse se trouvent donc sur trois grilles homogènes décalées. Nous calculons la transformée de Fourier de chaque composante, et nous sommes les trois contributions pour calculer le spectre. Nous faisons l'hypothèse que le décalage n'entraîne pas de biais, puisque la sommation se fait sur tout le domaine, ou du moins un biais négligeable par rapport à celui que nous aurions si nous interpolions la vitesse aux sommets des grilles (ce qui avait été fait dans un premier temps).

$$\text{Soit } \vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix},$$

Nous avons :

$$E(k) = 2\pi \|\vec{k}\|^2 (|\hat{u}_x(k)|^2 + |\hat{u}_y(k)|^2 + |\hat{u}_z(k)|^2) \quad (\text{A.2})$$

A.3 En maillages non structurés

Pour les calculs de TH1, nous utilisons le mailleur interne, qui découpe un cube en 6 tétraèdres, afin d'avoir un maillage non structuré basé sur un maillage structuré, pour nous permettre de calculer les transformations de Fourier. Dans ce cas là, nous n'avons pas le problème du décalage des composantes, puisqu'en chaque point, nous connaissons toutes les composantes de la vitesse.

Par contre, du maillage non structuré, nous "extrayons" un maillage structuré, car là aussi nous refusons d'interpoler. Les erreurs d'interpolations seraient ici beaucoup plus grande que dans le cas précédent, du fait de la non conformité de l'élément.

La figure A.1 montre la position des points utilisés pour les calculs : nous représentons une coupe du domaine, coïncidant avec des faces du maillage, à x constant (ou y ou z constant).

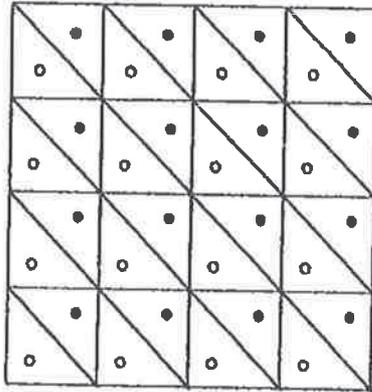


FIG. A.1 - Grille régulière pour le calcul des FFT

Nous utilisons la grille régulière constituée des points noirs (cf. figure A.1), pour faire les calculs. Nous n'utilisons qu'une faible proportion des points de calculs. Pour tenir compte de plus de points, nous constituons cette grille dans les trois directions (x , y et z constants) et nous calculons trois spectres d'énergie. Nous calculons alors la moyenne arithmétique de ces trois spectres.

Nous avons donc :

$$E(k) = \frac{1}{3} \left(E_{\text{grille } x \text{ cst}} + E_{\text{grille } y \text{ cst}} + E_{\text{grille } z \text{ cst}} \right) (k) \quad (\text{A.3})$$

Remarque concernant la simulation de l'expérience de Comte-Bellot et Corrsin : Comme nous n'utilisons pas tous les points, nous ne pouvons pas modifier le champ de vitesse, tel qu'il ait un spectre donné, c'est pourquoi la simulation de la Turbulence de Grille pose un problème supplémentaire en maillages non structurés et que nous ne l'avons pas simulée.

Annexe B

Description du modèle de viscosité turbulente spectrale dynamique

Nous comparons à plusieurs reprises nos résultats à des simulations effectuées avec le modèle de viscosité turbulente spectral (VTS) et le modèle de viscosité turbulente spectrale dynamique (VTSD). Nous avons décrit le premier au paragraphe 3.4.1 et nous allons maintenant décrire le modèle de viscosité turbulente spectrale dynamique, noté VTSD.

Ce modèle cherche à pallier un inconvénient du modèle VTS : celui-ci ne s'applique efficacement qu'au cas d'un spectre en $k^{-5/3}$ au voisinage de la coupure. En supposant un spectre en k^{-m} au voisinage de la coupure, pour $m \leq 3$, nous avons (cf. [LM96]):

$$\nu_t(k, k_c) = 0.31 \frac{5-m}{m+1} \sqrt{3-m} C_k^{-3/2} \left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \text{ pour } k \ll k_c \quad (\text{B.1})$$

Pour $m > 3$, la viscosité turbulente est prise nulle.

E. Lamballais a adapté ce modèle au cas du canal plan ([LAM96]); nous avons présenté certains de ses résultats au paragraphe 7.2.3.

Annexe C

Schémas de convection en maillages structurés

Nous allons décrire les schémas de convection testés au chapitre 6 en maillages structurés, à savoir :

- le schéma Amont
- le schéma Quick Sharp
- le schéma Centré de deuxième ordre

Nous précisons sur la figure C.1 les notations utilisées.

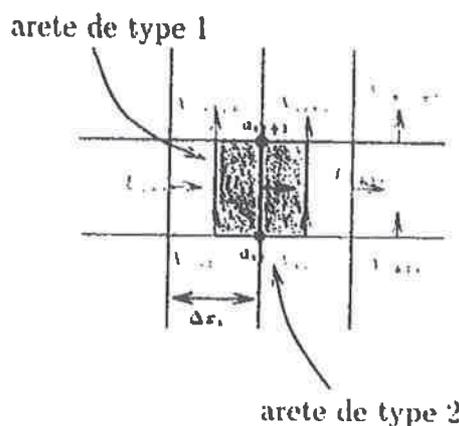


FIG. C.1 - Notations pour le calcul de la convection en VDF

Nous cherchons à évaluer les flux aux faces du volume de contrôle de la quantité de mouvement, appelées facettes. Soient S_u la surface des faces où u est discrétisée et S_v celle où v est discrétisée.

C.1 Le schéma Amont

C.1.1 Principe

Nous évaluons le flux aux facettes à l'aide du flux convectif dit amont, en se basant sur le sens de l'écoulement.

C.1.2 Implémentation

Nous décrivons le calcul du flux convectif pour la première composante de la vitesse, le calcul étant semblable pour les autres composantes avec des volumes de contrôle différents.

Pour les facettes de type 1

Afin de déterminer le sens de l'écoulement, nous évaluons $\vec{u} \cdot \vec{n}$ à la facette, calculé de façon centrée.

$$psc = (\vec{u} \cdot \vec{n})_{|_{\Delta\tau}} = 0.5 (u_{i-1j} + u_{ij}) 0.5 (Su_{i-1j} + Su_{ij}) \quad (C.1)$$

On détermine la face *amont* selon le signe du produit scalaire psc :

$$\int_{\Delta\tau} (\vec{u} \cdot \vec{n}) u ds = \begin{cases} psc \times u_{i-1j} & \text{si } psc \geq 0. \\ psc \times u_{ij} & \text{si } psc < 0. \end{cases} \quad (C.2)$$

Pour les facettes de type 2, par exemple pour a_{ij+1}

Nous calculons le produit scalaire pour déterminer le sens de l'écoulement :

$$psc = (\vec{v} \cdot \vec{n})_{|_{\Delta\tau}} = 0.5 (v_{i-1j+1} + v_{ij+1}) 0.5 (Sv_{i-1j+1} + Sv_{ij+1}) \quad (C.3)$$

Nous avons alors :

$$\int_{\Delta\tau(a_{ij+1})} (\vec{v} \cdot \vec{n}) u ds = \begin{cases} psc \times u_{ij} & \text{si } psc \geq 0. \\ psc \times u_{ij+1} & \text{si } psc < 0. \end{cases} \quad (C.4)$$

Ce schéma est du premier ordre: il est diffusif, son erreur de troncature ressemblant à un flux diffusif ([FP97]).

C.2 Le schéma Quick-Sharp

Le schéma Quick ([LEO88]) consiste en une interpolation quadratique sur trois points (2 points amont et un point aval). L'interpolation combine une interpolation linéaire des points voisins où on cherche à évaluer le flux (u_{i-2j} et u_{i-1j}) et un terme de courbure défini sur les voisins amont et aval :

$$u_{|_{\Delta\tau}} = \frac{1}{2} (u_{i-2j} + u_{i-1j}) - \frac{1}{8} \Delta x_i^2 CURV \quad (C.5)$$

$$CURV = \frac{\frac{u_{ip} - u_{ip-1}}{\Delta x_{ip}} - \frac{u_{ip-1} - u_{ip-2}}{\Delta x_{ip-1}}}{\Delta x_{ip-1}^2} \quad (C.6)$$

$$\text{avec : } ip = \begin{cases} i-1 & \text{si } u_{|_{\Delta\tau}} \geq 0. \\ i & \text{si } u_{|_{\Delta\tau}} < 0. \end{cases} \quad (C.7)$$

Cet algorithme, base du schéma Quick, peut faire apparaître des oscillations numériques: un limiteur est utilisé pour les éliminer; dans notre cas, c'est le limiteur "Sharp" (cf. [LEO88], [FAL94]). Ce schéma est du troisième ordre; il est dissipatif.

C.3 Le schéma Centré de second ordre

C.3.1 Principe

Nous évaluons le flux aux facettes de façon centrée. Nous l'avons introduit pour remplacer le schéma Quick-Sharp, jugé trop dissipatif pour nos applications. Il est testé au chapitre 6 et utilisé pour tous les calculs en maillages structurés.

C.3.2 Implémentation

Nous décrivons le calcul du flux convectif pour la première composante de la vitesse, le calcul étant semblable pour les autres composantes avec des volumes de contrôle différents.

Pour les facettes de type 1

$$\int_{f_{a7}} (\vec{u} \cdot \vec{n}) u ds = 0.5 (u_{i-1j} + u_{ij}) 0.5 (u_{i-1j} + u_{ij}) 0.5 (S u_{i-1j} + S u_{ij}) \quad (C.8)$$

$$= 0.125 (u_{i-1j} + u_{ij})^2 (S u_{i-1j} + S u_{ij}) \quad (C.9)$$

Pour les facettes de type 2, par exemple pour a_{ij+1}

Nous avons alors :

$$\int_{f_{a7(a_{ij+1})}} (\vec{u} \cdot \vec{n}) u ds = 0.5 (u_{ij} + u_{ij+1}) 0.5 (v_{i-1j+1} + v_{ij+1}) 0.5 (S v_{i-1j+1} + S v_{ij+1}) \quad (C.10)$$

$$= 0.125 (u_{ij} + u_{ij+1}) (v_{i-1j+1} + v_{ij+1}) (S v_{i-1j+1} + S v_{ij+1}) \quad (C.11)$$

Ce schéma est un schéma centré du second ordre. L'erreur est du deuxième ordre si le maillage utilisé est régulier et homogène ($\Leftrightarrow \Delta x = \Delta y = \Delta z$).

Annexe D

Détermination de la force de volume

Nous réalisons des simulations temporelles de l'écoulement dans un canal plan turbulent. Nous imposons donc une condition de périodicité dans la direction de l'écoulement, ce qui implique la périodicité de la pression. Or, le gradient de pression longitudinal est le moteur de cet écoulement : il est nul dans notre cas, du fait de la périodicité. Une des possibilités est de le remplacer par une force de volume.

D.1 Force de volume : Gradient de pression moteur "simulé"

Le gradient de pression simulé va nous permettre de garder le débit constant au cours du temps.

Pour un écoulement en canal plan, considéré comme statistiquement stationnaire, le gradient de pression longitudinal est constant. Pour le compenser, il suffit alors d'introduire une force de volume selon la direction longitudinal.

Nous résoudrons alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + f_v(t) \quad (D.1)$$

En évaluant les contributions des différents termes de l'équation, nous obtenons :

$$f_v(t) = \frac{\partial}{\partial t} (vit_{deb}) + \frac{1}{h} \frac{\tau_p}{\rho} \quad (D.2)$$

Or $\tau_p = \rho u^{*2}$.
d'où :

$$f_v(t) = \frac{\partial}{\partial t} (vit_{deb}) + \frac{u^{*2}}{h} \quad (D.3)$$

Nous utilisons l'expression donnée par P. Rollet-Miet (cf. [RM97]). Le terme source est alors le suivant :

$$f_v(t_{n+1}) = f_v(t_n) + \frac{2(Q_{ref} - Q(t_n)) - (Q_{ref} - Q(t_{n-1}))}{\Delta t S} \quad (D.4)$$

où :

$$f_v(t_0) = \frac{u^{*2}}{h} \quad (D.5)$$

Nous représentons ci-dessous l'évolution de la force de volume et du terme $f_v(t_{n+1}) - f_v(t_n)$ (figures D.1 et D.2), ainsi que celle du débit (figures D.3 et D.4) au cours de la simulation de canal plan turbulent avec la loi de Werner et Wengle et le modèle sélectif modifié de la fonction de structure (calcul 5 du chapitre 7).

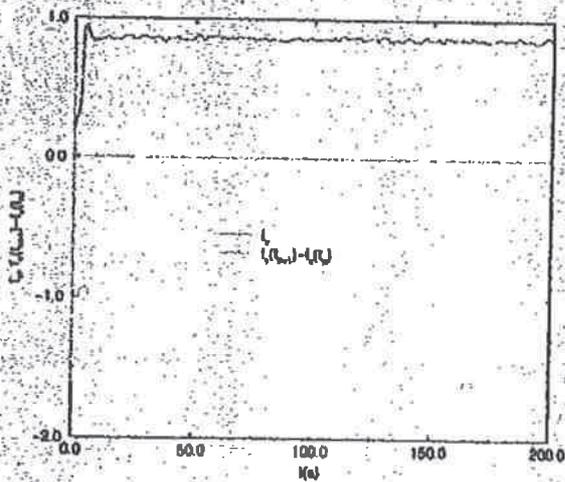


FIG. D.1 - Evolution de la force de volume et du terme $f_v(t_{n+1}) - f_v(t_n)$.

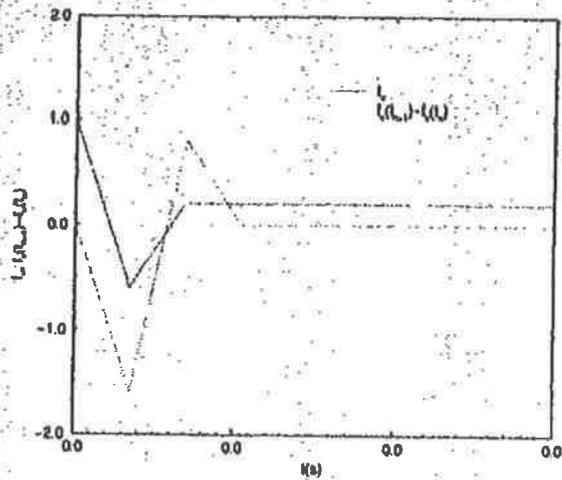


FIG. D.2 - Evolution de la force de volume et du terme $f_v(t_{n+1}) - f_v(t_n)$: Zoom aux premiers instants

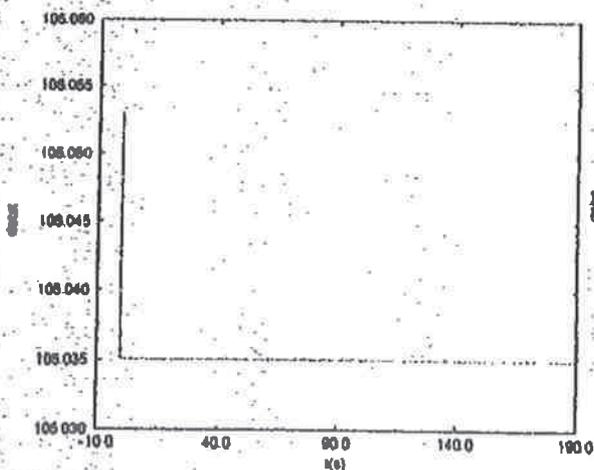


FIG. D.3 - Evolution du débit

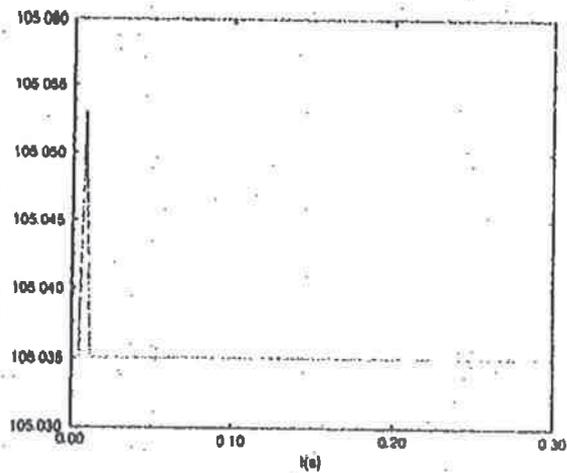


FIG. D.4 - Evolution du débit: Zoom aux premiers instants

Annexe E

Adimensionnalisation des résultats

Nous rappelons la définition des paramètres utilisés pour caractériser les différentes simulations. Nous utilisons le nombre de Reynolds basé sur la vitesse au centre du profil parabolique initial et celui basé sur la vitesse de frottement.

$$Re = \frac{U_c h}{\nu} \quad (\text{E.1})$$

$$h^+ = \frac{u_* h}{\nu} \quad (\text{E.2})$$

Les résultats des simulations de canal plan sont présentés en fonction des unités de paroi. Nous adimensionnons la vitesse par u_* et les distances par $\frac{\nu}{u_*}$.

La détermination de u^* est très importante, car une erreur sur u_* a beaucoup d'influence, puisqu'il intervient, lorsque l'on présente des profils adimensionnés, à la fois dans l'abscisse et dans l'ordonnée.

E.1 Détermination de u_*

E.1.1 La définition

Le définition de u_* est :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (\text{E.3})$$

Dans les cas où le premier point n'est pas dans la sous-couche visqueuse, il est difficile d'utiliser cette expression pour déterminer u_* , c'est pourquoi nous avons recherché d'autres moyens.

E.1.2 Retour aux équations moyennées

Pour un canal entre deux plaques planes, d'envergure infinie, dont on suppose l'écoulement moyen stationnaire (cf. [TL72]), nous pouvons simplifier l'équation de quantité de mouvement pour la composante longitudinale de la vitesse, comme suit :

$$\langle -u'v' \rangle + (\nu + \nu_t) \frac{d\langle \bar{U} \rangle}{dy} = u_*^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (\text{E.4})$$

Nous calculons le terme de gauche de l'équation ci-dessus. Nous pouvons alors déterminer u_* par la méthode des moindres carrés, puisque la pente, au centre du canal, est : $-\frac{u_*^2}{h}$.

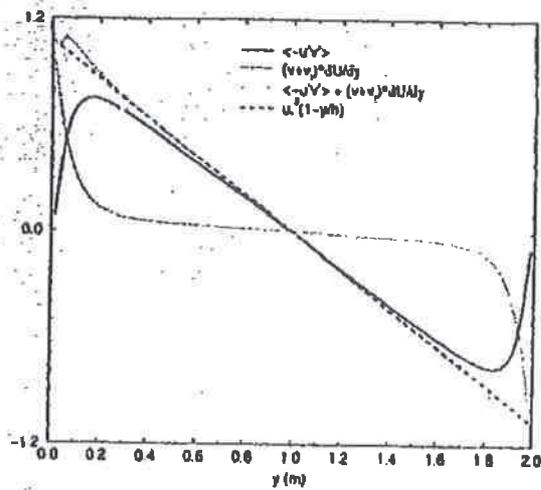


FIG. E.1 - Différents termes de l'équation E.4 pour la simulation 1 du chapitre 7 (condition d'adhérence)

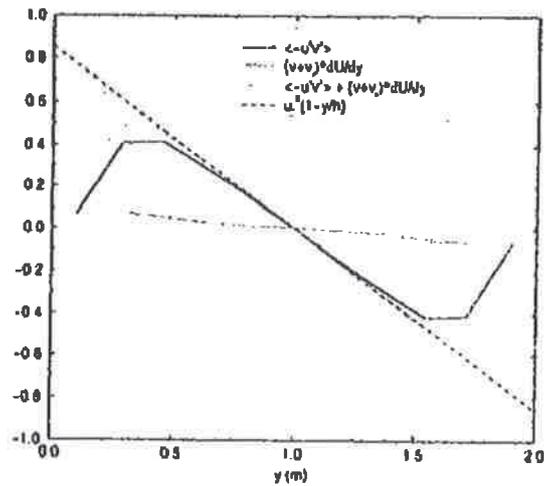


FIG. E.2 - Différents termes de l'équation E.4 pour la simulation 5 du chapitre 7 (loi de paroi de Werner et Wengle)

Nous montrons, sur les figures E.1 et E.2, les différents termes de l'équation E.4. Cette méthode a l'avantage d'être utilisable même quand la région de proche paroi n'est pas résolue (cf. figure E.2).

Annexe F

Détermination de u^* avec la loi de Werner et Wengle

Nous allons présenter les calculs conduisant à l'expression de la contrainte à la paroi, avec la loi de Werner et Wengle (équations 4.22 et 4.23).

F.1 Description de la loi de paroi

Werner et Wengle font l'hypothèse que le profil de vitesse dans la première maille est de la forme :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ \leq 11.81 \\ A (y^+)^B & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

$$\text{avec } A = 8.3 \text{ et } B = \frac{1}{7}$$

Pour obtenir la valeur de u^* , nous intégrons ce profil sur toute la hauteur de la première maille, en supposant que, si Δy est la hauteur de la maille, $\|u_p\|$, la norme de la vitesse à la demi-maille :

$$\|u_p\| \Delta y = \int_0^{\Delta y} u(y) dy \quad (\text{F.2})$$

Soit y_{lim} , la limite entre les deux zones du profil de vitesse. Nous obtenons alors pour chaque cas, i.e. pour $\Delta y < y_{lim}$ et $\Delta y > y_{lim}$, la valeur de u^* et donc la valeur de la norme de la contrainte tangentielle, puisque $\tau_p = \rho u^{*2}$.

Nous allons détailler les calculs menant aux expressions suivantes.

$$\|\tau_p\| = \rho \frac{2\nu \|u_p\|}{\Delta y} \text{ si } \|u_p\| \leq \frac{\nu}{2\Delta y} A^{\frac{2}{1-B}} \quad (\text{F.3})$$

$$\|\tau_p\| = \rho \left[\frac{1-B}{2} A^{\frac{1+B}{1-B}} \left(\frac{\nu}{\Delta y} \right)^{1+B} + \frac{1+B}{A} \left(\frac{\nu}{\Delta y} \right)^B \|u_p\| \right]^{\frac{2}{1+B}} \text{ si } \|u_p\| > \frac{\nu}{2\Delta y} A^{\frac{2}{1-B}} \quad (\text{F.4})$$

F.2 Détermination de y_{lim}

y_{lim} vérifie :

$$y_{lim}^+ = A (y_{lim}^+)^B \quad (F.5)$$

D'où :

$$y_{lim} = \frac{\nu}{u^*} A^{1-B} \quad (F.6)$$

F.3 Calcul pour $\Delta y < y_{lim}$

Dans cette zone, le profil de vitesse est linéaire.

Nous avons alors :

$$u = \frac{u^*}{\nu} y \quad (F.7)$$

Nous avons alors :

$$\|u_p\| \Delta y = \int_0^{\Delta y} \frac{u^*}{\nu} y dy \quad (F.8)$$

$$= \frac{u^*}{\nu} \frac{\Delta y^2}{2} \quad (F.9)$$

d'où l'expression de u^* , qui conduit à l'égalité F.3 :

$$u^* = \frac{2\nu \|u_p\|}{\Delta y} \quad (F.10)$$

F.4 Calcul pour $\Delta y > y_{lim}$

Dans ce cas, il faut tenir compte de la position pour intégrer le profil de la vitesse.

Nous avons :

$$\|u_p\| \Delta y = \int_0^{y_{lim}} \frac{u^*}{\nu} y dy + \int_{y_{lim}}^{\Delta y} A \frac{u^{*1+B}}{\nu^B} y^B dy \quad (F.11)$$

$$= \frac{u^*}{2\nu} y_{lim}^2 + \frac{A}{1+B} \frac{u^{*1+B}}{\nu^B} (\Delta y^{1+B} - y_{lim}^{1+B}) \quad (F.12)$$

$$(F.13)$$

Or, comme : $y_{lim} = \frac{\nu}{u^*} A^{1-B}$, nous avons :

$$\|u_p\| \Delta y = -\frac{1}{2} \nu \frac{1-B}{1+B} A^{\frac{2}{1-B}} + \frac{A}{1+B} \frac{1}{\nu^B} \Delta y^{1+B} u^{*1+B} \quad (F.14)$$

d'où :

$$u^{*1+B} = \frac{1+B}{A} \left(\frac{\nu}{\Delta y} \right)^B \|u_p\| + \frac{1}{2} (1-B) \left(\frac{\nu}{\Delta y} \right)^{1+B} A^{\frac{1+B}{1-B}} \quad (F.15)$$

Comme $\tau_p = \rho u^*{}^2$, nous arrivons à l'expression F.4.

Annexe G

Détermination des exposants de décroissance pour la THI

Nous présentons succinctement comment calculer les pentes de décroissance de l'énergie cinétique et de l'enstrophie, pour le cas de la Turbulence Homogène Isotrope (cf. [LES97c] pour plus de détails).

G.1 Pente de décroissance de l'énergie cinétique et de l'enstrophie

Soient l , l'échelle intégrale de la turbulence; v , une vitesse caractéristique; s , la pente du spectre d'énergie cinétique turbulente aux grandes échelles et ϵ la dissipation de l'énergie. Considérons un spectre d'énergie cinétique de décroissance auto-similaire, où F est une fonction sans dimension :

$$E(k, t) = v^2 l F(kl) \quad (\text{G.1})$$

$$l = \frac{v^3}{\epsilon} \quad (\text{G.2})$$

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \quad (\text{G.3})$$

Pour $k \rightarrow 0$, l'équation précédente implique :

$$v^2 l^{s+1} = \text{cste pour } s < 4 \quad (\text{G.4})$$

$$v^2 l^{s+1} \sim l^\gamma \text{ avec } s = 4 \text{ et } \gamma = \frac{1}{C_4} \frac{dC_4}{d \ln l} \quad (\text{G.5})$$

où $\frac{dC_4}{dt}$ est donné par la théorie EDQNM.

En supposant que l'énergie cinétique et l'échelle intégrale vérifient les lois en puissance suivantes :

$$v^2 \sim t^{-\alpha_E} \text{ et } l \sim t^{\alpha_l} \quad (\text{G.6})$$

Nous obtenons que :

$$\alpha_l = 1 - \frac{\alpha_E}{2} \quad (\text{G.7})$$

$$\alpha_E = 2 \frac{s+1-\gamma}{s+3} \quad (\text{G.8})$$

La théorie EDQNM donne : $\gamma = 0.16$, d'où : $\alpha_E \simeq -1.38$, pour $s = 4$.

Démonstration

- D'après l'équation G.3, nous avons: $\epsilon \sim t^{-(\alpha_E+1)}$
- et alors d'après G.2: $l \sim t^{1-\frac{\alpha_E}{2}}$
- d'où: l'expression G.7.
- $v^2 l^{s+1} \sim l^7$ implique alors l'expression G.8.

Décroissance de l'enstrophie Comme $\epsilon = 2\nu D(t)$, nous avons: $D \sim t^{-(1+\alpha_E)}$.

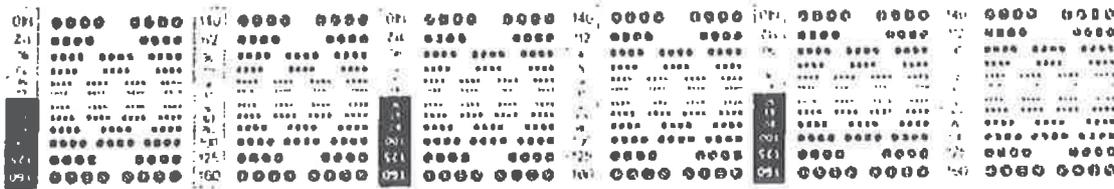
G.2 Pente de décroissance de l'enstrophie filtrée

En supposant un spectre de Kolmogorov sur toutes les échelles résolues, nous avons:

$$\bar{D} = \int_0^{k_c} C_k \epsilon^{2/3} k^{1/3} dk = \frac{3}{4} C_k \epsilon^{2/3} k_c^{4/3} \quad (\text{G.9})$$

Or, comme $\epsilon \sim t^{-(\alpha_E+1)}$, nous obtenons: $\bar{D} \sim t^{-\frac{2}{3}(\alpha_E+1)}$, avec $-\frac{2}{3}(\alpha_E+1) \simeq -1.6$, pour $s = 4$, d'où: $\boxed{\bar{D} \sim t^{-1.6}, \text{ pour } s = 4}$

FIN



MIRE ISO N° 1
NF Z 48-001

AFNOR
Cesex 7 - 92080 PARIS-14-DEFENSE